Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Г. Новиков, Итерационный подход к непереопрделенной обратной задаче рассеяния при фиксированной энергии, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 1, 131–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8277>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 16:05:02

УДК 517.958+530.145.81

Р. Г. Новиков

Итерационный подход к непереопределенной обратной задаче рассеяния при фиксированной энергии

Предлагается итерационный алгоритм приближенного восстановления для непереопределенной обратной задачи рассеяния при фиксированной энергии E с неполными данными в размерности $d \geq 2$. В частности, получены быстро сходящиеся приближенные восстановления для этой обратной задачи при $E \rightarrow +\infty$.

Библиография: 38 названий.

Ключевые слова: обратная задача рассеяния, непереопределенные монохроматические данные, итерационное приближенное восстановление, быстрая высокоэнергетическая сходимоссть.

DOI: 10.4213/sm8277

§ 1. Введение

Мы рассматриваем уравнение Шрёдингера

$$H\psi = E\psi, \quad H = -\Delta + v(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 2, \quad E > 0; \quad (1.1)$$

здесь

$$v \in L^\infty_\sigma(\mathbb{R}^d) \quad \text{для некоторого } \sigma > d, \quad (1.2)$$

где

$$L^\infty_\sigma(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^d) : \|u\|_\sigma < +\infty\},$$

$$\|u\|_\sigma = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)^{\sigma/2} |u(x)|, \quad \sigma \geq 0. \quad (1.3)$$

Для уравнения (1.1) мы рассматриваем классические собственные функции рассеяния ψ^+ , выделяемые следующей асимптотикой при $|x| \rightarrow \infty$:

$$\psi^+(x, k) = e^{ikx} + c(d, |k|) \frac{e^{i|k||x|}}{|x|^{(d-1)/2}} f\left(k, |k| \frac{x}{|x|}\right) + o\left(\frac{1}{|x|^{(d-1)/2}}\right),$$

$$x \in \mathbb{R}^d, \quad k \in \mathbb{R}^d, \quad k^2 = E, \quad c(d, |k|) = -\pi i (-2\pi i)^{(d-1)/2} |k|^{(d-3)/2}, \quad (1.4)$$

где априорно неизвестная функция $f = f(k, l)$, $k, l \in \mathbb{R}^d$, $k^2 = l^2 = E$, возникающая в (1.4), является классической амплитудой рассеяния для (1.1).

При заданном потенциале v для нахождения ψ^+ и f можно использовать, в частности, интегральное уравнение Липпманна–Швингера

$$\begin{aligned}\psi^+(x, k) &= e^{ikx} + \int_{\mathbb{R}^d} G^+(x - y, k) v(y) \psi^+(y, k) dy, \\ G^+(x, k) &= -(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\xi x} d\xi}{\xi^2 - k^2 - i0},\end{aligned}\tag{1.5}$$

и формулу

$$f(k, l) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ily} v(y) \psi^+(y, k) dy,\tag{1.6}$$

где $x, k, l \in \mathbb{R}^d$, $k^2 = l^2 = E > 0$ (см., например, [1], [2]).

Амплитуда рассеяния f при фиксированной энергии $E > 0$ определена на

$$\mathcal{M}_E = \{k \in \mathbb{R}^d, l \in \mathbb{R}^d : k^2 = l^2 = E\}, \quad E > 0.\tag{1.7}$$

Следуя [3], в дополнение к f на $\mathcal{M}_E$ мы рассматриваем также $f|_{\Gamma_E}$ и $f|_{\Gamma_E^\tau}$, где

$$\begin{aligned}\Gamma_E &= \{k = k_E(p), l = l_E(p) : p \in \mathcal{B}_{2\sqrt{E}}\}, \\ \Gamma_E^\tau &= \{k = k_E(p), l = l_E(p) : p \in \mathcal{B}_{2\tau\sqrt{E}}\},\end{aligned}\tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}k_E(p) &= \frac{p}{2} + \eta_E(p), \quad l_E(p) = -\frac{p}{2} + \eta_E(p), \\ \mathcal{B}_r &= \{p \in \mathbb{R}^d : |p| \leq r\}, \quad r > 0,\end{aligned}\tag{1.9}$$

$E > 0$, $0 < \tau \leq 1$, $d \geq 2$ и η_E является некоторой кусочно непрерывной вектор-функцией на $\mathcal{B}_{2\sqrt{E}}$ такой, что

$$\eta_E(p)p = 0, \quad \frac{p^2}{4} + (\eta_E(p))^2 = E, \quad p \in \mathcal{B}_{2\sqrt{E}}.\tag{1.10}$$

Можно видеть, что

$$\Gamma_E^\tau \subseteq \Gamma_E \subset \mathcal{M}_E, \quad E > 0, \quad 0 < \tau \leq 1, \quad d \geq 2.\tag{1.11}$$

В настоящей работе мы продолжаем исследования по следующим обратным задачам рассеяния для уравнения (1.1) при условиях (1.2).

Задача 1.1. По амплитуде рассеяния f , заданной на $\mathcal{M}_E$ при фиксированном $E > 0$, найти потенциал v на $\mathbb{R}^d$ (по крайней мере приближенно).

Задача 1.2. По амплитуде рассеяния f , заданной на Γ_E^τ при фиксированных E и τ , где $E > 0$, $0 < \tau \leq 1$, найти потенциал v на $\mathbb{R}^d$ (по крайней мере приближенно).

При этом можно видеть, что

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{M}_E &= 2d - 2, \quad \dim \Gamma_E^\tau = \dim \Gamma_E = \dim \mathbb{R}^d = d \quad \text{для } d \geq 2, \\ \dim \mathcal{M}_E &> d \quad \text{для } d \geq 3,\end{aligned}\tag{1.12}$$

где $E > 0$, $0 < \tau \leq 1$. Поэтому задача 1.1 является переопределенной при $d \geq 3$, тогда как задача 1.2 неперепределена.

Задача 1.1 имеет длинную историю, и имеется много важных результатов по этой задаче; см. [3]–[25] и приведенные там ссылки. Отметим, что для сферических потенциалов v задача 1.2 при $\tau = 1$ сводится к задаче 1.1. Однако, насколько нам известно, явные рассмотрения задачи 1.2 были начаты лишь недавно в [3]. Об имеющихся результатах по некоторым другим непереопределенным многомерным коэффициентным обратным задачам см. работы [26]–[34] и приведенные там ссылки.

Отметим также, что задачи 1.1, 1.2 можно рассматривать как примеры некорректно поставленных задач; см. работы [26], [35], дающие введение в эту теорию.

В настоящей работе мы рассматриваем задачи 1.1, 1.2, предполагая, что

$$v - \text{возмущение некоторого известного опорного } v_0, \text{ удовлетворяющего (1.2),} \quad (1.13)$$

где $v - v_0$ достаточно регулярно на $\mathbb{R}^d$ и $\text{supp}(v - v_0) \subset D$, а D – открытая ограниченная область (априори фиксированная).

