Общероссийский математический портал

С. А. Кудрявцев, Дополнения на логповерхностях, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 6, 99–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm828>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:32:46

УДК 512.7

С. А. Кудрявцев

Дополнения на логповерхностях

В настоящей работе уточняется основная индуктивная теорема о дополнениях на поверхностях и строятся модели для исключительных логповерхностей дель Пеццо с $\delta = 0$.

Библиография: 18 названий.

Введение

Теория дополнений на алгебраических многообразиях была создана В. В. Шокуровым в работах [1], [2]. Она служит мощным инструментом для исследования алгебраических многообразий, экстремальных стягиваний и особенностей. Преимущество этой теории связано с тем, что понятие дополнения (под дополнением будет пониматься “хороший” дивизор в кратной антиканонической линейной системе) согласовано с логпрограммой минимальных моделей. Более того, дополнение обладает индуктивным свойством, т. е. проблема нахождения дополнения для n -мерного многообразия сводится к нахождению дополнения для $(n - 1)$ -мерного многообразия. По поводу теории дополнений для n -мерных многообразий см. работы [2]–[4]. Применение этой теории в трехмерном случае проиллюстрировано, например, в работах [5]–[8].

Итак, для эффективного исследования трехмерных стягиваний и особенностей важно полностью изучить логповерхности дель Пеццо. Оставшаяся открытая двумерная проблема (в рамках теории дополнений) – это классификация исключительных логповерхностей дель Пеццо. Исключительные логповерхности дель Пеццо (S, D) делятся на три типа: $\delta(S, D) = 0$, $\delta(S, D) = 1$ и $\delta(S, D) = 2$, где

$$\delta(S, D) = \# \left\{ E \mid E - \text{дивизор с дискрепантностью } a(E, D) \leq -\frac{6}{7} \right\}.$$

Случаи $\delta(S, D) = 1$ и $\delta(S, D) = 2$ были разобраны в [2], [9]. Для изучения оставшегося случая $\delta(S, D) = 0$ теорию дополнений на поверхностях необходимо применять в более широком классе коэффициентов. Поэтому она будет рассмотрена, когда все коэффициенты границы D больше или равны $\frac{1}{2}$.

Один из основных результатов настоящей работы, приведенный в § 2, – это уточнение основной индуктивной теоремы о дополнениях на поверхностях. С помощью нее в § 4 построены модели для исключительных логповерхностей дель Пеццо

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00441), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № 00-15-96085) и фонда INTAS-OPEN (грант № 2000-269).

с $\delta = 0$ (см. определение 4.10). В §3 получена классификация исключительных нерациональных логповерхностей. Также в §4 изучен один тип исключительных логповерхностей с $\delta = 0$ (см. теорема 4.3).

Автор признателен Ю. Г. Прохорову за ряд ценных советов.

§1. Предварительные сведения и результаты

Все многообразия рассматриваются над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Основные определения, обозначения и понятия, использованные в статье, приведены в [3], [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Положим $\Phi_{\text{sm}} = \{1 - \frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}\}$ и $\Phi_m = \Phi_{\text{sm}} \cup [\frac{6}{7}, 1]$. Коэффициент d называется *стандартным*, если $d \in \Phi_{\text{sm}}$.

Положим $\mathbb{Z}/(n) = \{k/n \mid k \in \mathbb{Z}_{>0}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Для $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathcal{P}_n = \{a \mid 0 \leq a \leq 1, \lfloor (n+1)a \rfloor \geq na\}.$$

Понятно, что

$$\mathcal{P}_n = \{0\} \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{2}{n+1}, \frac{2}{n}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{k}{n+1}, \frac{k}{n}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{n}{n+1}, 1\right].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Определим множество $\Phi^{[a,b]} = (\Phi_{\text{sm}} \cap [0, b)) \cup [a, b)$. При $a = (i-1)/i$ и $b = i/(i+1)$ положим $\Phi_i = \Phi^{[a,b]}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пара $(X, D = \sum d_k D_k)$ называется *парой типа Φ_i* , если выполнены следующие три условия:

- 1) $d_k \in \Phi_i$ для всех k ;
- 2) существует j для которого $d_j \geq (i-1)/i$;
- 3) дивизор $K_X + D$ является $\frac{1}{i}$ -логтерминальным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Пусть $(X/Z \ni P, D)$ – стягивание многообразий; $\mathbb{Q}$ -*дополнением* для этого стягивания называется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор D' такой, что $D' \geq D$, дивизор $K_X + D'$ логканоничен и $K_X + D' \sim_{\mathbb{Q}} 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Пусть X – нормальное многообразие, а дивизор $D = S + B$ является субграницей, где S – его целая эффективная часть и $\lfloor B \rfloor \leq 0$. Дивизор $K_X + D$ называется *n-дополняемым*, если существует $\mathbb{Q}$ -дивизор D^+ , называемый *n-дополнением*, который удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) $n(K_X + D^+) \sim 0$;
- 2) дивизор $K_X + D^+$ логканоничен;
- 3) $nD^+ \geq nS + \lfloor (n+1)B \rfloor$.

Если X – полугладкое многообразие в коразмерности 1, то дивизор $K_X + D$ называется *n-полудополняемым*, если существует $\mathbb{Q}$ -дивизор D^+ , удовлетворяющий требованиям 1), 3) и следующему условию:

- 2') дивизор $K_X + D^+$ полулогканоничен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7 [1; пример 5.2], [10; теорема 19.4]. Пусть X – полугладкая связная полная кривая. Пусть граница D содержится в гладкой части X . Предположим, что дивизор $-(K_X + D)$ численно эффективен на каждой компоненте X . Тогда

- 1) дивизор $K_X + D$ n -полудополняем для $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$;
- 2) если дивизор $K_X + D$ не 1- и 2-полудополняем, то $X \cong \mathbb{P}^1$ и $[D] = [D^+] = 0$.

Инвариантность дополнений относительно логпрограммы минимальных моделей и их индуктивные свойства показаны в следующих утверждениях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8 [1; лемма 5.4]. Пусть $f: X \rightarrow Z$ – бирациональное стягивание многообразий и дивизор D – субграница на X . Если дивизор $K_X + D$ является n -дополняемым, то дивизор $K_Z + f(D)$ тоже n -дополняем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9 [2; лемма 4.4]. Пусть $f: X \rightarrow Z$ – бирациональное стягивание многообразий и дивизор D – субграница на X . Предположим, что

- 1) дивизор $K_X + D$ f -численно эффективен;
- 2) коэффициент любой неискл. исключительной, неприводимой компоненты дивизора D , пересекающей $\text{Exc } f$, лежит в $\mathcal{P}_n$;
- 3) дивизор $K_Z + f(D)$ n -дополняем.

Тогда дивизор $K_X + D$ тоже n -дополняем.

Следующая теорема для двумерных многообразий усиливает обычную теорему о продолжении дополнений для n -мерных многообразий [3; предложение 4.4.1].

ТЕОРЕМА 1.10 [3; предложение 4.4.3]. Пусть $(X/Z \ni P, D = S + B)$ – логповерхность со следующими свойствами:

- 1) дивизор $K_X + D$ дивизориально логтерминален;
- 2) дивизор $-(K_X + D)$ численно эффективен и объемен над Z ;
- 3) $S = [D] \neq 0$ в окрестности $f^{-1}(P)$.

Предположим, что в окрестности $f^{-1}(P) \cap S$ существует n -полудополнение $K_S + \text{Diff}_S(B)^+$ для $K_S + \text{Diff}_S(B)$. Тогда в окрестности $f^{-1}(P)$ существует n -дополнение $K_X + S + B^+$ для $K_X + S + B$ такое, что $\text{Diff}_S(B)^+ = \text{Diff}_S(B^+)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. Пусть $(X/Z \ni P, D)$ – стягивание многообразий. Если $\dim Z \neq 0$, то стягивание называется *исключительным*, если для любого $\mathbb{Q}$ -дополнения D' существует не более одного дивизора E (не обязательно исключительного) такого, что $a(E, D') = -1$. Если $\dim Z = 0$, то логмногообразие называется *исключительным*, если для любого $\mathbb{Q}$ -дополнения D' пара (X, D') логтерминальна по Кавамате.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Пусть (X, D) – исключительная пара. Положим

$$\delta(X, D) = \# \left\{ E \mid E \text{ — дивизор (не обязательно исключительный)} \right. \\ \left. \text{с дискрепантностью } a(E, D) \leq -\frac{6}{7} \right\}.$$

ЛЕММА 1.13. Пусть $(X \ni P, \alpha C + B)$ является ростком двумерной логтерминальной пары, где $(X \ni P)$ – нециклическая особая точка, C – кривая, $B \geq 0$ и $\alpha \geq 0$. Тогда

- 1) дивизор $K_X + \alpha C + B$ не является $(1 - \alpha)$ -логтерминальным;
- 2) дивизор $K_X + \alpha C + B$ является строго $(1 - \alpha)$ -логканоническим только в случае $(X \ni P, \alpha C + B) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \alpha\{xy = 0\})/\mathbb{D}_n$, где $\mathbb{D}_n \subset \text{SL}_2(\mathbb{C})$ – диэдральная подгруппа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для некоторого числа $0 < c \leq 1$ пара $(X, cC + B)$ будет логканоничной, но не чисто логтерминальной [3; теорема 2.1.2]. Пусть $f: (Y, E) \rightarrow (X \ni P)$ – индуктивное раздутие этой пары [11; теорема 1.9], [3; предложение 3.1.4]. Тогда $K_Y - f^*$ -численно эффективный дивизор, так как f является раздутием центральной вершины графа минимального разрешения [3; §6]. Поэтому

$$a(E, \alpha C + B) = -\frac{\alpha}{c} + \left(1 - \frac{\alpha}{c}\right)a(E, B) \leq -\frac{\alpha}{c} \leq -\alpha.$$

Равенство достигается только в случае $c = 1$, $B = 0$, $a(E, 0) = 0$. Из классификации двумерных логтерминальных особенностей получаем требуемое (см., например, [3; теорема 2.1.2]).

