Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Условия излу-
чения Умова–Мандельштама в упругих периодических
волноводах, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 7, 43–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8286>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 11:32:37

УДК 517.956.8+517.956.227+539.3(3)

С. А. Назаров

Условия излучения Умова–Мандельштама в упругих периодических волноводах

Исследуются постановки задачи теории упругости о распространении волн в упругом периодическом волноводе с условиями излучения на бесконечности. Приведена математическая теория для энергетических условий излучения, опирающаяся на энергетический принцип Мандельштама и вектор Умова–Пойнтинга, а также использующая технику весовых пространств с отделенной асимптотикой и симплектическую форму переноса энергии. Установлено, что в пороговой ситуации, т.е. при появлении стоячих и полиномиальных упругих волн Флоке, известный принцип предельного поглощения в отличие от применяемого энергетического принципа не может идентифицировать направление движения волны.

Библиография: 37 названий.

Ключевые слова: упругий периодический волновод, энергетические условия излучения Мандельштама, вектор Умова–Пойнтинга, симплектическая форма переноса энергии.

DOI: 10.4213/sm8286

§ 1. Введение

1.1. Периодический упругий волновод. Пусть ϖ – ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, расположенная в слое $\{x = (y, z) : y \in \mathbb{R}^{n-1}, 0 < z < 1\}$. Положим

$$\varpi_k = \{x : (y, z - k) \in \varpi\}, \quad \bar{\Pi} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\varpi_k}, \quad \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (1.1)$$

и будем считать, что внутренность Π периодического множества $\bar{\Pi}$ (квазицилиндра) является областью с липшицевой границей, в частности связным множеством. Масштабированием период сделан единичным, т.е. продольная $z = x_n$ и поперечные $y = (y_1, y_2)$ при $n = 3$ или $y = y_1$ при $n = 2$ координаты стали безразмерными. Упругий волновод Ω также ограничен липшицевой поверхностью и состоит из двух частей $\Omega_{\pm}$, причем Ω_+ – полубесконечный квазицилиндр $\Pi_+ = \{x \in \Pi : z > 0\}$, а Ω_- – область с компактным замыканием $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_- \cup \partial\Omega_-$ в полупространстве или полуплоскости $\mathbb{R}_-^n = \{x : z < 0\}$ (рис. 1).

Рассмотрим задачу о гармонических во времени упругих колебаниях твердого деформируемого тела Ω со свободной поверхностью $\partial\Omega$

$$\mathcal{L}(x, \nabla)u(x) = \lambda\rho(x)u(x), \quad x \in \Omega, \quad \mathcal{N}(x, \nabla)u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.2)$$

Поскольку декартова система координат зафиксирована, для описания дифференциальных оператор-матриц $\mathcal{L}$ и $\mathcal{N}$, входящих в уравнения и краевые

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00348).

Рис. 1

условия, выражающие соответственно второй закон Ньютона и отсутствие нормальных напряжений на границе, удобно применить матричную форму записи¹. Во-первых, вектор смещений $u(x)$ реализуется как столбец $(u_1(x), \dots, u_n(x))^T$, т.е. T – знак транспонирования, а $u_j(x)$ – проекция на ось x_j , $j = 1, \dots, n$. Во-вторых, вектор деформаций $\varepsilon(u; x) = D(\nabla)u(x)$, содержащий декартовы компоненты

$$\varepsilon_{jk}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_k + \partial_k u_j)$$

соответствующего тензора, приобретает при $n = 3$ вид

$$\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \sqrt{2}\varepsilon_{12}, \sqrt{2}\varepsilon_{23}, \sqrt{2}\varepsilon_{31}, \varepsilon_{33})^T, \\ D(\nabla) = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 2^{-1/2}\partial_2 & 0 & 2^{-1/2}\partial_3 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 2^{-1/2}\partial_1 & 2^{-1/2}\partial_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2}\partial_2 & 2^{-1/2}\partial_1 & \partial_3 \end{pmatrix}^T, \quad \nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

где $\partial_j = \partial/\partial x_j$, а в случае $n = 2$ – вид

$$\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \sqrt{2}\varepsilon_{12})^T, \quad D(\nabla) = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 2^{-1/2}\partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 2^{-1/2}\partial_1 \end{pmatrix}^T, \quad \nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Матричный дифференциальный оператор первого порядка $D(\nabla)$ имеет размеры $N \times n$, где $N = \frac{1}{2}n(n+1)$, а матрица $D(\nabla)$ из (1.4) – левый верхний блок матрицы $D(\nabla)$ из (1.3). Множители $2^{1/2}$ и $2^{-1/2}$ вставлены в эти формулы для того, чтобы уравнивать натуральные нормы тензоров и изображающих их столбцов, в результате ортогональные преобразования декартовой системы $x = (x_1, \dots, x_n)$ порождают ортогональные преобразования в $\mathbb{R}^N$ столбцов деформаций $\varepsilon(u)$ и напряжений $\sigma(u)$ (ср. [2; гл. 2]). Наконец, столбец напряжений находится по линейному закону Гука

$$\sigma(u; x) = A(x)\varepsilon(u; x), \quad (1.5)$$

¹В англоязычной литературе она называется the Voigt–Mandel notation, а в русскоязычной связывается с именем С. Г. Лехницкого (см. [1] и, например, [2]).

где A – $(N \times N)$ -матрица упругих модулей, симметричная и положительно определенная. Кроме того, $\rho > 0$ – плотность материала и λ – спектральный параметр (квадрат частоты колебаний). В итоге получаем такие формулы для дифференциальных оператор-матриц в задаче (1.2):

$$\mathcal{L}(x, \nabla)u = D(-\nabla)^\top A(x)D(\nabla), \quad \mathcal{N}(x, \nabla) = D(\nu(x))^\top A(x)D(\nabla)u(x); \quad (1.6)$$

здесь $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)^\top$ – единичный вектор внешней нормали, определенный почти всюду на липшицевой поверхности $\partial\Omega$.

1.2. Вариационная задача. Классическая постановка (1.2) задачи теории упругости подразумевает гладкость коэффициентов и границы, которая отсутствует в интересных случаях композитного упругого материала или поврежденного тела. Предположив, что элементы матрицы A и плотность ρ – ограниченные измеримые функции, подчиненные соотношениям

$$\xi^\top A(x)\xi \geq c_A |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \rho(x) \geq c_\rho \quad \text{при п.в. } x \in \Omega \quad (1.7)$$

с положительными постоянными c_A и c_ρ , приведем обобщенную постановку спектральной задачи: требуется найти число λ и нетривиальную вектор-функцию $u \in H^1(\Omega)^n$, для которых выполнено интегральное тождество

$$(AD(\nabla)u, D(\nabla)v)_\Omega = \lambda(\rho u, v)_\Omega, \quad v \in H^1(\Omega)^n. \quad (1.8)$$

Здесь $(\cdot, \cdot)_\Omega$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$, а $H^1(\Omega)$ – пространство Соболева с обычной нормой. Последний индекс n в (1.8) указывает количество компонент в пробной функции $v = (v_1, \dots, v_n)^\top$, однако он не пишется в обозначениях скалярных произведений и норм.

Далее считаем, что

$$\begin{aligned} A(x) &= \chi(z)A^0(x) + \tilde{A}(x), & \rho(x) &= \chi(z)\rho^0(x) + \tilde{\rho}(x), \\ \|\tilde{A}(x); \mathbb{R}^{N \times N}\| + |\tilde{\rho}(x)| &\leq \tilde{c}e^{-\tau z} \quad \text{при п.в. } x \in \Omega, & \tau > 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

причем A^0 и ρ^0 периодичны относительно переменной z с единичным периодом, а $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ – срезающая функция,

$$\chi(z) = 1 \quad \text{при } z \geq 1, \quad \chi(z) = 0 \quad \text{при } z \leq 0, \quad 0 \leq \chi \leq 1. \quad (1.10)$$

1.3. О необходимости постановки условий излучения и их разнообразии. Как известно и легко проверяется при помощи теоремы Рисса о линейном функционале в гильбертовом пространстве, благодаря требованию (1.7) и неравенству Корна (см., например, [3], [4])

$$\|u; H^1(\Omega)\|^2 \leq K_\Omega (\|D(\nabla)u; L^2(\Omega)\|^2 + \|u; L^2(\Omega)\|^2) \quad (1.11)$$

в случае комплексного или отрицательного λ неоднородная задача (1.8), т.е. интегральное тождество

$$(AD(\nabla)u, D(\nabla)v)_\Omega - \lambda(\rho u, v)_\Omega = f(v), \quad v \in C_c^\infty(\overline{\Omega})^n, \quad (1.12)$$

имеет единственное решение $u \in H^1(\Omega)^n$ при любом непрерывном (анти)линейном функционале $f \in H^{-1}(\Omega)^n := (H^1(\Omega)^n)^*$ (сопряженное пространство),

однако при $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty)$ она может потерять это свойство, а ее оператор $H^1(\Omega)^n \rightarrow H^{-1}(\Omega)^n$ – лишиться фредгольмовости. По замыканию интегральное тождество (1.12) выполнено при всех $v \in H^1(\Omega)^n$, однако далее будут использованы весовые пространства, и потому пробные функции считаются финитными и бесконечно дифференцируемыми, т.е. берутся из линейного множества $C_c^\infty(\overline{\Omega})^n$, которое плотно в каждом из рассматриваемых здесь и далее функциональных пространств.

