Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбацевич, О каркасах пространств конечномерных алгебр Ли размерностей не более 6, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 5, 23–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8280>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 16:35:34

УДК 512.554.3

В. В. Горбачевич

О каркасах пространств конечномерных алгебр Ли размерностей не более 6

В статье изучаются каркасы пространств комплексных n -мерных алгебр Ли – пересечения всех неприводимых компонент этих пространств. Дано полное описание каркасов и их проективизаций при $n \leq 6$. Доказано также, что при $n \leq 6$ проективизации этих пространств односвязны.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: алгебра Ли, неприводимая компонента, нильпотентная алгебра Ли, сжатие.

DOI: 10.4213/sm8259

Введение

В статье продолжается изучение пространств $L_n(\mathbb{C})$ (образованных компонентами структурных тензоров c_{ij}^k , кососимметричных по нижним индексам и удовлетворяющих следствиям тождества Якоби) конечномерных комплексных алгебр Ли, где n – их размерность. На этом пространстве естественным образом действует группа $GL_n(\mathbb{C})$; орбиты этого действия состоят из всех попарно изоморфных алгебр Ли. Оно является алгебраическим множеством, и, как и всякое алгебраическое множество, $L_n(\mathbb{C})$ есть объединение конечного числа неприводимых компонент, которые мы будем обозначать $L_n^\alpha(\mathbb{C})$. Немногое известно о самих этих компонентах. До сих пор основная информация о них выражалась в выделении среди них тех, которые являются замыканиями орбит жестких алгебр Ли. А вот о том, как взаимно расположены эти компоненты, известно очень мало. В статье [1] было начато изучение пересечения $\bigcap_\alpha L_n^\alpha(\mathbb{C})$ всех неприводимых компонент; это исследование было продолжено в [2]. Оказалось, что пересечение состоит из нильпотентных алгебр Ли очень специального вида (подробно описанного ниже). Все неприводимые компоненты так или иначе “приклеены” к пересечению $\bigcap_\alpha L_n^\alpha(\mathbb{C})$, поэтому мы будем называть его *каркасом* (frame) пространства алгебр Ли $L_n(\mathbb{C})$ и обозначать $F_n(\mathbb{C})$. Отдельные алгебры Ли из этого каркаса будем называть *краеугольными*. Основной результат настоящей статьи – полное описание структуры каркасов пространств комплексных алгебр Ли до размерности 6 включительно. В § 1 и § 2 приводятся формулировка основного результата и основная конструкция, используемая при его доказательстве. В § 3 дается доказательство теоремы 1 – основного результата статьи. В § 4 рассматривается вопрос о топологическом строении

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00465а).

каркасов и доказывается теорема 2 об односвязности этих каркасов при $n \leq 6$. В § 5 приведены некоторые заключительные замечания.

§ 1. Формулировка основного результата

Пересечение $\bigcap_{\alpha} L_n^{\alpha}(\mathbb{C})$ всех неприводимых компонент пространства алгебр Ли $L_n(\mathbb{C})$ фиксированной размерности $n > 2$ состоит, как было показано в [1] и [2], из нильпотентных алгебр Ли вида $\mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^{n-1}$ (полупрямых сумм одномерной подалгебры и абелева идеала коразмерности 1). Гомоморфизм $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{gl}_{n-1}(\mathbb{C})$, задающий такую полупрямую сумму, определяется нильпотентной матрицей $\varphi(1)$ порядка $n - 1$ (которую можно рассматривать с точностью до сопряженности и пропорциональности). Любая такая матрица с точностью до подобия разлагается в прямую сумму жордановых матриц $J_k(0)$, т.е. $\varphi(1) = \bigoplus J_{k_i}(0)$, где сумма всех натуральных чисел k_i равна $n - 1$. Если считать индексы k_i упорядоченными по убыванию (точнее, по невозрастанию), то такая прямая сумма однозначно определяется набором индексов $k_1 \geq k_2 \geq \dots$. Соответствующую нильпотентную алгебру Ли указанного выше вида будем обозначать $N(k_1, k_2, \dots)$.

Отметим, что с точностью до изоморфизма для каждого фиксированного n число алгебр Ли вида $N(k_1, k_2, \dots)$ конечно (его можно вычислить точно, но это нам не понадобится). Отсюда следует, что пространство $F_n(\mathbb{C})$ состоит из объединения конечного числа замыканий открытых орбит группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Как будет показано, при $n \leq 6$ в $F_n(\mathbb{C})$ имеется только одна открытая орбита (можно показать, что при $n > 6$ возможно существование и нескольких открытых орбит).

Если индекс k равен 1, то соответствующая жорданова клетка – нулевая матрица порядка 1. Прямую сумму тех клеток Жордана, которые соответствуют индексам, равным 1, мы обычно будем объединять. Тогда алгебра Ли $N(k_1, k_2, \dots)$ может быть представлена в виде $N'(k_1, k_2, \dots) \oplus \mathbb{C}^l$, где $k_i \geq 2$. Мы, как правило, будем использовать именно такое представление краеугольных алгебр Ли.

Итак, алгебры Ли, названные выше краеугольными, – это некоторые из алгебр Ли вида $N(k_1, k_2, \dots)$. В [1], [2] было доказано, что краеугольными являются все алгебры Ли вида $N(2) \oplus \mathbb{C}^{n-3}$ (при $n \geq 3$) и $N(2, 2) \oplus \mathbb{C}^{n-5}$ (при $n \geq 5$). Но полного описания всех краеугольных алгебр Ли заданной размерности пока получить не удастся. При этом было бы интересно также рассмотреть взаимное расположение орбит отдельных краеугольных алгебр Ли (ниже будет показано, что это сделать нетрудно, если список всех краеугольных алгебр Ли известен).

