Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Асташкин, Мартингалльные неравенства Розенталя в симметричных пространствах, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 12, 41–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8282>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 03:30:38

УДК 519.213.21+517.982.22

С. В. Асташкин

Мартингальные неравенства Розенталя в симметричных пространствах

Для последовательностей мартингальных разностей в общих симметричных пространствах доказаны неравенства, аналогичные классическим неравенствам Розенталя. Центральную роль при этом играет предсказуемая квадратичная вариация мартингала.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: мартингал, мартингальные разности, неравенство Розенталя, симметричное пространство, индексы Бойда.

DOI: 10.4213/sm8282

§ 1. Введение

В 1970 г. Розенталь доказал замечательные неравенства, из которых следует, что для произвольной последовательности независимых и в среднем равных нулю функций из $L_p[0, 1]$, $p \geq 2$, отображение $f_k \rightarrow \bar{f}_k$, где $\bar{f}_k(t) := f_k(t - k + 1)\kappa_{[k-1, k)}(t)$, $t > 0$, продолжается до изоморфизма между замкнутыми линейными оболочками $[f_k]_{k=1}^\infty$ (в $L_p[0, 1]$) и $[\bar{f}_k]_{k=1}^\infty$ (в $L_p[0, \infty) \cap L_2[0, \infty)$) [1]. Джонсон и Шехтман обобщили этот результат на класс симметричных пространств (с.п.) [2]. Следуя [3] (см. также [4; 2.f]), для каждого с.п. X на $[0, 1]$ и $1 \leq p < \infty$ определим множество Z_X^p всех функций f , измеримых на полуоси $[0, \infty)$, таких, что $\|f\|_{Z_X^p} := \|f^* \kappa_{[0, 1]}\|_X + \|f^* \kappa_{[1, \infty)}\|_{L_p[1, \infty)} < \infty$, где f^* – невозрастающая перестановка $|f|$, а κ_E – характеристическая функция (индикатор) множества E . Согласно теореме 1 из [2] для любого с.п. X , которое содержит L_p при некотором $p < \infty$, существует такое $C > 0$, что для всякой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_k(s) ds = 0$, $k = 1, 2, \dots$, имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty f_k \right\|_X \leq C \|\bar{f}\|_{Z_X^2}, \quad (1.1)$$

где $\bar{f} := \sum_{k=1}^\infty \bar{f}_k$ – дизъюнктивная сумма данной последовательности. (Противоположное неравенство справедливо для каждого с.п. X .) Аналогичный результат Джонсон и Шехтман доказали также для неотрицательных независимых функций с заменой пространства Z_X^2 на Z_X^1 .

Позднее в [5] и [6] (см. также обзор [7]) Асташкин и Сукочев распространили результаты Джонсона и Шехтмана на с.п., имеющие так называемое свойство

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-01-00077а и № 12-01-00198а).

Круглова, которое было введено ранее Браверманом [8] на основе некоторых вероятностных конструкций Круглова [9]. Отметим два важных обстоятельства. Во-первых, последнее свойство менее ограничительно по сравнению с условием $X \supset L_p$, где $p < \infty$. Например, им обладает экспоненциальное пространство Орлича $\text{Exp}(L_q)$, если $0 < q \leq 1$ [8; § II.4]; в то же время $\text{Exp}(L_q) \not\supset L_p$, $0 < q, p < \infty$. Во-вторых, верно и обратное: если для произвольной последовательности $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ независимых и в среднем равных нулю функций выполнено (1.1), то X имеет свойство Круглова [7; теорема 22].

Цель этой работы – доказательство неравенств типа Розенталя в с.п. для более общего класса мартингаловых разностей. Центральным результатом является теорема 1 о необходимых и достаточных условиях для выполнения в с.п. мартингалового аналога (1.1) (см. неравенство (3.1)), где вместо дизъюнктивной суммы $\bar{f}$ рассматривается предсказуемая квадратическая вариация (или характеристика) мартингала. Показано также, что при определенных условиях имеет место противоположное неравенство (см. теоремы 2 и 3 в § 3). Ранее эти результаты были известны лишь в случае некоторых пространств Орлича (например, L_p -пространств) (см. [10], [11], а также обзор [12; § 11]). Доказательства будут основаны на применении техники оценок распределений, разработанной Буркхольдером, Дэвисом и Ганди при получении аналогичных мартингаловых неравенств модулярного типа [10], [13], [14] (для сравнения с результатами, полученными здесь, их краткий обзор приведен в заключительной части статьи).

Иной подход, использующий, как и в случае независимых функций, дизъюнктивную сумму, был предложен в недавно опубликованной работе [15]. Полученные в [15] мартингаловые неравенства, аналогичные (1.1), применяются там для сравнения норм сумм мартингаловых разностей и их независимых копий.

Результаты настоящей работы были анонсированы в заметке [16].

§ 2. Определения, обозначения и предварительные сведения

Пусть $J = [0, 1]$ или $(0, \infty)$. Две измеримые на J функции x и y называются *равноизмеримыми*, если $\lambda\{t \in J : |x(t)| > \tau\} = \lambda\{t \in J : |y(t)| > \tau\}$, $\tau > 0$, где λ – мера Лебега. В частности, $|x|$ равноизмерим со своей невозрастающей непрерывной слева *перестановкой* $x^*(t) := \inf\{\tau \geq 0 : n_x(\tau) < t\}$, $t \in J$.

Банахово функциональное пространство X называется *симметричным пространством* (с.п.), если:

- 1) из того, что $|y(t)| \leq |x(t)|$ п.в. и $x \in X$, следует $y \in X$ и $\|y\|_X \leq \|x\|_X$;
- 2) из того, что функции $x(t)$ и $y(t)$ равноизмеримы и $x \in X$, следует $y \in X$ и $\|y\|_X = \|x\|_X$.

Если X – с.п. на J , то *двойственное* пространство X' состоит из всех измеримых y , для которых $\|y\|_{X'} := \sup\left\{\int_J x(t)y(t) dt : \|x\|_X \leq 1\right\} < \infty$. Пространство X' также симметрично и изометрически вложено в сопряженное X^* ; при этом $X' = X^*$ тогда и только тогда, когда X сепарабельно. Любое с.п. X непрерывно вложено в свое второе двойственное X'' . С.п. X называется *максимальным*, если из того, что $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, $\sup_{n=1,2,\dots} \|x_n\|_X < \infty$ и

$x_n \rightarrow x$ п.в., следует $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X$. Это эквивалентно тому, что $X'' = X$. Далее будем считать, что все с.п. сепарабельны или максимальны. Каждое такое с.п. вложено в свое второе двойственное изометрически.

В каждом с.п. X на $[0, 1]$ оператор растяжения $\sigma_\tau x(t) := x(\frac{t}{\tau}) \cdot \kappa_{[0, \min(1, \tau)]}(t)$, $\tau > 0$, непрерывен. Кроме того, $\|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X} \leq \max(1, \tau)$ [17; теорема 2.4.5]. Так как функция $\|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}$ полумультипликативна, можно определить *нижний и верхний индексы Бойда* пространства X :

$$\alpha_X = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau} \quad \text{и} \quad \beta_X = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau}.$$

Всегда $0 \leq \alpha_X \leq \beta_X \leq 1$ (см. [17; § 2.1]).

Говорят, что с.п. X *p-выпукло*, $1 \leq p < \infty$, если существует такая константа $C_X > 0$, что для произвольных функций $x_1, x_2, \dots, x_n$ из X выполнено

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \right\|_X \leq C_X \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_X^p \right)^{1/p}.$$

Далее нам понадобится понятие с.п. случайных величин (с.в.), определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (всюду далее предполагаем, что оно не имеет атомов). А именно, если X – с.п. на $[0, 1]$, то соответствующее пространство $X(\Omega)$ состоит из таких с.в. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, что $f^* \in X$, и $\|f\|_{X(\Omega)} := \|f^*\|_X$. В этом случае $f^*(t) := \inf\{\tau \geq 0 : \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > \tau\} < t\}$, $0 < t \leq 1$. Подробнее о с.п. см. монографии [17], [4].

Всюду в дальнейшем $\{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^\infty$ – поток σ -алгебр на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, т.е. $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}_k \subset \dots \subset \mathcal{A}$. Через $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$, как обычно, будет обозначаться *условное математическое ожидание* $\mathcal{A}$ -измеримой с.в. f относительно σ -подалгебры $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Это означает, что $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ $\mathcal{B}$ -измерима и для каждого $B \in \mathcal{B}$ имеем $\int_B \mathbb{E}(f|\mathcal{B}) d\mathbb{P} = \int_B f d\mathbb{P}$.

Последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ $\mathcal{A}_k$ -измеримых с.в. называется *мартингалом* (*субмартингалом*), если $\mathbb{E}(f_k|\mathcal{A}_{k-1}) = f_{k-1}$ (соответственно $\mathbb{E}(f_k|\mathcal{A}_{k-1}) \geq f_{k-1}$) п.в. для всех $k = 2, 3, \dots$. Тогда с.в. $d_k := f_k - f_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, где $f_0 = 0$, называются *мартингальными разностями*. Важный пример мартингальных разностей – последовательность независимых с.в. $\{d_k\}_{k=1}^\infty \subset L_1(\Omega)$ такая, что $\int_\Omega d_k d\mathbb{P} = 0$, $k = 1, 2, \dots$, относительно потока σ -алгебр $\mathcal{A}_k = \sigma(\{f_i\}_{i=1}^k)$, порожденных наборами с.в. $\{f_i\}_{i=1}^k$. Другой пример – последовательность функций Хаара $\{\chi_k\}_{k=1}^\infty$ (см., например, [18; § 3.1]). С.в. $\tau = \tau(\omega)$ со значениями во множестве $\{0, 1, \dots, +\infty\}$ называется *марковским моментом* относительно потока σ -алгебр $\{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^\infty$, если $\{\omega : \tau \leq k\} \in \mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{N}$. Σ -алгеброй событий, предшествующих марковскому моменту τ , называется σ -алгебра $\mathcal{A}_\tau$, состоящая из таких событий $A \in \mathcal{A}$, что $A \cap \{\tau \leq k\} \in \mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{N}$. Подробнее о свойствах условных математических ожиданий, мартингалов и марковских моментов см. [19]–[21].

Если $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – произвольная последовательность $\mathcal{A}$ -измеримых с.в., то всюду далее будут использоваться следующие обозначения:

$$\begin{aligned} M_n(f) &:= \sup_{k=1,2,\dots,n} |f_k|, & M(f) &:= \sup_{k=1,2,\dots} |f_k|, \\ d_k &:= f_k - f_{k-1}, & f_0 &= 0, & S_n(f) &:= \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{1/2}, & S(f) &:= \left(\sum_{k=1}^\infty d_k^2 \right)^{1/2}, \\ \|f\|_p &:= \sup_{n=1,2,\dots} (\mathbb{E}|f_n|^p)^{1/p}, & 1 \leq p &< \infty, \\ s_n(f) &:= \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(d_k^2 | \mathcal{A}_{k-1}) \right)^{1/2}, & s(f) &:= \left(\sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}(d_k^2 | \mathcal{A}_{k-1}) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

В случае, когда $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – мартингал, величины $S(f)^2$ и $s(f)^2$ называются соответственно его *квадратической* и *предсказуемой квадратической вариациями*. И, наконец, если ξ и η – две с.в., то $\xi \wedge \eta := \min(\xi, \eta)$, $\xi \vee \eta := \max(\xi, \eta)$ и $\mathbb{E}\xi := \int_\Omega \xi d\mathbb{P}$.

§ 3. Основные результаты

Начнем с утверждения, которое дает необходимое и достаточное условие выполнения в с.п. мартингального аналога неравенства Джонсона–Шехтмана (1.1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – с.п. на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Следующие условия эквивалентны:

(i) существует константа $C > 0$, зависящая только от пространства X , такая, что для произвольного мартингала $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ выполнено неравенство

$$\|M(f)\|_X \leq C(\|s(f)\|_X + \|M(d)\|_X); \quad (3.1)$$

(ii) $\alpha_X > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко показать, что из условия $\alpha_X > 0$ следует, что с.п. X содержит пространство $L_p = L_p[0, 1]$ для всех $p > 1/\alpha_X$. С другой стороны, известно, что существует такое с.п. X , что одновременно $X \supset L_2$ и $\alpha_X = 0$ [22]. Таким образом, условие $\alpha_X > 0$ более ограничительно, чем условие “ $X \supset L_p$ при некотором $p < \infty$ ” из работы [2].

Непосредственное следствие теоремы 1 – это неравенство Розенталия для последовательностей независимых с.в., в среднем равных нулю, в случае, когда нижний индекс Бойда с.п. X положителен и $X \subset L_2[0, 1]$ (см. (1.1)). Напомним, что для каждой последовательности $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ функций, заданных на $[0, 1]$, мы полагаем: $\bar{d}_k(t) = d_k(t - k + 1)\kappa_{[k-1, k)}(t)$, $t > 0$. Кроме того, пусть $\bar{d} := \sum_{k=1}^\infty \bar{d}_k$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X – с.п. на $[0, 1]$ такое, что $X \subset L_2[0, 1]$ и $\alpha_X > 0$. Тогда существует такая константа $A > 0$, что для произвольной последовательности независимых с.в. $\{d_k\}_{k=1}^\infty$, $\mathbb{E}d_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$, выполнено

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty d_k \right\|_X \leq A \|\bar{d}\|_{Z_X^2}. \quad (3.2)$$

В частности, получаем классическое неравенство Розенталя: для произвольного $p \geq 2$ существует константа $A_p > 0$, для которой

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^{\infty} d_k \right|^p \leq A_p \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} d_k^2 \right)^{p/2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} |d_k|^p \right). \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что с.в. $f_n := \sum_{k=1}^n d_k$, $n = 1, 2, \dots$, образуют мартингал относительно последовательности $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\mathcal{A}_n = \sigma(\{d_k\}_{k=1}^n)$. Ввиду независимости d_k^2 относительно σ -алгебры $\mathcal{A}_{k-1}$ имеем $\mathbb{E}(d_k^2 | \mathcal{A}_{k-1}) = \mathbb{E} d_k^2$. Следовательно, так как $X \subset L_2[0, 1]$, то

$$\begin{aligned} \|s(f)\|_X &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} d_k^2 \right)^{1/2} = \|\bar{d}\|_{L_2(0, \infty)} \\ &\leq \|\bar{d}^* \kappa_{[0, 1]}\|_{L_2[0, 1]} + \|\bar{d}^* \kappa_{[1, \infty]}\|_{L_2[1, \infty)} \leq C \|\bar{d}\|_{Z_X^2}. \end{aligned}$$

Кроме того (см. [23; предложение 1] или [2; лемма 3]),

$$\frac{1}{2} \lambda \{\bar{d}^* \kappa_{[0, 1]} > \tau\} \leq \lambda \{M(d) > \tau\} \leq \lambda \{\bar{d}^* \kappa_{[0, 1]} > \tau\}, \quad \tau > 0, \quad (3.4)$$

откуда

$$\|M(d)\|_X \leq \|\bar{d}^* \kappa_{[0, 1]}\|_X \leq \|\bar{d}\|_{Z_X^2}.$$

Таким образом, применяя теорему 1 и учитывая, что X сепарабельно или максимально, получаем неравенство (3.2).

Для доказательства (3.3) заметим, что

$$\|M(d)\|_{L_p} \leq \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |d_k|^p \right)^{1/p} \right\|_{L_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} |d_k|^p \right)^{1/p},$$

откуда ввиду (3.4) и [17; следствие 2.4.2]

$$\begin{aligned} \|\bar{d}\|_{Z_{L_p}^2} &\leq \|\bar{d}^* \kappa_{[0, 1]}\|_{L_p[0, 1]} + \|\bar{d}\|_{L_2(0, \infty)} \leq 2\|M(d)\|_{L_p[0, 1]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} d_k^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} |d_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} d_k^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Тем самыми неравенство (3.3) – непосредственное следствие (3.2) в случае $X = L_p$, $p \geq 2$.

Для с.п., лежащих “по одну сторону” от L_2 , справедливо также неравенство, противоположное по отношению к (3.1).

ТЕОРЕМА 2. Пусть X есть 2-выпуклое с.п. на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\alpha_X > 0$. Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от пространства X , такая, что для произвольного мартингала $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ выполнено неравенство

$$\|s(f)\|_X + \|M(d)\|_X \leq C \|M(f)\|_X. \quad (3.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие 2-выпуклости пространства в последней теореме существенно. Приведем пример, принадлежащий М. Кикучи, которому автор благодарен за любезное разрешение опубликовать его.

Предположим, что с.п. $X \not\subset L_2$. Пусть также x и y – две неотрицательные с.в. с одним и тем же распределением и дизъюнктными носителями такие, что $x, y \in X \setminus L_2$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим последовательность $f^{(n)} = \{f_k^{(n)}\}_{k=0}^\infty$ следующим образом:

$$f_0^{(n)} = 0 \text{ и } f_k^{(n)} = (x \wedge n) - (y \wedge n), \text{ если } k \geq 1.$$

Тогда $f^{(n)}$ – мартингал относительно потока σ -алгебр $\{\mathcal{A}_k\}$: $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{A}_k = \sigma(\{x, y\})$ для $k \geq 1$. Ясно, что

$$M(f^{(n)}) = (x \wedge n) + (y \wedge n), \quad s(f^{(n)}) = (\mathbb{E}[(x \wedge n)^2 + (y \wedge n)^2])^{1/2}.$$

Следовательно, с одной стороны, $\|M(f^{(n)})\|_X \leq 2\|x\|_X < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, а с другой, при $n \rightarrow \infty$ получаем, что $\|s(f^{(n)})\|_X \rightarrow \infty$.