Переход к весовым пространствам Кондратьева (см. п. 2.4) не устраняет неприятности, вызванные потерей нормальной разрешимости задач при $\lambda \in \mathbb{R}_+$, но способ исправления ситуации, конечно же, известен – постановка условий излучения на бесконечности. Для цилиндрических упругих волноводов эта процедура разработана в значительной мере (см., например, монографии [5], [6]) и предложено несколько подходов к выбору таких условий, имеющих разнообразную физическую подоплеку. Как проверено в статье [7], полностью универсальным оказывается энергетический принцип излучения Мандельштама (см. [5; гл. 1], [6; гл. 1], [8; гл. 6] и др.), опирающийся на понятие вектора Умова–Пойнтинга, описанного впервые в публикации [9].

В настоящей работе подход, предложенный в статье [7] и происходящий от общей математической схемы корректной постановки условий излучения для общих эллиптических краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность (см. [8; гл. 6]), приспосабливается к периодическим упругим волноводам. Кроме того, производится сравнение с принципом предельного поглощения, который, как оказывается, не способен распознать качество волны на пороге непрерывного спектра. Это обстоятельство будет еще обсуждаться в § 5. Наконец, принцип излучения Зоммерфельда не рассматривается вовсе, так как он дает неправильную классификацию волн даже в прямом цилиндре и вне порога (см. [5; § 19] и, например, [7]).

Еще одно преимущество энергетических условий излучения состоит в возможности их применения при обобщенной постановке задачи теории упругости. Для волноводов, изготовленных из сложно устроенных композитных материалов, или волноводов с трещинами и другими дефектами это обстоятельство приобретает первостепенное значение, так как коэффициенты операторов и граница не обладают дифференциальными свойствами, необходимыми для классической постановки задачи. На протяжении всей статьи основное внимание уделяется именно интегральным тождествам (1.8) и (1.12), причем по мере необходимости в неоднородной задаче (1.12) выбираются различные пары функциональных пространств для решений и пробных функций. Вместе с тем традиционная (ср. [5], [6] и др.) интерпретация условий излучения обращается к гладким решениям и, тем самым, требует улучшения их дифференциальных свойств при “хороших” коэффициентах и границе, имеющихся, например, у однородных анизотропных волноводов с плавно варьируемой поверхностью. Повышение гладкости осуществляется при помощи стандартных приемов (доступны даже оценки в весовых классах Гёльдера; см. [10]), и поэтому соответствующие результаты, бывающие востребованными не менее часто, особенно в прикладных исследованиях, оформляются в виде замечаний, которые можно пропустить, так как они не влияют на ход рассуждений.

Подчеркнем особо, что условия излучения не являются атрибутом краевой задачи и придаются ей извне, на основе физических соображений. Тем более

неожиданным оказывается тот факт, что энергетический принцип органично вписывается в математическую теорию, а его основные продукты – симплектическая форма переноса энергии и матрица рассеяния – происходят от обычной формулы Грина (см. пп. 3.2, 3.3).

§ 2. Упругие волны Флоке и операторная формулировка задачи

2.1. Модельная задача на ячейке периодичности. Как показано в [11] и многих последующих работах (см. обзоры [12], [13] и книги [8; гл. 3 и 5], [14], [15]), общие свойства оператора задачи (1.12) в пространствах Соболева, обычных или весовых, определяются спектром вспомогательной задачи на ячейке периодичности

$$\mathcal{L}^0(y, z, \nabla_y, \partial_z + i\eta) U(y, z; \eta) = \Lambda(\eta) \rho^0(y, z) U(y, z; \eta), \quad (y, z) \in \varpi, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{N}^0(y, z, \nabla_y, \partial_z + i\eta) U(y, z; \eta) = 0, \quad (y, z) \in \gamma, \quad (2.2)$$

$$U(y, 0; \eta) = U(y, 1; \eta), \quad \partial_z U(y, 0; \eta) = \partial_z U(y, 1; \eta), \quad (y, 0) \in \theta(0). \quad (2.3)$$

Здесь η – новый, вообще говоря, комплексный параметр, операторы $\mathcal{L}^0$ и $\mathcal{N}^0$ получены по формулам (1.6), но с заменой $A \mapsto A^0$, причем периодические матрица A^0 и скаляр ρ^0 взяты из соотношений (1.9). Кроме того, $\partial_z = \partial/\partial z$, $\nabla_y = (\partial_1, \partial_2)^\top$ при $n = 3$ и $\nabla_y = \partial_1$ при $n = 2$, а $\Lambda(\eta)$ – новое обозначение для параметра λ (в модельной задаче неизвестные обозначаются заглавными буквами). Краевое условие (2.2) поставлено на боковой поверхности $\gamma = \{(y, z) \in \partial\varpi : 0 < z < 1\}$ ячейки ϖ , а условия периодичности (2.3) – на ее торцах $\theta(0)$ и $\theta(1)$,

$$\theta(R) = \{(y, z) \in \Pi : z = R\}. \quad (2.4)$$

Интегральное тождество, обслуживающее задачу (2.1)–(2.3), выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} a^0(U, V; \eta) &:= (A^0 D(\nabla_y, \partial_z + i\eta) U(\cdot; \eta), D(\nabla_y, \partial_z + i\bar{\eta}) V)_{\varpi} \\ &= \Lambda(\eta) (\rho^0 U(\cdot; \eta), V)_{\varpi}, \quad V \in H_{\text{per}}^1(\varpi)^n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При этом $H_{\text{per}}^1(\varpi)$ – подпространство функций из класса Соболева $H^1(\varpi)$, подчиненных первому условию периодичности (2.3). На второй позиции в левом скалярном произведении из (2.5) стоит комплексно сопряженное число $\bar{\eta}$. При вещественном η форма $a^0(\cdot, \cdot; \eta)$ становится эрмитовой, положительной и замкнутой в $H_{\text{per}}^1(\varpi)^n$. Последнее свойство обеспечено неравенством Корна на ячейке ϖ (см. статью [3]). Подчеркнем, что сама ячейка может не быть липшицевой областью, однако свойство Липшица у поверхности $\partial\Pi$ и периодичность функции U сохраняют неравенство Корна для ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Модельная задача (2.1)–(2.3) или (2.5) возникает в результате стандартной процедуры изучения эллиптических краевых задач в областях с цилиндрическими и периодическими выходами на бесконечность (см. [16], [11] и, например, [8; гл. 5], [13]). Именно, сначала посредством умножения на подходящую срезающую функцию неоднородная (с правой частью f ; ср. (1.12)) задача (1.2) локализуется в периодической части $\Omega_+ = \Pi_+$ волновода Ω и производится замена $A, \rho \mapsto A^0, \rho^0$ (эти действия привносят в оператор

задачи в некотором смысле компактное и малое возмущения). Затем к образованной задаче с периодическими коэффициентами в бесконечном квазицилиндре Π применяется преобразование Гельфанда (см. [17]), т.е. дискретное преобразование Фурье (описание его свойств можно найти в [11], [12] и [14], [15], однако они далее не понадобятся и потому здесь не сообщаются). В итоге получаем неоднородную задачу (2.1)–(2.3) или (2.5), полное исследование которой и применение обратного преобразования Гельфанда позволяют установить или опровергнуть фредгольмово свойство оператора исходной задачи (1.2) или (1.12). Далее применяем известные результаты (для определенности ссылаемся на нужные утверждения в книге [8]), но саму намеченную известную схему, разумеется, реализовывать не будем.

2.2. Спектры. Займемся спектральной задачей (2.4), которая допускает двойное истолкование. Во-первых, при фиксированном $\eta \in [0, 2\pi)$ задаче (2.5) со спектральным параметром Λ (называем его основным) ставится в соответствие положительный самосопряженный оператор (см. замечание 3), который ввиду компактности вложения $H^1(\varpi) \subset L^2(\varpi)$ обладает чисто дискретным спектром

$$0 \leq \Lambda_1(\eta) \leq \Lambda_2(\eta) \leq \dots \leq \Lambda_k(\eta) \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (2.6)$$

причем собственные числа включены в монотонную неограниченную последовательность (2.6) при учете кратностей. Функции

$$[0, 2\pi) \ni \eta \mapsto \Lambda_k(\eta) \quad (2.7)$$

являются непрерывными (см., например, [18], [19]) и 2π -периодичными (если $\{\Lambda, U\}$ – спектральная пара задачи (2.5) при некотором $\eta \in \mathbb{R}$, то $\{\Lambda, e^{\pm \pi i z} U\}$ – спектральная пара той же задачи, но для $\eta \mp 2\pi$).

Обсудим вторую из упомянутых выше интерпретаций. Зафиксируем основной спектральный параметр $\Lambda = \lambda$ и рассмотрим отображение

$$\mathbb{C} \ni \eta \mapsto \mathfrak{A}_\lambda(\eta): H_{\text{per}}^1(\varpi)^n \rightarrow (H_{\text{per}}^1(\varpi)^n)^*, \quad (2.8)$$

порожденное неоднородной задачей (2.5) и являющееся квадратичным пучком (ср. [20; гл. 1] и [8; гл. 1]) ввиду присутствия нового спектрального параметра и на первой, и на второй позициях в левой части интегрального тождества. В принципе, возможны две ситуации (см. [20; теорема 1.5.1]): спектр $\mathfrak{s}_\lambda$ пучка (2.8) заполняет всю комплексную плоскость в случае

$$\lambda = \Lambda_m(0) = \Lambda_m(\eta) \quad \text{при всех } \eta \in [0, 2\pi) \text{ и некотором } m \in \mathbb{N} \quad (2.9)$$

или представляет собой счетное множество нормальных собственных чисел без конечных точек сгущения. Отметим, что по указанной выше причине множество $\mathfrak{s}_\lambda$ инвариантно относительно сдвига вдоль вещественной оси на расстояние $\pm 2\pi$. Кроме того, оно обладает симметрией относительно вещественной и мнимой осей (см., например, [13]).