В $L_n(\mathbb{C})$ при $n = 1$ существует только одна неприводимая компонента, да и та состоит из одной точки (соответствующей абелевой алгебре Ли). Пространство $L_2(\mathbb{C})$ тоже состоит из одной неприводимой компоненты. Алгебра Ли R_2 имеет там открытую орбиту, дополнение до которой – одна точка (соответствующая двумерной абелевой алгебре Ли). Поэтому $L_1(\mathbb{C})$ – это одна точка,

а $L_2(\mathbb{C})$ можно отождествить с пространством $\mathbb{C}^2$ (рассматриваемым как множество из двух структурных констант c_{12}^1, c_{12}^2). При $n = 1, 2$ пространства $L_n(\mathbb{C})$ и $F_n(\mathbb{C})$ совпадают. Поэтому представляет интерес только изучение каркасов при $n \geq 3$. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать (иногда неявно), что $n \geq 3$.

В настоящей статье будет дано полное описание всех краугольных алгебр Ли размерностей ≤ 6 . Более того, будет описана “архитектура” каркасов для тех же размерностей (более подробно о смысле понятия “архитектура” будет сказано ниже).

Нам понадобится следующее утверждение, доказанное в [2] и дающее некоторые необходимые условия для того, чтобы алгебра Ли была краугольной (оно накладывает естественные ограничения на возможные значения индексов k_i).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (см. [2]). *Если алгебра Ли C размерности n краугольна, то:*

- (i) $\text{codim}_C([C, C]) \geq [n/4]$;
- (ii) *класс нильпотентности алгебры Ли M не превосходит числа $[(n+3)/2]$.*

Утверждение (ii) выводится из (i) (при этом получается оценка сверху $n - [n/2] + 1$, но это число для любого n равно $[(n+3)/3]$). Пока не ясно, насколько эти условия являются и достаточными для краугольности. Для размерностей не более 6 это, как следует из доказанной ниже теоремы, действительно так.

Алгебры Ли вида $N(k_1, k_2, \dots)$, удовлетворяющие условиям (i) и (ii), мы будем рассматривать как естественные кандидаты на звание краугольных алгебр Ли.

Отметим, что на нильпотентные алгебры Ли размерности ≤ 4 условие (i) не накладывает никаких ограничений, так как для нильпотентных алгебр Ли всегда $\text{codim}_C([C, C]) \geq 2$. Но при $n = 5, 6$ мы уже получаем нетривиальное ограничение $\text{codim}_C([C, C]) \geq 3$. Условие (ii) при $n \leq 5$ не дает существенных ограничений. Но в силу этого ограничения при $n = 6$ в качестве матрицы $\varphi(1)$ не может фигурировать матрица $J_5(0)$.

Основной результат статьи – следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть алгебра Ли C размерности ≤ 6 краугольна. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если $\dim(C) = 3$, то C изоморфна $N(2) = N_3$ или же абелева. Орбита алгебры Ли $N(2)$ открыта в каркасе пространства $L_3(\mathbb{C})$.*

(ii) *Если $\dim(C) = 4$, то C изоморфна $N(3)$, $N(2) \oplus \mathbb{C}$ или же абелева. Орбита алгебры Ли $N(3)$ открыта в каркасе пространства $L_4(\mathbb{C})$.*

(iii) *Если $\dim(C) = 5$, то C изоморфна $N(4)$, $N(3) \oplus \mathbb{C}$, $N(2, 2)$, $N(2) \oplus \mathbb{C}^2$ или же она абелева. Орбита алгебры Ли $N(4)$ открыта в каркасе пространства $L_4(\mathbb{C})$.*

(iv) *Если $\dim(C) = 6$, то C изоморфна $N(4) \oplus \mathbb{C}$, $N(3, 2)$, $N(3) \oplus \mathbb{C}^2$, $N(2, 2) \oplus \mathbb{C}$, $N(2) \oplus \mathbb{C}^3$ или же абелева. Орбита алгебры Ли $N(4) \oplus \mathbb{C}$ открыта в каркасе пространства $L_6(\mathbb{C})$.*

Более подробно строение каркаса $F_n(\mathbb{C})$ при $n \leq 6$ описывается так: в нем имеется последовательность орбит, каждая из которых лежит в замыкании предыдущей. Первая (“старшая”) орбита открыта в каркасе. В частности, при $n \leq 6$ каркас неприводим. Порядок этих орбит алгебр Ли тот, в котором эти краеугольные алгебры Ли перечислены в формулировке теоремы 1. Именно это дает нам описание “архитектуры” каркаса в виде взаимного расположения всех орбит, составляющих этот каркас.

Для доказательства теоремы 1 нужно доказать, что указанные в ней алгебры Ли принадлежат каждой из неприводимых компонент $L_n^\alpha(\mathbb{C})$ заданной размерности. Для этого достаточно для каждой из этих алгебр Ли доказать, что в каждой из неприводимых компонент $L_n^\alpha(\mathbb{C})$ существует алгебра Ли, имеющая сжатие в эту алгебру Ли (алгебра Ли L' называется *сжатием алгебры Ли* L , если L' принадлежит замыканию орбиты алгебры Ли L в пространстве алгебр Ли). В нашем доказательстве большую роль будут играть нильпотентные матрицы и их сжатия. Матрица B называется *сжатием матрицы* A , если B принадлежит замыканию класса сопряженности матрицы A . Относительно отношения сжатия нильпотентные матрицы фиксированного порядка образуют частично упорядоченное множество, которое может быть описано в явном виде (см., например, [3], где оно графически оформлено в виде схемы Хассе). Это описание будет использовано при описании каркасов пространств алгебр Ли.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 1 мы в следующем параграфе рассмотрим некоторую общую конструкцию, которая будет нашим основным (и практически единственным) инструментом при доказательстве теоремы 1.

§ 2. Базисная конструкция и ее применения

Для доказательства теоремы 1, сформулированной в § 1, будет использована некоторая общая конструкция. После ее описания мы рассмотрим несколько примеров ее применения, которые будут существенно использованы в следующем параграфе.