ЛЕММА 1.14. Пусть $(X \ni P, \alpha C + B)$ является ростком двумерной логтерминальной пары, где $(X \ni P)$ – циклическая особая точка, C – кривая, $B = \sum b_i B_i \geq 0$ и $\alpha \geq 0$. Предположим, что пара $(X, C + B)$ не чисто логтерминальна и $b_i \geq \frac{1}{2}$ для всех i . Тогда

- 1) дивизор $K_X + \alpha C + B$ не является $(1 - \alpha)$ -логтерминальным;
- 2) дивизор $K_X + \alpha C + B$ является строго $(1 - \alpha)$ -логканоническим только в следующих случаях:
 - a) $(X \ni P, \alpha C + B) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \alpha\{xy = 0\})/\mathbb{Z}_n(n - 1, 1)$;
 - b) $(X \ni P, \alpha C + B) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \alpha\{x^2 + y^2 = 0\})/\mathbb{Z}_4(3, 1)$;
 - c) $(X \ni P, \alpha C + B) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \alpha\{x^2 + y^4 = 0\})/\mathbb{Z}_2(1, 1)$, где $\alpha \leq \frac{2}{3}$;
 - d) $(X \ni P, \alpha C + B) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \frac{1}{2}\{x = 0\} + \frac{1}{2}\{x + y^3 = 0\})/\mathbb{Z}_2(1, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что C является приводимой кривой или B состоит не менее чем из двух дивизоров. Пусть $\psi: \tilde{X} \rightarrow X$ – минимальное разрешение и Γ – его граф. Собственные прообразы C и B обозначим через $\tilde{C}$ и $\tilde{B}$. Кривую из Γ , которую пересекает $\tilde{C}$, обозначим через $\tilde{E}$ и стянем все другие кривые из Γ . Получили раздутие $f: (Y, E) \rightarrow (X \ni P)$. Запишем

$$K_Y + aE + B_Y + C_Y = f^*(K_X + C + B).$$

Поскольку

$$0 \leq -2 + \deg \text{Diff}_E(0) + (B_Y + C_Y)E = (1 - a)E^2, \quad (1)$$

то $a \geq 1$. Следовательно,

$$a(E, \alpha C + B) = -\alpha a + (1 - \alpha)a(E, B) \leq -\alpha a \leq -\alpha. \quad (2)$$

Равенство достигается только в случае $a = 1$, $B = 0$, $a(E, 0) = 0$. Из классификации двумерных логтерминальных особенностей получаем подслучай а) или подслучай d), разобранный ниже (при этом $B = 0$).

Предположим, что C является неприводимой кривой и B состоит не более чем из одного дивизора. Если $(X \ni P) \not\cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0)/\mathbb{Z}_n(1, 1)$, то, как и выше, можем найти кривую E , для которой выполнено неравенство (1). В случае равенства в (2) получаем подслучай b).

Пусть $(X \ni P) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0)/\mathbb{Z}_n(1, 1)$. Положим $E = \text{Eкс } \psi$. При $(\tilde{C} + \tilde{B}) \cdot E \geq 2$ лемма доказывается аналогично предыдущим случаям. В случае равенства в (2) получаем подслучай c). Поэтому будем считать, что

$$(X \ni P, C) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \{x = 0\})/\mathbb{Z}_n(1, 1), \quad B = b_1 B_1, \quad \tilde{C} \cap \tilde{B}_1 \cap E = P.$$

Раздуем (обыкновенным образом) точку P . Тогда

$$a(E', \alpha C + B) = -\alpha \left(1 + \frac{1}{n}\right) - b_1 \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n},$$

где E' — появившаяся исключительная кривая. Легко проверить, что неравенство $a(E', \alpha C + B) > -\alpha$ выполняется только в случае $n = 2$ и $\alpha < \frac{1}{2}$, но тогда $a(E, \alpha C + B) \leq -\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} < -\alpha$. Более того, $a(E', \alpha C + B) = -\alpha$ только в случае $n = 2, \alpha = b_1 = \frac{1}{2}$, т.е. имеем подслучай d) (при этом $B \neq 0$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.15. Пусть пара $(X \ni P, \alpha C + B)$ имеет тип Φ_i , где $i = 2, 3, 4, 5, 6$ и $\alpha \geq (i - 1)/i$. Тогда она является одной из следующих:

- 1) $(X \ni P, \alpha C + B) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \alpha\{x = 0\} + \beta\{x + y^k = 0\})$, где $i = 2, k \geq 2, \alpha > \frac{1}{2}, \beta > \frac{1}{2}, \alpha + \beta < 1 + \frac{1}{2k}$;
- 2) $(X \ni P, \alpha C + B) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \alpha\{x = 0\} + \frac{1}{2}\{x + y^k = 0\})$, где $k \geq 2$; если $k = 2$, то i любое; если $k = 3$, то $i = 2, 3$; если $k \geq 4$, то $i = 2$ и $\alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}$;
- 3) $(X \ni P, \alpha C + B) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \alpha\{x^2 + y^k = 0\})$, где $k \geq 2$; если $k = 2$, то i любое; если $k = 3$, то $i = 2, 3, 4$; если $k \geq 4$, то $i = 2$ и $\alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{4\lfloor k/2 \rfloor}$;
- 4) $(X \ni P, \alpha C + B) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \alpha\{x = 0\} + b_1\{y = 0\})/\mathbb{Z}_n(q, 1)$, где $(n, q) = 1$ и $(n/i - 1 + b_1)/(1 - \alpha) < q \leq n$ (возможен случай $n = q = 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.13 $(X \ni P)$ является циклической особенностью или неособой точкой. Условие $\frac{1}{i}$ -логтерминальности и вид коэффициентов дивизора D являются основными в доказательстве предложения.

Предположим, что дивизор $K_X + C + B$ чисто логтерминален. Если $(X \ni P)$ — неособая точка, то $(X \ni P, \alpha C + B) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \alpha\{x = 0\} + b_1\{y = 0\})$. Поступая таким же образом, как и при доказательстве предложения 1.9 [9], получаем случай 4).

Предположим, что дивизор $K_X + C + B$ не чисто логтерминален. Тогда по лемме 1.14 $(X \ni P)$ — неособая точка. Если дивизор $K_X + C + B$ является дивизориально логтерминальным, то имеем случай 3) с $k = 2$. Предположим, что он не дивизориально логтерминален. Тогда имеются две возможности для дивизора B .

Пусть $B = b_1 B_1 \neq 0$. Тогда C — неособая кривая и B_1 касается C в точке P . Поэтому имеем случаи 1) и 2).

Пусть $B = 0$. Тогда C — особая кривая и имеем случай 3) с $k \geq 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.16. Случай $\Phi_m = \bigcup_{i \geq 7} \Phi_i$ разобран в [9; предложение 1.9].

§ 2. Основная индуктивная теорема для поверхностей

Следующая теорема 2.1 уточняет основную индуктивную теорему о дополнениях на поверхностях [2; теорема 2.3].

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $(S, D = \sum d_i D_i)$ – проективная логповерхность. Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) дивизор $K_S + D$ логканоничен, но не логтерминален по Кавамате;
- 2) $-(K_S + D)$ – численно эффективный дивизор;
- 3) существует $\mathbb{Q}$ -дополнение для $K_S + D$;
- 4) $d_i \geq \frac{1}{2}$ для всех i .

Тогда для $K_S + D$ существует 1-, 2-, 3-, 4- или 6-нелогтерминальное по Кавамате дополнение, кроме случаев из примера 2.3.

Кроме того, если имеется бесконечно много дивизоров E с дискрепантностью $a(E, D) = -1$, то для $K_S + D$ существует 1- или 2-нелогтерминальное по Кавамате дополнение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Настоящая теорема во многих случаях верна без требования 4). При ее доказательстве будем следовать работе [2]. Случаи, где используется требование 4), будут полностью разобраны.

Рассматривая минимальную логтерминальную модификацию [3; определение 3.1.3], можно считать, что (S, D) является дивизориально логтерминальной парой. Положим $C = \lfloor D \rfloor \neq 0$ и $B = \{D\}$. В зависимости от численной размерности дивизора $-(K_S + C + B)$ имеем три случая.

Случай I. Предположим, что $-(K_S + C + B)$ – объемный дивизор. Тогда из предложения 1.7 и теоремы 1.10 немедленно следуют все требуемые утверждения. Заметим, что в этом случае требование 4) на границу D является излишним.

Перед тем как перейти к оставшимся двум случаям, уточним строение логповерхности (S, D) .

Пусть S – нерациональная поверхность. Тогда наша теорема доказана в [2; теорема 2.3], [3; теорема 8.2.1]. Более того, всегда существует 1- или 2-нелогтерминальное по Кавамате дополнение и имеется лишь конечное число (не более двух) дивизоров E с дискрепантностью $a(E, D) = -1$. Заметим, что и в этом случае требование 4) на границу D является излишним.

Пусть C не является цепью рациональных кривых. Тогда наша теорема также верна вне зависимости от требования 4) на коэффициенты границы D [2; теорема 2.3].

Итак, будем считать, что S – рациональная поверхность и C – цепь рациональных кривых.

Случай II. Предположим, что $K_S + C + B \neq 0$ и $-(K_S + C + B)$ не является объемным дивизором. По предложению 2.5 [2] можно считать, что дивизор $-(K_S + C + B)$ полубилен. Пусть $\nu: S \rightarrow Z \cong \mathbb{P}^1$ – морфизм, заданный линейной системой $|-m(K_S + C + B)|$ для $m \gg 0$. Следующая лемма является основной при построении дополнений.

ЛЕММА 2.2 [2; леммы 2.20, 2.21]. Пусть (S, D) – проективная логповерхность со структурой расслоения на кривую $f: S \rightarrow Z$, где D – граница. Пусть

$C = [D] \neq 0$ и $B = \{D\}$. Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) существует сечение $C_1 \subset C$ для f ;
- 2) дивизор $K_C + \text{Diff}_C(B)$ n -полудополняем;
- 3) дивизор $K_S + C + \lfloor (n+1)B \rfloor / n$ численно тривиален на общем слое;
- 4) дивизор $-(K_S + C + B)$ численно эффективен;
- 5) дивизор $K_S + C + B$ логтерминален в (аналитической) окрестности дивизора C .