Независимость величины (2.9) от переменной η (вернулись к первой интерпретации спектральной задачи) означает, что у задачи (1.8) в бесконечном квазицилиндре Π имеется собственное число λ бесконечной кратности. Эта патологическая ситуация для системы уравнений теории упругости не изучена и в дальнейшем исключается из рассмотрения. Подчеркнем, что она может случиться только для не более чем счетного набора изолированных точек,

а в прямом цилиндрическом упругом волноводе невозможна благодаря общим результатам (см. [16], а также [8; замечание 3.1.5]).

2.3. Упругие волны Флоке. Пусть η_0 – собственное число пучка (2.8). Отличительной особенностью пучков является возможность появления присоединенных векторов U^{jk} , $k > 0$, которые вместе с собственными U^{j0} образуют жордановы цепочки

$$\{U^{j0}, \dots, U^{j\kappa_j^0-1}\}, \quad j = 1, \dots, J^0, \quad (2.10)$$

и удовлетворяют абстрактным уравнениям

$$\mathfrak{A}_\lambda(\eta_0)U^{jk} = - \sum_{p=1}^k \frac{1}{p!} \frac{d^p \mathfrak{A}_\lambda}{d\eta^p}(\eta_0)U^{jk-p}, \quad k = 0, \dots, \kappa_j^0 - 1. \quad (2.11)$$

В правой части (2.11), разумеется, можно ограничиться суммированием по $p \leq 2$. Величина J^0 называется *геометрической кратностью* собственного числа η_0 , а величины $\kappa_1^0, \dots, \kappa_{J^0}^0$ и их сумма κ – *частными и полной алгебраическими кратностями* соответственно. Система цепочек (2.10) каноническая, если ни одна из цепочек и ни одна их линейная комбинация не продолжимы (см., например, [8; гл. 1]). Далее в основном имеем дело с геометрически простым ($J^0 = 1$) собственным числом, для которого непродолжимость жордановой цепочки означает, что

$$I = \sum_{p=1}^{\kappa} \frac{1}{p!} \left\langle \frac{d^p \mathfrak{A}_\lambda}{d\eta^p}(\eta_0)U^{\kappa-p}, U_\star^0 \right\rangle \neq 0 \in \mathbb{C}. \quad (2.12)$$

Здесь $U^k := U^{1k}$, $\kappa = \kappa_1^0$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – отношение двойственности между пространствами $(H_{\text{per}}^1(\varpi)^n)^*$ и $H_{\text{per}}^1(\varpi)^n$, а $U_\star^0 \in \ker \mathfrak{A}(\bar{\eta}_0)$ – собственный вектор формально сопряженного пучка $\mathfrak{A}(\bar{\eta}_0)$, но $U_\star^0 = U^0$ в случае вещественного η_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Уравнение (2.11) в дифференциальной форме выглядит так:

$$\begin{aligned} & -D(\nabla_y, \partial_z + i\eta_0)^\top A^0(x)D(\nabla_y, \partial_z + i\eta_0)U^k(x) - \lambda \rho^0(x)U^k(x) \\ & = iD(e_{(n)})^\top A^0(x)D(\nabla_y, \partial_z + i\eta_0)U^{k-1}(x) \\ & \quad + iD(\nabla_y, \partial_z + i\eta_0)^\top A^0(x)D(e_{(n)})U^{k-1}(x) \\ & \quad - D(e_{(n)})^\top A^0(x)D(e_{(n)})U^{k-2}(x), \quad x \in \varpi, \\ & D(\nu(x))^\top A^0(x)D(\nabla_y, \partial_z + i\eta_0)U^k(x) \\ & = -iD(\nu(x))^\top A^0(x)D(e_{(n)})U^{k-1}(x), \quad x \in \gamma, \end{aligned} \quad (2.13)$$

причем $U^p = 0$ при $p < 0$. Сюда добавляются условия периодичности (2.3), а под $e_{(n)} = (0, \dots, 1)^\top$ подразумевается орт оси $z = x_n$. Кроме того, соотношение (2.12) при $\eta_0 \in \mathbb{R}$ интегрированием по частям превращается в такое:

$$\begin{aligned} I & = i(A^0 D(\nabla_y, \partial_z + i\eta_0)U^{\kappa-1}, D(e_{(n)})U^0)_\varpi \\ & \quad - i(A^0 D(e_{(n)})U^{\kappa-1}, D(\nabla_y, \partial_z + i\eta_0)U^0)_\varpi \\ & \quad - (A^0 D(e_{(n)})U^{\kappa-2}, D(e_{(n)})U^0)_\varpi \neq 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В общей ситуации удобные условия ортогональности и нормировки канонических систем жордановых цепочек (2.10) для формально самосопряженных пучков установлены в [8; § 5.2].

Нетрудно убедиться в том, что упругие волны Флоке

$$w^{jk}(y, z) = e^{i\eta_0 z} \sum_{q=0}^k \frac{i^q}{q!} z^q U^{jk-q}(y, z), \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 0, \dots, \varkappa_j^0 - 1, \quad (2.15)$$

построенные по цепочкам (2.10), удовлетворяют однородной задаче в бесконечном квазицилиндре Π : либо краевой задаче

$$\mathcal{L}^0(z, \nabla)w(x) = \lambda \rho^0(x)w(x), \quad x \in \Pi, \quad \mathcal{N}^0(x, \nabla)w(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi, \quad (2.16)$$

либо (при недостаточной гладкости данных) интегральному тождеству (1.12), в котором $f = 0$ и произведены замены $A, \rho \mapsto A^0, \rho^0$ и $\Omega \mapsto \Pi$.

Если $\eta_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то волны (2.15) называются *осциллирующими полиномиальными* или просто *осциллирующими* при $k = 0$, но при $\eta_0 = 0$ — соответственно *полиномиальными* или *стоячими*. В случае $\text{Im } \eta_0 > 0$ ($\text{Im } \eta_0 < 0$) экспоненциальная волна (2.15) затухает (растет) при $z \rightarrow +\infty$.

2.4. Операторная постановка задачи. Определим весовое пространство Соболева $W_\beta^1(\Omega)$ (пространство Кондратьева) как пополнение линейного множества $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ по норме

$$\|u; W_\beta^1(\Omega)\| = (\|\nabla u; L_\beta^2(\Omega)\|^2 + \|u; L_\beta^2(\Omega)\|^2)^{1/2},$$

где $\|u; L_\beta^2(\Omega)\| = \|e^{\beta z} u; L^2(\Omega)\|$. Понятно, что $W_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$, но при $\beta > 0$ ($\beta < 0$) элементы пространства $W_\beta^1(\Omega)$ затухают (могут расти) на бесконечности, причем скорости затухания (роста) управляются весовым индексом $\beta \in \mathbb{R}$.

Под обобщенным решением неоднородной задачи (1.2) в весовом классе понимаем вектор-функцию $u \in W_\beta^1(\Omega)^n$, удовлетворяющую интегральному тождеству (1.12). Если f — непрерывный (анти)линейный функционал на пространстве $W_{-\beta}^{-1}(\Omega)^n := (W_\beta^1(\Omega)^n)^*$, например,

$$f(v) = (f^0, v)_\Omega + (g^0, v)_{\partial\Omega}, \quad f^0 \in L_\beta^2(\Omega)^n, \quad g^0 \in L_\beta^2(\partial\Omega)^n, \quad (2.17)$$

а под $(\cdot, \cdot)_\Omega$ подразумевается расширение скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ до двойственности между весовыми пространствами Лебега $L_\beta^2(\Omega)$ и $L_{-\beta}^2(\Omega)$ (аналогично истолковываем символ $(\cdot, \cdot)_{\partial\Omega}$), то по замыканию интегральное тождество (1.12) распространяется на пробные функции $v \in W_{-\beta}^1(\Omega)^n$. Обращаем внимание на смену знака весового индекса, показывающую, что в интересном случае $\beta \neq 0$ обобщенная постановка задачи в $W_\beta^1(\Omega)^n$ не является вариационной. Вместе с тем ей всегда ставится в соответствие непрерывное отображение

$$W_\beta^1(\Omega)^n \ni u \mapsto f = \mathcal{A}_\beta(\lambda)u \in W_{-\beta}^{-1}(\Omega)^n = (W_\beta^1(\Omega)^n)^*. \quad (2.18)$$

ТЕОРЕМА 1 (см. [11], а также [8; § 3.4, § 5.1], [13]). *Оператор $\mathcal{A}_\beta(\lambda)$ фредгольмов в том и только том случае, если полуинтервал*

$$\Upsilon_\beta = \{\eta \in \mathbb{C} : \text{Re } \eta \in [0, 2\pi), \text{Im } \eta = \beta\} \quad (2.19)$$

свободен от спектра пучка (2.8). Если собственное число пучка попадает на полуинтервал (2.19), то образ $\mathcal{A}_\beta(\lambda)W_\beta^1(\Omega)^n$ незамкнут.