В этой конструкции строятся сжатия алгебр Ли в алгебры Ли очень простой структуры – в нильпотентные алгебры Ли, имеющие абелев идеал коразмерности 1 (напомним, что именно такой вид имеют краеугольные алгебры Ли).

Рассмотрим произвольную комплексную алгебру Ли L (мы ограничиваемся в настоящей статье комплексными алгебрами Ли, хотя такого рода конструкция применима и для вещественных алгебр Ли). Предположим, что в ней существует некоторый ненулевой полупростой (или, что то же, вполне приводимый) элемент $X \in L$. Рассмотрим присоединенный линейный оператор ad_X (диагонализированный в силу полупростоты X) и его собственные значения λ_i . Предположим, что первые m собственных значений различны, и пусть тогда спектр оператора ad_X записан в виде $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$, причем среди последних $n - m$ собственных чисел могут содержаться и равные каким-либо из m первых. Покажем, что в этом случае алгебра Ли L имеет сжатие в алгебру Ли $N(m) \oplus \mathbb{C}^{n-m-1}$.

В силу полупростоты элемента X пространство алгебры Ли L может быть разложено в прямую сумму трех ad_X -инвариантных подпространств $L = \langle X \rangle \oplus V_1 \oplus V_0$, где $\langle X \rangle$ – прямая, натянутая на элемент X , V_1 – сумма корневых подпространств, соответствующих значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, а V_0 – сумма корневых подпространств, соответствующих остальным собственным числам (но из числа этих подпространств исключена прямая $\langle X \rangle$). Положим $V = V_0 \oplus V_1$ и к паре $\langle X \rangle, V$ применим конструкцию сжатия Иненю–Вигнера. Для полноты изложения опишем здесь эту полезную конструкцию в нашем специальном случае, немного обобщив ее.

Мы построим однопараметрическое семейство невырожденных линейных преобразований пространства алгебры Ли L , которое в пределе даст новую алгебру Ли.

Пусть $\varepsilon > 0$ – некоторый параметр. Рассмотрим элемент $X(\varepsilon) = \varepsilon X$ – преобразование базисного элемента X .

Размерность подпространства V_1 равна m . Рассмотрим ограничение на V_1 линейного оператора ad_X , обозначив его A . Положим $A(\varepsilon) = A + \frac{1}{\varepsilon}J_m(0)$. Это линейное преобразование подобно (с помощью некоторого невырожденного линейного преобразования) оператору A , так как все собственные значения у него различны. Добавим к преобразованию вектора X указанное невырожденное линейное преобразование. Векторы подпространства V_0 оставим без изменения. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, как нетрудно проверить, нужное нам указанное выше сжатие алгебры Ли L в нильпотентную алгебру Ли $N(m) \oplus \mathbb{C}^{n-m-1}$.

Рассмотрим несколько примеров сжатий, которые потребуются нам для доказательства теоремы 1.

ПРИМЕР 1. Почти классический пример – сжатие трехмерной разрешимой алгебры Ли $L = R_2 \oplus \mathbb{C}$ (здесь R_2 – единственная с точностью до изоморфизма неабелева двумерная разрешимая алгебра Ли; в подходящем базисе X, Y алгебра Ли R_2 задается соотношением $[X, Y] = Y$) в трехмерную нильпотентную неабелеву алгебру Ли N_3 (такая нильпотентная алгебра Ли единственна с точностью до изоморфизма). Рассмотрим базис X, Y, Z , где X, Y – указанный выше базис алгебры Ли R_2 , а на вектор Z натянуто прямое слагаемое $\mathbb{C}$ алгебры Ли L . Оператор ad_X имеет такие собственные значения: 0, 1, 0. Поэтому приведенная выше конструкция применима при $m = 2$, и мы получаем сжатие алгебры Ли L в нильпотентную алгебру Ли $N(2)$, которая, очевидно, изоморфна алгебре Ли N_3 .

В примерах 2 и 3 мы рассмотрим сжатия двух четырехмерных алгебр Ли.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим алгебру Ли $R_2 \oplus R_2$, где прямые слагаемые имеют базисы X, Y и U, V соответственно, $[X, Y] = Y$, $[U, V] = V$. Положим $A = \alpha X + \beta U$, где α, β – различные ненулевые числа. Тогда $\text{ad}_A = \text{diag}(0, \alpha, 0, \beta)$. Поэтому наша конструкция применима при $m = 3$, что приводит к сжатию нашей алгебры Ли L в $N(3) = \mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^3$, где $\varphi(1) = J_3(0)$. Эту алгебру Ли иногда обозначают N_4 ; сжатие алгебры Ли L в N_4 было построено чисто формально (явным указанием сжатия без выявления его смысла) в [4].

ПРИМЕР 3. Пусть $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$. В качестве элемента X возьмем произвольный элемент $\text{diag}(a, -a)$ картановской подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Тогда $\text{ad}_X = \text{diag}(0, a, -a, 0)$ и к X применима наша конструкция при $m = 3$. Получаем сжатие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ в $N(3) = N_4$.

ПРИМЕР 4. Пусть L – произвольная полупростая комплексная алгебра Ли размерности n и ранга l . Взяв в качестве элемента X общий (точнее, регулярный) элемент картановской подалгебры Ли в L , мы, как нетрудно понять, получим сжатие алгебры Ли L в нильпотентную алгебру Ли $N(n-l+1) \oplus \mathbb{C}^{l-1}$.

Например, для восьмимерной простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ ранга 2 получаем ее сжатие в $n(5) \oplus \mathbb{C}^2$. Далее, шестимерная алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ таким способом сжимается в $N(5) \oplus \mathbb{C}$.