В то же время для определенного класса мартингалов неравенство (3.5) оказывается верным во всех с.п. с положительным нижним индексом Бойда.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – с.п. на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\alpha_X > 0$. Предположим, что мартингал $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию $|d_k| \leq w_k$, $k = 1, 2, \dots$, где w_k есть $\mathcal{A}_{k-1}$ -измеримая с.в. ($k = 1, 2, \dots$), причем $M(w) := \sup_{k=1,2,\dots} w_k \in X$. Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от пространства X , такая, что

$$\|s(f)\|_X \leq C(\|M(f)\|_X + \|M(w)\|_X). \quad (3.6)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть χ_k – функции Хаара, нормированные в L_∞ , $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots$, а $h = \{h_n\}_{n=0}^\infty$ – мартингал относительно потока σ -алгебр $\mathcal{A}_n = \sigma(\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n)$, образованный последовательностью сумм Хаара $h_n = \sum_{k=0}^n c_k \chi_k$. Тогда для произвольного с.п. X такого, что $\alpha_X > 0$, существует константа $C > 0$, зависящая только от X , для которой

$$\|s(h)\|_X \leq C\|M(h)\|_X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что соответствующие мартингальные разности $d_k := h_k - h_{k-1}$, $h_{-1} = 0$, удовлетворяют неравенствам

$$|d_k| = |c_k \chi_k| \leq |c_k| \kappa_{\Delta_k},$$

где Δ_k – двоичный интервал, являющийся носителем функции Хаара χ_k , $k = 0, 1, \dots$. Так как κ_{Δ_k} есть $\mathcal{A}_{k-1}$ -измеримая с.в. и $\sup_{k=0,1,\dots} |c_k| \kappa_{\Delta_k} \leq 2M(h)$, нужное неравенство – следствие предыдущей теоремы.

§ 4. Доказательства

Начнем с одного вспомогательного утверждения, в доказательстве которого оказывается полезным пространство Z_X^2 (см. § 1). Функционал $\|\cdot\|_{Z_X^2}$ является только квазинормой (неравенство треугольника выполняется с некоторой константой). Однако, как нетрудно показать [7; § 4.1], он эквивалентен симметричной норме

$$\|f\|'_{Z_X^2} := \|f^* \kappa_{[0,1]}\|_X + \|f\|_{(L_1+L_2)(0,\infty)},$$

где $\|f\|_{(L_1+L_2)(0,\infty)} := \inf\{\|f_0\|_{L_1(0,\infty)} + \|f_1\|_{L_2(0,\infty)} : f = f_0 + f_1\}$. Тем самым Z_X^2 – с.п. на полюси $[0, \infty)$.

ЛЕММА 1. Пусть X – с.п. на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, f, g и h – неотрицательные с.в. из X . Тогда если

$$\mathbb{P}\{f > \tau\} \leq \mathbb{P}\{g > \tau\} + \mathbb{P}\{h > \tau\}, \quad \tau > 0,$$

то $\|f\|_X \leq \|g\|_X + \|h\|_X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Omega = [0, 1]$, а $\mathbb{P}$ – мера Лебега λ . Рассмотрим в с.п. Z_X^2 функцию $f\kappa_{[0,1]}$, а также дизъюнктную сумму функций g и h : $g \oplus h(t) := g(t)\kappa_{[0,1]}(t) + h(t-1)\kappa_{[1,2]}(t)$. Так как

$$\lambda\{g \oplus h > \tau\} = \lambda\{g > \tau\} + \lambda\{h > \tau\}, \quad \tau > 0,$$

то по условию

$$\lambda\{f\kappa_{[0,1]} > \tau\} = \lambda\{f > \tau\} \leq \lambda\{g \oplus h > \tau\}, \quad \tau > 0.$$

Отсюда ввиду [17; следствие 2.4.2], а также ввиду того, что носители с.в. f, g и h содержатся в $[0, 1]$, следует

$$\|f\|_X = \|f\kappa_{[0,1]}\|'_{Z_X^2} \leq \|g \oplus h\|'_{Z_X^2} \leq \|g\kappa_{[0,1]}\|'_{Z_X^2} + \|h(\cdot-1)\kappa_{[1,2]}\|'_{Z_X^2} = \|g\|_X + \|h\|_X,$$

и лемма доказана.

Как уже говорилось в § 1, основную роль в доказательствах будет играть техника, основанная на применении оценок распределений. Неоднократно далее будет использоваться следующее предложение, позволяющее сравнивать с.в. из симметричных пространств с положительным нижним индексом Бойда (в западной литературе подобное утверждение называют “good λ -inequality”).

Напомним (см. § 2), что в каждом с.п. на $[0, 1]$ ограничен оператор растяжения $\sigma_\tau x(t) := x(t/\tau) \cdot \kappa_{[0, \min(1, \tau)]}(t)$, $\tau > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть X – с.п. на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\alpha_X > 0$. Предположим, что с.в. $g \geq 0$ и $h \geq 0$ измеримы на Ω , $h \in X$, а числа $\beta > 1$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ и $\gamma \in (0, \alpha_X)$ таковы, что $\|\sigma_\varepsilon\|_{X \rightarrow X} \leq \varepsilon^\gamma$, $\beta\varepsilon^\gamma < 1$ и

$$\mathbb{P}\{g > \beta\tau, h \leq \delta\tau\} \leq \varepsilon\mathbb{P}\{g > \tau\}, \quad \tau > 0. \quad (4.1)$$

Тогда $g \in X$ и

$$\|g\|_X \leq \frac{\beta}{\delta(1 - \beta\varepsilon^\gamma)} \|h\|_X. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего ввиду (4.1) для любого $\tau > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{g > \beta\tau\} &= \mathbb{P}\{g > \beta\tau, h \leq \delta\tau\} + \mathbb{P}\{g > \beta\tau, h > \delta\tau\} \\ &\leq \varepsilon\mathbb{P}\{g > \tau\} + \mathbb{P}\{h > \delta\tau\}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Так как по определению оператора растяжения $\varepsilon\mathbb{P}\{g > \tau\} = \mathbb{P}\{\sigma_\varepsilon g > \tau\}$, то отсюда вытекает

$$\mathbb{P}\{g > \beta\tau\} \leq \mathbb{P}\{\sigma_\varepsilon g > \tau\} + \mathbb{P}\{h > \delta\tau\}, \quad \tau > 0.$$

Предположим сначала, что $g \in X$. Тогда из предыдущего неравенства, леммы 1 и условия предложения следует

$$\|\beta^{-1}g\|_X \leq \|\sigma_\varepsilon g\|_X + \|\delta^{-1}h\|_X \leq \varepsilon^\gamma \|g\|_X + \delta^{-1} \|h\|_X,$$

а это эквивалентно (4.2).

В общем случае нетрудно проверить, что для с.в. $g^{(n)} := g \wedge n$, $n \in \mathbb{N}$, и h выполнен аналог неравенства (4.3), т.е.

$$\mathbb{P}\{g^{(n)} > \beta\tau\} \leq \varepsilon\mathbb{P}\{g^{(n)} > \tau\} + \mathbb{P}\{h > \delta\tau\}, \quad \tau > 0. \quad (4.4)$$

Действительно, если $\beta\tau < n$, то $\tau < n$, и поэтому в силу (4.3)

$$\mathbb{P}\{g^{(n)} > \beta\tau\} = \mathbb{P}\{g > \beta\tau\} \leq \varepsilon\mathbb{P}\{g > \tau\} + \mathbb{P}\{h > \delta\tau\} = \varepsilon\mathbb{P}\{g^{(n)} > \tau\} + \mathbb{P}\{h > \delta\tau\}.$$

В случае $\beta\tau \geq n$ соотношение (4.4) выполнено тривиальным образом ввиду того, что тогда $\mathbb{P}\{g^{(n)} > \beta\tau\} = 0$. Так как $g^{(n)} \in X$, то из (4.4) вытекает

$$\|g^{(n)}\|_X \leq \frac{\beta}{\delta(1 - \beta\varepsilon^\gamma)} \|h\|_X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $g \in X''$ и

$$\|g\|_{X''} \leq \frac{\beta}{\delta(1 - \beta\varepsilon^\gamma)} \|h\|_X, \quad (4.5)$$

где X'' – второе двойственное пространство к X . Если X максимально, то $X = X''$, и предложение доказано. Осталось рассмотреть случай, когда X сепарабельно.