Если $\lambda = \Lambda_k(\eta_0)$ при некоторых $k \in \mathbb{N}$ и $\eta_0 \in \Upsilon_0$, то оператор $\mathcal{A}_0(\lambda)$, заданный на пространстве Соболева $H^1(\Omega)^n$, не является фредгольмовым, что и означает принадлежность точки λ существенному спектру $\wp_{\text{ess}}$ задачи теории упругости, краевой (1.2) или вариационной (1.8). Это наблюдение вместе с теоремой 1 приводит к известной (см. публикации [12], [14], [15] и др.) формуле

$$\wp_{\text{ess}} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$$

для спектра периодических волноводов, в которой фигурируют спектральные сегменты

$$B_k = \{\Lambda_k(\eta) \mid \eta \in [0, 2\pi)\}, \quad (2.20)$$

конечные, связные и замкнутые в силу упомянутых ранее свойств функций (2.7). Если длина сегмента (2.20) положительна, то он попадает на непрерывный спектр. Еще раз укажем, что вопрос о возможности “схлопывания” сегмента B_k в единственную точку и появления бесконечнократных собственных чисел остается полностью открытым для задач теории упругости.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для правильной интерпретации приведенных результатов о спектре можно, например, ввести скалярное произведение

$$\langle u, v \rangle = (AD(\nabla)u, D(\nabla)v)_{\Omega} + (\rho u, v)_{\Omega} \quad (2.21)$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = H^1(\Omega)^n$ (нужные свойства формы (2.21) обеспечены неравенством Корна (1.11) и требованием (1.7)), а также самосопряженный непрерывный положительный оператор $\mathcal{T}$,

$$\langle \mathcal{T}u, v \rangle = (\rho u, v)_{\Omega}, \quad u, v \in \mathcal{H}.$$

В итоге интегральное тождество (1.12) превращается в абстрактное уравнение $\mathcal{T}u = \tau u$ в $\mathcal{H}$ с новым спектральным параметром $\tau = (1 + \lambda)^{-1}$. К этому уравнению применима теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (см., например, монографию [21]). Инверсия $\tau \mapsto \lambda = \tau^{-1} - 1$ спектра $\wp(\mathcal{T})$ оператора $\mathcal{T}$ предоставляет спектр задачи (1.12) (подробности см., например, в обзоре [13]).

В очередном утверждении, вытекающем из теоремы 1, имеем дело с весовым показателем $\beta = 0$ и ядром оператора (2.18)

$$\ker \mathcal{A}_{\beta}(\lambda) = \{u \in W_{\beta}^1(\Omega)^n : \mathcal{A}_{\beta}(\lambda)u = 0\}, \quad (2.22)$$

которое в случае $\beta = 0$ состоит из захваченных упругих волн – решений однородной задачи теории упругости, принадлежащих пространству $H^1(\Omega)^n$ и потому обладающих конечной упругой энергией $\frac{1}{2}(AD(\nabla)u, D(\nabla)u)_{\Omega}$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\lambda \notin B_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то оператор $\mathcal{A}_0(\lambda)$ является фредгольмовым и самосопряженным, т.е. задача (2.1) имеет решение $u \in H^1(\Omega)^n$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$f(v) = 0 \quad \text{при любом } v \in \ker \mathcal{A}_0(\lambda). \quad (2.23)$$

Это решение определено с точностью до слагаемого из конечномерного подпространства $\ker \mathcal{A}_0(\lambda)$ и, будучи подчинено условиям ортогональности

$$(u, v)_{\mathcal{H}} = 0 \quad \text{при любом } v \in \ker \mathcal{A}_0(\lambda), \quad (2.24)$$

где $\mathcal{K}$ – компакт в $\overline{\Omega}$ положительного объема, становится единственным и удовлетворяет оценке $\|u; H^1(\Omega)\| \leq c(\lambda)\|f; H^{-1}(\Omega)\|$.

§ 3. Классификация упругих волн

3.1. Волны. Пусть $\lambda \in B_m$, но равенство (2.9) нарушено. Тогда на полуинтервале Υ_0 расположен конечный набор вещественных собственных чисел

$$\eta^1, \dots, \eta^r \in [0, 2\pi) \quad (3.1)$$

пучка $\mathfrak{A}_\lambda$. В статье [13] (ср. оригинальные работы [22], [23] для цилиндрических волноводов и см. далее замечание 5) установлено, что полная кратность $\varkappa = \varkappa^1 + \dots + \varkappa^r$ собственных чисел (3.1) – четное число $2\kappa = 2\kappa(\lambda)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $\eta_0 \in \Upsilon_0$ – собственное число, то комплексное сопряжение в модельной задаче (2.1)–(2.3) показывает, что число $2\pi - \eta_0 \in (0, 2\pi]$ (точки 0 и 2π , разумеется, отождествляются) также является собственным, а отвечающая ему каноническая система жордановых цепочек выглядит так:

$$\{e^{-2\pi iz} \overline{U^{j0}}, -e^{-2\pi iz} \overline{U^{j0}}, \dots, (-1)^{\varkappa_j^0-1} e^{-2\pi iz} \overline{U^{j\varkappa_j^0-1}}\}, \quad j = 1, \dots, J^0 \quad (3.2)$$

(ср. систему (2.10) для собственного числа η_0). Таким образом, при непосредственной проверке четности числа $\varkappa$ в рассмотрении нуждаются только собственные числа $0 \cong 2\pi$ и π . Подчеркнем, что простому геометрически собственному числу $\eta_0 = 0$ отвечает жорданова цепочка четной длины $\varkappa^0$, но при нетривиальной геометрической кратности строение канонической системы может оказаться более сложным. Формулы (3.2) и (2.15) еще раз поясняют, почему достаточно иметь дело с собственными числами на полуинтервале Υ_0 , а не на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Линейную оболочку волн Флоке (2.15), отвечающих собственным числам (3.1) пучка $\mathfrak{A}_\lambda$, обозначим $\mathscr{W} = \mathscr{W}(\lambda)$ и введем в ней базис

$$w_{(\pm)}^1, \dots, w_{(\pm)}^\kappa, \quad (3.3)$$

но принцип его выбора поясним в п. 3.3; при этом $\dim \mathscr{W} = 2\kappa$.

Сформулируем установленную в работе [11] (см. также [8; § 3.4] и [13]) теорему об асимптотике, для чего обозначим через $\beta_0(\lambda) > 0$ такую величину, что в полукоткрытом прямоугольнике

$$\{\eta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \eta \in [0, 2\pi), |\operatorname{Im} \eta| < \beta_0(\lambda)\} \quad (3.4)$$

расположены только вещественные собственные числа (3.1) пучка (2.8), но на полуинтервале $\Upsilon_{\beta_0(\lambda)}$ комплексное собственное число все-таки имеется. Подчеркнем, что ввиду симметрии спектра (см. п. 2.2) такое же свойство присуще полуинтервалу $\Upsilon_{-\beta_0(\lambda)}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\beta \in (0, \beta_0(\lambda))$, а $u \in W_{-\beta}^1(\Omega)^n$ – решение задачи (1.12) с правой частью $f \in W_{-\beta}^{-1}(\Omega)^n \subset W_{\beta}^{-1}(\Omega)^n$. Тогда справедливо представление

$$u(x) = \chi(x) \sum_{\pm} \sum_{p=1}^{\kappa} a_{(\pm)}^p w_{(\pm)}^p(x) + \tilde{u}(x), \quad (3.5)$$

где χ – срезающая функция (1.10), $w_{(\pm)}^p$ – волны (3.3), а коэффициенты $a_{(\pm)}^p \in \mathbb{C}$ и остаток $\tilde{u} \in W_{\beta}^1(\Omega)^n$ удовлетворяют неравенству

$$\left(\|\tilde{u}; W_{\beta}^1(\Omega)\|^2 + \sum_{\pm} \sum_{p=1}^{\kappa} |a_{(\pm)}^p|^2 \right)^{1/2} \leq c_{\beta} (\|f; W_{-\beta}^{-1}(\Omega)^n\| + \|u; W_{-\beta}^1(\Omega)\|) \quad (3.6)$$

с множителем c_{β} , не зависящим от f и u .

Поясним утверждение теоремы. Во-первых, включение $f \in W_{-\beta}^{-1}(\Omega)^n$ означает, что функционал f определен на пространстве $W_{-\beta}^1(\Omega)^n$ экспоненциально растущих функций, т.е. сам он экспоненциально затухает в некотором смысле и поэтому содержится также в более широком весовом пространстве $W_{\beta}^{-1}(\Omega)^n$. Во-вторых, решение $u \in W_{-\beta}^1(\Omega)^n$, у которого допустим, вообще говоря, экспоненциальный рост, представлено как сумма (3.6) экспоненциально затухающего остатка и линейной комбинации волн Флоке (3.3), которые путем умножения на срезку локализованы в периодической части $\Omega_+ = \Pi_+$ волновода Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Поскольку $\mathcal{A}_{\beta}(\lambda)$ и $\mathcal{A}_{-\beta}(\lambda)$ – взаимно сопряженные операторы, имеем

$$\dim \ker \mathcal{A}_{\pm\beta}(\lambda) = \dim \operatorname{coker} \mathcal{A}_{\mp\beta}(\lambda), \quad \operatorname{Ind} \mathcal{A}_{+\beta}(\lambda) = -\operatorname{Ind} \mathcal{A}_{-\beta}(\lambda). \quad (3.7)$$

Кроме того, в силу теоремы 2 об асимптотике решений справедливо равенство

$$\operatorname{Ind} \mathcal{A}_{-\beta}(\lambda) = \operatorname{Ind} \mathcal{A}_{\beta}(\lambda) + \varkappa. \quad (3.8)$$

При этом $\varkappa = \dim \mathcal{W}(\lambda)$ и, как обычно, $\operatorname{Ind} \mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A} - \dim \operatorname{coker} \mathcal{A}$. Формулы (3.7) и (3.8) показывают, что $\varkappa = 2 \operatorname{Ind} \mathcal{A}_{-\beta}(\lambda)$ – четное число, т.е. $\kappa = \operatorname{Ind} \mathcal{A}_{-\beta}(\lambda)$.