В частности, для задачи 1.2 при предположениях (1.13) мы итерационно строим устойчивые приближения $u_j(x, E)$ к неизвестному $v(x)$, $x \in D$, где u_1 – некоторое линейное восстановление в борновском приближении и u_j , $j \geq 2$, – некоторые нелинейные приближенные восстановления по f на Γ_E^τ ; см. пп. 3.2, 3.3. Наша конструкция основана на результатах по прямой задаче рассеяния и стандартном Фурье-анализе. При этом наши нелинейные приближенные восстановления u_j являются эффективными в том смысле, что

$$\|u_j(\cdot, E) - v\|_{L^\infty(D)} = \varepsilon_j(E) \quad (1.14)$$

быстро убывают при $E \rightarrow +\infty$ для достаточно регулярного $v - v_0$ и достаточно больших j . В частности,

$$\varepsilon_j(E) = O(E^{-\alpha_j}), \quad \alpha_j = \left(1 - \left(\frac{n-d}{n}\right)^j\right) \frac{n-d}{2d} \quad (1.15)$$

при $E \rightarrow +\infty$, $j \geq 1$,

если $v - v_0 \in W^{n,1}(\mathbb{R}^d)$ (т.е. $v - v_0$ является n раз гладким в $L^1(\mathbb{R}^d)$), $n > d$ (см. теорему 3.1). Отметим, что u_j и ε_j зависят также от фиксированного τ из задачи 1.2.

При этом в п. 3.5 мы объясняем, что построение u_j для каждого $j \in \mathbb{N}$ может быть сведено к конечному числу явных формул.

Важно также отметить, что только f на $\Gamma_E^{\delta(E)}$ используется в нашем итерационном приближенном восстановлении для задачи 1.2 при высоких энергиях E , где

$$\delta(E) = \tau E^{-(d-1)/(2d)}, \quad \tau \in [0, 1]. \quad (1.16)$$

Как следствие $\delta(E) \rightarrow 0$ при $E \rightarrow +\infty$. Как следствие $\Gamma_E^{\delta(E)}$ является очень малой частью $\Gamma_E^{\tau_1}$ для любого фиксированного $\tau_1 \in [0, 1]$ при достаточно большом E . Поэтому f на $\Gamma_E^{\delta(E)}$ является очень малой частью данных, состоящих из f на $\Gamma_E^{\tau_1}$ (полные данные задачи 1.2 с $\tau = \tau_1$), для любого фиксированного $\tau_1 \in [0, 1]$ при достаточно большом E . Таким образом, наше итерационное

приближенное восстановление может рассматриваться как результат по восстановлению для задачи 1.2 с неполными данными.

Фактически итерационное приближенное восстановление настоящей работы дополняет родственные результаты по устойчивости из [3].

При этом итерационное приближенное восстановление настоящей работы было получено также под влиянием итерационного восстановления из [36] для совсем другой обратной задачи рассеяния.

Рассмотрим также

$$\mathcal{M}_E^\tau = \{(k, l) \in \mathcal{M}_E : k - l \in \mathcal{B}_{2\tau\sqrt{E}}\}, \quad E > 0, \quad \tau \in]0, 1]. \quad (1.17)$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \Gamma_E^\tau &\subset \mathcal{M}_E^\tau \quad \text{при } \tau \in]0, 1], \\ \mathcal{M}_E^\tau &\subset \mathcal{M}_E \quad \text{при } \tau \in]0, 1[, \quad \mathcal{M}_E^\tau = \mathcal{M}_E \quad \text{при } \tau = 1, \\ \dim \mathcal{M}_E^\tau &= \dim \mathcal{M}_E = 2d - 2 \quad \text{при } \tau \in]0, 1]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Насколько нам известно, никакого аналога нелинейных приближенных восстановлений u_j , $j \geq 2$, не было дано в литературе уже для задачи 1.1 с $\mathcal{M}_E$, замененным на $\mathcal{M}_E^\tau$ для некоторого фиксированного $\tau \in]0, 1[$, т.е. для задачи с гораздо более богатыми данными, чем у задачи 1.2 (и особенно, чем у задачи 1.2 с f , данной лишь на $\Gamma_E^{\delta(E)}$, где $\delta(E)$ определено в (1.16)).

С другой стороны, для случая задачи 1.1 с полными данными при предположениях (1.13), где $v - v_0 \in W^{n,1}(\mathbb{R}^d)$, $n > d$, $v_0 \equiv 0$, нелинейные приближенные восстановления u_j , $j \geq 2$, настоящей работы являются менее точными, чем приближенные восстановления из [19], [20] с ошибкой, оцененной как $O(E^{-s})$ в равномерной норме при $E \rightarrow +\infty$, где $s = (n-d)/2$ при $d = 2$, $s = (n-d-\delta)/2$ для любого фиксированного произвольно малого $\delta > 0$ при $d = 3$. Действительно,

$$\alpha_j < \frac{n-d}{2d} < s, \quad (1.19)$$

где α_j – числа из (1.15), s – число из [19], [20].

Однако для задачи приближенного, но устойчивого нахождения v на $\mathbb{R}^d$ только лишь по f на $\Gamma_E^{\delta(E)}$ (или даже на $\mathcal{M}_E^{\delta(E)}$), где $\delta(E)$ определено в (1.16), наши приближенные восстановления u_j для достаточно больших j являются весьма оптимальными в смысле их точности (1.14), (1.15) даже в рамках стандартов борновского приближения.

Действительно, в приближении Борна (линейном приближении около $v_0 \equiv 0$) задача нахождения v на $\mathbb{R}^d$ по f на $\mathcal{M}_E^\delta$, где $E > 0$, $\delta \in]0, 1[$, $d \geq 2$, сводится к нахождению v на $\mathbb{R}^d$ по его преобразованию Фурье $\hat{v}$ на $\mathcal{B}_{2\delta\sqrt{E}}$, где

$$\hat{v}(p) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ipx} v(x) dx, \quad p \in \mathbb{R}^d. \quad (1.20)$$

Эта линеаризованная обратная задача рассеяния может быть решена по следующим формулам:

$$\begin{aligned} v(x) &= v_{\text{appr}}^{\text{lin}}(x, E, \delta) + v_{\text{err}}^{\text{lin}}(x, E, \delta), \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ v_{\text{appr}}^{\text{lin}}(x, E, \delta) &= \int_{\mathcal{B}_{2\delta\sqrt{E}}} e^{-ipx} \widehat{v}(p) dp, \quad v_{\text{err}}^{\text{lin}}(x, E, \delta) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{B}_{2\delta\sqrt{E}}} e^{-ipx} \widehat{v}(p) dp. \end{aligned} \quad (1.21)$$

При этом имеем

$$\varepsilon(E, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \|v_{\text{err}}^{\text{lin}}(x, E, \delta)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = O((\delta\sqrt{E})^{-(n-d)}), \quad \text{если } \delta\sqrt{E} \rightarrow +\infty, \quad (1.22)$$

при предположении, что $v \in W^{n,1}(\mathbb{R}^d)$, $n > d$. При этом

$$\varepsilon(E, \delta(E)) = O((\delta(E)\sqrt{E})^{-(n-d)}) = O(E^{-\alpha}), \quad \alpha = \frac{n-d}{2d}, \quad E \rightarrow +\infty, \quad (1.23)$$

для $\delta(E)$, данного в (1.16).