Тогда дивизор $K_S + C + B$ имеет n -дополнение. Более того, условия 1) и 3) можно заменить на условие 1'):

- 1') существует мультисечение $C_1 \subset C$ для f и S – рациональная поверхность.

Имеем три возможности для C .

А) Пусть $C_1 \subset C$ – это мультисечение для ν . Тогда вне зависимости от условия 4) на D по лемме 2.2 и предложению 1.7 имеем требуемые утверждения.

В) Пусть C имеет единственное сечение C_1 для ν . Лемма 2.2 не может быть применена только в случае, если в B найдется горизонтальная компонента B_i с коэффициентом $b_i \in \mathbb{Z}/(n+1)$ [2; лемма 2.27].

С другой стороны, если в B найдется горизонтальная компонента B_j с коэффициентом $b_j \notin \mathbb{Z}/(n+1)$, то рассмотрим дивизор $K_S + C + B - \varepsilon B_j$ при $0 < \varepsilon \ll 1$. Он имеет такие же n -дополнения, как и дивизор $K_S + C + B$ (см. определение 1.6). Поскольку $-(K_S + C + B) + \varepsilon B_j$ является численно эффективным и объемным дивизором, то теорема сведена к случаю I. Поэтому предполагаем, что все горизонтальные компоненты B имеют коэффициенты из множества $\mathbb{Z}/(n+1)$.

Предположим, что C – приводимый дивизор. Тогда по предложению 1.7 дивизор $K_C + \text{Diff}_C(B)$ 1- или 2-полудополняем. Если он 1-полудополняем, то $B^{\text{hor}} = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2$ или $B^{\text{hor}} = \frac{1}{2}B_1$ и, следовательно, имеем 2-дополнение для $K_S + C + B$. Если он 2-полудополняем, то имеем противоречие с условием 4).

Предположим, что $C = C_1$. Тогда из условия 4) имеем $n = 1, 3$. При $n = 1$, как и выше, существует 2-дополнение для $K_S + C + B$. Рассмотрим случай $n = 3$. Тогда $B^{\text{hor}} = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2$ или $B^{\text{hor}} = \frac{1}{2}B_1$. Дивизор $K_S + C + B$ не имеет 1-, 2-, 3-, 4- и 6-дополнения только в случае, когда дивизор $K_C + \text{Diff}_C(B)$ не имеет 1-, 2-, 4- и 6-дополнения, т.е. (после несложных вычислений)

$$(C, \text{Diff}_C(B)) = \left(\mathbb{P}^1, \left(\frac{3}{5} + \varepsilon_1 \right) P_1 + \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_2 \right) P_2 + \left(\frac{5}{7} + \varepsilon_3 \right) P_3 \right), \quad (*)$$

где $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 < \frac{2}{105}$ и $\varepsilon_i \geq 0$ для всех i . По лемме 2.2 дивизор $K_S + C + B$ имеет 12-дополнение (не всегда минимального индекса).

Пусть $\nu: S \xrightarrow{\psi_1} S' \longrightarrow Z$ – стягивание всех кривых в слоях ν (с помощью ЛПММ) таких, что $(K_S + C + \lfloor 13B \rfloor / 12) \cdot E > 0$. Так как $(K_S + C + \lfloor 13B \rfloor / 12) \cdot C = 0$, то ψ_1 не стягивает кривые, пересекающие C . Получили, что дивизор $(K_{S'} + C' + \lfloor 13B' \rfloor / 12)$ численно эффективен и, в частности, численно тривиален над Z , где C' и B' – образы C и B . Конус $\overline{\text{NE}}(S/Z)$ является полиэдральным и порождается стягиваемыми экстремальными кривыми [2; предложение 2.5]. Пусть $\nu: S \xrightarrow{\psi_1} S' \xrightarrow{\psi_2} \overline{S} \longrightarrow Z$ – стягивание всех кривых в слоях ν ,

непересекающих C' . Тогда $\rho(\overline{S}/Z) = 1$. Пара $(\overline{C}, \text{Diff}_{\overline{C}}(\overline{B}))$ является такой же, как и в (*), где $\overline{C}$ и $\overline{B}$ – образы C' и B' . Заметим, что либо $\text{Diff}_{\overline{C}}(0) = 0$, либо $\text{Diff}_{\overline{C}}(0) = \frac{2}{3}P_2$ и $\varepsilon_2 = 0$.

i) Рассмотрим случай $\text{Diff}_{\overline{C}}(0) = 0$. Так как $\overline{C}\overline{B}^{\text{hor}} = 0$, то $\overline{C}^2 \leq 0$. Следовательно, при $m \gg 0$ линейная система $|\overline{C} + mf|$ задает бирациональный морфизм $\psi: \overline{S} \rightarrow \mathbb{F}_k$, где f – общий слой [9; предложение 1.10]. Получили $\overline{S} \cong \mathbb{F}_k$.

ii) Рассмотрим случай $\text{Diff}_{\overline{C}}(0) = \frac{2}{3}P_2$ и $\varepsilon_2 = 0$. Пусть $\phi: \overline{S}' \rightarrow \overline{S}$ – раздутие с единственной исключительной кривой в точке P_2 , после которого $\text{Sing } \overline{S}' \cap \overline{C}' = \emptyset$ и дивизор $K_{\overline{S}'}$ ϕ -численно эффективен. Положим $f_2 = \text{Exc } \phi$. Аналогично предыдущему случаю, линейная система $|\overline{C}' + mf|$ задает бирациональный морфизм $\psi: \overline{S}' \rightarrow \mathbb{F}_k$. Пусть $E = \text{Exc } \psi$, $\widehat{D} = \psi(\overline{C}') + \lfloor 13\psi(\overline{B}') \rfloor / 12$ и $\psi(E) = P$. Тогда либо

$$(\mathbb{F}_k \ni P, \widehat{D}) \cong_{\text{an}} \left(\mathbb{C}_{x,y}^2 \ni 0, \frac{2}{3}\{y = 0\} + \frac{1}{2}\{x(x + y^t) = 0\} \right),$$

либо

$$(\mathbb{F}_k \ni P, \widehat{D}) \cong_{\text{an}} \left(\mathbb{C}_{x,y}^2 \ni 0, \frac{2}{3}\{y = 0\} + \frac{1}{2}\{x^2 + y^t = 0\} \right).$$

Так как $a(E, \widehat{D}) = 0$ и $f_2^2 < -1$, то ψ является взвешенным раздутием с весами $(1, 3)$ или $(2, 3)$ (ср. [9; лемма 5.5]). При раздутии с весами $(2, 3)$ во втором случае должно выполняться условие $t \geq 2$. В следующем примере подведен итог выше-сказанному.

ПРИМЕР 2.3. а) Пусть

$$(\mathbb{F}_k, D^+) = \left(\mathbb{F}_k, E_\infty + \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_2 + \frac{7}{12}f_1 + \frac{2}{3}f_2 + \frac{3}{4}f_3 \right),$$

где E_∞ – минимальное сечение, E_i – нулевое сечение, f_i – слой. Пусть $h: S \rightarrow \mathbb{F}_k$ – бирациональное стягивание:

$$K_S + \widetilde{E}_\infty + \frac{1}{2}\widetilde{E}_1 + \frac{1}{2}\widetilde{E}_2 + \frac{7}{12}\widetilde{f}_1 + \frac{2}{3}\widetilde{f}_2 + \frac{3}{4}\widetilde{f}_3 + \sum a_i \Delta_i = h^*(K_{\mathbb{F}_k} + D^+) \equiv 0.$$

Предположим, что $a_i \in \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 1) \cup \mathbb{Z}/12$, $h(\Delta_i) \notin E_\infty$ для всех i . Поскольку пара $(\mathbb{F}_k, D^+)$ логтерминальна по Кавамате вне E_∞ , то по лемме 3.1.9 [3] таких поверхностей S конечное число. Логповерхность

$$\begin{aligned} (S, D) = & \left(S, \widetilde{E}_\infty + \frac{1}{2}\widetilde{E}_1 + \frac{1}{2}\widetilde{E}_2 + \left(\frac{3}{5} + \varepsilon_1 \right) \widetilde{f}_1 + \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_2 \right) \widetilde{f}_2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{5}{7} + \varepsilon_3 \right) \widetilde{f}_3 + \sum_{i: a_i \geq 1/2} a_i \Delta_i \right) \end{aligned}$$

удовлетворяет требованиям теоремы 2.1, где $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leq \frac{2}{105}$ и $\varepsilon_i \geq 0$ для всех i . При $\frac{5}{7} + \varepsilon_3 < \frac{8}{11}$ имеем 10-дополнение для $K_S + D$, а при $\frac{5}{7} + \varepsilon_3 \geq \frac{8}{11}$ имеем 12-дополнение. Следует отметить, что вполне возможно небольшое изменение коэффициентов a_i и при $k > 0$ можно стянуть $\widetilde{E}_\infty$.

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

б) Пусть $\bar{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$ – экстремальное $\mathbb{P}^1$ -расслоение (в общей точке), т.е.

$$\rho(\bar{S}/\mathbb{P}^1) = 1.$$

Предположим, что $\text{Sing } \bar{S} \subset f_2$, где слой f_2 изображен на одном из рис. 1–3.

Если рассмотреть минимальное разрешение поверхности $\bar{S}$, а затем стянуть все (-1) кривые, не пересекающие собственный прообраз $\bar{E}_\infty$, то получим $\mathbb{F}_k$. На линейчатой поверхности $\mathbb{F}_k$ образ $\bar{E}_\infty$ будет минимальным сечением, образы $\bar{B}_1$ и $\bar{B}_2$ с рис. 1, 2 будут сечениями, а образ $\bar{B}_1$ с рис. 3 будет 2-мультисечением.