Прообраз $\mathbf{W}_{\beta}^1(\Omega; \lambda) = \mathcal{A}_{-\beta}(\lambda)^{-1} W_{-\beta}^{-1}(\Omega)^n$ – линейное пространство вектор-функций, представимых в виде (3.5). Его можно сделать гильбертовым пространством, взяв в качестве нормы левую часть (3.6) (ср., например, работу [24]), однако гильбертова структура никак не соотносится с описанием пространства волн, которое вводится как факторпространство

$$\mathfrak{W} = \mathcal{A}_{-\beta}(\lambda)^{-1} W_{-\beta}^{-1}(\Omega)^n / W_{\beta}^1(\Omega)^n. \quad (3.9)$$

Классы эквивалентности, составляющие базис в пространстве (3.9) и имеющие представителями произведения $\chi w_{(\pm)}^1, \dots, \chi w_{(\pm)}^{\kappa}$ (см. формулы (3.3) и (1.11)), обозначим $\mathfrak{w}_{(\pm)}^1, \dots, \mathfrak{w}_{(\pm)}^{\kappa}$. Ближайшей целью становится описание первой компоненты в разложении

$$\ker \mathcal{A}_{-\beta}(\lambda) = \mathfrak{Z}(\lambda) \dot{+} \ker \mathcal{A}_{\beta}(\lambda). \quad (3.10)$$

В силу формул (3.7) и (3.8) имеем $\dim \mathfrak{Z}(\lambda) = \kappa(\lambda)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пространство волн $\mathfrak{W} \approx \mathcal{W}$ и сопутствующие объекты были введены на основе обобщенной формулировки задачи теории упругости. Вместе с тем, если данные задачи гладкие, то можно перейти к классической постановке и, в частности, определить аналогичные (2.8) и (2.18) операторы следующим образом:

$$\mathcal{A}_{\beta}^l(\lambda) = \{\mathcal{L} - \lambda \rho, \mathcal{N}\}: W_{\beta}^{l+1}(\Omega)^n \rightarrow W_{\beta}^{l-1}(\Omega)^n \times W_{\beta}^{l-1/2}(\partial\Omega)^n, \quad (3.11)$$

$$\mathfrak{A}_{\lambda}^l(\eta): H_{\text{per}}^{l+1}(\varpi)^n \rightarrow H_{\text{per}}^{l-1}(\varpi)^n \times H_{\text{per}}^{l-1/2}(\gamma). \quad (3.12)$$

При этом $H^l(\varpi)$, $H^{l-1/2}(\gamma)$ и $W_\beta^l(\Omega)$, $W_\beta^{l-1/2}(\partial\Omega)$ – обычные и весовые пространства Соболева и Соболева–Слободецкого, а индекс рег выделяет подпространства периодических функций, получаемые как замыкание пространства гладких периодических функций по соответствующей норме. Допустимый показатель гладкости $l \in \mathbb{N}$ определяется дифференциальными свойствами коэффициентов и границы. При помощи результатов работы [10] (см. также [8; § 3.6]) можно заменить в отображении (3.11) пространства Кондратьева весовыми классами Гёльдера. Поскольку переход от оператора $\mathcal{A}_\beta(\lambda)$ к оператору $\mathcal{A}_\beta^l(\lambda)$ требует лишь применения известных результатов о поднятии гладкости решений эллиптических краевых задач, переформулировка всех утверждений статьи применительно к классической постановке (1.2) задачи теории упругости не может вызвать затруднений.

3.2. Вектор Умова–Пойнтинга и энергетический принцип Мандельштама. Для зависящего от времени t вектора смещений $\text{Re } \mathbf{w}(x, t)$,

$$\mathbf{w}(x, t) = e^{-i\omega t} \mathbf{u}(x), \quad \omega > 0, \quad (3.13)$$

полная (упругая плюс кинетическая) энергия, заключенная в некотором зафиксированном объеме Θ тела Ω , приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{w}; t) &= \frac{1}{2} \int_{\Theta} (D(\nabla) \text{Re } \mathbf{w}(x, t))^{\top} A(x) D(\nabla) \text{Re } \mathbf{w}(x, t) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Theta} \rho(x) \left| \text{Re } \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Вектор Умова–Пойнтинга² имеет смысл вектора $\mathbf{J}(\mathbf{w}; x, t)$ потока энергии через фрагмент $\Gamma = \partial\Theta \setminus \partial\Omega$ поверхности выделенного объема Θ , т.е.

$$-\frac{d}{dt} \mathbf{E}(\mathbf{w}; t) = \int_{\Gamma} \nu(x)^{\top} \mathbf{J}(\mathbf{w}; x, t) ds_x, \quad (3.14)$$

где ν – вектор внешней нормали, а ds_x – элемент площади поверхности. Отметим, что на $\partial\Theta \cap \partial\Omega$ поставлено краевое условие (1.2), а значит, излучение энергии невозможно и интегрирование по этому фрагменту поверхности проводить в (3.14) не нужно. Выполнив дифференцирование и интегрирование по частям, находим

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \mathbf{E}(\mathbf{w}; t) &= \omega \int_{\Theta} (D(\nabla) \text{Im } \mathbf{w}(x, t))^{\top} A(y) D(\nabla) \text{Re } \mathbf{w}(x, t) dx \\ &\quad - \omega^3 \int_{\Theta} \rho(x) (\text{Re } \mathbf{w}(x, t))^{\top} \text{Im } \mathbf{w}(x, t) dx \\ &= \omega \int_{\Theta} (\text{Im } \mathbf{w}(x, t))^{\top} (D(-\nabla)^{\top} A(x) \text{Re } \mathbf{w}(x, t) - \lambda \rho^0 \text{Re } \mathbf{w}(x, t)) dx \\ &\quad + \omega \int_{\partial\Theta} (\text{Im } \mathbf{w}(x, t))^{\top} D(\nu(x))^{\top} A(y) D(\nabla) \text{Re } \mathbf{w}(x, t) ds_x \end{aligned}$$

²Этот вектор впервые был описан в работе Н. А. Умова [9], относящейся к задачам акустики и теории упругости. В англоязычной литературе он носит название the Poynting vector, хотя статья [25] появилась позднее на 10 лет. В ней рассматривались задачи электродинамики, и поэтому в данной работе вектор следует именовать исключительно вектором Умова и двойное имя используется только для того, чтобы сам объект был понятен любому читателю.

$$= \omega \int_{\partial\Theta} (\operatorname{Im} \mathbf{w}(x, t))^\top D(\nu(x))^\top A(x) D(\nabla) \operatorname{Re} \mathbf{w}(x, t) ds_x. \quad (3.15)$$

Подчеркнем, что последний интеграл по Θ обращается в нуль в силу уравнений из задачи (1.2) для $\mathbf{w}$. Сравнивая выражения (3.14) и (3.15), видим, что

$$\mathbf{J}_j(\mathbf{w}; x, t) = -\omega (\operatorname{Im} \mathbf{w}(x, t))^\top D(e_{(j)})^\top A(x) D(\nabla) \operatorname{Re} \mathbf{w}(x, t); \quad (3.16)$$

здесь $j = 1, \dots, n$ и $e_{(j)}$ – орт оси x_j .

Энергетический принцип излучения (см. оригинальную работу [26], а также монографии [5; гл. 1], [6; гл. 1], [8; гл. 5]) связывает направление распространения волны с направлением переноса энергии, т.е. волна $\mathbf{u}(x)$ из формулы (3.13) оказывается уходящей на бесконечность (приходящей с бесконечности) в волноводе Ω , если проекция на ось z среднего по промежутку $(0, 2\pi/\omega) \ni t$ и по сечению $\theta(R) \ni y$ вектора Умова–Пойнтинга

$$\bar{\mathbf{J}}_3(\mathbf{w}) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \int_{\theta(R)} \mathbf{J}_3(\mathbf{w}; y, R, t) dy dt$$

положительна (отрицательна). В силу соотношений (3.16) и (3.7) имеем

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}_3(\mathbf{w}) &= i \frac{\omega^2}{8\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \int_{\omega} (e^{i\omega t} \mathbf{u}(y, R) - e^{i\omega t} \overline{\mathbf{u}(y, R)}) \\ &\quad \times D(e_{(3)}^\top A(y, R) D(\nabla) (e^{-i\omega t} \mathbf{u}(y, R) + e^{i\omega t} \overline{\mathbf{u}(y, R)})) dy dt \\ &= -i \frac{\omega}{4} \mathbf{q}_R(\mathbf{u}, \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

В правой части возникла полуторалинейная и антиэрмитова, т.е. симплектическая, форма