Наконец, можно видеть, что $\alpha_j \rightarrow \alpha$ при $j \rightarrow +\infty$, где α_j — числа из (1.15) и α — число из оценок (1.22), (1.23) борновского приближения.

§ 2. Предварительные результаты из прямого рассеяния

В этом параграфе мы резюмируем некоторые результаты, связанные с интегральным уравнением Липпманна–Швингера (1.5) для собственных функций рассеяния ψ^+ и с формулой (1.6) для амплитуды рассеяния f .

Интегральное уравнение Липпманна–Швингера (1.5) удобно представить как

$$(I - A(k))\varphi(\cdot, k) = e(\cdot, k), \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(x, k) &= \Lambda^{-\sigma/2} \psi^+(x, k), \quad e(x, k) = \Lambda^{-\sigma/2} e^{ikx}, \\ A(k) &= \Lambda^{-\sigma/2} G^+(k) \Lambda^{-\sigma/2} (\Lambda^\sigma v), \quad k \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}^d; \end{aligned} \quad (2.2)$$

здесь I — единичный оператор, Λ обозначает оператор умножения на функцию $(1 + |x|^2)^{1/2}$, G^+ — интегральный оператор с ядром Шварца $G^+(x-y, k)$ из (1.5), v — оператор умножения на функцию $v(x)$, σ — число из (1.2). При этом мы напоминаем, что справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|\Lambda^{-s} G^+(k) \Lambda^{-s}\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq a_0(d, s) |k|^{-1}, \\ k &\in \mathbb{R}^d, \quad |k| \geq 1, \quad \text{при } s > \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

(см. [8], [37], [38] и приведенные там ссылки).

Используя (2.3), можно видеть, что

$$\|A(k)\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)} \leq a_0\left(d, \frac{\sigma}{2}\right) \|v\|_\sigma |k|^{-1}, \quad k \in \mathbb{R}^d, \quad |k| \geq 1, \quad (2.4)$$

где $\|\cdot\|_\sigma$ определена в (1.3).

Как следствие из (2.1), (2.2), (2.4) имеем

$$\left\| \varphi(\cdot, k) - \sum_{j=0}^m (A(k))^j e(\cdot, k) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq 2 \left(\frac{a_0(d, \sigma/2) \|v\|_\sigma}{|k|} \right)^{m+1} c_1(d, \sigma) \quad (2.5)$$

при $k \in \mathbb{R}^d$, $|k| \geq \rho_1(d, \sigma, \|v\|_\sigma)$, $m \in \mathbb{N} \cup 0$,

где

$$c_1(d, \sigma) = \|e(\cdot, k)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{\sigma/2}} \right)^{1/2}, \quad (2.6)$$

$$\rho_1(d, \sigma, N) = \max \left(2a_0 \left(d, \frac{\sigma}{2} \right) N, 1 \right).$$

Фактически формула (2.5) является хорошо известным методом решения интегрального уравнения Липшманна–Швингера (1.5) для достаточно высоких энергий.

Пусть теперь φ_i , A_i обозначают φ , A для $v = v_i$, удовлетворяющего (1.2), где $i = 1, 2$. Используя тождество

$$(I - A_2(k))^{-1} - (I - A_1(k))^{-1} = (I - A_2(k))^{-1} (A_2(k) - A_1(k)) (I - A_1(k))^{-1}, \quad (2.7)$$

получаем

$$\varphi_2(\cdot, k) - \varphi_1(\cdot, k) = (I - A_2(k))^{-1} (A_2(k) - A_1(k)) (I - A_1(k))^{-1} e(\cdot, k). \quad (2.8)$$

Используя (2.2), (2.3), (2.4), (2.8), мы получаем

$$\|\varphi_2(\cdot, k) - \varphi_1(\cdot, k)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq 4a_0 \left(d, \frac{\sigma}{2} \right) \|v_2 - v_1\|_\sigma c_1(d, \sigma) |k|^{-1} \quad (2.9)$$

при $k \in \mathbb{R}^d$, $|k| \geq \rho_1(d, \sigma, N)$,

где c_1 , ρ_1 определены в (2.6), $\|v_i\|_\sigma \leq N$ для $i = 1, 2$.

В силу (1.6) имеем

$$\widehat{v}(k - l) = f(k, l) - (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ilx} v(x) (\psi^+(x, k) - e^{ikx}) dx, \quad (k, l) \in \mathcal{M}_E, \quad (2.10)$$

где $\widehat{v}$ определено в (1.20).

В частности, как следствие из (2.10) и (2.5) при $m = 0$ имеем

$$|f(k, l) - \widehat{v}(k - l)| \leq 2(2\pi)^{-d} a_0 \left(d, \frac{\sigma}{2} \right) (c_1(d, \sigma) \|v\|_\sigma)^2 E^{-1/2}, \quad (2.11)$$

$(k, l) \in \mathcal{M}_E$, $E^{1/2} \geq \rho_1(d, \sigma, \|v\|_\sigma)$,

где c_1 , ρ_1 определены в (2.6).

Наш итерационный алгоритм восстановления для задачи 1.2 основан на формулах (2.5), (2.9), (2.10), (2.11) и представлен в § 3.

§ 3. Итерационное приближенное восстановление для задачи 1.2

3.1. Предположения и обозначения. Рассматриваем пространство с нормой

$$\begin{aligned} W^{n,1}(\mathbb{R}^d) &= \{u : \partial^J u \in L^1(\mathbb{R}^d), |J| \leq n\}, \\ \|u\|_{n,1} &= \max_{|J| \leq n} \|\partial^J u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$J \in (\mathbb{N} \cup 0)^d, \quad |J| = \sum_{i=1}^d J_i, \quad \partial^J u(x) = \frac{\partial^{|J|} u(x)}{\partial x_1^{J_1} \dots \partial x_d^{J_d}}.$$

Предполагаем, что v удовлетворяет (1.13), где предположение, что $v - v_0$ достаточно регулярно, уточняется как

$$v - v_0 \in W^{n,1}(\mathbb{R}^d) \quad \text{для некоторого } n > d. \quad (3.2)$$

Мы полагаем

$$w = v - v_0 \quad (3.3)$$

и рассматриваем разложения

$$\begin{aligned} v(x) &= v^+(x, \kappa) + v^-(x, \kappa), \\ v_0(x) &= v_0^+(x, \kappa) + v_0^-(x, \kappa), \\ w(x) &= w^+(x, \kappa) + w^-(x, \kappa), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $x \in D$, $\kappa > 0$,

$$\begin{aligned} u^+(x, \kappa) &= \int_{p \in \mathbb{R}^d, |p| \leq \kappa} e^{-ipx} \widehat{u}(p) dp, \quad u^-(x, \kappa) = \int_{p \in \mathbb{R}^d, |p| > \kappa} e^{-ipx} \widehat{u}(p) dp, \\ \widehat{u}(p) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ipx} u(x) dx \end{aligned} \quad (3.5)$$

для $u = v, v_0, w$.

В силу (3.3)–(3.5) имеем

$$v(x) = v^+(x, \kappa) + v_0^-(x, \kappa) + w^-(x, \kappa), \quad (3.6)$$

$$v^+(x, \kappa) = v_0^+(x, \kappa) + w^+(x, \kappa), \quad (3.7)$$

где $x \in D$, $\kappa > 0$.

