Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Воробьев, Характеристика квазивыпуклых функций в терминах дерева функции по Кронроду, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 6, 17–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8278>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 11:20:18

УДК 517.538

А. И. Воробьев

Характеристика квазивыпуклых функций в терминах дерева функции по Кронроду

В качестве приложения конструкции дерева функции по Кронроду к выпуклому анализу получена характеристика квазивыпуклых функций. А именно, функция квазивыпукла тогда и только тогда, когда квазивыпукла ассоциированная с ней функция, определенная на дереве исходной функции. Дается новое доказательство одной из лемм существования из конструкции дерева функции по Кронроду, оригинальное доказательство которой оказалось некорректным.

Библиография: 4 названия.

Ключевые слова: дерево функции по Кронроду, квазивыпуклые функции.

DOI: 10.4213/sm8278

§ 1. Введение

В отличие от имеющей многочисленные приложения известной теоремы Жордана о функции одной переменной с ограниченной вариацией, конструкция дерева функции по Кронроду, являющаяся аналогом этой теоремы для функций многих переменных, имеет немного применений. В настоящей работе установлено приложение функций, определенных на дереве исходной функции по Кронроду, к выпуклому анализу. А именно, обнаруживается характеристика квазивыпуклых функций (см. [1]) в терминах функции на дереве, ассоциированной с исходной квазивыпуклой функцией, заданной на единичном кубе $\mathbb{E}^n$.

§ 2. Приложение к выпуклому анализу

Здесь и далее мы будем пользоваться обозначениями и описанием конструкции дерева функции по Кронроду, данным в [2]. Напомним определение квазивыпуклых функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция f , определенная на кубе $\mathbb{E}^n$, называется *квазивыпуклой*, если имеет место неравенство $f(x + (1 - \alpha)y) \leq \max[f(x); f(y)]$ для любых $x, y \in \mathbb{E}^n$ и $\alpha \in [0, 1]$.

В качестве примера отметим, что каждая выпуклая функция является квазивыпуклой.

Квазивыпуклые функции допускают следующее описание.

ТЕОРЕМА. *Непрерывная функция f , заданная на кубе $\mathbb{E}^n$, квазивыпукла тогда и только тогда, когда является квазивыпуклой функцией σ_f , определенная на дереве функции f .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $x, y \in \mathbb{E}^n$, а K_x и K_y – компоненты некоторого уровня функции f . Имеют место равенства $f(x) = \sigma_f(K_x)$ и $f(y) = \sigma_f(K_y)$. Из этих равенств следует неравенство

$$\sigma_f(\alpha K_x + (1 - \alpha)K_y) \leq \max[\sigma_f(K_x); \sigma_f(K_y)]$$

для функции σ_f . Достаточность устанавливается аналогично. Исходя из неравенства

$$\sigma_f(\alpha K_x + (1 - \alpha)K_y) \leq \max[\sigma_f(K_x); \sigma_f(K_y)]$$

и равенств, установленных в начале доказательства теоремы, получаем неравенство

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max[f(x); f(y)].$$

Доказательство теоремы закончено.

§ 3. Доказательство леммы Кронрода

В этом параграфе будет приведено доказательство одной леммы Кронрода, играющей существенную роль в его конструкции дерева функции. Мы попытаемся свести доказательство леммы Кронрода к известной формуле Колмогорова о представлении непрерывных функций, определенных на единичном евклидовом кубе, в виде некоторой суммы функций одной переменной (см., например, [3])

$$f(x_1; \dots; x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \lambda^q \left(\sum_{p=1}^n \psi^{pq}(x_p) \right).$$

Здесь ψ^{pq} – монотонная функция одной переменной, определенная на отрезке $[0, 1]$, а λ^q – также функция одной переменной на $[0, 1]$. Теперь представим понятия и объекты из леммы Кронрода через соответствующие понятия и объекты для функций ψ^{pq} и λ^q . Начнем с представления уровня $E(f; t_0)$ через уровни функций $\lambda^q(\sum_{p=1}^n \psi^{pq}(x_p))$. Имеет место представление

$$E(f; t_0) = \bigcup_{(t^{(1)} + \dots + t^{(2n+1)} = t_0)} \bigcap_{q=1}^{2n+1} E\left(\lambda^q \left(\sum_{p=1}^n \psi^{pq} \right); t^q\right).$$