ПРИМЕР 5. Пусть $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus R_2$. Возьмем $X = \alpha A + \beta U$, где $A = \text{diag}(1, -1) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, U – базисный элемент в R_2 (для которого $[U, V] = V$ – см. пример 2), а α, β – два различных числа. Тогда получаем сжатие L в пятимерную нильпотентную алгебру Ли $N(4)$.

§ 3. Доказательство основного результата

Переходим к доказательству теоремы 1.

Мы будем неоднократно использовать (не упоминая этого каждый раз явно) описание неприводимых компонент в пространствах размерностей ≤ 6 , приведенное в обзоре [5].

Напомним, что случаи $n = 1, 2$ не представляют для нас интереса, и потому мы начинаем рассуждения с $n = 3$.

В пространстве $L_3(\mathbb{C})$ имеются две неприводимые компоненты; одна из них – замыкание орбиты алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, а вторая состоит из разрешимых алгебр Ли. Как следует из [1], пересечение этих компонент – это орбита нильпотентной алгебры Ли N_3 , к которой добавлена еще одна точка (соответствующая трехмерной абелевой алгебре Ли).

Мы видим, что утверждения теоремы 1 при $n = 3$ почти тривиальны. Остается рассмотреть случаи $n = 4, 5, 6$, чем мы теперь и займемся.

Начнем с рассмотрения пространства $L_4(\mathbb{C})$. Как указано в [5], в пространстве $L_4(\mathbb{C})$ существуют четыре неприводимые компоненты. Опишем их.

Первые две компоненты – это замыкания орбит (открытых) двух жестких алгебр Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ и $R_2 \oplus R_2$.

Для описания двух других неприводимых компонент введем некоторые общие обозначения. Пусть N – некоторая нильпотентная алгебра Ли (размерности k). Через $R_n(N)$ обозначим множество n -мерных алгебр Ли L (точнее, точек в $L_n(\mathbb{C})$), для которых нильрадикал изоморфен алгебре Ли N . В частности, для таких алгебр Ли L (очевидно, разрешимых) алгебра Ли L/N абелева размерности $n - k$. Через $R_n^0(N)$ обозначим подмножество в $R_n(N)$, состоящее из алгебр Ли, разлагающихся в полупрямые суммы $A + N$ идеала N и абелевой подалгебры Ли A , присоединенное действие которой на N точно и вполне приводимо.

С использованием приведенных выше обозначений оставшиеся две неприводимые компоненты в $L_4(\mathbb{C})$ – это замыкания по Зарисскому множеств $R_4^0(A_3)$ и $R_4^0(N_3)$, где A_3 – трехмерная абелева алгебра Ли, а N_3 – трехмерная неабелева нильпотентная алгебра Ли (выше она обозначалась и как $N(2)$).

Нам нужно описать пересечение указанных четырех неприводимых компонент. В пересечении могут лежать только следующие алгебры Ли: $N(3)$, $N(2) \oplus \mathbb{C}$ и абелева алгебра Ли. При этом две последние алгебры Ли могут быть получены как сжатие первой, т.е. алгебры Ли $N(3)$. Этот факт можно проверить и непосредственно, но нам здесь важен более общий подход. Существование таких сжатий матриц вытекает из существования сжатий нильпотентной матрицы $J_3(0)$ в матрицы $J_2(0) \oplus J_1(0)$ и $J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0)$ соответственно (последняя матрица – просто нулевая матрица). Существование же таких сжатий вытекает из общих результатов, приведенных, например, в [3] (где выписаны диаграммы сжатий нильпотентных матриц до порядка 6).

В силу сказанного выше нам достаточно доказать, что в пересечении неприводимых компонент пространства $L_4(\mathbb{C})$ лежит алгебра Ли $N(3)$. А для этого достаточно указать в каждой неприводимой компоненте такую алгебру Ли, которая имеет сжатие в $N(3)$. Это утверждение в общей ситуации было доказано в [1], но здесь будет дано прямое доказательство в нужном нам частном случае. Для первых двух компонент (замыканий орбит жестких алгебр Ли) это было доказано в примерах 3 и 2. Остается рассмотреть две оставшиеся неприводимые компоненты.

Начнем с $R_4^0(A_3)$, где выберем алгебру Ли вида $L = \mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^3$; здесь матрица $\varphi(1)$ диагональна и имеет три различных ненулевых собственных значения. Применим нашу общую конструкцию из § 2. Возьмем в качестве элемента X (на котором основана эта конструкция) ненулевой элемент подалгебры $\mathbb{C}$. Тогда ad_X имеет четыре различных собственных значения (одно – нулевое, соответствующее вектору X), поэтому указанная алгебра Ли $L \in R_4^0(A_3)$ имеет сжатие в $N(3)$.

Переходим к неприводимой компоненте $R_4^0(N_3)$. Пусть U, V, W – базис алгебры Ли N_3 такой, что $[U, V] = W$. Положим $L = \mathbb{C} +_{\psi} N_3$, где гомоморфизм $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \text{Der}(N_3)$ в алгебру Ли $\text{Der}(N_3)$ дифференцирований алгебры Ли N_3 задается в базисе U, V, W матрицей $\psi(1) = \text{diag}(2, 3, 5)$ (легко убедиться, что эта матрица задает дифференцирование алгебры Ли N_3). Снова в качестве элемента X берем ненулевой элемент подалгебры $\mathbb{C}$ в L и применяем нашу общую конструкцию. Получаем сжатие указанной алгебры Ли L в N_3 . Это завершает рассмотрение пространства четырехмерных алгебр Ли.

Сжатия четырехмерных алгебр Ли были ранее перечислены в [4], но мы привели более простые и ясные доказательства, причем основанные на идее, допускающей значительные обобщения.

Переходим к случаю пятимерных алгебр Ли. Схема нашего доказательства будет примерно такой же, как для четырехмерных алгебр Ли, но потребует больших усилий.