3.2. Восстановление в борновском приближении. Определяем

$$v_1(x, E, \tau_1) \stackrel{\text{def}}{=} v_1^+(x, E, \tau_1) + v_0^-(x, 2\tau_1 \sqrt{E}), \quad (3.8a)$$

$$v_1^+(x, E, \tau_1) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{p \in \mathbb{R}^d, |p| \leq 2\tau_1 \sqrt{E}} e^{-ipx} f(k_E(p), l_E(p)) dp, \quad (3.8b)$$

$$x \in D, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau, \quad E > 0,$$

где v_0^- – функция из (3.4), (3.5), f – амплитуда рассеяния для v и k_E, l_E определены в (1.8). Фактически v_1 из (3.8a) является некоторым восстановлением в борновском приближении для задачи 1.2, где учтена также информация об опорном потенциале v_0 .

ЛЕММА 3.1. Пусть v удовлетворяет (1.13), (3.2) и $\|v\|_\sigma \leq M_1$, $\|v - v_0\|_{n,1} \leq M_2$. Тогда

$$|v_1(x, E, \tau_1) - v(x)| \leq c_2(d, \sigma) M_1^2 \frac{(2\tau_1 \sqrt{E})^d}{\sqrt{E}} + \frac{c_3(d, n) M_2}{(2\tau_1 \sqrt{E})^{n-d}} \quad (3.9)$$

при $x \in D$, $0 < \tau_1 \leq \tau$, $\sqrt{E} \geq \rho_1(d, \sigma, M_1)$,

$$|v_1(x, E, \tau_1(E)) - v(x)| \leq \left(c_2(d, \sigma) M_1^2 (2\tau)^d + \frac{c_3(d, n) M_2}{(2\tau)^{n-d}} \right) E^{-(n-d)/(2n)} \quad (3.10)$$

при $x \in D$, $\tau_1(E) = \tau E^{-(n-1)/(2n)}$, $\sqrt{E} \geq \rho_1(d, \sigma, M_1)$,

где $0 < \tau \leq 1$, v_1 определено согласно (3.8), ρ_1 определено в (2.6) и $c_2 = c_2(d, \sigma)$, $c_3 = c_3(d, n)$ – некоторые положительные константы.

Лемма 3.1 доказана в § 4.

При предположениях леммы 3.1 потенциал u_1 , определенный по формуле

$$\begin{aligned} u_1(x, E) &= v_1(x, E, \tau_1(E)), & x \in D, \\ u_1(x, E) &= v_0(x), & x \in \mathbb{R}^d \setminus D, \end{aligned} \quad (3.11)$$

может рассматриваться как некоторое оптимальное восстановление на основе формул (3.8) для задачи 1.2 по отношению к скорости убывания ошибки в $L^\infty(D)$ при $E \rightarrow +\infty$.

3.3. Итерационный шаг. Итерационный шаг нашего восстановления основан, в частности, на следующей лемме.

ЛЕММА 3.2. Пусть v удовлетворяет (1.13), f – амплитуда рассеяния для v и $v_{\text{appr}}(\cdot, E)$ – некоторое приближение к v такое, что

$$|v_{\text{appr}}(x, E) - v(x)| \leq \beta E^{-\alpha}, \quad x \in D, \quad \sqrt{E} \geq \rho_1(d, \sigma, N), \quad (3.12a)$$

$$v_{\text{appr}}(x, E) \equiv v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus D, \quad (3.12b)$$

для некоторых $\alpha, \beta > 0$ и некоторого N такого, что

$$\|v\|_\sigma \leq N, \quad \|v_{\text{appr}}(\cdot, E)\|_\sigma \leq N, \quad \sqrt{E} \geq \rho_1(d, \sigma, N), \quad (3.13)$$

где ρ_1 определено в (2.6). Тогда справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} &|f(k, l) - f_{\text{appr}}(k, l) + \widehat{v}_{\text{appr}}(k - l, E) - \widehat{v}(k - l)| \\ &\leq (2\pi)^{-d} a_0 \left(d, \frac{\sigma}{2} \right) c_1(d, \sigma) c_4(D, \sigma) N \beta E^{-\alpha-1/2}, \\ &(k, l) \in \mathcal{M}_E, \quad E^{1/2} \geq \rho_1(d, \sigma, N), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где f_{appr} – амплитуда рассеяния для v_{appr} , $\widehat{v}_{\text{appr}}(\cdot, E)$ – преобразование Фурье от $v_{\text{appr}}(\cdot, E)$, $\widehat{v}$ – преобразование Фурье от v (см. определение (1.20)), $c_4(D, \sigma)$ дано формулой (4.12).

Лемма 3.2 доказана в § 4.

В итерационном шаге нашего восстановления мы предполагаем, что v удовлетворяет (1.13), (3.2) и $\|v\|_\sigma \leq M_1$, $\|v - v_0\|_{n,1} \leq M_2$, как в лемме 3.1.

Отметим, что $v_{\text{appr}} = u_1$ из (3.11) удовлетворяет (3.12), (3.13) при $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $N = N_1$, где

$$\alpha_1 = \frac{n-d}{2n}, \quad \beta_1 = c_2(d, \sigma) M_1^2 (2\tau)^d + \frac{c_3(d, n) M_2}{(2\tau)^{n-d}}, \quad (3.15)$$

$$N_1 = M_1 + c_5(D, \sigma) \beta_1 (\rho_1(d, \sigma, M_1))^{-\alpha_1}, \quad c_5(D, \sigma) = \sup_{x \in D} (1 + |x|^2)^{\sigma/2}.$$

Тогда, отталкиваясь от приближения $v_{\text{appr}} = u_j(\cdot, E)$ с номером j , удовлетворяющего (3.12), (3.13) при $\alpha = \alpha_j$, $\beta = \beta_j$, $N = N_j$, приближение $v_{\text{appr}} = u_{j+1}(\cdot, E)$ с номером $j+1$ строим следующим образом:

- 1) находим амплитуду рассеяния f_j и преобразование Фурье $\hat{u}_j(\cdot, E)$ для $u_j(\cdot, E)$, где $E^{1/2} \geq \rho_1(d, \sigma, N_j)$;
- 2) похожим образом с (3.8) определяем

$$v_{j+1}(x, E, \tau_{j+1}) \stackrel{\text{def}}{=} v_{j+1}^+(x, E, \tau_{j+1}) + v_0^-(x, 2\tau_{j+1}\sqrt{E}), \quad (3.16a)$$

$$v_{j+1}^+(x, E, \tau_{j+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{p \in \mathbb{R}^d, |p| \leq 2\tau_{j+1}\sqrt{E}} e^{-ipx} (f(k_E(p), l_E(p)) - f_j(k_E(p), l_E(p)) + \hat{u}_j(k_E(p) - l_E(p), E)) dp, \quad (3.16b)$$

$$x \in D, \quad 0 < \tau_{j+1} \leq \tau, \quad E^{1/2} \geq \rho_1(d, \sigma, N_j),$$

где v_0^- , f , k_E , l_E те же самые, что в (3.8);

- 3) наконец, похожим образом с (3.11) определяем

$$u_{j+1}(x, E) = v_{j+1}(x, E, \tau_{j+1}(E)), \quad x \in D,$$

$$u_{j+1}(x, E) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus D, \quad (3.17)$$

$$\tau_{j+1}(E) = \tau E^{-(n-1-2\alpha_j)/(2n)},$$

где $E^{1/2} \geq \rho_1(d, \sigma, N_j)$.