Для произвольной с.в. $f \geq 0$ и каждого $v > 0$ положим $f_v = f\kappa_{\{f > v\}}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\{g_{\beta n} > \beta\tau\} \leq \varepsilon\mathbb{P}\{g_n > \tau\} + \mathbb{P}\{h_{\delta n} > \delta\tau\}, \quad \tau > 0.$$

В самом деле, из (4.3) следует, что

$$\mathbb{P}\{g_{\beta n} > \beta\tau\} = \mathbb{P}\{g > \beta n\} \leq \varepsilon\mathbb{P}\{g > n\} + \mathbb{P}\{h > \delta n\} = \varepsilon\mathbb{P}\{g_n > \tau\} + \mathbb{P}\{h_{\delta n} > \delta\tau\},$$

если $\tau \leq n$, и

$$\mathbb{P}\{g_{\beta n} > \beta\tau\} = \mathbb{P}\{g > \beta\tau\} \leq \varepsilon\mathbb{P}\{g > \tau\} + \mathbb{P}\{h > \delta\tau\} = \varepsilon\mathbb{P}\{g_n > \tau\} + \mathbb{P}\{h_{\delta n} > \delta\tau\},$$

если $\tau > n$. Учитывая, что $h \in X$, а $g \in X''$, точно так же, как и ранее, получаем

$$\beta^{-1} \|g_{\beta n}\|_{X''} \leq \varepsilon^\gamma \|g_n\|_{X''} + \delta^{-1} \|h_{\delta n}\|_X, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

Покажем, что

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_{\beta n}\|_{X''} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{X''} = 0.$$

Действительно, так как $h \in X$ и X сепарабельно, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_{\delta n}\|_X = 0$. Поэтому для достаточно большого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\|g_n\|_{X''} < a + \eta$ и $\|h_{\delta n}\|_X < \eta$, где $\eta > 0$ произвольно. Таким образом, из (4.6) и того, что $\|g_{\beta n}\|_{X''} \geq a$, следует

$$\beta^{-1} a \leq \beta^{-1} \|g_{\beta n}\|_{X''} \leq \varepsilon^\gamma (a + \eta) + \delta^{-1} \eta,$$

откуда

$$a \leq \frac{\beta(\varepsilon^\gamma + \delta^{-1})}{1 - \beta\varepsilon^\gamma} \cdot \eta.$$

Так как $\eta > 0$ сколько угодно мало, то $a = 0$. Последнее означает, что $g \in X$. Тем самым неравенство (4.5) переходит в (4.2), и предложение доказано.

Теперь мы готовы к тому, чтобы доказать теорему 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. (ii) $\implies$ (i). Докажем неравенство вида (4.1) для с.в. $g := M(f)$ и $h := s(f) \vee M(d)$, чтобы затем применить предложение 1. Точнее, покажем, что

$$\mathbb{P}\{M(f) > \beta x, s(f) \vee M(d) \leq \delta x\} \leq \frac{\delta^2}{(\beta - \delta - 1)^2} \mathbb{P}\{M(f) > x\}, \quad x > 0, \quad (4.7)$$

для произвольных $\beta > 1$ и $0 < \delta < \beta - 1$.

Определим марковские моменты относительно потока σ -алгебр $\{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^\infty$:

$$\begin{aligned} \mu &:= \inf\{n \in \mathbb{N} : |f_n| > x\}, & \nu &:= \inf\{n \in \mathbb{N} : |f_n| > \beta x\}, \\ \sigma &:= \inf\{n \geq 0 : |d_n| > \delta x \text{ или } s_{n+1}(f) > \delta x\}, & \text{где } d_0 &:= 0 \end{aligned}$$

(всюду далее считаем, что $\inf \emptyset = \infty$), а также мартингал $h = \{h_n\}_{n=1}^\infty$:

$$h_n := \sum_{k=1}^n \kappa_{\{\mu < k \leq \nu \wedge \sigma\}} d_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Предположим, что для заданного $x > 0$ выполнено $M(f) > \beta x$ и $s(f) \vee M(d) \leq \delta x$. Тогда $\mu \leq \nu < \infty$, а $\sigma = \infty$. Кроме того, по определению μ

$$|f_\mu| = \left| \sum_{k=1}^{\mu} d_k \right| \leq |f_{\mu-1}| + |d_\mu| \leq (\delta + 1)x.$$

С другой стороны, $|f_\nu| > \beta x$, и поэтому из предыдущего неравенства следует

$$|h_\nu| = \left| \sum_{k=\mu+1}^{\nu} d_k \right| \geq |f_\nu| - |f_\mu| > (\beta - \delta - 1)x,$$

откуда $M(h) > (\beta - \delta - 1)x$. Таким образом, ввиду неравенства Дуба (см., например, [19; следствие 7.3.1] или [24; предложение 4.1.1, (i)]), примененного к субмартингалу $(h_n^2)_{n=1}^\infty$, получим

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{M(f) > \beta x, s(f) \vee M(d) \leq \delta x\} &\leq \mathbb{P}\{\mu \leq \nu < \infty, \sigma = \infty\} \\ &\leq \mathbb{P}\{M(h) > (\beta - \delta - 1)x\} \leq \frac{1}{(\beta - \delta - 1)^2 x^2} \|h\|_2^2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $\|h\|_2 := \sup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{E}(h_n^2))^{1/2}$.

Оценим $\|h\|_2$ сверху. Прежде всего, мартингальные разности попарно ортогональны, поэтому

$$\|h\|_2^2 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n d_k \kappa_{\{\mu < k \leq \nu \wedge \sigma\}} \right)^2 = \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}(d_k^2 \kappa_{\{\mu < k \leq \nu \wedge \sigma\}} | \mathcal{A}_{k-1}) \right) = \mathbb{E}(s(h)^2).$$

С другой стороны, так как $s(h) = 0$ на множестве $\{\mu = \infty\}$, ввиду определения h и σ имеем $s(h)^2 \leq s_\sigma(f)^2 \kappa_{\{\mu < \infty\}} \leq \delta^2 x^2 \kappa_{\{M(f) > x\}}$, откуда $\mathbb{E}(s(h)^2) \leq \delta^2 x^2 \mathbb{P}\{M(f) > x\}$. Следовательно, применяя полученные соотношения к оценке правой части (4.8), в итоге для любых $\beta > 1$ и $0 < \delta < \beta - 1$ получаем неравенство (4.7).

Напомним, что по условию $\alpha_X > 0$ и, значит, $\lim_{t \rightarrow +0} \|\sigma_t\|_{X \rightarrow X} t^{-\gamma} = 0$ для любого $\gamma \in (0, \alpha_X)$. Пусть $\beta > 1$ произвольно, а $0 < \delta < \beta - 1$ настолько мало, что число $\varepsilon := 2\delta^2/(\beta - \delta - 1)^2$ удовлетворяет условиям $\|\sigma_\varepsilon\|_{X \rightarrow X} \leq \varepsilon^\gamma$ и $\beta\varepsilon^\gamma < 1$. Так как неравенство (4.7), в частности, справедливо для выбранных β и δ , то, применяя предложение 1, получаем, что

$$\|M(f)\|_X \leq \frac{\beta}{\delta(1 - \beta\varepsilon^\gamma)} \|s(f) \vee M(d)\|_X \leq \frac{\beta}{\delta(1 - \beta\varepsilon^\gamma)} (\|s(f)\|_X + \|M(d)\|_X),$$

и импликация (ii) $\implies$ (i) доказана.

(i) $\implies$ (ii). Предположим, что $\alpha_X = 0$. Тогда ввиду [4; предложение 2.b.7] для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существуют неотрицательные попарно дизъюнктные и одинаково распределенные с.в. $x_1, x_2, \dots, x_{2^n}$ из X такие, что для любых $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, справедливы неравенства

$$\max_{1 \leq i \leq 2^n} |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{2^n} a_i x_i \right\|_X \leq (1 + \varepsilon) \max_{1 \leq i \leq 2^n} |a_i|. \quad (4.9)$$

Следуя [25], в качестве $d_0, d_1, \dots, d_n$ возьмем “функции Радемахера” относительно последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{2^n}$, т.е. с.в.

$$d_k := \sum_{j=1}^{2^k} (-1)^{j-1} y_j^k, \quad \text{где } y_j^k := \sum_{i=(j-1)2^{n-k}+1}^{j2^{n-k}} x_i.$$

Тогда, как нетрудно проверить, последовательность σ -алгебр $\{\mathcal{A}_k\}_{k=0}^n$, где $\mathcal{A}_k := \sigma(\{y_j^k\}_{j=1}^{2^k})$, возрастает, а $(d_k)_{k=0}^n$ является последовательностью мартингальных разностей относительно нее.