В пространстве $L_5(\mathbb{C})$ имеется семь неприводимых компонент. Три из них – замыкания орбит трех жестких алгебр Ли, остальные четыре – замыкания множеств вида $R_5^0(N)$. Дадим подробное описание этих компонент.

Жесткие пятимерные алгебры Ли: $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus R_2$, полупрямая сумма $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) +_\tau \mathbb{C}^2$ (соответствующая тавтологическому представлению τ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$), полупрямая сумма $\mathbb{C}^2 +_\varphi N_3$ (где подалгебра $\mathbb{C}^2$ – это картановская подалгебра в алгебре Ли дифференцирований алгебры Ли N_3).

Остальные неприводимые компоненты – это замыкания следующих четырех подмножеств в $L_5(\mathbb{C})$: $R_5^0(A_3)$, $R_5^0(A_4)$, $R_5^0(N_3 \oplus \mathbb{C})$, $R_5^0(N_4)$. Здесь A_k – абелева алгебра Ли размерности k , а четырехмерная нильпотентная алгебра Ли N_4 выше обозначалась как $N(3)$.

Отметим, что все нильпотентные матрицы порядка 4 относительно отношения сжатия линейно упорядочены (см. [3]). Максимальный элемент здесь – матрица $J_4(0)$, которой соответствует нильпотентная алгебра Ли $N(4)$. Мы докажем, что она является краеугольной. Но тогда краеугольными будут и все остальные алгебры Ли, перечисленные в формулировке теоремы 1 (т.е. краеугольными будут все естественные кандидаты на это звание).

Начнем с жестких компонент. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus R_2$ имеет, как показано в примере 5, сжатие в $N(4)$.

Рассмотрим теперь алгебру Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) +_\tau \mathbb{C}^2$. В качестве элемента X нашей общей конструкции возьмем $\text{diag}(1, -1) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Тогда ad_X имеет четыре различных ненулевых собственных значения: 2, -2 , 1, -1 , что в силу нашей конструкции приводит к сжатию алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) +_\tau \mathbb{C}^2$ в $N(4)$. Это, как и в предыдущем случае, дает нам, в частности, утверждение теоремы 1 для рассматриваемой компоненты.

Наконец, рассмотрим третью жесткую пятимерную алгебру Ли $\mathbb{C}^2 +_\varphi N_3$. Здесь в качестве X возьмем общий элемент подалгебры Ли $\mathbb{C}^2$. Его присоединенное действие на $\mathbb{C}^2 +_\varphi N_3$ имеет, как нетрудно проверить, четыре различных собственных значения, что, как и в предыдущих двух случаях, дает требуемое сжатие. Итак, пересечение трех компонент, получающихся замыканиями орбит жестких алгебр Ли, содержит алгебру Ли $N(4)$, а потому содержит и все “меньшие” алгебры Ли из числа кандидатов на звание краеугольных.

Переходим к рассмотрению четырех компонент, являющихся замыканиями пространств вида $R_5^0(N)$. Первые три компоненты рассматриваются точно так же, как в четырехмерном случае. Для них легко удастся построить сжатие в алгебру Ли $N(4)$. Поэтому мы подробно рассмотрим только относительно новый случай – пространство $R_5^0(N_4)$.

Рассмотрим алгебру Ли $L = \mathbb{C} +_\psi N_4$, соответствующую некоторому гомоморфизму $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \text{Der}(N_4)$. Пусть $\psi(1) = \text{diag}(2, 3, 5, 7)$ (это будет дифференцирование алгебры Ли N_4). Для ad_X ($X \in \mathbb{C}$) имеем четыре различных собственных значения, и снова наша конструкция дает сжатие в алгебру Ли $N(4)$. Рассмотрение случая $n = 5$ на этом закончено.

Переходим к случаю шестимерных алгебр Ли. Здесь ситуация непростая – имеется много неприводимых компонент (см. [5]). Мы перечислим некоторые из них и дадим общие сведения о процедуре доказательства теоремы 1

в этом случае. Отметим, что здесь “старшей” (для отношения сжимаемости) краеугольной алгеброй Ли не может быть алгебра Ли $N(5)$ (как было отмечено в § 1). Поэтому нам требуется строить сжатия алгебр Ли, принадлежащих этим компонентам, в следующую по старшинству алгебру Ли (кандидата в краеугольные) – в алгебру Ли $N(4, 1) = N(4) \oplus \mathbb{C}$.

Всего в $L_5(\mathbb{C})$ имеется 17 неприводимых компонент, из них шесть – замыкания открытых орбит (орбит жестких алгебр Ли). Эти открытые орбиты – орбиты алгебр Ли $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}) +_\tau \mathbb{C}^2$ (где τ – тавтологическое представление), $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) + N_3$, $R_2 \oplus R_2 \oplus R_2$, $\mathbb{C}^2 + N_4$, $\mathbb{C} + N_5$ (где нильпотентная филиформная алгебра Ли N_5 задается в подходящем базисе X_i соотношениями $[X_1, X_i] = X_{i+1}$ при $i = 2, 3, 4$, $[X_2, X_3] = X_5$). Мы не даем здесь подробного описания структуры полупрямых сумм некоторых из этих алгебр Ли (его можно найти в [5]), так как не будем подробно разбирать эти случаи.

Кроме этих указанных выше шести компонент, еще 10 компонент имеют вид $R_6^0(N)$ для некоторых нильпотентных алгебр Ли N . И еще одна компонента имеет весьма специальный вид, в [5] она обозначена как $L_6^0(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus A_2)$ (фактически она состоит из алгебр Ли вида $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus R$ для трехмерных разрешимых алгебр Ли R).

С помощью прямого перебора всех этих компонент можно убедиться, что в каждой из этих компонент имеется алгебра Ли $N(4) \oplus \mathbb{C}$. Это делается по той же методике, как для алгебр Ли меньшей размерности выше. Поэтому и все “младшие” алгебры Ли тоже краеугольны.