Рассмотрим логповерхность

$$(\bar{S}, D^+) = \left(\bar{S}, \bar{E}_\infty + \bar{B} + \frac{7}{12}f_1 + \frac{3}{4}f_3 \right),$$

где $\bar{B} = \frac{1}{2}\bar{B}_1 + \frac{1}{2}\bar{B}_2$ (в случае рис. 1 или 2) или $\bar{B} = \frac{1}{2}\bar{B}_1$ (в случае рис. 3). Для нее аналогично п. 1) строятся бирациональные морфизмы $h: S \rightarrow \bar{S}$. Очевидно, что имеют место те же самые утверждения о строении h и о дополняемости $K_S + D$.

С) Пусть C лежит в слое ν . Положим $P = \nu(C)$ и $f = \nu^{-1}(P)$. Случай, когда общий слой – эллиптическая кривая, рассмотрен в III.B). Поэтому считаем, что общий слой ν является рациональной кривой. Дивизор $K_C + \text{Diff}_C(B)$ имеет n -полукомпное минимального индекса, где $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ (см. предложение 1.7).

Предположим, что существует горизонтальная компонента B_i с коэффициентом $b_i \notin \mathbb{Z}/(n+1)$. Тогда, рассматривая дивизор $K_S + C + B - \varepsilon B_i$, сводим задачу к случаю I. Поэтому предполагаем, что все горизонтальные компоненты B имеют коэффициенты из множества $\mathbb{Z}/(n+1)$. Покажем, что это невозможно.

Пусть $\nu: S \xrightarrow{\psi} S' \rightarrow Z$ — стягивание всех кривых в слое f , не лежащих в C . Положим $C' = \psi(C)$, $B' = \psi(B)$. Так как $K_S + C + B \equiv 0$ над Z , то $(C, \text{Diff}_C(B)) = (C', \text{Diff}_{C'}(B'))$.

Предположим, что C — приводимая кривая. Тогда $n = 1, 2$. Если $n = 1$, то по условию 4) коэффициенты всех горизонтальных компонент B равны $\frac{1}{2}$. Поскольку дивизор $K_{S'} + C' + B'$ дивизориально логтерминален и численно тривиален над Z , то в $\text{Diff}_{C'}(B')$ существует дивизор с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Противоречие с $n = 1$. Если $n = 2$, то имеем аналогичное противоречие.

Случай, когда C является неприводимой кривой, рассматривается таким же образом.

Случай III. Предположим, что $K_S + C + B \equiv 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть D является $\mathbb{Q}$ -дивизором на проективном многообразии X . Определим *численную размерность* дивизора D :

$$\nu_{\text{num}}(D) = \max\{\nu_{\text{num}}(D') \mid D' \geq 0, \text{Supp } D' \subseteq \text{Supp } D\}.$$

Линейная размерность (размерность Итаки) $\kappa(D)$ определяется аналогично.

Имеем $\kappa(B) = \nu_{\text{num}}(B)$ [2; предложение 2.12]. Рассмотрим по порядку все возможности для $\nu_{\text{num}}(B)$.

А) Пусть $\nu_{\text{num}}(B) = 2$. Конус $\overline{\text{NE}}(S)$ является полиэдральным и порождается стягиваемыми экстремальными кривыми, так как существует дивизор B' ($\text{Supp } B' \subseteq \text{Supp } B$), для которого дивизор $-(K_S + C + B) + \varepsilon B'$ является численно эффективным и объемным [2; предложение 2.5]. Пусть дивизор $K_C + \text{Diff}_C(B)$ n -полудополняем. Стянем все исключительные кривые E при условии $(K_S + C + \lfloor (n+1)B \rfloor / n) \cdot E > 0$. В итоге получим $\nu: S \xrightarrow{\psi} S' \xrightarrow{\nu'} Z \cong \mathbb{P}^1$ и $(K_{S'} + C' + \lfloor (n+1)B' \rfloor / n) \cdot f > 0$, где f — общий слой ν' , либо $\psi: S \rightarrow S'$ и $-(K_{S'} + C' + \lfloor (n+1)B' \rfloor / n)$ — численно эффективный дивизор. По построению никакая из компонент C не стягивается ψ и в первом случае C' не лежит в слоях ν' . Поэтому в первом случае C имеет горизонтальные компоненты для ν . Более того, так как $\nu_{\text{num}}(B) = 2$, то по условию 4) имеем $B^{\text{hor}} = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2$ или $B^{\text{hor}} = \frac{1}{2}B_1$. Таким образом, первый случай сведен к случаю II. В). В примере 2.3 была включена эта возможность.

Во втором случае вне зависимости от коэффициентов границы B доказано, что дивизор $K_{S'} + C' + \lfloor (n+1)B' \rfloor / n$ n -дополняем [2] (здесь существенно, что конус $\overline{\text{NE}}(S')$ является полиэдральным и порождается стягиваемыми экстремальными кривыми). По предложению 1.9 дивизор $K_S + C + B$ n -дополняем.

В) Пусть $\nu_{\text{num}}(B) = 1$. Тогда для некоторого B' ($\text{Supp } B' \subseteq \text{Supp } B$) линейная система $|B'|$ задает расслоение $\nu: S \rightarrow Y$ и дивизор B лежит в слоях. Если некоторая компонента C является сечением, то общий слой — это $\mathbb{P}^1$. Следовательно, существует мультисечение $C_1 \subset C$. По лемме 2.2 теорема доказана. Поэтому будем считать, что C лежит в слоях и общий слой — это эллиптическая кривая. Поступая, как и раньше, стянем кривые $E \not\subset \text{Supp } C$ такие,

что $(K_S + C + \lfloor (n+1)B \rfloor / n)E \geq 0$, где n – индекс полудополняемости для $K_S + \text{Diff}_C(B)$. В итоге получим $\nu: S \xrightarrow{\phi} S' \xrightarrow{\nu'} Y$, где все слои ν' являются неприводимыми, за исключением слоя, состоящего из C' . Пусть $\psi: S' \rightarrow S''$ – стягивание компонент C' . Получим модель с $\rho(S'') = 2$. Конус поверхности S'' имеет два экстремальных луча: слой ν' , (мульти)сечение E . Если $(K_{S''} + C'' + \lfloor (n+1)B'' \rfloor / n) \cdot E \leq 0$, то дивизор $-(K_{S'} + C' + \lfloor (n+1)B' \rfloor / n)$ численно эффективен. В этом случае теорема доказана в [2] вне зависимости от коэффициентов B . Если $(K_{S''} + C'' + \lfloor (n+1)B'' \rfloor / n) \cdot E > 0$, то имеем расслоение $\theta: S \rightarrow Z \cong \mathbb{P}^1$ и C содержит сечение для θ . Горизонтальная часть дивизора B для θ по условию 4) имеет вид $B^{\text{hor}} = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2$ или $B^{\text{hor}} = \frac{1}{2}B_1$. Поскольку $K_S + C + B \equiv 0$ над Y и $K_{S''} + C'' \equiv 0$ над Y , то $\text{Diff}_C(B) = \text{Diff}_{C''}(0)$. Следовательно, коэффициенты $\text{Diff}_C(B)$ являются стандартными. В частности, при $n = 1, 3$ имеем $\text{Diff}_C(B) = P_1 + P_2$ и $\text{Diff}_C(B) = \frac{2}{3}P_1 + \frac{2}{3}P_2 + \frac{2}{3}P_3$ соответственно. Поэтому по лемме 2.2 при $n = 1, 2, 3, 4, 6$ дивизор $K_S + C + B$ имеет 2-, 2-, 6-, 4-, 6-дополнение соответственно.

С) Пусть $\nu_{\text{num}}(B) = 0$, т.е. дивизор B стягивается. Тогда вне зависимости от коэффициентов границы D имеем требуемые утверждения [2].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Условие 3) теоремы 2.1 можно заменить на одно из более сильных следующих условий (см. [2; предложение 2.5]):

- 3¹) дивизор $-(K_S + D)$ объемен;
- 3²) конус $\overline{\text{NE}}(S)$ является полиэдральным и порождается стягиваемыми экстремальными кривыми;
- 3³) дивизор $-(K_S + D)$ полуобилен;
- 3⁴) существует стягивание $\nu: S \rightarrow Z$ такое, что если $(K + D) \cdot E = 0$, то $E \subset \text{Ex } \nu$.

В примере 2.3 логповерхности (S, D) удовлетворяют всем перечисленным условиям, конечно, кроме условия (3¹).

Следующее следствие является очень важным для приложений.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Пусть $(S, D = \sum d_i D_i)$ – проективная логповерхность. Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) дивизор $K_S + D$ логтерминален по Кавамате;
- 2) $-(K_S + D)$ – численно эффективный дивизор;
- 3) существует $\mathbb{Q}$ -дополнение для $K_S + D$;
- 4) $d_i \geq \frac{1}{2}$ для всех i ;
- 5) существует эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D' \geq D$ такой, что $-(K_S + D')$ – численно эффективный дивизор и пара (S, D') не логтерминальна по Кавамате.

Тогда для $K_S + D$ существует 1-, 2-, 3-, 4- или 6-нелогтерминальное по Кавамате дополнение, кроме случаев, возникающих в примере 2.3.

Кроме того, если имеется бесконечно много дивизоров E с дискрепантностью $a(E, D') = -1$ и пара (S, D') логканонична, то для $K_S + D$ существует 1- или 2-нелогтерминальное по Кавамате дополнение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя дивизор D' на $D + \lambda(D' - D)$ для подходящего $\lambda > 0$, будем считать, что дивизор $K_S + D'$ логканоничен, но не логтерминален по Кавамате.

Сначала докажем, что для дивизора $K_S + D'$ существует $\mathbb{Q}$ -дополнение. Если дивизор $-(K_S + D)$ объемный, то конус $\overline{\text{NE}}(S)$ является полиэдральным и порождается стягиваемыми экстремальными кривыми, и имеем требуемое [2; предложение 2.5]. Поэтому можно считать, что линейная система $|-m(K_S + D)|$ для $m \gg 0$ задает расслоение $\nu: S \rightarrow Z$. Добавляя к $K_S + D'$ нужное количество общих слоев морфизма ν , имеем требуемое.