Так как ввиду попарной дизъюнктивности x_i для произвольного $k = 0, 1, \dots, n$

$$d_k^2 = \sum_{j=1}^{2^k} \sum_{i=(j-1)2^{n-k}+1}^{j2^{n-k}} x_i^2 = \sum_{i=1}^{2^n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{2^n} x_i \right)^2,$$

то с.в. d_k^2 $\mathcal{A}_0$ -измерима, и, значит,

$$s\left(\sum_{k=0}^n d_k\right) = \left(\sum_{k=0}^n d_k^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^{2^n} x_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{n+1} \left| \sum_{i=1}^{2^n} x_i \right|.$$

Таким образом, из (4.9) следует, что

$$\left\| s\left(\sum_{k=0}^n d_k\right) \right\|_X \leq (1+\varepsilon)\sqrt{n+1}.$$

С другой стороны, как легко видеть,

$$M\left(\sum_{k=0}^n d_k\right) \geq (n+1)|x_1|, \quad M(d) = \left| \sum_{i=1}^{2^n} x_i \right|,$$

откуда, опять учитывая неравенства (4.9), получаем

$$\left\| M\left(\sum_{k=0}^n d_k\right) \right\|_X \geq n+1, \quad \|M(d)\|_X \leq 1+\varepsilon.$$

Следовательно, неравенство (3.1) не выполнено с одной и той же константой $C > 0$ для мартингалов конечной длины. Но тогда стандартные рассуждения показывают, что оно не имеет места для бесконечных последовательностей мартингалов разностей, и тем самым теорема доказана.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится оценка, аналогичная (3.5), но для квадратической вариации $S(f)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – с.п. на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\alpha_X > 0$. Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от пространства X , такая, что для произвольного мартингала $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ выполнено неравенство

$$\|S(f)\|_X \leq C\|M(f)\|_X. \quad (4.10)$$

Хотя этот результат известен [25; теорема 3], мы приведем здесь в случае неотрицательных мартингалов его иное, более короткое доказательство, используя идею, с помощью которой получено аналогичное модулярное неравенство в [10; теорема 15.1].

Следующий результат, где марковский момент μ определяется равенством

$$\mu := \inf\{k \in \mathbb{N} : |f_k| > \tau\} \quad (4.11)$$

$(\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность $\mathcal{A}_k$ -измеримых с.в., а $\tau > 0$), хорошо известен.

ЛЕММА 2 (см. [10; лемма 2.1]). Пусть $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – такой мартингал, что $\|f\|_1 := \sup_{n=1,2,\dots} \mathbb{E}|f_n| < \infty$. Кроме того, пусть $\{f_\mu^n\}_{n=1}^\infty$ – мартингал, “остановленный” в момент μ , т.е. $f_\mu^n := \sum_{k=1}^n d_k \kappa_{\{\mu \geq k\}}$. Тогда справедливо неравенство:

$$\mathbb{E}S_{\mu-1}(f)^2 + \mathbb{E}f_{\mu-1}^2 \leq 2\tau\|f\|_1. \quad (4.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Как и в случае теоремы 1, основная задача будет состоять в доказательстве неравенства для распределений, но теперь уже с.в. $S(f)$ и $M(f)$. А именно, мы покажем, что для произвольных $\beta > 1$ и $0 < \delta < \frac{1}{2}(\beta^2 - 1)^{1/2}$ справедливо неравенство

$$\mathbb{P}\{S(f) > \beta x, M(f) \leq \delta x\} \leq \frac{2\delta^2}{\beta^2 - 4\delta^2 - 1} \mathbb{P}\{S(f) > x\}, \quad x > 0. \quad (4.13)$$

Пусть $x > 0$ произвольно, а марковский момент μ по-прежнему определяется равенством (4.11) с $\tau = \delta x$. Рассмотрим квадратическую вариацию мартингала f , “остановленного” в момент $\mu - 1$, т.е. величину

$$S_{\mu-1}(f) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \kappa_{\{\mu > k\}} \right)^{1/2},$$

где, как обычно, $d_k = f_k - f_{k-1}$. Прежде всего заметим, что на множестве $\{M(f) \leq \delta x\}$ выполнено $\mu - 1 = \mu = \infty$ и, значит,

$$\mathbb{P}\{S(f) > \beta x, M(f) \leq \delta x\} \leq \mathbb{P}\{S_{\mu-1}(f) > \beta x\}.$$

Следовательно, для доказательства неравенства (4.13) достаточно показать, что

$$\mathbb{P}\{S_{\mu-1}(f) > \beta x\} \leq \frac{2\delta^2}{\beta^2 - 4\delta^2 - 1} \mathbb{P}\{S(f) > x\}, \quad x > 0. \quad (4.14)$$

Заметим, что $d_k^2 \kappa_{\{\mu > k\}} = d_k^2 \kappa_{\{M_k(f) \leq \delta x\}} \leq 4(\delta x)^2$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому если

$$\nu := \inf \left\{ n : \sum_{k=1}^n d_k^2 \kappa_{\{\mu > k\}} > a \right\},$$

где $a > 0$, то для любого $t > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_{\mu-1}^2(f) > a + t + 4(\delta x)^2\} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k^2 \kappa_{\{\mu > k\}} > t, \nu = n \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k^2 \kappa_{\{\mu > k, \nu = n\}} > t \right\}. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее неравенство по всем $t > 0$, получаем

$$\int_{a+4(\delta x)^2}^{\infty} \mathbb{P}\{S_{\mu-1}^2(f) > s\} ds \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} d_k^2 \kappa_{\{\mu > k, \nu = n\}} \right). \quad (4.15)$$

Для оценки сверху правой части неравенства (4.15) при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим с.в.

$$g_k^{(n)} := f_{n+k-1} \kappa_{\{\mu > n, \nu = n\}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из предположения о неотрицательности мартингала $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ следует, что $g^{(n)} = \{g_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ – также неотрицательный мартингал относительно потока σ -алгебр $\{\mathcal{A}_{n+k-1}\}_{k=1}^\infty$. Поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\|g^{(n)}\|_1 = \mathbb{E}g_1^{(n)} \leq \delta x \mathbb{P}\{\nu = n\}.$$

Следовательно, обозначая через $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ соответствующую последовательность разностей и применяя лемму 2 к мартингалу $g^{(n)}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{k=n+1}^\infty d_k^2 \kappa_{\{\mu > k, \nu = n\}} \right) &\leq \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^\infty e_k^2 \kappa_{\{M_k(g^{(n)}) \leq \delta x\}} \right) \\ &\leq 2\delta x \|g^{(n)}\|_1 \leq 2(\delta x)^2 \mathbb{P}\{\nu = n\}. \end{aligned}$$

Следовательно, из (4.15) и определения ν вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_{a+4(\delta x)^2}^\infty \mathbb{P}\{S_{\mu-1}^2(f) > s\} ds &\leq 2(\delta x)^2 \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}\{\nu = n\} \\ &= 2(\delta x)^2 \mathbb{P}\{\nu < \infty\} = 2(\delta x)^2 \mathbb{P}\{S_{\mu-1}^2(f) > a\}. \end{aligned}$$

Полагая в последнем неравенстве $a = x^2$, получаем, что

$$\begin{aligned} (\beta^2 - 4\delta^2 - 1)x^2 \mathbb{P}\{S_{\mu-1}(f) > \beta x\} &\leq \int_{x^2+4\delta^2x^2}^\infty \mathbb{P}\{S_{\mu-1}^2(f) > s\} ds \\ &\leq 2\delta^2x^2 \mathbb{P}\{S_{\mu-1}^2(f) > x^2\} \leq 2\delta^2x^2 \mathbb{P}\{S(f) > x\}, \end{aligned}$$

и неравенство (4.14), а значит, и (4.13) доказано.

Пусть $\beta > 1$ и $\gamma \in (0, \alpha_X)$ произвольны. Выберем $0 < \delta < (\beta^2 - 1)^{1/2}/2$ так, чтобы число $\varepsilon := 2\delta^2/(\beta^2 - 4\delta^2 - 1)$ удовлетворяло условиям $\|\sigma_\varepsilon\|_{X \rightarrow X} \leq \varepsilon^\gamma$ и $\beta\varepsilon^\gamma < 1$. Так как в этом случае имеет место неравенство (4.13), то, применяя предложение 1, получаем (4.10).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В более общей ситуации, когда X – максимальная банахова функциональная решетка такая, что $L_\infty \subset X \subset L_1$, неравенство (4.10) рассматривалось в работе [26].

Перейдем теперь к доказательству оценки сверху предсказуемой квадратической вариации. Начнем со следующего вспомогательного утверждения, идея доказательства которого взята из [21; доказательство предложения VIII-1-4].