Представим теперь компоненту K_1 уровня $E(f; t_0)$ функции f через соответствующие объекты функций $\lambda^q(\sum_{p=1}^n \psi^{pq}(x_p))$. Компонента $K^{\sum \lambda^q}$ уровня $E(\sum \lambda^q; t_0)$ функции $\sum \lambda^q_{q=1}$ является пересечением соответствующих компонент K^{λ^q, t^q} уровней $E(\lambda^q; t^q)$ функций λ^q , а тогда K_1 – это пересечение образов K^{λ^q, t^q} при отображениях $\sum \psi^{pq}$. Это почти очевидно, так как эти компоненты для уровней $E(\lambda^q; t^q)$ являются замкнутыми отрезками. Далее, представим компоненту C_{t_0} дополнения к уровню $E(f; t_0)$. Почти очевидно, что компоненты дополнения к уровню $E(\sum \lambda^q; t_0)$ получаются объединением

компонент, являющихся компонентами дополнения к уровням $E(\lambda^q; t^q)$ соответствующих функций λ^q , имеющих непустое пересечение. Теперь C_{t_0} является объединением прообразов открытых отрезков при отображениях $\sum \psi^{pq}(x_p)$. Приведем формулировку леммы Кронрода.

ЛЕММА. Пусть K_1 и K_2 – компоненты t -уровня непрерывной функции f . Существует число $\sigma > 0$ такое, что хотя бы один из уровней $E(f; t + \sigma)$ или $E(f; t - \sigma)$ разделяет K_1 и K_2 .

Здесь стоит указать, в чем состоит ошибка Кронрода. Его доказательство начинается с предположения от противного, что ни для какого $\sigma > 0$ уровни $t + \sigma$ и $t - \sigma$ не разделяют K_1 и K_2 . Это означает наличие не одного, как это заявлено в статье Кронрода, а двух континуумов, каждый из которых не пересекается с $E_{t+\sigma}$ и $E_{t-\sigma}$ соответственно. Это разрушает аргументы в статье Кронрода.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Для случая функции одной переменной $g(x)$ лемма доказывается следующим образом. Пусть $E(g; t_0)$ – уровень функции $g(x)$, а K' и K'' – две его компоненты. Допустим, что лемма Кронрода неверна. Тогда для любого уровня $E(g; t)$, где $t \neq t_0$, компоненты K' и K'' содержатся в одной из компонент K_t дополнения к уровню $E(g; t)$. Эта компонента K_t является открытым отрезком на прямой. Рассмотрим пересечение K этих отрезков. Это пересечение K само является открытым отрезком, содержащим K' и K'' и содержащемся в уровне $E(g; t_0)$. Ибо в противном случае имеет место противоречие. Существует некоторый уровень $E(g; t_1)$ функции g и $t_1 \neq t_0$, который пересекает K . Для определенности предположим $t_0 < t_1$. Тогда существует такое t_2 , что $t_0 < t_2 < t_1$, уровень $E(g; t_2)$ разделяет уровни $E(g; t_0)$ и $E(g; t_1)$. В этом содержится противоречие с построением K , так как K и $E(g; t_2)$ не пересекаются по построению. Значит, континуум K содержится в $E(g; t_0)$ и содержит K' и K'' , а это противоречит условию леммы Кронрода.