При этом мы имеем следующую лемму.

ЛЕММА 3.3. *При предположениях нашего итерационного шага справедливы следующие оценки:*

$$|v_{j+1}(x, E, \tau_{j+1}) - v(x)| \leq c_6(D, \sigma) N_j \beta_j \frac{(2\tau_{j+1} E^{1/2})^d}{E^{\alpha_j + (1/2)}} + \frac{c_3(d, n) M_2}{(2\tau_{j+1} E^{1/2})^{n-d}} \quad (3.18)$$

$$\text{при } x \in D, \quad 0 < \tau_{j+1} \leq \tau \leq 1, \quad E^{1/2} \geq \rho_1(d, \sigma, N_j), \quad j \in \mathbb{N},$$

$$|u_{j+1}(x, E) - v(x)| \leq \left(c_6(D, \sigma) N_j \beta_j (2\tau)^d + \frac{c_3(d, n) M_2}{(2\tau)^{n-d}} \right) E^{-(1+2\alpha_j)(n-d)/(2n)}$$

$$\text{при } x \in D, \quad E^{1/2} \geq \rho_1(d, \sigma, N_j), \quad j \in \mathbb{N},$$

$$(3.19)$$

где v_{j+1} , u_{j+1} определены согласно (3.16), (3.17), ρ_1 определено в (2.6).

Лемма 3.3 доказана в § 5.

При этом как следствие $u_{j+1}(\cdot, E)$ из (3.17) удовлетворяет (3.12), (3.13) при $\alpha = \alpha_{j+1}$, $\beta = \beta_{j+1}$, $N = N_{j+1}$, где

$$\alpha_{j+1} = \frac{(1 + 2\alpha_j)(n - d)}{2n}, \quad \beta_{j+1} = c_6(D, \sigma)N_j\beta_j(2\tau)^d + \frac{c_3(d, n)M_2}{(2\tau)^{n-d}}, \quad (3.20)$$

$$N_{j+1} = M_1 + c_5(D, \sigma) \max_{1 \leq i \leq j+1} \beta_i(\rho_1(d, \sigma, N_{i-1}))^{-\alpha_i}, \quad N_0 = M_1, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Отметим также, что

$$N_{j_1} \leq N_{j_2}, \quad \rho_1(d, \sigma, N_{j_1}) \leq \rho_1(d, \sigma, N_{j_2}) \quad \text{при } 1 \leq j_1 \leq j_2. \quad (3.21)$$

3.4. Окончательная теорема. Отталкиваясь от лемм 3.1–3.3 и формул (3.15), (3.20), (3.21), мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть v удовлетворяет (1.13), (3.2) и, кроме того, $\|v\|_\sigma \leq M_1$, $\|v - v_0\|_{n,1} \leq M_2$. Пусть $u_j(\cdot, E)$ построено по $f|_{\Gamma_E^{\delta(E)}}$ итерациями из пп. 3.2, 3.3, где f – амплитуда рассеяния для v , $\delta(E) = \tau E^{-(d-1)/(2d)}$, $0 < \tau \leq 1$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы следующие оценки:

$$\|u_j(\cdot, E) - v\|_{L^\infty(D)} \leq \beta_j E^{-\alpha_j} \quad \text{при } E^{1/2} \geq \rho_1(d, \sigma, N_{j-1}), \quad (3.22)$$

где

$$\alpha_j = \left(1 - \left(\frac{n-d}{n}\right)^j\right) \frac{n-d}{2d}, \quad (3.23)$$

$\beta_j = \beta_j(M_1, M_2, D, \sigma, n, \tau)$, $N_j = N_j(M_1, M_2, D, \sigma, n, \tau)$ построены рекуррентно с помощью (3.15), (3.20) (с $N_0 = M_1$).

Теорема 3.1 доказана в § 5.

3.5. Явные формулы. Можно видеть, что:

- 1) приближение $u_1(\cdot, E)$ построено явными формулами по $f|_{\Gamma_E^{\delta(E)}}$ и v_0 при $\sqrt{E} \geq \rho_1(d, \sigma, M_1)$ (см. п. 3.2 и формулу (5.9));
- 2) $u_{j+1}(\cdot, E)$ построено явными формулами по $u_j(\cdot, E)$, $f|_{\Gamma_E^{\delta(E)}}$, $f_j|_{\Gamma_E^{\delta(E)}}$ и v_0 при $\sqrt{E} \geq \rho_1(d, \sigma, N_j)$ для каждого $j \in \mathbb{N}$ (см. п. 3.3 и формулу (5.9)). Однако f_j строится по u_j с помощью (1.5), (1.6) с $\psi^+ = \psi_j^+$, $v = u_j$, где (1.5) еще не является явной формулой для ψ_j^+ .

Таким образом, построение $u_j(\cdot, E)$, $j \geq 2$, из пп. 3.3, 3.4 еще не сводится к явным формулам. Для того чтобы иметь похожую конструкцию, использующую одни только явные формулы, мы можем поступить следующим образом. Вместо u_j , $j \geq 2$, мы можем строить $\tilde{u}_j(\cdot, E)$, $j \geq 2$, $\sqrt{E} \geq \rho_1(d, \sigma, M_1)$, с помощью (3.16), (3.17) с f_j , $\hat{u}_j$, u_{j+1} , замененными на $\tilde{f}_j^{\text{appr}}$, $\hat{\tilde{u}}_j$, $\tilde{u}_{j+1}$, где $\hat{\tilde{u}}_j$ – преобразование Фурье от $\tilde{u}_j$, как и раньше, тогда как $\tilde{f}_j^{\text{appr}}$ – приближение к амплитуде рассеяния $\tilde{f}_j$ для $\tilde{u}_j$, определенное следующим образом. Отталкиваясь от (1.6), (1.5), (2.2), (2.5), мы определяем

$$\tilde{f}_j^{\text{appr}}(k, l) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ily} \Lambda^{\sigma/2} \tilde{u}_j(y, E) \tilde{\varphi}_j^{\text{appr}}(y, k) dy, \quad (3.24)$$

$$\tilde{\varphi}_j^{\text{appr}}(\cdot, k) = \sum_{\nu=0}^{m_j} (\tilde{A}_j(k))^\nu e(\cdot, k), \quad (3.25)$$

где $(k, l) \in \mathcal{M}_E$, m_j – минимальное натуральное число такое, что $m_j \geq 2\alpha_j$, $\tilde{A}_j(k)$ определен, как $A(k)$ из (2.2), с v , замененным на $\tilde{u}_j$, $e(\cdot, k)$ определена в (2.2). Здесь α_j – число из (3.23), $j \in \mathbb{N}$.

Используя оценку (2.5) с v , замененным на $\tilde{u}_j$, и используя доказательство леммы 3.3, можно показать, что

$$\|\tilde{u}_j(\cdot, E) - v\|_{L^\infty(D)} = O(E^{-\alpha_j}) \quad \text{при } E \rightarrow +\infty, \quad (3.26)$$

как и для исходного u_j . Однако теперь по причине того, что сумма в (3.25) конечна, $\tilde{u}_j$ строится с помощью конечного числа явных формул для каждого $j \geq 2$.