ЛЕММА 3. Пусть $\{\mathcal{A}_k\}_{k=0}^\infty$ – поток σ -алгебр на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и $z_1, z_2, \dots$ – последовательность неотрицательных $\mathcal{A}$ -измеримых с.в. Тогда если $Z := 2 \sum_{n=1}^\infty z_n$, а $W := \sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}(z_n | \mathcal{A}_{n-1})$, то для произвольного $u > 0$ имеет место неравенство

$$\int_{\{W > 2u\}} W \leq \int_{\{W > u\}} Z. \quad (4.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, если $W_k := \sum_{n=1}^k \mathbb{E}(z_n | \mathcal{A}_{n-1})$, $k \in \mathbb{N}$, ввиду свойств условного математического ожидания и неотрицательности z_k для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}((W - W_k) | \mathcal{A}_k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(z_n | \mathcal{A}_{n-1}) | \mathcal{A}_k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \mathbb{E}(z_n | \mathcal{A}_k) \leq \frac{1}{2} \mathbb{E}(Z | \mathcal{A}_k).$$

Обозначим через $\mathcal{A}_{\nu_u}$ σ -алгебру, порожденную марковским моментом $\nu_u := \inf\{n \geq 0 : W_{n+1} > u\}$, где $u > 0$. Из предыдущего неравенства следует, что

$$\mathbb{E}((W - W_{\nu_u}) | \mathcal{A}_{\nu_u}) \leq \frac{1}{2} \mathbb{E}(Z | \mathcal{A}_{\nu_u}).$$

Поэтому, так как $W_{\nu_u} \leq u$ на всем пространстве Ω , а событие $\{W > u\} = \{\nu_u < \infty\}$ принадлежит к σ -алгебре $\mathcal{A}_{\nu_u}$, получим

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((W - u) \kappa_{\{W > u\}}) &\leq \mathbb{E}((W - W_{\nu_u}) \kappa_{\{\nu_u < \infty\}}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}((W - W_{\nu_u}) | \mathcal{A}_{\nu_u}) \kappa_{\{\nu_u < \infty\}}) \\ &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z | \mathcal{A}_{\nu_u}) \kappa_{\{\nu_u < \infty\}}) = \frac{1}{2} \mathbb{E}(Z \kappa_{\{\nu_u < \infty\}}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{\{W > u\}} (W - u) \leq \frac{1}{2} \int_{\{W > u\}} Z, \quad u > 0.$$

Но тогда для всех $u > 0$

$$\int_{\{W > 2u\}} W \leq 2 \int_{\{W > 2u\}} (W - u) \leq 2 \int_{\{W > u\}} (W - u) \leq \int_{\{W > u\}} Z,$$

и неравенство (4.16) доказано.

Следующее утверждение является ключевым в работе [25] (см. предложение 1), однако приведенное там доказательство содержит небольшую неточность (см. замечание 4 далее), в связи с чем мы приводим здесь его полное доказательство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть X – с.п. на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\alpha_X > 0$. Предположим, что W и Z – такие неотрицательные с.в. на Ω , что для некоторого $K > 1$ и всех $u > 0$ имеет место неравенство

$$\int_{\{W > Ku\}} W \leq \int_{\{W > u\}} Z. \quad (4.17)$$

Тогда для некоторого $C > 0$, зависящего только от α_X и K , выполнено:

$$\|W\|_X \leq C \|Z\|_X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, не ограничивая общности, можно считать, что пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ – это отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега λ , а W и Z – функции, измеримые по Лебегу на нем.

Сначала мы заменим W на некоторую счетнозначную функцию так, чтобы по-прежнему выполнялось неравенство (4.17). А именно положим

$$U := \sum_{i=-\infty}^{\infty} K^{i+1} \kappa_{\{K^i < W \leq K^{i+1}\}}.$$

Тогда, как легко видеть, $K^{-1}U \leq W \leq U$ и $\{U > u\} = \{W > u\}$, если $u = K^i$, $i \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\|W\|_X \leq \|U\|_X \leq K\|W\|_X, \quad (4.18)$$

и ввиду условия (4.17) для $u = K^i$ выполнено

$$\int_{\{U > Ku\}} U \leq K \int_{\{W > Ku\}} W \leq K \int_{\{W > u\}} Z = K \int_{\{U > u\}} Z. \quad (4.19)$$

Далее, опять без ограничения общности, мы можем предположить, что функции U и Z не возрастают. Действительно, так как U принимает не более чем счетное число значений, то существует сохраняющее меру отображение $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такое, что невозрастающая перестановка $U^*(t)$ совпадает с функцией $U(\varphi(t))$. Очевидно, что после замены U на U^* , а Z на $Z(\varphi)$ соотношение (4.19) сохранится. Если же вместо $Z(\varphi)$ взять ее невозрастающую перестановку Z^* , то правая часть неравенства (4.19) возрастет [17; § 2.2, свойство 6°] и, значит, оно по-прежнему будет выполнено. Кроме того, так как X – с.п., то $\|U^*\|_X = \|U\|_X$ и $\|Z^*\|_X = \|Z\|_X$.

Предполагая, что функция U принимает хотя бы два значения (в оставшемся случае доказательство тривиально), и выбирая $b \in (0, 1)$ достаточно малым, получим, что множество M_1 всех $i \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих условию

$$\lambda\{U = K^{i+1}\} \geq b\lambda\{U = K^i\},$$

непусто. Тогда, так как U и Z не возрастают, то для всех $i \in M_1$

$$\begin{aligned} \int_{\{U=K^i\}} Z &\leq \sup_{\{U=K^i\}} Z \cdot \lambda\{U = K^i\} \leq \inf_{\{U=K^{i+1}\}} Z \cdot b^{-1} \lambda\{U = K^{i+1}\} \\ &\leq b^{-1} \int_{\{U=K^{i+1}\}} Z. \end{aligned}$$

Поэтому ввиду (4.19) для всех $i \in M_1$

$$\begin{aligned} \int_{\{U > K^i\}} U &\leq K \int_{\{U > K^{i-1}\}} Z \leq K \left(\int_{\{U=K^i\}} Z + \int_{\{U > K^i\}} Z \right) \\ &\leq \frac{K}{b} \left(\int_{\{U=K^{i+1}\}} Z + \int_{\{U > K^i\}} Z \right) \leq \frac{2K}{b} \int_{\{U > K^i\}} Z. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Рассмотрим разбиение множества целых чисел $\mathbb{Z} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, где множество M_1 определено ранее и для каждого $n \geq 1$ рекурсивно

$$M_{n+1} := \{i \in \mathbb{Z} : i-1 \in M_n \text{ или } \lambda\{U = K^{i+1}\} \leq b\lambda\{U = K^i\}\}.$$

Положим

$$U_n = U \cdot \sum_{i \in M_n} \kappa_{\{U=K^{i+1}\}}$$

и заметим, что невозрастающая перестановка U_n^* этой с.в. удовлетворяет неравенству $U_n^* \leq K^{n-1} \sigma_{b^{n-1}}(U_1^*)$. Следовательно, так как $U = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$, для $\gamma \in (0, \alpha_X)$ и достаточно малых b выполнено

$$\|U\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|U_n\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} (Kb^\gamma)^{n-1} \|U_1\|_X,$$

откуда, если дополнительно $b \leq (2K)^{-1/\gamma}$, вытекает

$$\|U\|_X \leq 2\|U_1\|_X. \quad (4.21)$$

Теперь мы хотели бы U заменить функцией U_1 , однако U_1 имеет тот недостаток, что она не монотонна. Поэтому рассмотрим ее наименьшую невозрастающую мажоранту V . Заметим, что $U_1 \leq V \leq U$ и $\{V > K^i\} = \{U > K^i\}$, если $i \in M_1$. Тем самым из (4.20) следует

$$\int_{\{V > K^i\}} V \leq \int_{\{V > K^i\}} U \leq \frac{2K}{b} \int_{\{V > K^i\}} Z, \quad i \in M_1.$$

Кроме того, любое множество вида $\{V > u\}$, $u > 0$, представимо также в виде $\{V > K^i\}$ при некотором $i \in M_1$. Следовательно, из предыдущего неравенства получаем, что

$$\int_{\{V > u\}} V \leq \frac{2K}{b} \int_{\{V > u\}} Z, \quad u > 0.$$

Так как $\int_0^\tau V$ – кусочно-линейная, а $\int_0^\tau Z$ – возрастающая вогнутая функция, отсюда следует

$$\int_0^\tau V \leq \frac{2K}{b} \int_0^\tau Z, \quad 0 < \tau \leq 1.$$

Тем самым, учитывая, что пространство X сепарабельно или максимально, ввиду [17; теорема 2.4.3] получаем $\|V\|_X \leq 2Kb^{-1}\|Z\|_X$. В итоге из неравенств (4.18) и (4.21) вытекает

$$\|W\|_X \leq \|U\|_X \leq 2\|U_1\|_X \leq \frac{4K}{b}\|Z\|_X.$$

Так как b зависит лишь от α_X и K , предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как уже говорилось, доказательство предложения 2 в [25] содержит неточность. А именно, в тех же обозначениях там утверждается следующее: если $u = K^i$, где $i \in M_1$, то

$$\lambda\{V > Ku\} \geq \frac{b}{b+1} \lambda\{V > u\}.$$

Легко показать, что, вообще говоря, это не так. Действительно, если $\max V = K^{i_0+1}$, $i_0 \in M_1$, то для $u = K^{i_0}$ получим $\lambda\{V > u\} = \lambda\{V = K^{i_0+1}\} > 0$. В то же время $\lambda\{V > Ku\} = 0$, и поэтому неравенство выше не выполнено.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В классическом случае $X = L_p$, $1 \leq p < \infty$, предложение 2 может быть доказано гораздо проще. Опять можно считать, что функции W и Z определены на отрезке $[0, 1]$ и не возрастают. Кроме того, достаточно показать справедливость утверждения в том случае, когда функция W ограничена. Действительно, легко видеть, что неравенство (4.17) остается верным, если W заменить функцией $W_n := W \wedge n$, $n \in \mathbb{N}$. Далее, переходя в неравенстве $\|W_n\|_{L_p} \leq C\|Z\|_{L_p}$ (оно выполнено ввиду нашего предположения) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем нужный результат.