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_R(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\theta(R)} (\overline{\mathbf{v}(y, R)})^\top D(e_{(n)})^\top A(y, R) D(\nabla) \mathbf{u}(y, R) \\ &\quad - \mathbf{u}(y, R)^\top D(e_{(n)})^\top A(y, R) D(\nabla) \overline{\mathbf{v}(y, R)} dy, \end{aligned}$$

которую далее называем *формой переноса энергии*. Она представляет собой поверхностный интеграл по торцу (2.4) усеченного волновода $\Omega(R) = \{x \in \Omega : z < R\}$. Сделав замену $A \mapsto A^0$, приходим к форме $\mathbf{q}_R^0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, которая не зависит от параметра R для полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, удовлетворяющих однородной задаче (2.16) в квазицилиндре, в частности для волн Флоке (2.15) и (3.3). Поэтому убираем индекс R и, проинтегрировав по $R \in (0, 1)$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_0^1 \int_{\theta(R)} (\overline{\mathbf{v}(y, R)})^\top D(e_{(n)}^\top A^0(y, R) D(\nabla) \mathbf{u}(y, R) \\ &\quad - \mathbf{u}(y, R)^\top D(e_{(n)})^\top A^0(y, R) D(\nabla) \overline{\mathbf{v}(y, R)}) dy dR \\ &= \int_{\varpi} (\overline{\mathbf{v}(x)} D(e_{(n)})^\top A^0(x) D(\nabla) \mathbf{u}(x) \\ &\quad - \mathbf{u}(x)^\top D(e_{(n)})^\top A^0(x) D(\nabla) \overline{\mathbf{v}(x)}) dx. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Именно это выражение возникает во всех последующих вычислениях.

При помощи формы переноса энергии удается классифицировать упругие волны в периодических (и цилиндрических; см. [7]) волноводах. Согласно принципу Мандельштама волна $w \in \mathcal{W}$ называется *приходящей* (*уходящей*) в волноводе Ω , если $\operatorname{Im} \mathbf{q}^0(w, w) < 0$ ($\operatorname{Im} \mathbf{q}^0(w, w) > 0$). Условия излучения Умова–Мандельштама требуют, чтобы в асимптотическое разложение (3.5) решения задачи (1.12) с внешними нагрузками (2.17) входили только уходящие волны, т.е. процесс распространения волн сопровождается истечением энергии на бесконечность. Отметим, что имеются волновые пакеты, которые не переносят энергии, и потому нейтральные для энергетического принципа (ср. замечание 7), однако всегда существует базис в пространстве волн (3.9), составленный из уходящих и приходящих волн в одинаковых количествах.

3.3. Симплектическая форма и матрица рассеяния. В работах [22], [23] (см. также [8; §5.4]) аналогичная (3.18) форма была введена для общих формально самосопряженных краевых задач и использована для классификации волн и постановки так называемых искусственных условий излучения. Благодаря вычислению вектора Умова–Пойнтинга (3.17) такие условия в упругом волноводе теперь интерпретируются как энергетические условия излучения Умова–Мандельштама. Вместе с тем корректность их постановки вытекает из общих алгебраических результатов (см., например, книги [27], [28]). Дело в том, что форма (3.18) определена на прямом произведении $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ и не является вырожденной, так как согласно работе [29] (см. оригинальную статью [30] по поводу конических и цилиндрических областей) для каждой нетривиальной волны Флоке $\mathbf{w} = w^{jk}$ из (2.15) с показателем η_0 найдется волна Флоке $\mathbf{v}$ с показателем $2\pi - \bar{\eta}_0$ (ср. замечание 4), для которой $\mathbf{q}^0(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 1$. В итоге общие результаты [27], [28] устанавливают существование базиса (3.3) в пространстве волн $\mathcal{W}$, подчиненного условиям ортогональности и нормировки

$$\mathbf{q}^0(w_{(\pm)}^m, w_{(\pm)}^l) = \pm i \delta_{m,l}, \quad \mathbf{q}^0(w_{(\pm)}^m, w_{(\mp)}^l) = 0, \quad (3.19)$$

где $m, l = 1, \dots, \kappa$, а $\delta_{m,l}$ – символ Кронекера. Разделение волн Флоке на уходящие (плюс) и приходящие (минус) порождает разложение

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}^+ \dot{+} \mathcal{W}^-, \quad \dim \mathcal{W}^\pm = \kappa, \quad w_{(\pm)}^p \in \mathcal{W}^\pm, \quad p = 1, \dots, \kappa,$$

а также аналогичное разложение факторпространства (3.9).

В следующем параграфе на конкретных примерах будет показано, как выстраивается нужный базис (общая процедура разработана в статьях [22], [23] для цилиндрических волноводов; см. также [8; гл. 5] и [13]). Условия ортогональности и нормировки (3.19) обеспечивают два утверждения общего плана, которые сформулируем без доказательств, ссылаясь опять-таки на книгу [8] и обзор [13].

ТЕОРЕМА 3. *Сужение $\mathcal{A}_{-\beta}^+(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}_{-\beta}(\lambda)$ на подпространство*

$$\mathbf{W}_{\beta}^1(\Omega; \lambda)^+ = \{u \in \mathbf{W}_{\beta}^1(\Omega; \lambda) : a_{(-)}^1 = \dots = a_{(-)}^{\kappa} = 0\} = \mathfrak{W}^+ \dot{+} W_{\beta}^1(\Omega)^n \quad (3.20)$$

является фредгольмовым оператором с нулевым индексом. Именно, задача (1.12) имеет решение $u \in \mathbf{W}_{\beta}^1(\Omega; \lambda)^+$ в том и только том случае, если ее правая часть $f \in W_{-\beta}^{-1}(\Omega)^n$ подчинена условию ортогональности (2.23). Это решение определено с точностью до слагаемого из подпространства $\ker \mathcal{A}_{\beta}(\lambda)$

и, будучи подчинено требованию (2.24), становится единственным и удовлетворяет оценке

$$\|u; \mathbf{W}_\beta^1(\Omega; \lambda)^+\| := \left(\|\tilde{u}; W_\beta^1(\Omega)\|^2 + \sum_{p=1}^{\kappa} |a_{(+)}^p|^2 \right)^{1/2} \leq c(\lambda) \|f; W_{-\beta}^{-1}(\Omega)\|. \quad (3.21)$$

Решение задачи теории упругости из подпространства (3.20) не имеет в представлении (3.5) приходящих волн, а значит, для него выполнены условия излучения Умова–Мандельштама. При этом теорема 3 снабжает задачу теории упругости с такими условиями излучения фредгольмовым оператором $\mathcal{A}_{-\beta}^+(\lambda)$ с нулевым индексом.

ТЕОРЕМА 4. Для каждого $p = 1, \dots, \kappa$ однородная ($f = 0$) задача (1.12) приобретает решение $Z^p \in \mathbf{W}_\beta^1(\Omega; \lambda)$, представимое в виде

$$Z^p = \chi w_{(-)}^p + \chi \sum_{q=1}^{\kappa} S_{qp} w_{(+)}^q + \tilde{Z}^p, \quad (3.22)$$

где $\tilde{Z}^p \in W_\beta^1(\Omega)^n$ – экспоненциально затухающий остаток, а коэффициенты S_{qp} образуют унитарную $(\kappa \times \kappa)$ -матрицу S .

Матрица S называется *матрицей упругого рассеяния*, а ее унитарность – неотъемлемое свойство решений (3.22) задачи рассеяния, проистекающее из закона сохранения энергии и обеспеченное условиями нормировки (3.19). Если удастся соблюсти требование

$$w_{(+)}^p(x) = \overline{w_{(-)}^p(x)}, \quad p = 1, \dots, \kappa$$

(ср. замечание 4), то матрица S дополнительно оказывается симметричной (см. доказательство в работе [31; § 2]). В итоге имеем

$$S = S^\top, \quad S^{-1} = S^* = \overline{S}^\top.$$

Подчеркнем, что матрица S не зависит от того, появляются или нет в волноводе Ω захваченные упругие волны, образующие конечномерное подпространство (2.22) с весовым индексом $\beta \in (0, \beta_0(\lambda))$ и поэтому экспоненциально затухающие на бесконечности (в ситуации (2.9) неравенство $\dim \ker \mathcal{A}_\beta(\lambda) < \infty$ известно).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Достаточное условие (см. [32]) существования экспоненциально затухающих решений эллиптических задач в цилиндрических областях легко приспособляется к задачам в областях с периодическими выходами на бесконечности (ср. обзор [13]). Оно оперирует с расширенной матрицей рассеяния, которая выстраивается по тому же правилу, что и обычная матрица рассеяния, т.е. в соответствии с принципом Умова–Мандельштама, но с привлечением экспоненциально затухающих ($\operatorname{Im} \eta_0 > 0$) и растущих ($\operatorname{Im} \eta_0 < 0$) волн Флоке (2.15), которые сами по себе энергии не переносят, однако специально выстраиваемые волновые пакеты все-таки удовлетворяют соотношениям (3.19) опять-таки по чисто алгебраическим соображениям.