Доказательство теоремы 1 завершено.

Интересно уточнить, за счет какой компоненты не может в качестве краеугольной фигурировать алгебра Ли $N(5)$. Оказывается, что это компонента, содержащая открытую орбиту жесткой алгебры Ли $R_2 \oplus R_2 \oplus R_2$. Это неудивительно, так как утверждение (i) из нашего предложения (см. § 1) доказано в [2] с помощью рассмотрения, в частности, прямых сумм нескольких экземпляров алгебры Ли R_2 . Для полноты изложения поясним, почему алгебра Ли $N(5)$ не содержится в замыкании орбиты алгебры Ли $L = R_2 \oplus R_2 \oplus R_2$. Дело в том, что $\dim[L, L] = 3$, а потому в замыкании орбиты этой алгебры Ли не могут лежать алгебры Ли, размерность коммутанта которых больше чем 3. Но размерность коммутанта алгебры Ли $N(5)$ равна 4.

§ 4. О топологии каркасов пространств алгебр Ли

Помимо изучения алгебраической структуры каркасов пространств конечномерных алгебр Ли представляет интерес и изучение топологического строения этих каркасов. Так как каркас $F_n(\mathbb{C}) = \bigcap_\alpha L_n^\alpha(\mathbb{C})$ состоит из орбит некоторых алгебр Ли и содержит нулевую точку (соответствующую абелевой алгебре Ли), то каркас является конусом. Поэтому гомотопически он тривиален, так как может быть стянут в точку. Поэтому топологически более интересно рассматривать не сами каркасы, а их проективизации (которые можно рассматривать как своего рода основания каркасов-конусов). Проективизация $F_n^*(\mathbb{C})$ каркаса

$F_n(\mathbb{C})$ получается удалением из него нулевой точки и переходом от точек каркаса к содержащим их “лучам” (над полем $\mathbb{C}$ “лучи” – это $\mathbb{C} \setminus \{0\}$). Так как каркас – замкнутое алгебраическое подмножество, то его проективизация $P(\bigcap_{\alpha} L_n^{\alpha}(\mathbb{C}))$ – проективное алгебраическое множество (причем компактное). Описание топологических свойств полученного проективного множества представляет определенный интерес. Например, при $n = 3$ пространство $F_3^*(\mathbb{C}) = P(\bigcap_{\alpha} L_3^{\alpha}(\mathbb{C}))$ диффеоморфно компактному однородному пространству $SU(3)/S(U(1) \times U(2))$ (которое в свою очередь диффеоморфно проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$). Для $n > 3$ ситуация существенно сложнее и интереснее.

Орбиты самых маленьких размерностей соответствуют алгебрам Ли (мы игнорируем прямые абелевы слагаемые) с параметрами $(k_1, k_2, \dots)$, равными $(2), (2, 2), (3), (3, 2), (4)$ и т.д. Если начинать с описания орбит наибольшей размерности, то описание их последовательности усложняется. При $n \leq 6$ имеется ровно одна “старшая” орбита, но при увеличении n вполне возможно появление двух и более “старших” орбит (и тогда каркас будет приводим).

Здесь мы рассмотрим топологические свойства каркасов $F_n(\mathbb{C})$ при $n \leq 6$. Как было отмечено выше, при $n \leq 6$ каркас содержит последовательность вложенных друг в друга орбит, каждая из которых лежит в замыкании предыдущей. Первая (“старшая”) орбита открыта в каркасе. В частности, при $n \leq 6$ каркас неприводим. То же верно и для соответствующих проективизаций. При $n \leq 5$ открытой будет орбита алгебры Ли $N(n-1)$, а при $n = 6$ – орбита алгебры Ли $N(n-2) \oplus \mathbb{C} = N(4) \oplus \mathbb{C}$. Орбита любой алгебры Ли $N \in L_n(\mathbb{C})$ диффеоморфна $GL_n(\mathbb{C})/\text{Aut}(N)$. Отметим также, что, как нетрудно проверить, эта орбита будет гомотопически эквивалентна компактному однородному пространству $U(n)/U(n) \cap \text{Aut}(N)$ (более того, сама орбита диффеоморфна векторному расслоению над этим однородным пространством, это доказано в весьма общем случае в [6]).

Ниже будет доказана

ТЕОРЕМА 2. *Проективизации каркасов $F_n^*(\mathbb{C})$ при $n \leq 6$ односвязны.*

Предварительно мы вычислим размерности орбит нужных нам алгебр Ли.

ЛЕММА. *Размерности орбит алгебр Ли $N(n-1)$ и $N(n-2) \oplus \mathbb{C}$ равны $n^2 - 2n$ и $n^2 - 2n - 2$ соответственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что размерность орбиты алгебры Ли N , лежащей в $L_n(\mathbb{C})$, равна $n^2 - \dim \text{Aut}(N)$. Размерность же группы автоморфизмов равна размерности алгебры дифференцирований $\text{Der}(N)$. Поэтому для доказательства нам достаточно вычислить размерности алгебр дифференцирований алгебр Ли, фигурирующих в формулировке леммы.

Начнем с рассмотрения алгебр Ли вида $N(n-1) = \mathbb{C} + J_{n-1}(0) \mathbb{C}^{n-1}$. Они имеют две образующие X, Y (где X – образующая подалгебры Ли $\mathbb{C}$ в полупрямой сумме, а Y – циклический вектор жордановой клетки $J_{n-1}(0)$). При этом $N = \langle X, Y \rangle + [N, N]$ – прямая сумма двух векторных подпространств. Поэтому любое дифференцирование алгебры Ли $N(k-1)$ порождается такими

отображениями:

$$X \rightarrow \alpha X + \beta Y + a, \quad Y \rightarrow \gamma X + \delta Y + b,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, а a, b – некоторые элементы из подпространства $[N, N]$ размерности $k - 2$. Как нетрудно проверить, любые линейные отображения алгебры Ли $N(n - 1)$, порождаемые отображениями указанного вида, дают нам дифференцирования этой алгебры Ли. Поэтому

$$\dim(\text{Aut}(N(k - 1))) = 4 + 2(n - 2) = 2n$$

и размерность соответствующей орбиты равна $n^2 - 2n$.