Итак, предполагая, что W ограничена (и значит, $\int_0^1 W(s)^p ds < \infty$), умножим неравенство (4.17) на u^{p-2} и проинтегрируем по всем $u > 0$:

$$\int_0^\infty u^{p-2} \int_{\{W > Ku\}} W(s) ds du \leq \int_0^\infty u^{p-2} \int_{\{W > u\}} Z(s) ds du.$$

После изменения порядка интегрирования получим

$$\int_0^1 W(s) \int_0^{W(s)/K} u^{p-2} du ds \leq \int_0^1 Z(s) \int_0^{W(s)} u^{p-2} du ds,$$

откуда ввиду неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_0^1 W(s)^p ds &\leq K^{p-1} \int_0^1 W(s)^{p-1} Z(s) ds \\ &\leq K^{p-1} \left(\int_0^1 Z(s)^p ds \right)^{1/p} \left(\int_0^1 W(s)^p ds \right)^{(p-1)/p}. \end{aligned}$$

В итоге $\|W\|_{L_p} \leq K^{p-1} \|Z\|_{L_p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Прежде всего, так как $\alpha_X > 0$, по теореме 4

$$\|S(f)\|_X \leq C\|M(f)\|_X. \quad (4.22)$$

По условию X является 2-выпуклым, и, значит, можно определить новое с.п. Y с нормой $\|x\|_Y := \|x\|^{1/2}_X$. Непосредственно проверяется, что $\alpha_Y = 2\alpha_X > 0$. Следовательно, применяя лемму 3 и предложение 2, получаем, что

$$\begin{aligned} \|s(f)\|_X &= \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}(d_k^2 | \mathcal{A}_{k-1}) \right)^{1/2} \right\|_X = \left\| \sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}(d_k^2 | \mathcal{A}_{k-1}) \right\|_Y^{1/2} \\ &\leq C' \left\| \sum_{k=1}^\infty d_k^2 \right\|_Y^{1/2} = C' \|S(f)\|_X. \end{aligned}$$

Так как $\|M(d)\|_X \leq 2\|M(f)\|_X$, из предыдущего неравенства и (4.22) следует (3.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Применим ту же технику, что и в доказательстве теорем 1 и 4: сначала для любых $\beta > 1$ и $0 < \delta < \beta - 1$, а также произвольного $x > 0$ докажем неравенство

$$\mathbb{P}\{s(f) > \beta x, M(f) \vee M(w) \leq \delta x\} \leq \frac{9\delta^2}{(\beta - \delta - 1)^2} \mathbb{P}\{s(f) > x\}, \quad x > 0, \quad (4.23)$$

а затем воспользуемся предложением 1.

Для заданного $x > 0$ определим марковские моменты относительно потока σ -алгебр $\{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^\infty$:

$$\begin{aligned}\mu &:= \inf\{n \in \mathbb{N} : s_n(f) > x\}, & \nu &:= \inf\{n \in \mathbb{N} : s_n(f) > \beta x\}, \\ \sigma &:= \inf\{n \geq 0 : |f_n| > \delta x \text{ или } w_{n+1} > \delta x\}, & f_0 &:= 0,\end{aligned}$$

а также мартингал $h = \{h_n\}_{n=1}^\infty$, где

$$h_n := \sum_{k=1}^n d_k \kappa_{\{\mu < k \leq \nu \wedge \sigma\}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Предположим, что $s(f) > \beta x$ и $M(f) \vee M(w) \leq \delta x$. Тогда $\mu \leq \nu < \infty$, $\sigma = \infty$ и по определению μ

$$s_\mu(f) = \left(\sum_{k=1}^{\mu} \mathbb{E}(d_k^2 | \mathcal{A}_{k-1}) \right)^{1/2} \leq s_{\mu-1}(f) + w_\mu \leq (1 + \delta)x.$$

Так как одновременно $s_\nu(f) > \beta x$, из предыдущего неравенства следует, что

$$s(h) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(d_k^2 \kappa_{\{\mu < k \leq \nu \wedge \sigma\}} | \mathcal{A}_{k-1}) \right)^{1/2} \geq s_\nu(f) - s_\mu(f) > (\beta - \delta - 1)x.$$

Таким образом, ввиду неравенства Чебышёва

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{s(f) > \beta x, M(f) \vee M(w) \leq \delta x\} &\leq \mathbb{P}\{\mu \leq \nu < \infty, \sigma = \infty\} \\ &\leq \mathbb{P}\{s(h) > (\beta - \delta - 1)x\} \leq ((\beta - \delta - 1)x)^{-2} \mathbb{E}(s(h)^2).\end{aligned}\tag{4.24}$$

Оценим величину $\mathbb{E}(s(h)^2)$ сверху. Прежде всего, $s(h) = 0$ на множестве $\{\mu \geq \sigma\}$ и $h_n = 0$, если $n \leq \mu$. Предположим, что $\mu < \sigma \leq n$. Ввиду условия теоремы и определения момента σ получаем:

$$|h_n| = |f_{\nu \wedge \sigma} - f_\mu| \leq |f_{\nu \wedge \sigma - 1}| + |w_{\nu \wedge \sigma}| + |f_\mu| \leq 3\delta x.$$

Аналогичным образом $|h_n| \leq 2\delta x$ в случае, когда $\mu < n < \sigma$. Поэтому ввиду попарной ортогональности мартингальных разностей

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(s(h)^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(d_k^2 \kappa_{\{\mu < k \leq \nu \wedge \sigma\}} | \mathcal{A}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(d_k^2 \kappa_{\{\mu < k \leq \nu \wedge \sigma\}}) \\ &\leq (3\delta x)^2 \mathbb{P}\{\mu < \infty\} = (3\delta x)^2 \mathbb{P}\{s(f) > x\}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (4.24) следует неравенство (4.23). Подбирая $\delta > 0$ по аналогии с доказательствами теорем 1 и 4 и применяя затем предложение 1, получаем (3.6).

§ 5. Неравенства модулярного типа: краткий обзор

Полученные здесь результаты, на наш взгляд, поучительно сравнить с соответствующими классическими неравенствами модулярного типа, доказанными в 70-е годы прошлого века. В приводимом ниже кратком обзоре мы, в основном, следуем работе Буркхольдера [10] (см. также [12; § 11]).

Всюду далее Φ – неубывающая непрерывная функция на полуоси $[0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$. Будем также предполагать, что она удовлетворяет Δ_2 -условию, т.е.

$$\Phi(2x) \leq c_0 \Phi(x) \quad (5.1)$$

для некоторого $c_0 > 0$ и всех $x \geq 0$.

Точно так же, как условие положительности нижнего индекса Бойда обеспечивает выполнение оценки (3.1), аналогичное модулярное неравенство справедливо, если функция Φ удовлетворяет Δ_2 -условию (5.1).

ТЕОРЕМА 5 (см. [10; теорема 21.1]). *Существует константа $C > 0$, зависящая только от функции Φ , такая, что для произвольного мартингала $f = \{f_k\}_{k=1}^\infty$ выполнено неравенство*

$$\mathbb{E}\Phi(M(f)) \leq C(\mathbb{E}\Phi(s(f)) + \mathbb{E}\Phi(M(d))).$$

Вместо предложения 1 в этом случае используется следующий его модулярный вариант.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (см. [10; лемма 7.1]). *Пусть g и h – неотрицательные с.в. на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и числа $\beta > 1$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ таковы, что*

$$\mathbb{P}\{g > \beta x, h \leq \delta x\} \leq \varepsilon \mathbb{P}\{g > x\}, \quad x > 0. \quad (5.2)$$

Предположим также, что γ и η удовлетворяют неравенствам

$$\Phi(\beta x) \leq \gamma \Phi(x) \quad \text{и} \quad \Phi(\delta^{-1}x) \leq \eta \Phi(x), \quad x > 0, \quad (5.3)$$

и $\gamma\varepsilon < 1$. Тогда

$$\mathbb{E}\Phi(g) \leq \frac{\gamma\eta}{1 - \gamma\varepsilon} \mathbb{E}\Phi(h). \quad (5.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Так как функция Φ удовлетворяет Δ_2 -условию, то числа γ и η , для которых выполнены неравенства (5.3), существуют. Действительно, возьмем такое $k \in \mathbb{N}$, что $\max(\beta, \delta^{-1}) \leq 2^k$. Тогда $\max(\Phi(\beta x), \Phi(\delta^{-1}x)) \leq \Phi(2^k x) \leq c_0^k \Phi(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Как и в случае теоремы 1, можно показать, что для любых $\beta > 1$ и $0 < \delta < \beta - 1$ выполнено неравенство (4.7).