Пусть $f: \tilde{S} \rightarrow S$ — минимальная логтерминальная модификация пары (S, D') [3; определение 3.1.3]. Имеем

$$K_{\tilde{S}} + \sum E_i + \lfloor \tilde{D}' \rfloor + \{\tilde{D}'\} = f^*(K_S + D'),$$

где $\tilde{D}'$ — собственный прообраз D' . Положим

$$\tilde{D} = \sum E_i + \lfloor \tilde{D}' \rfloor + \sum_{i: \text{Supp } \tilde{D}_i \not\subset \text{Supp } \lfloor \tilde{D}' \rfloor} d_i \tilde{D}_i,$$

где $\tilde{D}_i$ — собственные прообразы D_i . Таким образом, утверждение следствия надо доказать для дивизора $K_{\tilde{S}} + \tilde{D}$. Если дивизор $-(K_{\tilde{S}} + \tilde{D})$ численно эффективен, то по теореме 2.1 все доказано. Поэтому будем считать, что $-(K_{\tilde{S}} + \tilde{D})$ — не численно эффективный дивизор. $\mathbb{Q}$ -дополнение для дивизора $K_{\tilde{S}} + \tilde{D}$ обозначим через $\tilde{\Theta}$. Можно считать, что $\lfloor \tilde{\Theta} \rfloor = \lfloor \tilde{D} \rfloor$.

Докажем, что можно последовательно стянуть все исключительные кривые E , для которых $(K_{\tilde{S}} + \tilde{D}) \cdot E > 0$.

А) Предположим, что $\nu_{\text{num}}(\{\tilde{\Theta}\}) = 2$. Тогда, как и в доказательстве теоремы 2.1 (случай III.A), конус $\overline{\text{NE}}(S)$ является полиэдральным и порождается стягиваемыми экстремальными кривыми, что и требовалось доказать.

В) Предположим, что $\nu_{\text{num}}(\{\tilde{\Theta}\}) = 1$. По предложению 2.12 [2] для некоторого дивизора $\tilde{\Theta}'$ ($\text{Supp } \tilde{\Theta}' \subset \text{Supp } \{\tilde{\Theta}\}$) линейная система $|\tilde{\Theta}'|$ задает расслоение $\nu: \tilde{S} \rightarrow Z$ и дивизор $\{\tilde{\Theta}\}$ лежит в слоях морфизма ν . Если $(K_{\tilde{S}} + \tilde{D}) \cdot E > 0$, то кривая E лежит в слоях морфизма ν . Поэтому ее можно стянуть.

С) Предположим, что $\nu_{\text{num}}(\{\tilde{\Theta}\}) = 0$. Тогда по определению дивизор $\{\tilde{\Theta}\}$ стягивается.

Итак, получили бирациональный морфизм $\phi: \tilde{S} \rightarrow \overline{S}$. Ясно, что ϕ не стягивает компонент из $\lfloor \tilde{D} \rfloor$, и на каждом шаге стягиваемая кривая пересекает некоторую компоненту $\tilde{\Theta}_1$ из $\lfloor \tilde{D} \rfloor$. Положим $\overline{D} = \phi(\tilde{D})$.

Остается показать, что n -дополнение $\overline{D}^+$ для $K_{\overline{S}} + \overline{D}$ поднимается до n -дополнения для $K_{\tilde{S}} + \tilde{D}$ ($n = 1, 2, 3, 4$ или 6). Положим

$$K_{\tilde{S}} + \tilde{D}^+ = \phi^*(K_{\overline{S}} + \overline{D}^+).$$

Надо доказать, что

$$\lfloor \tilde{D} \rfloor + \frac{\lfloor (n+1)\{\tilde{D}\} \rfloor}{n} \leq \lfloor \tilde{D}^+ \rfloor + \{\tilde{D}^+\}. \quad (**)$$

По вышесказанному это требование достаточно проверить в случае, когда ϕ является стягиванием единственной кривой E . Из классификации двумерных логтерминальных пар [3; теорема 2.1.2] и условия 4) получаем, что через точку $P \in \bar{S}$, в которую стягивается E , проходит не более одного дивизора из $\{\bar{D}\}$, и эта точка является циклической факторособенностью. Пусть $d_1 \bar{D}_1$ является дивизором, проходящим через P . Если коэффициент при дивизоре $\bar{D}_1$ в $\bar{D}^+$ больше d_1 , то мы рассматриваем его вместо d_1 . Учитывая, что дивизор $K_{[\bar{D}]} + \text{Diff}_{[\bar{D}]}(\{\bar{D}\})$ n -лудополняем, имеем следующие случаи (случай $n = 1$ очевиден).

- а) Если $(\bar{S} \ni P, \bar{\Theta}_1 + d_1 \bar{D}_1) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \{x = 0\} + d_1 \{y = 0\}) / \mathbb{Z}_2(1, 1)$ и $n = 4$, то по предложению 1.9 требование (**) надо проверить для $d_1 \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{5})$.
- б) Если $(\bar{S} \ni P, \bar{\Theta}_1 + d_1 \bar{D}_1) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \{x = 0\} + d_1 \{y = 0\}) / \mathbb{Z}_2(1, 1)$ и $n = 6$, то по предложению 1.9 требование (**) надо проверить для $d_1 \in (\frac{2}{3}, \frac{5}{7})$.
- с) Если $(\bar{S} \ni P, \bar{\Theta}_1 + d_1 \bar{D}_1) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \{x = 0\} + d_1 \{y = 0\}) / \mathbb{Z}_3(q, 1)$ и $n = 6$, то по предложению 1.9 требование (**) надо проверить для $d_1 \in (\frac{1}{2}, \frac{4}{7})$.
- д) Если $(\bar{S} \ni P, \bar{\Theta}_1 + d_1 \bar{D}_1) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \{x = 0\} + d_1 \{y = 0\})$, то требование (**) равносильно следующему:

$$-\frac{\lfloor (n+1)a(E, \bar{\Theta}_1 + d_1 \bar{D}_1) \rfloor}{n} \leq -a\left(E, \bar{\Theta}_1 + \frac{\lfloor (n+1)d_1 \rfloor}{n} \bar{D}_1\right). \quad (***)$$

Учитывая условие $a(E, \bar{\Theta}_1 + d_1 \bar{D}_1) \leq -\frac{1}{2}$, получаем, что ϕ является торическим раздутием. Требование (***) в случаях а)–с) проверяется непосредственно. В случае д) веса взвешенного раздутия ϕ обозначим через (α, β) . Тогда $(\alpha, \beta) = (\alpha, 1)$ и $d_1 \geq \frac{1}{2}$, либо $(\alpha, \beta) = (\alpha, 2)$, $d_1 \geq \frac{3}{4}$ и $n = 4$, либо $(\alpha, \beta) = (\alpha, 3)$, $d_1 \geq \frac{5}{6}$ и $n = 6$. Теперь простые вычисления показывают, что требование (***) также выполняется.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. *Если в формулировке следствия 2.6 отказаться от условия 4) на границу D , то для $K_S + D$ существует не логтерминальное по Кавамате n -дополнение, где $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 35, 36, 40, 41, 42, 43, 56$ или 57.*

Кроме того, если имеется бесконечно много дивизоров E с дискрепантностью $a(E, D') = -1$ и пара (S, D') логканонична, то для $K_S + D$ существует 1-, 2- или 6-нелогтерминальное по Кавамате дополнение.

Из доказательства следствия 2.6 получаем, что дивизор $K_S + D'$ имеет $\mathbb{Q}$ -дополнение. Поэтому по теореме 2.3 [2] имеем требуемое.

§ 3. Исключительные нерациональные логповерхности

ТЕОРЕМА 3.1 (ср. [3; предложение 9.2.2]). *Пусть $(S, D = \sum d_i D_i)$ – проективная логповерхность, где D – граница. Предположим, что выполнены следующие условия:*

- 1) *существует $\mathbb{Q}$ -дополнение $\Theta = \sum \theta_i \Theta_i$ для $K_S + D$;*
- 2) *поверхность S нерациональна и пара (S, D) исключительна;*
- 3) *дивизор $\Theta \neq 0$ или S имеет недювалевскую особенность.*

Тогда для $K_S + D$ существует 2-, 3-, 4- или 6-дополнение. Более того, имеем один из следующих двух случаев:

- а) $S \cong C \times \mathbb{P}^1$, где C – эллиптическая кривая, а D_i являются сечениями соответствующего $\mathbb{P}^1$ -расслоения;
- б) $S \cong \mathbb{P}_C(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ – неразложимый пучок степени 1 на эллиптической кривой C , соответствующий расширению

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_C(O) \longrightarrow 0;$$

тогда $D_i \sim 2E - f^*(O + t_i)$ или $D_i \sim 4E - 2f^*O$, где E – сечение $f: S \rightarrow C$, а t_i – элемент порядка 2 в $\text{Pic}(C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\phi: \tilde{S} \rightarrow S$ – минимальное разрешение. Тогда

$$K_{\tilde{S}} + \tilde{\Theta} = \phi^*(K_S + \Theta) \equiv 0.$$

Условие 3) дает, что $\tilde{\Theta} \neq 0$, т.е. $\kappa(\tilde{S}) = -\infty$. Пусть $S_{\min}$ – минимальная модель для $\tilde{S}$. По условию $S_{\min}$ является минимальной линейчатой поверхностью над кривой C с $p_a(C) \geq 1$. Образ дивизора $\tilde{\Theta}$ на $S_{\min}$ обозначим через $\bar{\Theta}$. Если на $S_{\min}$ существует неприводимая кривая E с $E^2 < 0$, то

$$(K_{S_{\min}} + E) \cdot E = \left(- \sum_{i: \bar{\Theta}_i \neq E} \theta_i \bar{\Theta}_i \right) \cdot E + \varepsilon E^2 < 0,$$

где $\varepsilon > 0$. Отсюда $p_a(E) = 0$ и имеем противоречие с $p_a(C) \geq 1$.