Теперь докажем лемму для функции нескольких переменных, привлекая теорему Колмогорова. Допустим, что выполняются условия леммы Кронрода. Это в терминах объектов, связанных с функцией $\sum \lambda^q$, из формул Колмогорова расписывается так. Пусть K_1 и K_2 – компоненты уровня

$$E\left(\sum_{q=1}^{2n+1} \lambda^q \left(\sum_{p=1}^n \psi^{pq}(x_p)\right); t_0\right).$$

Тогда существуют две такие компоненты K'_1 и K''_2 уровня $E(\sum_{q=1}^{2n+1} \lambda^q; t_0)$ функции $\sum_{q=1}^{2n+1} \lambda^q$, что K_1 и K_2 будут пересечением прообразов компонент K'_1 и K''_2 при отображениях $\sum_{p=1}^n \psi^{pq}$ соответственно. По доказанному выше для компонент K'_1 и K''_2 существует уровень $E(\sum_{q=1}^{2n+1} \lambda^q; t_1)$ функции $\sum_{q=1}^{2n+1} \lambda^q$, разделяющий их. Обозначим его через M' , ему соответствует уровень M функции f . Предположим для определенности, что K'_1 лежит слева от M' , а K''_2 правее (альтернативный случай рассматривается аналогично). Тогда суммы $\sum_{p=1}^n \psi^{pq} x''_p$ для точек x''_p , лежащих в K_2 , будут больше этих сумм, когда (x_p) принадлежит M , а суммы $\sum_{p=1}^n \psi^{pq} x'_p$ для точек (x'_p) из K_1 будут меньше

этих сумм для точек из M . Уровень $E(f; t_1) = E(\sum_{q=1}^{2n+1} \lambda^q (\sum_{p=1}^n \psi^{pq}(x_p)); t_1)$ разделяет компоненты K_1 и K_2 . Ибо в противном случае существует компонента C дополнения к этому уровню, содержащая компоненты K_1 и K_2 . Этой компоненте C соответствует некоторая компонента C' дополнения к уровню $E(\sum_{q=1}^{2n+1} \lambda^q; t_1)$, которая содержит компоненты K'_1 и K_2 , являющиеся пересечением образов K_1 и K_2 при отображениях $\sum_{p=1}^n \psi^{pq}$. C' является открытым отрезком, не пересекающимся с уровнем $E(\sum_{q=1}^{2n+1} \lambda^q; t_1)$. Пусть для определенности C' лежит левее $E(\sum_{q=1}^{2n+1} \lambda^q; t_1)$ (другой случай рассматривается аналогично). Из этого следует, что все суммы вида $\sum_{p=1}^n \psi^{pq}(x_p)$, где $(x_p) \in (K_1 \cup K_2)$, будут меньше всех сумм $\sum_{p=1}^n \psi^{pq}(x_p) \in E(\sum_{q=1}^{2n+1} \lambda^q; t_1)$, но, как было показано выше, это не так. Лемма полностью доказана.

Автор выражает свою признательность В.Ю. Протасову и Е. Осипову за советы.

В заключение статьи хочется отметить, что автором обнаружена H -выпуклость (см. [4]) вариации нулевого порядка, точнее некоторой модификации понятия H -выпуклости.

Список литературы

- [1] В.Ф. Демьянов, Л.В. Васильев, *Недифференцируемая оптимизация*, Наука, М., 1981, 384 с.; англ. пер.: V.F. Dem'yanov, L.V. Vasil'ev, *Nondifferentiable optimization*, Transl. Ser. Math. Engrg., Optimization Software, Inc., Publications Division, New York, 1985, xvii+452 pp.
- [2] Л.Д. Иванов, *Вариации множеств и функций*, Наука, М., 1975, 352 с.
- [3] А.Н. Колмогоров, "О представлении непрерывных функций многих переменных через суперпозиции непрерывных функций одной переменной и сложение", *Докл. АН СССР*, **114** (1957), 953–956.
- [4] С.С. Кутателадзе, А.М. Рубинов, *Двойственность Минковского и ее приложения*, Наука, Новосибирск, 1976, 254 с.

Александр Иванович Воробьев
(Alexandr I. Vorob'ev)
E-mail: guka53@mail.ru

Поступила в редакцию
14.08.2013 и 14.01.2014