§ 4. Конкретные приходящие и уходящие волны

4.1. Простые собственные числа пучка. Рассмотрим собственные числа $\eta_{\pm}$ пучка $\mathfrak{A}_{\lambda}$, отмеченные малым черным кружком на рис. 2, а и являющиеся простыми геометрически и алгебраически. Согласно замечанию 4 они и отвечающие им собственные векторы $U^{0\pm}$ находятся в отношении

$$\eta_+ = 2\pi - \eta_-, \quad U^{0+}(x) = e^{-2\pi iz} \overline{U^{0-}(x)}, \quad \lambda^0 = \Lambda(\eta_{\pm}). \quad (4.1)$$

Предположение о простоте означает, что неразрешима задача для присоединенного вектора $U^{1\pm}$

$$\begin{aligned} & (A^0 D(\nabla_y, \partial_z + i\eta_{\pm}) U^{1\pm}, D(\nabla_y, \partial_z + i\eta_{\pm}) V)_{\varpi} - \lambda(\rho^0 U^{1\pm}, V)_{\varpi} \\ &= i(A^0 D(\nabla_y, \partial_z + i\eta_{\pm}) U^{0\pm}, D(e_{(n)}) V)_{\varpi} \\ &\quad - i(A^0 D(e_{(n)}) U^{0\pm}, D(\nabla_y, \partial_z + i\eta_{\pm}) V)_{\varpi}, \quad V \in H_{\text{per}}^1(\varpi)^n \end{aligned} \quad (4.2)$$

(ср. задачу (2.13) с $k = 1$ в дифференциальной форме). Поскольку задача (4.2) самосопряжена, альтернатива Фредгольма показывает, что величина

$$\begin{aligned} J(U^{0\pm}) &:= i(A^0 D(\nabla_y, \partial_z + i\eta_{\pm}) U^{0\pm}, D(e_{(n)}) U^{0\pm})_{\varpi} \\ &\quad - i(A^0 D(e_{(n)}) U^{0\pm}, D(\nabla_y, \partial_z + i\eta_{\pm}) U^{0\pm})_{\varpi} \\ &= 2 \operatorname{Im}(A^0 D(e_{(n)}) U^{0\pm}, D(\nabla_y, \partial_z + i\eta_{\pm}) U^{0\pm})_{\varpi} \end{aligned} \quad (4.3)$$

отлична от нуля. При учете формул (4.1) получаем равенство

$$J(U^{0+}) = -J(U^{0-}).$$

Подставив осциллирующие волны Флоке

$$w^{0\pm}(y, z) = e^{i\eta_{\pm} z} U^{0\pm}(y, z) \quad (4.4)$$

в симплектическую форму (3.18), обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^0(w^{0\pm}, w^{0\pm}) &= \int_{\varpi} (\overline{U^{0\pm}(x)}^{\top} D(e_{(n)})^{\top} A^0(x) D(\nabla_y, \partial_z + i\eta_{\pm}) U^{0\pm}(x) \\ &\quad - U^{0\pm}(x)^{\top} D(e_{(n)})^{\top} A^0(x) \overline{D(\nabla_y, \partial_z + i\eta_{\pm}) U^{0\pm}(x)}) dx = -iJ(U^{0\pm}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Таким образом, волна (4.4) оказывается уходящей по Умову–Мандельштаму в случае $J(U^{0\pm}) > 0$, но приходящей в случае $J(U^{0\pm}) < 0$. Кроме того, в силу соотношения (4.3) волны w^{0+} и w^{0-} заведомо являются разнонаправленными. Напоминаем, что сделанные выводы основаны на предположении о простоте собственных чисел $\eta_{\pm}$.

Как и в прямом цилиндрическом волноводе, обсуждавшемся, например, в монографии [5; § 18], направление распространения волны (4.4) можно увидеть на рис. 2, а: точка $(\eta_{\pm}, \lambda^0)$ на восходящем участке графика $\lambda = \Lambda(\eta)$ порождает уходящие волны, а на нисходящем – уходящие. Подтвердим это наблюдение. Именно, придадим возмущение основному спектральному параметру

$$\lambda^{\delta} = \lambda^0 + \delta\lambda', \quad (4.6)$$

где $\lambda' = \lambda'_{\pm} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а δ – малая положительная величина. Для собственных чисел и векторов пучка $\mathfrak{A}_{\lambda^{\delta}}$ примем простейшие асимптотические анзацы

$$\begin{aligned} \eta^{\delta} &= \eta^0 + \delta\eta' + \delta^2 \tilde{\eta}^{\delta}, \\ U^{\delta}(x) &= U^0(x) + \delta U'(x) + \delta^2 \tilde{U}^{\delta}(x), \end{aligned} \quad (4.7)$$

Рис. 2

причем $\eta^0 = \eta_{\pm}$, $U^0 = U^{0\pm}$, а поправки η' и U' подлежат определению. Подчеркнем, что в рассматриваемом простом случае вопрос об обосновании асимптотики не возникает (см., например, [19; гл. 8]). Подставим формулы (4.6) и (4.7) в задачу (2.5) (или (2.1)–(2.3) в дифференциальной форме) и соберем множители при малом параметре δ . В результате получаем интегральное тождество

$$\begin{aligned} & (A^0 D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0)U', D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0)V)_{\varpi} - \lambda^0(\rho^0 U', V)_{\varpi} \\ &= \lambda'(\rho^0 U^0, V)_{\varpi} + i\eta'(A^0 D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0)U^0, D(e_{(n)})V)_{\varpi} \\ & \quad - i\eta'(A^0 D(e_{(n)})U^0, D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0)V)_{\varpi}, \quad V \in H_{\text{per}}^1(\varpi)^n. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Поскольку задача формально самосопряжена, альтернатива Фредгольма дает единственное условие разрешимости задачи (4.8), которое в силу формулы (4.3) принимает вид

$$\lambda' = -\eta'_{\pm}(\rho^0 U^{0\pm}, U^{0\pm})_{\varpi}^{-1} J(U^{0\pm}). \quad (4.9)$$

Следовательно, при учете связей (4.5)–(4.7) приходим к равенству

$$\frac{d\Lambda}{d\eta}(\eta_{\pm}) = -i \frac{\mathbf{q}^0(w^{0\pm}, w^{0\pm})}{(\rho^0 U^{0\pm}, U^{0\pm})_{\varpi}}. \quad (4.10)$$

Поскольку величина $\text{Im } \mathbf{q}^0(w^{0\pm}, w^{0\pm})$ положительна в случае уходящей волны (4.4) и отрицательна в случае приходящей (ср. определение в п. 3.3), упомянутый выше вывод о связи наклона графика на рис. 2, а с направлением переноса энергии стал очевидным.

4.2. Собственные числа пучка с геометрической кратностью. Пусть η^0 – собственное число пучка $\mathfrak{A}_{\lambda}$, которому отвечают два собственных вектора $U_{(1)}^0$ и $U_{(2)}^0$, но полная кратность равна двум, т.е. η^0 простое алгебраически. В точке (η^0, Λ^0) пересекаются графики двух функций (2.7) (ср. рис. 3, а и б), но также может происходить касание или наложение графиков. На основе формулы (4.10) нетрудно предсказать направление распространения осциллирующих волн Флоке

$$w_{(p)}(y, z) = e^{i\eta^0 z} U_{(p)}^0(y, z), \quad p = 1, 2. \quad (4.11)$$

Вместе с тем ввиду двойкой интерпретации спектральной задачи (2.1)–(2.3) (см. п. 2.2) встает вопрос о правильном способе нормировки собственных векторов $U_{(1)}^0$ и $U_{(2)}^0$. Простейшая из них ассоциируется с λ -спектром задачи и приобретает вид

$$(\rho^0 U_{(j)}^0, U_{(k)}^0)_{\varpi} = \delta_{j,k}, \quad j, k = 1, 2. \quad (4.12)$$

Точки $\eta = 0 \cong 2\pi$ и $\eta = \pi$ не могут быть простыми собственными числами пучка из-за упомянутой в п. 2.2 периодичности и симметрии его спектра. Далее имеем дело с ситуациями, изображенными на рис. 3, а–с и 2, b и характерные как раз для точек, выделенных меткой $\bullet$. Впрочем, для векторной задачи теории упругости перекрестья ($\bullet$) и локальные экстремумы ($\blacksquare$) могут случиться в любой точке η^0 полуинтервала $[0, 2\pi)$ (ср. разнообразные ситуации на рис. 2 и рис. 3).

Рис. 3

Подчеркнем особо, что здесь и всюду далее формальный асимптотический анализ спектра не нуждается в каком-либо отдельном обосновании – достаточно сослаться на книгу [33; гл. 9] или другой источник, где приведены асимптотики собственных чисел и векторов пучков³.

Придадим возмущение переменной Гельфанда $\eta^\delta = \eta^0 + \delta\eta'$, а в асимптотических разложениях (4.6), (4.7) для λ^δ и U^δ возьмем $\lambda' = \lambda^{p'}$, $U' = U^{p'}$ и

$$U^0 = U^{p0} = a_{1p}U_{(1)}^0 + a_{2p}U_{(2)}^0, \quad (4.13)$$

где $a^p = (a_{1p}, a_{2p})^\top$ – столбцы, подлежащие определению. Теперь из-за кратности собственного числа возникают два условия разрешимости задачи (4.8) для определения поправок $U^{p'}$ и $\lambda^{p'}$ (берем $U_{(1)}^0$ и $U_{(2)}^0$ в качестве пробной функции V). Эти условия превращаются в систему линейных алгебраических уравнений

$$\lambda^{p'} a^p = M a^p$$

с (2×2) -матрицей $M = (M_{jl})$,

$$\begin{aligned} M_{jl} = J(U_{(j)}^0, U_{(l)}^0) &= i(A^0 D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0) U_{(j)}^0, D(e_{(n)}) U_{(l)}^0)_{\varpi} \\ &\quad - i(A^0 D(e_{(n)}) U_{(j)}^0, D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0) U_{(l)}^0)_{\varpi}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

³В книге [33; гл. 9] рассматриваются линейные несамосопряженные пучки, но сведение квадратичного к такому не вызывает затруднений.