§ 4. Доказательства лемм 3.1 и 3.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. В силу (3.6) имеем

$$v(x) = v^+(x, 2\tau_1\sqrt{E}) + v_0^-(x, 2\tau_1\sqrt{E}) + w^-(x, 2\tau_1\sqrt{E}), \quad x \in D. \quad (4.1)$$

В силу (3.8), (4.1), (3.5) имеем

$$\begin{aligned} v_1(x, E, \tau_1) - v(x) &= \delta_1^+ v(x, E, \tau_1) + \delta_1^- v(x, E, \tau_1), \\ \delta_1^+ v(x, E, \tau_1) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{p \in \mathbb{R}^d, |p| \leq 2\tau_1\sqrt{E}} e^{-ipx} (f(k_E(p), l_E(p)) - \hat{v}(p)) dp, \\ \delta_1^- v(x, E, \tau_1) &\stackrel{\text{def}}{=} -w^-(x, 2\tau_1\sqrt{E}), \quad x \in D. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Используя (2.11) и определения $k_E(p)$, $l_E(p)$ из (1.8), получаем

$$\begin{aligned} |\delta_1^+(x, E, \tau_1)| &\leq 2(2\pi)^{-d} a_0 \left(d, \frac{\sigma}{2} \right) (c_1(d, \sigma) \|v\|_\sigma) E^{-1/2} (2\tau_1\sqrt{E})^d |\mathcal{B}_1|, \\ x \in D, \quad \sqrt{E} &\geq \rho_1(d, \sigma, \|v\|_\sigma), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $|\mathcal{B}_1|$ обозначает стандартный евклидов объем шара $\mathcal{B}_1$, т.е.

$$|\mathcal{B}_1| = \int_{p \in \mathbb{R}^d, |p| \leq 1} dp. \quad (4.4)$$

Для того чтобы оценить $\delta_1^- v(x, E, \tau_1)$, используем, что если $w \in W^{n,1}(\mathbb{R}^d)$, то

$$|\hat{w}(p)| \leq a_1(n, d) \|w\|_{n,1} (1 + |p|)^{-n}, \quad p \in \mathbb{R}^d. \quad (4.5)$$

Используя определение w^- из (3.3)–(3.5) и оценку (4.5), получаем

$$\begin{aligned} |\delta_1^-(x, E, \tau_1)| &\leq \int_{p \in \mathbb{R}^d, |p| \geq 2\tau_1\sqrt{E}} \frac{a_1(n, d) \|v - v_0\|_{n,1}}{(1 + |p|)^n} dp \\ &\leq |\mathbb{S}^{d-1}| \frac{a_1(n, d) \|v - v_0\|_{n,1}}{n - d} \frac{1}{(2\tau_1\sqrt{E})^{n-d}}, \quad x \in D, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $|\mathbb{S}^{d-1}|$ обозначает стандартный евклидов объем сферы $\mathbb{S}^{d-1}$, т.е.

$$|\mathbb{S}^{d-1}| = \int_{\theta \in \mathbb{S}^{d-1}} d\theta. \quad (4.7)$$

Оценка (3.9) следует из (4.2), (4.3), (4.6). Оценка (3.10) следует из (3.9).

Лемма 3.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Используя формулу (1.6) для амплитуды рассеяния, получаем

$$\begin{aligned} f(k, l) &= \widehat{v}(k - l) + \delta f(k, l), \\ \delta f(k, l) &\stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ilx} v(x) (\psi^+(x, k) - e^{ikx}) dx, \\ f_{\text{appr}}(k, l) &= \widehat{v}_{\text{appr}}(k - l, E) + \delta f_{\text{appr}}(k, l), \\ \delta f_{\text{appr}}(k, l) &\stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ilx} v_{\text{appr}}(x, E) (\psi_{\text{appr}}^+(x, k) - e^{ikx}) dx, \\ (k, l) &\in \mathcal{M}_E, \quad \sqrt{E} \geq \rho_1(d, \sigma, N), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где ψ_{appr}^+ обозначает решения рассеяния для v_{appr} .

При этом имеем

$$\begin{aligned} \delta f(k, l) - \delta f_{\text{appr}}(k, l) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ilx} (v(x) - v_{\text{appr}}(x, E)) (\psi^+(x, k) - e^{ikx}) dx \\ &\quad + (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ilx} v_{\text{appr}}(x, E) (\psi^+(x, k) - \psi_{\text{appr}}^+(x, k)) dx, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} |\delta f(k, l) - \delta f_{\text{appr}}(k, l)| &\leq (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda^{\sigma/2} |v(x) - v_{\text{appr}}(x, E)| \Lambda^{-\sigma/2} |\psi^+(x, k) - e^{ikx}| dx \\ &\quad + (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda^{\sigma/2} |v_{\text{appr}}(x, E)| \Lambda^{-\sigma/2} |\psi^+(x, k) - \psi_{\text{appr}}^+(x, k)| dx, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где Λ обозначает функцию $(1 + |x|^2)^{1/2}$. Используя (4.10), (2.5) для $m = 0$, (2.6), (2.9) для $v_1 = v$, $v_2 = v_{\text{appr}}$, (3.12), (3.13), получаем

$$\begin{aligned} |\delta f(k, l) - \delta f_{\text{appr}}(k, l)| &\leq 2(2\pi)^{-d} a_0 \left(d, \frac{\sigma}{2} \right) c_1(d, \sigma) \|\Lambda^{\sigma/2}\|_{L^2(D)} N \beta E^{-\alpha-1/2} \\ &\quad + 4(2\pi)^{-d} a_0 \left(d, \frac{\sigma}{2} \right) c_1(d, \sigma) \|\Lambda^{-\sigma/2}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\Lambda^\sigma\|_{L^\infty(D)} N \beta E^{-\alpha-1/2} \\ &= (2\pi)^{-d} a_0 \left(d, \frac{\sigma}{2} \right) c_1(d, \sigma) c_4(D, \sigma) N \beta E^{-\alpha-1/2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

при $(k, l) \in \mathcal{M}_E$, $\sqrt{E} \geq \rho_1(d, \sigma, N)$, где

$$c_4(D, \sigma) = 2\|\Lambda^{\sigma/2}\|_{L^2(D)} + 4\|\Lambda^{-\sigma/2}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\Lambda^\sigma\|_{L^\infty(D)}. \quad (4.12)$$

Отметим также, что

$$\|\Lambda^{-\sigma/2}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = c_1(d, \sigma), \quad \|\Lambda^{\sigma/2}\|_{L^2(D)} \leq \|\Lambda^\sigma\|_{L^\infty(D)} \|\Lambda^{-\sigma/2}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Оценка (3.14) следует из (4.8), (4.11).

Лемма 3.2 доказана.