Поскольку $0 \geq 8 - 8p_a(C) = K_{S_{\min}}^2 = \bar{\Theta}^2 \geq 0$, то $p_a(C) = 1$, $\bar{\Theta}_i^2 = \bar{\Theta}_i \bar{\Theta}_j = 0$ для всех i, j . Так как $\theta_i < 1$ для всех i , то пара $(S_{\min}, \bar{\Theta})$ является терминальной. Поэтому $\mathbb{P}_C(\mathcal{E}) \cong S_{\min} \cong \tilde{S} \cong S$, где $\deg \mathcal{E} \geq 0$. Из [12; гл. 5] и [2; примеры 1.1, 2.1] получаем оставшиеся утверждения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2 [2; пример 2.1]. В теореме 3.1 в случае б) линейная система $|4E - 2f^*O|$ задает структуру эллиптического расслоения с тремя вырожденными (двукратными) слоями, которые линейно эквиваленты $2E - f^*(O + t_i)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. В условиях теоремы 3.1 имеем $\delta(S, D) = 0$.

§ 4. Построение моделей для логповерхностей дель Пеццо с $\delta = 0$

Классификация исключительных логповерхностей с $\delta = 1, 2$ получена в работах [2], [9]. Исключительные нерациональные логповерхности полностью изучены в теореме 3.1. Таким образом, остается изучить последний оставшийся случай – исключительные рациональные логповерхности с $\delta = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пара (S, D) называется *логповерхностью дель Пеццо*, где D является границей, если выполнены следующие условия:

- 1) $-(K_S + D)$ – численно эффективный дивизор;
- 2) $K_S + D$ – логканонический дивизор;
- 3) существует $\mathbb{Q}$ -дополнение для $K_S + D$.

Рассмотрим предельную возможность.

ПРИМЕР 4.2 [13; замечание 1.2], [14; примеры 4.2, 5.3]. а) Пусть $\bar{S} = C \times C$, где $C = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \varepsilon_3\mathbb{Z})$ – эллиптическая кривая и ε_3 – первообразный корень степени 3 из 1. Группа $\mathbb{Z}_3$ действует на кривой C умножением на ε_3 . Тогда $S = \bar{S}/\mathbb{Z}_3$ является поверхностью с $3K_S \sim 0$, $\rho(S) = 4$, и $\text{Sing } S$ состоит из девяти особенностей $\frac{1}{3}(1, 1)$.

б) Пусть поверхность $\bar{S} = J(C)$ является якобианом гиперэллиптической кривой $C: y^2 = x^5 - 1$ рода 2. Группа $\mathbb{Z}_5$ порождена автоморфизмом $(x, y) \mapsto (\varepsilon_5 x, y)$ кривой C , где ε_5 – первообразный корень степени 5 из 1. Тогда $S = \bar{S}/\mathbb{Z}_5$ является поверхностью с $5K_S \sim 0$, $\rho(S) = 2$, и $\text{Sing } S$ состоит из пяти особенностей $\frac{1}{5}(2, 1)$.

с) Рассмотрим на $\mathbb{P}^2$ три неприводимые кривые: $\bar{E}_1 \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, $\bar{E}_2 \sim \bar{E}_3 \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)$. Кривые $\bar{E}_2$ и $\bar{E}_3$ имеют по три обыкновенных двойных точки Q_5, Q_6, Q_7 и Q_8, Q_9, Q_{10} соответственно. Прямая $\bar{E}_1$ пересекает кривые $\bar{E}_2$ и $\bar{E}_3$ в точках Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 . Кривая $\bar{E}_2$ пересекает $\bar{E}_3$ в точках $Q_1, \dots, Q_{10}$. Раздуем $\mathbb{P}^2$ в точках $Q_1, \dots, Q_{10}$ и стянем собственные прообразы кривых $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$. Получим поверхность $\tilde{S}$ с $3K_{\tilde{S}} \sim 0$, $\rho(\tilde{S}) = 8$, и $\text{Sing } \tilde{S}$ состоит из трех особенностей $\frac{1}{3}(1, 1)$. Стягивая (-2) -кривые на $\tilde{S}$, получаем поверхность S с $3K_S \sim 0$ и с тремя недювалевскими особенностями $\frac{1}{3}(1, 1)$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть S – рациональная исключительная логповерхность дель Пеццо, $D = 0$. Предположим, что $a(E, 0) > -\frac{1}{2}$ для всех E и не существует $\mathbb{Q}$ -дополнения $\Theta = \sum \frac{1}{2}\Theta_i$ для K_S . Тогда S является поверхностью из примера 4.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поверхность S должна иметь недювалевскую особенность, иначе $h^0(S, \mathcal{O}_S(-K_S)) \geq 1$.

ЛЕММА 4.4. Пусть $(X \ni P)$ – двумерная, недювалевская особенность. Предположим, что

$$M = \min\{a(E, 0) \mid E - \text{исключительный дивизор}\} > -\frac{1}{2}.$$

Тогда $(X \ni P) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0)/\mathbb{Z}_{2n+1}(n, 1)$, где $n \geq 1$. В частности, $M = -\frac{n}{2n+1} \leq -\frac{1}{3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(X \ni P)$ – нециклическая особенность, то раздутие центральной вершины графа минимального разрешения дает дискрепантность меньше или равную $-\frac{1}{2}$. Поэтому $(X \ni P)$ является циклической особенностью. Пусть $\tilde{X} \rightarrow X$ является раздутием с единственной исключительной кривой E , для которой индекс самопересечения k на минимальном разрешении $(X \ni P)$ не больше -3 . Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &< a(E, 0) = -1 + \frac{-2 + \text{Diff}_E(0)}{E^2} \\ &= -1 + \frac{-2 + (m_1 - 1)/m_1 + (m_2 - 1)/m_2}{-k + q_1/m_1 + q_2/m_2}. \end{aligned}$$

Отсюда $(m_1, q_1) = (1, 0)$, $(m_2, q_2) = (m_2, m_2 - 1)$, $k = 3$.

Пусть $P_1, \dots, P_r$ — недовалевские особенности S типов

$$\frac{1}{2n_1 + 1}(n_1, 1), \dots, \frac{1}{2n_r + 1}(n_r, 1).$$

Пусть $f: \tilde{S} \rightarrow S$ — минимальное разрешение. Тогда $K_{\tilde{S}} + \Delta = f^* K_S$. По лемме 4.4

$$h^2(\tilde{S}, \mathcal{O}_{\tilde{S}}(-2K_{\tilde{S}} - \lfloor 3\Delta \rfloor)) = h^0(\tilde{S}, \mathcal{O}_{\tilde{S}}(3K_{\tilde{S}} + \lfloor 3\Delta \rfloor)) = 0,$$

кроме случая $n_1 = \dots = n_r = 1$ и $K_S \equiv 0$. Найдем оставшиеся возможности для $n_1, \dots, n_r$. По теореме Римана–Роха и формуле Нётера имеем систему

$$\begin{cases} 0 = h^0(\tilde{S}, \mathcal{O}_{\tilde{S}}(-2K_{\tilde{S}} - \lfloor 3\Delta \rfloor)) = 3K_S^2 + r + 1 - 3 \cdot \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{2n_i + 1} \\ \quad + h^1(\tilde{S}, \mathcal{O}_{\tilde{S}}(-2K_{\tilde{S}} - \lfloor 3\Delta \rfloor)); \\ K_S^2 - \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{2n_i + 1} + \rho(S) + n_1 + \dots + n_r \leq 10. \end{cases}$$

ЛЕММА 4.5 [15; следствие 9.2]. Пусть X — рациональная поверхность с лог-терминальными особенностями и с $\rho(X) = 1$. Тогда

$$\sum_{P \in \text{Sing } X} \frac{m_P - 1}{m_P} \leq 3,$$

где m_P — порядок локальной фундаментальной группы $\pi_1(U_P \setminus \{P\})$, U_P — достаточно малая окрестность точки P .

Учитывая, что $K_S^2 \geq 0$, и лемму 4.5, из системы получаем $K_S^2 = 0$, $\rho(S) = 2$, $n_1 = \dots = n_5 = 2$, $\text{Sing } S = \{P_1, \dots, P_5\}$. Более того, имеем $K_S \equiv 0$. Действительно, пусть $K_S \neq 0$. Если существует кривая E на S с $E^2 < 0$, то после ее стягивания имеем противоречие с леммой 4.5. Поэтому имеем $\mathbb{P}^1$ -расслоение (в общей точке) $S \rightarrow Z$, но это невозможно из-за классификации таких расслоений [3; теорема 7.1.12].

Пусть $\tilde{S} \rightarrow S$ — каноническое накрытие. Имеем два случая [13; теорема С].

А) Пусть $\tilde{S}$ является абелевой поверхностью. Тогда из теоремы С [13] следует, что S является поверхностью из примера 4.2, а), б). При этом $n_1 = \dots = n_9 = 1$ или $n_1 = \dots = n_5 = 2$.

В) Пусть $\tilde{S}$ является КЗ-поверхностью. Тогда из [14; теорема 5.1] получаем, что $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. Ясно, что одна из минимальных моделей поверхности $\tilde{S}$ будет $S_{\min} \cong \mathbb{P}^2$. Пусть $\varphi: \tilde{S} \rightarrow S_{\min}$ — соответствующий бирациональный морфизм. Положим $\bar{\Delta} = \varphi(\Delta) = \frac{1}{3}(\varphi(E_1) + \varphi(E_2) + \varphi(E_3))$, где E_i является исключительной кривой над точкой P_i . Пусть φ стягивает кривую E , отличную от E_i для всех i . Тогда пара $(S_{\min} \ni \bar{P}, \bar{\Delta})$ будет канонической, где $\bar{P} = \varphi(E)$. Очевидно, что пара $(S_{\min} \ni \bar{P}, \bar{\Delta})$ аналитически изоморфна $(\mathbb{C}^2 \ni 0, \frac{1}{3}\{x^3 + y^l = 0\})$, где $l = 3, 4$, или $(\mathbb{C}^2 \ni 0, \frac{1}{3}\{x^3 + xy^3 = 0\})$, или $(\mathbb{C}^2 \ni 0, \frac{1}{3}\{x^2y + y^4 = 0\})$.