Для случая алгебр Ли $N(n - 2) \oplus \mathbb{C}$ рассуждения аналогичны. Алгебра Ли $N(n - 2) \oplus \mathbb{C}$ имеет три образующие X, Y, Z , где X, Y аналогичны рассмотренным выше для алгебры Ли $N(n - 1)$, а Z – образующая прямого слагаемого $\mathbb{C}$ алгебры

$$X \rightarrow \alpha X + \beta Y + \lambda Z + a, \quad Y \rightarrow \gamma X + \delta Y + \mu Z + b, \quad Z \rightarrow \nu Z + c,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$, a, b – некоторые элементы подпространства $[N, N]$ размерности $k - 3$, а c – элемент одномерного центра алгебры Ли $N(n - 2)$. Как нетрудно проверить и здесь, любые линейные преобразования рассматриваемой алгебры Ли, порождаемые отображениями указанного вида, дают нам дифференцирования этой алгебры Ли $N(n - 2) \oplus \mathbb{C}$. Поэтому

$$\dim \text{Aut}(N(n - 2) \oplus \mathbb{C}) = 4 + 2 + 2(n - 3) + 2 = 2n + 2.$$

Потому размерность орбиты равна $n^2 - 2n - 2$.

Лемма доказана.

Некоторые комментарии к этой лемме даны ниже в § 5.

Как видно из утверждения леммы, комплексная размерность орбиты алгебры Ли $N(n - 2) \oplus \mathbb{C}$, лежащей (причем первой по порядку – см. выше) в замыкании орбиты алгебры $N(n - 1)$, на две единицы меньше размерности орбиты алгебры Ли $N(n - 1)$. Это соображение окажется решающим при доказательстве теоремы 2, к которому мы скоро перейдем. Видимо, верно и более общее утверждение для орбит алгебр Ли вида $N(k_1, k_2, \dots)$: если N, N' – две алгебры Ли вида $N(k_1, k_2, \dots)$ и N' получается сжатием из N (т.е. лежит в замыкании орбиты этой алгебры Ли), то размерности орбит алгебр Ли N, N' отличаются не менее чем на две единицы. Это утверждение проверено при $n \leq 6$ и для многих алгебр Ли размерности 7 (с использованием [7]).

Переходим к доказательству основного результата этого параграфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Мы будем рассматривать проективизации орбит алгебр Ли, лежащих в каркасе $F_n(\mathbb{C})$ (т.е. краеугольных алгебр Ли). При проективизации орбиты ее размерность (комплексная) уменьшается на 1. Но разности размерностей орбит краеугольных алгебр Ли при проективизации не изменятся.

При $n = 1$ пространство $F_1^*(\mathbb{C})$ пусто. При $n = 2$ пространство $F_2(\mathbb{C})$ может быть отождествлено с $\mathbb{C}^2$ (см. выше), а потому $F_2^*(\mathbb{C})$ отождествляется с пространством $\mathbb{C}P^1$ (проективной прямой, диффеоморфной сфере S^2). Эта сфера односвязна. Переходим к рассмотрению случаев, когда $n \geq 3$.

Пусть вначале $n \leq 5$. Тогда каркас $F_n(\mathbb{C})$, как видно из теоремы 1, имеет открытую орбиту алгебры Ли $N(n-1)$, а следующей по размерности и по примыканию будет орбита алгебры Ли $N(n-2) \oplus \mathbb{C}$. Разность размерностей этих орбит и их проективизаций в силу леммы равна 2. Но это для комплексных размерностей, а вещественная размерность отличается уже на 4.

Проективизация каркаса в нашем случае – неприводимое замкнутое проективное алгебраическое многообразие. Вычислим его фундаментальную группу. Для этого заметим, что дополнение до проективизации открытой орбиты имеет коразмерность (вещественную) 4. А потому вложение проективизации этой открытой орбиты в проективизацию каркаса индуцирует, как хорошо известно, изоморфизм фундаментальных групп. Остается только вычислить фундаментальную группу проективизации открытой орбиты. Эта проективизация, как легко понять, гомотопически эквивалентна многообразию Штифеля, диффеоморфного $SU(n)/SU(2)$. Так как многообразие Штифеля, очевидно, односвязно, то и открытая орбита в $F_n^*(\mathbb{C})$ односвязна. Поэтому в силу сказанного выше пространство $F_n^*(\mathbb{C})$ односвязно. Поэтому при $n \leq 5$ теорема 2 доказана.

При $n = 6$ доказательство аналогично, только в приведенные выше рассуждения нужно внести небольшие изменения. Здесь открытую орбиту имеет (при $n = 6$) алгебра Ли $N(n-2) \oplus \mathbb{C}$, а следующей по размерности будет орбита алгебры Ли $N(n-3) \oplus \mathbb{C}^2$. Прямое вычисление, аналогичное приведенному в лемме, показывает, что в этом случае коразмерность дополнения к проективизации открытой орбиты в $F_6^*(\mathbb{C})$ будет равна 3. Вещественная коразмерность равна 6 и потому применимо рассуждение, подобное приведенному выше для случая $n \leq 5$.

Можно рассматривать и вторые гомотопические группы π_2 проективизации каркаса. Они изоморфны вторым гомотопическим группам открытых орбит, а те в свою очередь при $3 \leq n \leq 6$ тривиальны (но при $n = 2$ это уже не так, ибо $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$). Также тривиальны одномерные и двумерные группы гомологий и когомологий этих каркасов.