§ 5. Доказательства леммы 3.3 и теоремы 3.1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.3. Полностью аналогично (4.1) имеем

$$v(x) = v^+(x, 2\tau_{j+1}\sqrt{E}) + v_0^-(x, 2\tau_{j+1}\sqrt{E}) + w^-(x, 2\tau_{j+1}\sqrt{E}), \quad x \in D, \quad (5.1)$$

где v^+ , v_0^- , w^- — функции из (3.4), (3.6). В силу (3.16), (5.1), (3.5) аналогично (4.2) имеем

$$\begin{aligned} v_{j+1}(x, E, \tau_{j+1}) - v(x) &= \delta_{j+1}^+ v(x, E, \tau_{j+1}) + \delta_{j+1}^- v(x, E, \tau_{j+1}), \\ \delta_{j+1}^+ v(x, E, \tau_{j+1}) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{p \in \mathbb{R}^d, |p| \leq 2\tau_{j+1}\sqrt{E}} e^{-ipx} (f(k_E(p), l_E(p)) \\ &\quad - f_j(k_E(p), l_E(p)) + \hat{u}_j(k_E(p) - l_E(p), E) - \hat{v}(p)) dp, \\ \delta_{j+1}^- v(x, E, \tau_{j+1}) &\stackrel{\text{def}}{=} -w^-(x, 2\tau_{j+1}\sqrt{E}), \quad x \in D. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Используя (3.14) для $f_{\text{appr}} = f_j$, $\hat{v}_{\text{appr}} = \hat{u}_j$, $\alpha = \alpha_j$, $\beta = \beta_j$, $N = N_j$ и используя определения $k_E(p)$, $l_E(p)$ из (1.8), аналогично (4.3) имеем

$$\begin{aligned} |\delta_{j+1}^+ v(x, E, \tau_{j+1})| &\leq c_6(D, \sigma) N_j \beta_j E^{-\alpha_j - 1/2} (2\tau_{j+1}\sqrt{E})^d, \\ x \in D, \quad \sqrt{E} &\geq \rho_1(d, \sigma, N_j), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где

$$c_6(D, \sigma) = (2\pi)^{-d} a_0 \left(d, \frac{\sigma}{2} \right) c_1(d, \sigma) c_4(D, \sigma) |\mathcal{B}_1|. \quad (5.4)$$

При этом полностью аналогично (4.6) имеем

$$|\delta_{j+1}^- v(x, E, \tau_{j+1})| \leq |\mathbb{S}^{d-1}| \frac{a_1(n, d) \|v - v_0\|_{n,1}}{n - d} \frac{1}{(2\tau_{j+1}\sqrt{E})^{n-d}}, \quad x \in D. \quad (5.5)$$

Оценка (3.18) следует из (5.3), (5.5). Оценка (3.19) следует из (3.18), (3.17) и тождеств

$$\begin{aligned} E^{-(n-1-2\alpha_j)/(2n)} E^{1/2} &= E^{(1+2\alpha_j)/(2n)}, \\ E^{d(1+2\alpha_j)/(2n)} E^{-\alpha_j - 1/2} &= E^{-(1+2\alpha_j)(n-d)/(2n)}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Это завершает доказательство леммы 3.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. В силу (3.15), (3.20) имеем

$$\alpha_1 = \frac{n-d}{2n}, \quad \alpha_{j+1} = \frac{n-d}{2n} + \alpha_j \frac{n-d}{n}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (5.7)$$

Из формул (5.7) следует (3.23). Действительно, последовательность α_j , $j \in \mathbb{N}$, однозначно определяется посредством (5.7) и α_j из (3.23) удовлетворяют (5.7). В частности,

$$\begin{aligned} \frac{n-d}{2n} + \left(1 - \left(\frac{n-d}{n} \right)^j \right) \frac{n-d}{2d} \frac{n-d}{n} &= \frac{n-d}{2n} + \frac{n-d}{2d} \frac{n-d}{n} \\ &\quad - \left(\frac{n-d}{n} \right)^{j+1} \frac{n-d}{2d} = \left(1 - \left(\frac{n-d}{n} \right)^{j+1} \right) \frac{n-d}{2d}, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Далее, в силу (5.7), (3.23) и в силу определения $\tau_j(E)$, $j \in \mathbb{N}$, из (3.10), (3.17) получаем

$$\begin{aligned}\tau_{j_1}(E) &= \tau E^{-(n-1-2\alpha_{j_1})/(2n)} \leq \tau_{j_2}(E) = \tau E^{-(n-1-2\alpha_{j_2})/(2n)} \\ &\leq \delta(E) = \tau E^{-(d-1)/(2d)}\end{aligned}\quad (5.9)$$

при $0 < \tau \leq 1$, $1 \leq j_1 \leq j_2$, $E \geq 1$.

Используя определение u_j , $j \in \mathbb{N}$, из (3.11), (3.17) и используя неравенства из (3.21) и (5.9), мы получаем, что $u_j(\cdot, E)$ корректно определены в терминах $f|_{\Gamma_E^{\delta(E)}}$ при $E^{1/2} \geq \rho_1(d, \sigma, N_{j-1})$, $j \in \mathbb{N}$.

Наконец, оценки (3.22) следуют из оценок (3.10), (3.19) и формул (3.15), (3.20).

Это заканчивает доказательство теоремы 3.1.

Автор благодарен институту Миттаг-Леффлера, где эта работа была начата в феврале–марте 2013 г.

Список литературы

- [1] Ф. А. Березин, М. А. Шубин, *Уравнение Шрёдингера*, Изд-во МГУ, 1983, 392 с.; англ. пер.: F. A. Berezin, M. A. Shubin, *The Schrödinger equation*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **66**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991, xviii+555 pp.
- [2] Л. Д. Фаддеев, “Обратная задача квантовой теории рассеяния. II”, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат., **3**, ВИНТИ, М., 1974, 93–180; англ. пер.: L. D. Faddeev, “The inverse problem in the quantum theory of scattering. II”, *J. Soviet Math.*, **5**:3 (1976), 334–396.
- [3] R. G. Novikov, “Approximate Lipschitz stability for non-overdetermined inverse scattering at fixed energy”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **21**:6 (2013), 813–823.
- [4] Н. В. Алексеенко, Б. А. Буров, О. Д. Румянцева, “Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния. Модифицированный алгоритм Новикова”, *Акустич. журн.*, **54**:3 (2008), 469–482; англ. пер.: N. V. Alexeenko, V. A. Burov, O. D. Rumyantseva, “Solution of the three-dimensional acoustical inverse scattering problem. The modified Novikov algorithm”, *Acoust. Phys.*, **54**:3 (2008), 407–419.
- [5] A. L. Bukhgeim, “Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **16**:1 (2008), 19–33.
- [6] Б. А. Буров, Н. В. Алексеенко, О. Д. Румянцева, “Многочастотное обобщение алгоритма Новикова для решения обратной двумерной задачи рассеяния”, *Акустич. журн.*, **55**:6 (2009), 784–798; англ. пер.: V. A. Burov, N. V. Alekseenko, O. D. Rumyantseva, “Multifrequency generalization of the Novikov algorithm for the two-dimensional inverse scattering problem”, *Acoust. Phys.*, **55**:6 (2009), 843–856.
- [7] K. Chadán, P. C. Sabatier, *Inverse problems in quantum scattering theory*, With a foreword by R. G. Newton, 2nd ed., Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, New York, 1989, xxxii+499 pp.
- [8] G. Eskin, *Lectures on linear partial differential equations*, Grad. Stud. Math., **123**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, xviii+410 pp.
- [9] G. Eskin, J. Ralston, “Inverse scattering problem for the Schrödinger equation with magnetic potential at a fixed energy”, *Comm. Math. Phys.*, **173**:1 (1995), 199–224.
- [10] Л. Д. Фаддеев, “Единственность решения обратной задачи рассеяния”, *Вестн. ЛГУ*, **11**:7 (1956), 126–130.