ЛЕММА 4.6. *Существует поверхность S' , где $\varphi: S \xrightarrow{\psi} S' \rightarrow S_{\min}$, на которой $\psi(E_i)$ будет $(+1)$ -неособой рациональной кривой для некоторого i .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\overline{\Delta} = \frac{1}{3}\overline{E}_j$, то $p_a(\overline{E}_j) = 28$. Кривая $\overline{E}_j$ должна иметь две точки кратности 4 и восемь точек кратности 3, но это невозможно. Поэтому существует кривая $\overline{E}_j$ такая, что $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(5) - \overline{E}_j)$ – численно эффективный дивизор. После раздутия особенностей кривой $\overline{E}_j$ получаем кривую с индексом самопересечения большим или равным $+1$, что и требовалось доказать.

Можно, считать, что линейная система $|\psi(E_i)|$ задает бирациональный морфизм $S' \rightarrow S_{\min}$ [9; предложение 1.10] и $\overline{\Delta} = \frac{1}{3}\overline{E}_1 + \frac{1}{3}\overline{E}_2 + \frac{1}{3}\overline{E}_3$.

С помощью перебора всех вариантов для $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \overline{E}_3$ на $S_{\min} \cong \mathbb{P}^2$ легко показать, что на $\tilde{S}$ существует четыре попарно непересекающиеся (-1) -кривые, каждая из которых пересекает все E_i . Пусть S' получается из $\tilde{S}$ их стягиванием. Тогда имеем случай с) из примера 4.2.

Классификация логповерхностей дель Пеццо очень важна для изучения трехмерных экстремальных стягиваний и особенностей, так как существует индукция от (локального) трехмерного стягивания к двумерному логмногообразию [2], [4], [8]. Напомним, что в результате индукции получаются логповерхности (S, D) такие, что дивизор $-(K_S + D)$ численно эффективен и объемен, а коэффициенты D являются стандартными. Для того чтобы получить эффективную классификацию, исключительные логповерхности дель Пеццо с $\delta = 1, 2$ рассматриваются в более широком классе коэффициентов $-\Phi_m$ [2], [9]. При этом условие объемности заменяется, например, на требование существования $\mathbb{Q}$ -дополнения для $K_S + D$. Последнее позволяет получить классификацию логповерхностей Энриквеса с $\delta = 1, 2$ [16], [17]. Поэтому в случае $\delta = 0$ множество Φ_{sm} будет расширено до Φ_i . Сейчас основная цель – это построить модели с числом Пикара равным 1 или 2 для (S, D) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Пусть (S, D) – исключительная логповерхность дель Пеццо с $\delta(S, D) = 0$, где S – рациональная поверхность. Тогда пара (S, D) типа Φ_i называется *исключительной логповерхностью дель Пеццо типа Φ_i* , где $i = 2, 3, 4, 5, 6$.

Рассмотрим три случая.

Случай I. Пусть $i = 3, 4, 5, 6$. Положим

$$\widehat{D} = \sum_{d_k \geq (i-1)/i} c(D_k)D_k + \sum_{d_k < (i-1)/i} d_k D_k,$$

где $c(D_k) = c(S, D - d_k D_k; D_k)$ – логканонический порог дивизора D_k для логпары $(S, D - d_k D_k)$. По предложению 1.15 дивизор $K_S + \widehat{D}$ является логканоническим. По следствию 2.6 дивизор $-(K_S + \widehat{D})$ не является численно эффективным. Предположим, что $\rho(S) \geq 3$. Тогда существует исключительная кривая E с $(K_S + \widehat{D}) \cdot E > 0$ (см. [2; доказательство теоремы 4.1]). Пусть $\varphi: S \rightarrow S'$ – это стягивание E . В отличие от случая $\delta(S, D) \geq 1$ бирациональный морфизм φ может стянуть кривую из D с коэффициентом больше или равным $\frac{i-1}{i}$.

ЛЕММА 4.8. Пусть $D = \alpha E + D^\circ$, $\alpha \geq \frac{i-1}{i}$ и $P = \varphi(E)$. Тогда имеем один из следующих случаев:

- 1) $(S' \ni P, \varphi(D)) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \frac{1}{2}\{x=0\} + (\frac{3}{4} + \varepsilon)\{x+y^3=0\})$, где $\varepsilon < \frac{1}{60}$ и $i = 4$, морфизм φ является взвешенным раздутием с весами $(3, 1)$;
- 2) $(S' \ni P, \varphi(D)) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, (\frac{2}{3} + \varepsilon_1)\{x=0\} + (\frac{2}{3} + \varepsilon_2)\{x+y^2=0\})$, где $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \frac{1}{24}$ и $i = 3$, морфизм φ является взвешенным раздутием с весами $(2, 1)$;
- 3) $(S' \ni P, \varphi(D)) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \frac{1}{2}\{x=0\} + (\frac{2}{3} + \varepsilon)\{x+y^l=0\})$, где $l = 3, 4$, $i = 3$ и $\varepsilon < \frac{3}{4l} - \frac{1}{6}$, морфизм φ является взвешенным раздутием с весами $(l, 1)$;
- 4) Пусть $(S' \ni P, \varphi(D)) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, (\frac{i-1}{i} + \varepsilon)\{x^2+y^3=0\})$, где $i = 5, 4, 3$, $\varepsilon < \frac{1}{180}$ при $i = 5$, $\varepsilon < \frac{1}{20}$ при $i = 4$, $\varepsilon < \frac{1}{12}$ при $i = 3$, морфизм φ является взвешенным раздутием с весами $(3, 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что E должна пересекаться с кривой из D° с коэффициентом больше или равным $\frac{i-1}{i}$. Рассмотрим случай, когда $i = 3$ и на E существует точка из п. 2) предложения 1.15 при $k = 3$. Тогда

$$(K_S + D) \cdot E > (K_S + E + D^\circ) \cdot E = -2 + \deg \text{Diff}_E(0) + D^\circ \cdot E \geq -2 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} > 0.$$

Противоречие. Поэтому E имеет коэффициент 1 в $\widehat{D}$. Имеем три возможности.

i) Предположим, что $\text{Diff}_E(0) = 0$. Тогда $(S' \ni P) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0)/\mathbb{Z}_n(1, 1)$. Поскольку $(K_S + \widehat{D}) \cdot E > 0$ и $(K_S + D) \cdot E \leq 0$, то простейшие вычисления показывают, что возможность не реализуется.

ii) Предположим, что $\text{Diff}_E(0) = \frac{k-1}{k}P$, где $k \geq 2$. Рассмотрим, например, случай $i = 3$. Поскольку $\deg \text{Diff}_E(D^\circ) < 2$ и $\deg \text{Diff}_E(\widehat{D} - E) > 2$, то $k = 2, 3, 4, 5$ и P — неособая точка S' . Более того, получаем

- a) $\text{Diff}_E(D^\circ) = \frac{1}{2}P + (\frac{2}{3} + \varepsilon_1)P_1 + (\frac{2}{3} + \varepsilon_2)P_2$ или
- b) $\text{Diff}_E(D^\circ) = \frac{k-1}{k}P + \frac{1}{2}P_1 + (\frac{2}{3} + \varepsilon)P_2$, где $k = 3, 4, 5$.

Остается проверить, что $-a(E, \varphi(D)) < \frac{i}{i+1}$. Получаем случаи 2) и 3).

iii) Предположим, что

$$\text{Diff}_E(0) = \frac{k_1-1}{k_1}P_1 + \frac{k_2-1}{k_2}P_2,$$

где $k_1, k_2 \geq 2$. Поскольку $\deg \text{Diff}_E(D^\circ) < 2$, то можно считать, что $k_1 = 2$. Аналогичные вычисления дают случай 4).

Случай II. При $i = 4, 5, 6$ для поверхности S' повторим вышеприведенную процедуру. При $i = 4$ случай, когда на исключительной кривой лежит точка из п. 1) леммы 4.8, отсекается, как и случай 2) из предложения 1.15 при $k = 3$ (см. доказательство леммы 4.8). В результате приходим к поверхности $\overline{S}$ с $\rho(\overline{S}) = 1$ или к поверхности $\overline{S}$ с $\rho(\overline{S}) = 2$ и со структурой $\mathbb{P}^1$ -расслоения.

Пусть теперь $i = 3$. Положим $D' = \sum d'_k D'_k = \varphi(D)$. Повторим вышеприведенную процедуру. Дивизор $\widehat{D}'$ определяется как и дивизор $\widehat{D}$, но если на D'_k лежит точка из п. 2) леммы 4.8, то положим $c(D'_k) = \frac{3}{4}$.

Пусть $\varphi': S' \rightarrow S''$ — это стягивание кривой E' из D' с коэффициентом больше или равным $\frac{2}{3}$. Появились два новых случая.

- i) Как и ранее, случай, когда на E' лежит точка из п. 3) леммы 4.8, невозможен.
- ii) Предположим, что на E' лежит точка из п. 2) леммы 4.8. Тогда докажем, что $\text{Diff}_{E'}(\widehat{D}' - \frac{3}{4}E') \neq \frac{3}{2}Q$, где Q — точка на E' . Действительно, в противном случае имеем

$$\begin{cases} (K_{S'} + \widehat{D}') \cdot E' = \left(K_{S'} + \frac{3}{4}E' + \frac{3}{4}D'_2\right) \cdot E' = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}E'^2 > 0; \\ (K_{S'} + D') \cdot E' = \left(K_{S'} + \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_1\right)E' + \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_2\right)D'_2\right) \cdot E' \\ = -\frac{2}{3} + 2\varepsilon_2 - \left(\frac{1}{3} - \varepsilon_1\right)E'^2 \leq 0. \end{cases}$$

Так как $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \frac{1}{24}$, то система неравенств противоречива. Простые вычисления показывают, что возможен случай

$$(S'' \ni P', \varphi'(D')) \cong_{\text{an}} \left(\mathbb{C}^2 \ni 0, \left(\frac{2}{3} + \varepsilon\right)\{x^2 + y^5 = 0\}\right), \quad (\text{I})$$

где $\varepsilon < \frac{1}{120}$, $P' = \varphi'(E')$ и φ' является взвешенным раздутием с весами $(2, 1)$. Повторяя процедуру, мы придем к вышеописанной поверхности $\widehat{S}$.