Представляет определенный интерес дальнейшее изучение топологии пространств $F_n^*(\mathbb{C})$. Есть основание полагать, что они односвязны при всех n . Можно также дать описание особых точек в $F_n^*(\mathbb{C})$ (об этом см. ниже). Только при $n \leq 3$ проективизации каркасов неособы (случай $n = 3$ рассмотрен выше).

§ 5. Некоторые заключительные замечания

Тот факт, что размерности старшей орбиты и следующей по размерности в приведенной выше лемме отличаются на 2, есть отражение более общих утверждений. Дело в том, что описание орбит нильпотентных алгебр Ли в $F_n^*(\mathbb{C})$ тесно связано с такой давно изучаемой и глубоко изученной темой, как нильпотентные элементы в полупростых алгебрах Ли (в нашем случае речь идет

об алгебре Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ и о нильпотентных матрицах в ней) и свойства их орбит относительно сопряжения. Для нильпотентных матриц разности размерностей орбит всегда четны и равны 2 в нужных нам здесь случаях. Далее дадим описание особых точек (особенностей) нильпотентных многообразий – алгебраических множеств, составленных из нильпотентных матриц. Это описание показывает, что такие особенности сводятся в основном к простым особенностям (типов A_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8). В настоящей статье вопрос об особых точках в скелете пространства алгебр Ли не рассматривался, так как он особенно интересен для произвольных значений n , тогда как описания $F_n^*(\mathbb{C})$ при $n \geq 7$ пока не получено. Автор надеется вернуться к этой теме в дальнейшем.

Можно рассматривать каркасы и для пространства комплексных алгебр Ли размерности 7; здесь имеется 49 неприводимых компонент, среди которых 14 замыканий орбит жестких алгебр Ли (см. [5]). Большинство из 35 остальных компонент (а именно 32 из них), не связанных с жесткими алгебрами Ли, имеют вид $R_7^0(N)$ для некоторых нильпотентных алгебр Ли N . Условие (ii) из предложения (см. § 1) здесь исключает $J_6(0)$ (из-за неприводимой компоненты, соответствующей жесткой алгебре Ли $R_5 \oplus R_2$, где R_5 – жесткая разрешимая алгебра Ли размерности 5; см. [2]), и потому на роль старшей краевой алгебры Ли претендует $N(5) \oplus \mathbb{C}$. Отметим, что нильпотентные матрицы линейно упорядочены, только если их порядок ≤ 5 . При $n = 7$ приходится рассматривать нильпотентные матрицы порядка 6, для которых существуют несравнимые между собой (относительно отношения сжимаемости) матрицы. Этот факт усложняет архитектуру каркаса пространств $L_n(\mathbb{C})$ при $n \geq 7$.

Кроме пространства $L_n(\mathbb{C})$ можно рассматривать и некоторые его подпространства, например $N_n(\mathbb{C})$ (пространство всех n -мерных нильпотентных комплексных алгебр Ли) и $R_n(\mathbb{C})$ (пространство всех разрешимых n -мерных комплексных алгебр Ли). Оба этих пространства – алгебраические множества, и потому для них определены понятия неприводимых компонент. Естественно возникает вопрос о каркасах для этих двух подпространств – о пересечениях всех неприводимых компонент для каждого из них. При $n = 3$ имеется только одна неприводимая компонента в $R_3(\mathbb{C})$, и потому каркас здесь совпадает с этой компонентой. Поэтому ситуация в этом случае не такая, как для $L_3(\mathbb{C})$, где каркас состоит из двух алгебр Ли – N_3 и абелевой. Однако есть основания полагать, что при $n \geq 4$ каркасы пространств $L_n(\mathbb{C})$ и $R_n(\mathbb{C})$ совпадают. Что касается пространств нильпотентных алгебр Ли, то ситуация здесь очень непростая, так как для них нет описания неприводимых компонент размерности ≥ 7 . До размерности 6 существует только конечное число нильпотентных алгебр Ли и пространства нильпотентных алгебр Ли неприводимы, причем являются замыканиями некоторых жестких нильпотентных алгебр Ли (по одной в каждой размерности).

Список литературы

- [1] В.В. Горбачевич, “О некоторых свойствах пространства n -мерных алгебр Ли”, *Матем. сб.*, **200**:2 (2009), 31–60; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, “Some properties of the space of n -dimensional Lie algebras”, *Sb. Math.*, **200**:2 (2009), 185–213.

- [2] В. В. Горбацевич, “О пересечении неприводимых компонент пространства конечномерных алгебр Ли”, *Матем. сб.*, **203**:7 (2012), 57–78; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, “On the intersection of irreducible components of the space of finite-dimensional Lie algebras”, *Sb. Math.*, **203**:7 (2012), 976–995.
- [3] Х. Крафт, *Геометрические методы в теории инвариантов*, Мир, М., 1987, 312 с.; пер. с нем.: H. Kraft, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Aspects Math., **D1**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1984, x+308 pp.
- [4] D. Burde, Ch. Steinhoff, “Classification of orbit closures of 4-dimensional complex Lie algebras”, *J. Algebra*, **214**:2 (1999), 729–739.
- [5] Yu. Khakimjanov, “Varieties of Lie algebra laws”, *Handbook of algebra*, v. 2, North-Holland, Amsterdam, 2000, 509–541.
- [6] G. D. Mostow, “Covariant fiberings of Klein spaces, II”, *Amer. J. Math.*, **84**:3 (1962), 466–474.
- [7] D. Burde, “Degeneration of 7-dimensional nilpotent Lie algebras”, *Comm. Algebra*, **33**:4 (2005), 1259–1277.

Владимир Витальевич Горбацевич
(Vladimir V. Gorbatsevich)

Российский государственный технологический
университет им. К. Э. Циолковского (МАТИ),
г. Москва

E-mail: vgorvich@yandex.ru

Поступила в редакцию
26.08.2013 и 25.09.2013