- [11] А. А. Гончар, Н. Н. Новикова, Г. М. Хенкин, “Многоточечные аппроксимации Паде в обратной задаче Штурма–Лиувилля”, *Матем. сб.*, **182**:8 (1991), 1118–1128; англ. пер.: A. A. Gonchar, N. N. Novikova, G. M. Henkin, “Multipoint Padé approximants in the inverse Sturm–Liouville problem”, *Math. USSR-Sb.*, **73**:2 (1992), 479–489.
- [12] П. Г. Гриневич, “Преобразование рассеяния для двумерного оператора Шрёдингера с убывающим на бесконечности потенциалом при фиксированной ненулевой энергии”, *УМН*, **55**:6(336) (2000), 3–70; англ. пер.: P. G. Grinevich, “Scattering transformation at fixed non-zero energy for the two-dimensional Schrödinger operator with potential decaying at infinity”, *Russian Math. Surveys*, **55**:6 (2000), 1015–1083.
- [13] P. Hähner, T. Hohage, “New stability estimates for the inverse acoustic inhomogeneous medium problem and applications”, *SIAM J. Math. Anal.*, **33**:3 (2001), 670–685.
- [14] М. И. Исаев, “Экспоненциальная неустойчивость в обратной задаче рассеяния на интервале энергий”, *Функц. анализ и его прил.*, **47**:3 (2013), 28–36; англ. пер.: M. I. Isaev, “Exponential instability in the inverse scattering problem on the energy interval”, *Funct. Anal. Appl.*, **47**:3 (2013), 187–194.
- [15] M. I. Isaev, R. G. Novikov, “New global stability estimates for monochromatic inverse acoustic scattering”, *SIAM J. Math. Anal.*, **45**:3 (2013), 1495–1504.
- [16] Р. Г. Новиков, “Многомерная обратная спектральная задача для уравнения $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:4 (1988), 11–22; англ. пер.: R. G. Novikov, “Multidimensional inverse spectral problem for the equation $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$ ”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:4 (1988), 263–272.
- [17] R. G. Novikov, “The inverse scattering problem on a fixed energy level for the two-dimensional Schrödinger operator”, *J. Funct. Anal.*, **103**:2 (1992), 409–463.
- [18] R. G. Novikov, “The inverse scattering problem at fixed energy for the three-dimensional Schrödinger equation with an exponentially decreasing potential”, *Comm. Math. Phys.*, **161**:3 (1994), 569–595.
- [19] R. G. Novikov, “Rapidly converging approximation in inverse quantum scattering in dimension 2”, *Phys. Lett. A*, **238**:2-3 (1998), 73–78.
- [20] R. G. Novikov, “The $\bar{\partial}$ -approach to approximate inverse scattering at fixed energy in three dimensions”, *IMRP Int. Math. Res. Pap.*, **2005**:6 (2005), 287–349.
- [21] T. Regge, “Introduction to complex orbital moments”, *Nuovo Cimento* (10), **14**:5 (1959), 951–976.
- [22] P. Stefanov, “Stability of the inverse problem in potential scattering at fixed energy”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **40**:4 (1990), 867–884.
- [23] A. Vasy, Xue-Ping Wang, “Inverse scattering with fixed energy for dilation-analytic potentials”, *Inverse Problems*, **20**:4 (2004), 1349–1354.
- [24] R. Weder, “Global uniqueness at fixed energy in multidimensional inverse scattering theory”, *Inverse Problems*, **7**:6 (1991), 927–938.
- [25] R. Weder, D. Yafaev, “On inverse scattering at a fixed energy for potentials with a regular behaviour at infinity”, *Inverse Problems*, **21**:6 (2005), 1937–1952.
- [26] L. Beilina, M. V. Klibanov, *Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems*, Springer, New York, 2012, xv+407 pp.
- [27] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Уравнение Шрёдингера в магнитном поле и римановы поверхности”, *Докл. АН СССР*, **229** (1976), 15–18; англ. пер.: B. A. Dubrovin, I. M. Krichever, S. P. Novikov, “The Schrödinger equation in a periodic field and Riemann surfaces”, *Soviet Math. Dokl.*, **17** (1976), 947–951.
- [28] G. Eskin, J. Ralston, “The inverse backscattering problem in three dimensions”, *Comm. Math. Phys.*, **124**:2 (1989), 169–215.

- [29] Р. Г. Новиков, Г. М. Хенкин, “ $\bar{\partial}$ -уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния”, *УМН*, **42:3**(255) (1987), 93–152; англ. пер.: G. M. Henkin, R. G. Novikov, “The $\bar{\partial}$ -equation in the multidimensional inverse scattering problem”, *Russian Math. Surveys*, **42:3** (1987), 109–180.
- [30] M. V. Klibanov, “Carleman estimates for global uniqueness, stability and numerical methods for coefficient inverse problems”, *J. Inverse and Ill-Posed Probl.*, **21:4** (2013), 477–560.
- [31] H. E. Moses, “Calculation of the scattering potential from reflection coefficients”, *Phys. Rev.* (2), **102** (1956), 559–567.
- [32] R. G. Novikov, “On non-overdetermined inverse scattering at zero energy in three dimensions”, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (5), **5:3** (2006), 279–328.
- [33] R. G. Novikov, M. Santacesaria, “Monochromatic reconstruction algorithms for two-dimensional multi-channel inverse problems”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2013, № 6, 1205–1229.
- [34] P. D. Stefanov, “A uniqueness result for the inverse back-scattering problem”, *Inverse Problems*, **6:6** (1990), 1055–1064.
- [35] М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шипатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*, Наука, М., 1980, 287 с.; англ. пер.: М. М. Lavrent’ev, V. G. Romanov, S. P. Shishatskii, *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis*, Transl. Math. Monogr., **64**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, vi+290 pp.
- [36] R. G. Novikov, “On iterative reconstruction in the nonlinearized polarization tomography”, *Inverse Problems*, **25:11** (2009), 115010, 18 pp.
- [37] L. Päiväranta, E. Somersalo, “Inversion of discontinuities for the Schrödinger equation in three dimensions”, *SIAM J. Math. Anal.*, **22:2** (1991), 480–499.
- [38] A. Jensen, “High energy resolvent estimates for generalized many-body Schrödinger operators”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **25:1** (1989), 155–167.

Роман Геннадьевич Новиков
(**Roman G. Novikov**)

École Polytechnique,
Centre de Mathématiques Appliquées,
Palaiseau, France;

Институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики РАН, г. Москва;

Московский физико-технический институт
(государственный университет),
г. Долгопрудный Московской обл.

E-mail: novikov@cmap.polytechnique.fr

Поступила в редакцию
22.06.2013 и 25.04.2014