Случай III. Пусть $i = 2$. Сейчас основная задача состоит в том, как правильно увеличить дивизор $D = \sum d_l D_l$ до дивизора $\widehat{D} = \sum c_l D_l$, где $c_l \geq d_l$ для всех l . После этого увеличения дивизор $K_S + \widehat{D}$ должен быть логканоническим, но не логтерминальным по Кавамате. Далее, как и прежде, найдется исключительная кривая E с $(K_S + D) \cdot E > 0$ при условии $\rho(S) \geq 3$. Соответствующий морфизм обозначим через $\varphi: S \rightarrow S'$.

Опишем построение $\widehat{D}$. Пусть D_t — неособая кривая. Если на D_t найдется точка из пп. 1) или 2) предложения 1.15 при $k \geq 4$, то $E \neq D_t$. Действительно, иначе имеем

$$(K_S + D) \cdot D_t > \left(K_S + D_t + \sum_{l \neq t} d_l D_l\right) \cdot D_t \geq -2 + \left(\sum_{l \neq t} d_l D_l\right) \cdot D_t \geq 0.$$

Поэтому в этом случае неважно, насколько надо увеличить коэффициент d_t .

Рассмотрим остальные случаи. Если на D_t найдется точка из пп. 1) или 2) предложения 1.15 при $k = 3$, то положим $c_t = \frac{2}{3}$. Если на D_t найдется точка из пп. 1) или 2) предложения 1.15 при $k = 2$, то положим $c_t = \frac{3}{4}$.

Во всех остальных случаях произвольным образом увеличим все оставшиеся коэффициенты d_l до максимально возможных значений.

ЛЕММА 4.9. Пусть $D = \alpha E + D^\circ$, $\alpha \geq \frac{1}{2}$ и $P = \varphi(E)$. Тогда имеем один из следующих случаев:

- 1) $(S' \ni P, \varphi(D)) \cong_{\text{an}} \left(\mathbb{C}^2 \ni 0, \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\{x^3 + y^4 = 0\}\right)$, где $\varepsilon < \frac{1}{24}$, морфизм φ является взвешенным раздутием с весами $(1, 1)$;

- 2) $(S' \ni P, \varphi(D)) \cong_{\text{ан}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, (\frac{1}{2} + \varepsilon_1)\{y = 0\} + (\frac{1}{2} + \varepsilon_2)\{x^2 + y^3 = 0\})$, где $3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \frac{1}{4}$, морфизм φ является взвешенным раздутием с весами $(1, 1)$;
- 3) $(S' \ni P, \varphi(D)) \cong_{\text{ан}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, (\frac{1}{2} + \varepsilon)\{x^2 + y^{2k+1} = 0\})$, где $\varepsilon < \frac{3}{8k+4}$, морфизм φ является взвешенным раздутием с весами $(k, 1)$;
- 4) $(S' \ni P, \varphi(D)) \cong_{\text{ан}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, (\frac{1}{2} + \varepsilon_1)\{x = 0\} + (\frac{1}{2} + \varepsilon_2)\{y = 0\} + (\frac{1}{2} + \varepsilon_3)\{x + y = 0\})$, где $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 < \frac{1}{6}$, морфизм φ является взвешенным раздутием с весами $(1, 1)$;
- 5) $(S' \ni P, \varphi(D)) \cong_{\text{ан}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, (\frac{1}{2} + \varepsilon_1)\{x = 0\} + (\frac{1}{2} + \varepsilon_2)\{x + y^k = 0\})$, где $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \frac{2}{3k}$, морфизм φ является взвешенным раздутием с весами $(k, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку дивизор $K_S + D$ является $\frac{1}{2}$ -логтерминальным, то особые точки S , лежащие на E , — это дювалевские особенности типа $\mathbb{A}_n$ (см. предложение 1.15). По той же причине на кривой E лежит не более одной особой точки.

Предположим, что E имеет точку касания кратности 3 с кривой D_1 из D° . Так как $(K_S + D) \cdot E \leq 0$, то $\text{Diff}_E(D^\circ - d_1 D_1) = 0$ и получаем случай 1).

Если E имеет точку касания кратности 2 с кривой D_1 из D° , то, поступая как и в лемме 4.8, получаем случаи 2) и 3).

Для оставшейся возможности получаем случаи 4) и 5).

Повторим вышеописанную процедуру. В результате многократного повторения, как и в случае II, могут появиться две новые особенности:

$$\left(\mathbb{C}^2 \ni 0, \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_1 \right) \{y = 0\} + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_2 \right) \{x = 0\} + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_3 \right) \{x + y^k = 0\} \right), \quad (\text{II})$$

где $\varepsilon_1 + k(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) < \frac{1}{6}$, и

$$\left(\mathbb{C}^2 \ni 0, \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_1 \right) \{y = 0\} + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_2 \right) \{x^2 + y^{2k+1} = 0\} \right), \quad (\text{III})$$

где $\varepsilon_1 + 2k\varepsilon_2 < \frac{1}{6}$.

Все вышесказанное позволяет дать определение модели для исключительной логповерхности дель Пешо типа Φ_i (ср. [2; §5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.10. Пусть (S, D) является исключительной логповерхностью дель Пешо типа Φ_i , $i = 2, 3, 4, 5, 6$, за исключением следующих точек (при $i = 6$ исключений нет).

- 1) При $i = 5$ см. п. 4) леммы 4.8.
- 2) При $i = 4$ см. пп. 1), 4) леммы 4.8.
- 3) При $i = 3$ см. пп. 2), 3), 4) леммы 4.8, а также (I) из случая II.
- 4) При $i = 2$ см. пп. 1), 3), 5) леммы 4.9, но возможно с другими ограничениями на значения $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, а также (II) и (III) из случая III.

Тогда логпара (S, D) называется *моделью типа Φ_i* , если выполнено одно из следующих двух условий:

- А) $\rho(S) = 1$;
- В) $\rho(S) = 2$, конус $\overline{NE}(S)$ порожден двумя экстремальными лучами R_1 и R_2 ; луч R_1 задает $\mathbb{P}^1$ -расслоение (в общей точке); если луч R_2 задает бирациональное стягивание кривой E , то E является компонентой дивизора D с коэффициентом больше или равным $\frac{i-1}{i}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.11. Заметим, что в определении модели типа Φ_i условие $\frac{1}{i}$ -логтерминальности дивизора $K_S + D$ нарушается только в неособых точках поверхности S .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.12. Важная задача заключается в классификации моделей типа Φ_i . После завершения классификации моделей типа Φ_2 остается описать такие исключительные поверхности S , что дивизор K_S является $\frac{1}{2}$ -логтерминальным и для него существует 2-дополнение $\Theta = \sum \frac{1}{2}\Theta_i$ (см. теорему 4.3). Это завершит классификацию исключительных логповерхностей дель Пеццо (см. [2], [9]) и позволит завершить описание логповерхностей Энриквеса (см. [16], [17]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.13. Согласно недавно полученным результатам можно отказаться от условия существования $\mathbb{Q}$ -дополнения в теоремах 2.1, 3.1 и § 4 [18].

Список литературы

1. Шокуров В. В. Трехмерные логперестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. №1. С. 105–203.
2. Shokurov V. V. Complements on surfaces // J. Math. Sci. (New York). 2000. V. 102. №2. P. 3876–3932.
3. Prokhorov Yu. G. Lectures on complements on log surfaces. Tokyo: Math. Soc. Japan, 2001. (MSJ Memoirs. V. 10.)
4. Прохоров Ю. Г., Шокуров В. В. Первая основная теорема о дополнениях: от глобального к локальному // Изв. АН СССР. Сер. матем. 2001. Т. 65. №6. С. 99–128.
5. Кудрявцев С. А. Классификация трехмерных исключительных логканонических гиперповерхностных особенностей. I // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. №5. С. 83–170.
6. Кудрявцев С. А. Классификация трехмерных исключительных логканонических гиперповерхностных особенностей. II // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. №2. С. 137–146.
7. Prokhorov Yu. G. Mori conic bundles with a reduced log terminal boundary // J. Math. Sci. (New York). 1999. V. 91. №1. P. 1051–1059.
8. Prokhorov Yu. G. Boundedness of non-birational extremal contractions // Internat. J. Math. 2000. V. 11. №3. P. 393–411.
9. Кудрявцев С. А. Классификация исключительных логповерхностей дель Пеццо с $\delta = 1$ // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. №3. С. 45–78.
10. Kollar J. (ed.) Flips and abundance for algebraic threefolds. A summer seminar at the University of Utah, Salt Lake City, 1991. Paris: Soc. Math. France, 1992. (Astérisque. V. 211.)
11. Кудрявцев С. А. О чисто логтерминальных раздутиях // Матем. заметки. 2001. Т. 69. №6. С. 892–899.
12. Хартсторн Р. Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.
13. Blache R. The structure of l.c. surfaces of Kodaira dimension zero // J. Algebraic Geom. 1995. V. 4. P. 137–179.
14. Zhang D.-Q. Logarithmic Enriques surfaces // J. Math. Kyoto Univ. 1991. V. 31. P. 419–466.

15. *Keel S., McKernan J.* Rational curves on quasi-projective surfaces. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. (Mem. Amer. Math. Soc. V. 669.)
16. *Кудрявцев С. А.* Классификация логповерхностей Энриквеса с $\delta = 1$ // `math.AG/0207270`.
17. *Кудрявцев С. А.* Классификация логповерхностей Энриквеса с $\delta = 2$ // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 5. С. 715–722.
18. *Fedorov I. Yu., Kudryavtsev S. A.* $\mathbb{Q}$ -complements on log surfaces // `math.AG/0311325`.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: kudryav@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
01.07.2003