По произвольному $\beta > 1$ выберем сначала $\gamma > 0$ так, чтобы выполнялось первое неравенство из (5.3) (см. замечание 6), а затем $\delta \in (0, \beta - 1)$ так, чтобы

$$\frac{\delta^2 \gamma}{(\beta - \delta - 1)^2} < 1.$$

Кроме того, пусть η удовлетворяет второму неравенству из (5.3). Тогда ввиду (4.7) для $g = M(f)$, $h = s(f) \vee M(d)$ и $\varepsilon := \delta^2/(\beta - \delta - 1)^2$ выполнено условие (5.2) предложения 3. Тем самым из (5.4) с учетом того, что функция Φ возрастает, получаем

$$\mathbb{E}\Phi(M(f)) \leq C \mathbb{E}\Phi(s(f) \vee M(d)) \leq C(\mathbb{E}\Phi(s(f)) + \mathbb{E}\Phi(M(d))),$$

где $C := \gamma\eta/(1 - \gamma\varepsilon)$, и теорема доказана.

Пусть $p \geq 1$. Напомним, что неотрицательная возрастающая функция Φ на $[0, \infty)$ называется p -выпуклой, если выпукла функция $\Phi(t^{1/p})$. Модулярный вариант теоремы 2 имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 6. *Для произвольной 2-выпуклой на $[0, \infty)$ функции Φ существует такая константа $C > 0$, что для произвольного мартингала $f = \{f_k\}_{k=1}^\infty$ выполнено неравенство*

$$\mathbb{E}\Phi(M(d)) + \mathbb{E}\Phi(s(f)) \leq C \mathbb{E}\Phi(M(f)).$$

Доказательство этого утверждения совершенно аналогично доказательству теоремы 2, только вместо теоремы 4 применяется

ТЕОРЕМА 7 (см. [10; теорема 18.3]). *Существует константа $C > 0$, зависящая только от функции Φ (по-прежнему удовлетворяющей условию (5.1)), такая, что для произвольного мартингала $f = \{f_k\}_{k=1}^\infty$ выполнено неравенство*

$$\mathbb{E}\Phi(S(f)) \leq C \mathbb{E}\Phi(M(f)).$$

И наконец, используя неравенство (4.23) вместе с предложением 3 и рассуждая точно так же, как в доказательстве теоремы 5, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8. *Предположим, что мартингал $f = \{f_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию $|d_k| \leq w_k$, где w_k есть $\mathcal{A}_{k-1}$ -измеримая с.в. для каждого $k = 1, 2, \dots$, и $\mathbb{E}\Phi(M(w)) < \infty$. Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от Φ , такая, что*

$$\mathbb{E}\Phi(s(f)) \leq C(\mathbb{E}\Phi(M(f)) + \mathbb{E}\Phi(M(w))).$$

Список литературы

- [1] H. P. Rosenthal, “On the subspaces of L^p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables”, *Israel J. Math.*, **8**:3 (1970), 273–303.
- [2] W. B. Johnson, G. Schechtman, “Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces”, *Ann. Probab.*, **17**:2 (1989), 789–808.
- [3] W. B. Johnson, B. Maurey, G. Schechtman, L. Tzafriri, “Symmetric structures in Banach spaces”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **19**, no. 217, 1979, v+298 pp.
- [4] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*, v. II: *Function spaces*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **97**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979, x+243 pp.

- [5] S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, “Series of independent random variables in rearrangement invariant spaces: an operator approach”, *Israel J. Math.*, **145**:1 (2005), 125–156.
- [6] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, “Ряды независимых функций с нулевым средним в симметричных пространствах со свойством Круглова”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 35, Зап. научн. сем. ПОМИ, **345**, ПОМИ, СПб., 2007, 25–50; англ. пер.: S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, “Series of independent, mean zero random variables in rearrangement-invariant spaces having the Kruglov property”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **148**:6 (2008), 795–809.
- [7] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, “Независимые функции и геометрия банаховых пространств”, *УМН*, **65**:6(396) (2010), 3–86; англ. пер.: S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, “Independent functions and the geometry of Banach spaces”, *Russian Math. Surveys*, **65**:6 (2010), 1003–1081.
- [8] M. Sh. Braverman, *Independent random variables and rearrangement invariant spaces*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **194**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994, viii+116 pp.
- [9] В. М. Круглов, “Замечание к теории безгранично делимых законов”, *ТВП*, **15**:2 (1970), 330–336; англ. пер.: V. M. Kruglov, “A note on infinitely divisible distributions”, *Theory Probab. Appl.*, **15**:2 (1970), 319–324.
- [10] D. L. Burkholder, “Distribution function inequalities for martingales”, *Ann. Probability*, **1**:1 (1973), 19–42.
- [11] N. L. Bassily, “On two-sided inequalities for stopped random walks in Orlicz spaces”, *Ann. Univ. Sci. Budapest Sect. Comput.*, **11** (1991), 63–73.
- [12] Г. Пешкир, А. Н. Ширяев, “Неравенства Хинчина и мартингалное расширение сферы их действия”, *УМН*, **50**:5(305) (1995), 3–62; англ. пер.: G. Peškir, A. N. Shiryaev, “The Khintchine inequalities and martingale expanding sphere of their action”, *Russian Math. Surveys*, **50**:5 (1995), 849–904.
- [13] D. L. Burkholder, R. F. Gundy, “Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales”, *Acta Math.*, **124**:1 (1970), 249–304.
- [14] D. L. Burkholder, B. J. Davis, R. F. Gundy, “Integral inequalities for convex functions of operators on martingales”, *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, v. II: *Probability theory* (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Berkeley, CA, 1972, 223–240.
- [15] S. Astashkin, F. Sukochev, Chin Pin Wong, “Disjointification of martingale differences and conditionally independent random variables with some applications”, *Studia Math.*, **205**:2 (2011), 171–200.
- [16] С. В. Асташкин, “Неравенства типа Розенталя для мартингалов в симметричных пространствах”, *Изв. вузов. Матем.*, **11** (2012), 60–66; англ. пер.: S. V. Astashkin, “Rosenthal type inequalities for martingales in symmetric spaces”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **56**:11 (2012), 52–57.
- [17] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978, 400 с.; англ. пер.: S. G. Kreĭn, Yu. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Transl. Math. Monogr., **54**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982, xii+375 pp.
- [18] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2-е изд., АФЦ, М., 1999, x+550 с.; англ. пер. 1-го изд.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, xii+451 pp.
- [19] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Наука, М., 1980, 576 с.; англ. пер.: A. N. Shiryaev, *Probability*, Grad. Texts in Math., **95**, Springer-Verlag, New York, 1984, xi+577 pp.
- [20] Р. Эллиотт, *Стохастический анализ и его приложения*, Мир, М., 1986, 352 с.; пер. с англ.: R. J. Elliott, *Stochastic calculus and applications*, Appl. Math. (N. Y.), **18**, Springer-Verlag, New York, 1982, ix+302 pp.

- [21] J. Neveu, *Discrete parameter martingales*, North-Holland Math. Library, **10**, North-Holland Publishing Co., New York; American Elsevier Publishing Co., Inc., 1975, viii+236 pp.
- [22] T. Shimogaki, “A note on norms of compression operators on function spaces”, *Proc. Japan Akad.*, **46**:3 (1970), 239–242.
- [23] P. Hitczenko, S. Montgomery-Smith, “Measuring the magnitude of sums of independent random variables”, *Ann. Probab.*, **29**:1 (2001), 447–466.
- [24] S. Kwapień, W. A. Woyczyński, *Birkhäuser Boston, Inc.*, 1992, xvi+360 pp.
- [25] W. B. Johnson, G. Schechtman, “Martingale inequalities in rearrangement invariant function spaces”, *Israel J. Math.*, **64**:3 (1988), 267–275.
- [26] M. Kikuchi, “On the Davis inequality in Banach function spaces”, *Math. Nachr.*, **281**:5 (2008), 697–709.

Сергей Владимирович Асташкин
(Sergei V. Astashkin)

Самарский государственный университет
E-mail: astash@samsu.ru

Поступила в редакцию
07.09.2013 и 20.05.2014