Матрица с элементами (4.14) эрмитова и обладает двумя вещественными собственными числами $\lambda^{1'}$ и $\lambda^{2'}$, которым отвечают два взаимно ортогональных столбца a^1 и a^2 . При этом $\lambda^{p'} \neq 0$, так как в противном случае собственный вектор (4.13) пучка $\mathfrak{A}_{\lambda^0}$ должен иметь присоединенный – выполнены два условия разрешимости

$$J(U^{p0}, U_j^0) = 0, \quad j = 1, 2,$$

задачи (2.13) с $k = 1$.

Теперь подчиним собственные столбцы a^1 и a^2 требованиям

$$(a^p)^\top M a^p = \text{sign}(\lambda^{p'}) \quad (4.15)$$

и обнаружим, что соответствующие волны Флоке

$$w^{p0}(x) = e^{i\eta^0 z} U^{p0}(y, z) \quad (4.16)$$

(ср. формулы (2.15) и (4.11)) удовлетворяют условиям нормировки (3.19)

$$\mathbf{q}^0(w^{p0}, w^{p0}) = i \text{sign}(\lambda^{p'}), \quad \mathbf{q}^0(w^{10}, w^{20}) = 0,$$

причем знак $\text{sign}(\lambda^{p'})$ собственного числа матрицы M определяет направление распространения вновь образованной волны (4.16).

Обратим внимание на два обстоятельства. Во-первых, исходные волны Флоке (4.11), подчиненные условиям ортогональности и нормировки (4.12), могут не поддаваться классификации Умова–Мандельштама, поскольку равенство $\mathbf{q}^0(w_{(p)}, w_{(p)}) = 0$ не исключено. Во-вторых, в случае простых собственных чисел $\eta_\pm$ (см. выше) два способа нормировки по существу эквивалентны, но требуют лишь введения разных коэффициентов при одной и той же волне, однако в случае геометрически кратного собственного числа построенные линейные комбинации (4.13) могут отличаться от исходных волн.

4.3. Собственные числа пучка с алгебраической кратностью. Пусть в точке η^0 реализуется локальный экстремум λ^0 одной из функций (2.7) (на рис. 2 и рис. 3 они отмечены черными малыми квадратами ■), т.е. согласно формуле (4.10) справедливо равенство

$$0 = \frac{d\Lambda}{d\eta}(\eta^0) = -\frac{J(U^0)}{(\rho^0 U^0, U^0)_\varpi}. \quad (4.17)$$

Как уже упоминалось, в этом случае пучок $\mathfrak{A}_{\lambda^0}$ помимо собственного U^0 приобретает присоединенный вектор U^1 . Предположим, что собственное число η^0 простое геометрически и его полная кратность равна 2, а значит, $\{U^0, U^1\}$ – непродолжимая жорданова цепочка. В таких условиях верны соотношения

$$\begin{aligned} J(U^0) &= i(A^0 D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0) U^0 D(e_{(n)}) U^0)_\varpi \\ &\quad - i(A^0 D(e_{(n)}) U^0, D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0) U^0)_\varpi = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} I &= i(A^0 D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0) U^1, D(e_{(n)}) U^0)_\varpi \\ &\quad - i(A^0 D(e_{(n)}) U^1, D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0) U^0)_\varpi \\ &\quad - (A^0 D(e_{(n)}) U^0, D(e_{(n)}) U^0)_\varpi \neq 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

(ср. соотношения (4.3), (4.17) и (2.14) при $\varkappa = 2$).

Согласно определению (2.15) получаем две осциллирующие волны Флоке

$$w^0(y, z) = e^{i\eta^0 z} U^0(y, z), \quad w^1(y, z) = e^{i\eta^0 z} (izU^0(y, z) + U^1(y, z)), \quad (4.20)$$

ограниченную и линейную. Следующее утверждение обеспечено общими результатами [22], [23] и условиями ортогональности и нормировки жордановых цепочек [8; § 5.2], однако для удобства читателя проведем его проверку, основанную на конкретных формулах.

ЛЕММА. *Присоединенный вектор U^1 можно зафиксировать так, чтобы выполнялись равенства*

$$\mathbf{q}^0(w^0, w^0) = 0, \quad \mathbf{q}^0(w^1, w^1) = 0, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{q}^0(w^0, w^1) = -\overline{\mathbf{q}^0(w^1, w^0)} = -iI. \quad (4.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с проверки равенства (4.22). Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^0(w^0, w^1) &= \int_{\varpi} ((izU^0(x) + U^1(x))^\top D(e_{(n)})^\top A^0(x) D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0) U^0(x) \\ &\quad - U^0(x)^\top D(e_{(n)})^\top A^0(x) \overline{D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0)} (\overline{izU^0(x) + U^1(x)})) dx \\ &= -i \int_{\varpi} z (\overline{U^0(x)}^\top D(e_{(n)})^\top A^0(x) D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0) U^0(x) \\ &\quad - U^0(x)^\top D(e_{(n)})^\top A^0(x) \overline{D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0)} \overline{U^0(x)}) dx \\ &\quad + \int_{\varpi} (\overline{U^1(x)}^\top D(e_{(n)})^\top A^0(x) D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0) U^0(x) \\ &\quad - U^0(x)^\top D(e_{(n)})^\top A^0(x) \overline{D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0)} \overline{U^1(x)}) \\ &\quad + iU^0(x)^\top D(e_{(n)})^\top A^0(x) D(e_{(n)}) \overline{U^0(x)}) dx = -i0 - iI. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое написано при учете формулы (4.19), а предпоследний интеграл обратился в нуль по следующей причине: поскольку волна w^0 удовлетворяет однородной задаче теории упругости в квазицилиндре Π , интеграл по сечению (2.4)

$$\begin{aligned} &\int_{\theta(R)} (\overline{U^0(y, R)}^\top D(e_{(n)})^\top A^0(y, R) D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0) U^0(y, R) \\ &\quad - U^0(y, R)^\top D(e_{(n)})^\top A^0(y, R) \overline{D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0)} \overline{U^0(y, R)}) dy, \end{aligned}$$

происходящий от формулы Грина, не зависит от параметра R , а значит, обращается в нуль согласно первому равенству (4.19).

Соотношение $\mathbf{q}^0(w^0, w^0) = 0$ уже известно (см. соотношения (4.13) и (4.5)). Заметим, что, будучи решением абстрактного уравнения (2.11) с индексом $k = 1$, присоединенный вектор U^1 определен с точностью до слагаемого cU^0 с произвольным коэффициентом $c \in \mathbb{C}$. Иными словами, возможны замены $U^1 \mapsto \widehat{U}^1 = U^1 + cU^0$ и $w^1 \mapsto \widehat{w}^1 = w^1 + cw^0$. Благодаря проверенным формулам получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^0(\widehat{w}^1, \widehat{w}^1) &= \mathbf{q}^0(w^1, w^1) + c\mathbf{q}^0(w^0, w^1) + \bar{c}\mathbf{q}^0(w^1, w^0) + |c|^2\mathbf{q}^0(w^0, w^0) \\ &= \mathbf{q}^0(w^1, w^1) - i(cI + \bar{c}\bar{I}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Симплектическая форма $\mathbf{q}^0(w^1, w^1)$ чисто мнимая, и, поскольку $I \neq 0$, не составляет труда подобрать постоянную c так, чтобы выражение (4.23) обратилось в нуль.

Появление нетривиальной жордановой цепочки $\{U^0, U^1\}$ заставляет изменить асимптотические анзацы (4.7) для собственных чисел и векторов пучка $\mathfrak{A}_{\lambda^\delta}$ при возмущении (4.6) основного спектрального параметра. Именно, в соответствии с [33; гл. 9] положим

$$\begin{aligned}\eta^\delta &= \eta^0 + \sqrt{\delta}\eta' + \delta\eta'' + \delta^{3/2}\tilde{\eta}^\delta, \\ U^\delta(x) &= U^0(x) + \sqrt{\delta}U'(x) + \delta U''(x) + \delta^{3/2}\tilde{U}^\delta(x).\end{aligned}\quad (4.24)$$

Подставив разложения (4.24) и (4.6) в задачу (2.5) (или (2.1)–(2.3)), соберем множители при $\sqrt{\delta}$ и δ . Первая из полученных таким образом задач

$$\begin{aligned}&(A^0 D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0)U', D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0)V)_{\varpi} - \lambda^0(\rho^0 U', V)_{\varpi} \\ &= i\eta'(A^0 D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0)U^0, D(e_{(n)})V)_{\varpi} \\ &\quad - i\eta'(A^0 D(e_{(n)})U^0, D(\nabla_y + i\eta^0)V)_{\varpi}, \quad V \in H_{\text{per}}^1(\varpi)^n,\end{aligned}\quad (4.25)$$

лишь множителем η' в правой части отличается от вариационной постановки задачи (2.13) с $k = 1$ для присоединенного вектора U^1 . Таким образом, можно положить

$$U'(x) = \eta' U^1(x). \quad (4.26)$$

Поскольку собственное число η^0 простое геометрически, альтернатива Фредгольма дает только одно условие разрешимости очередной задачи

$$\begin{aligned}&(A^0 D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0)U'', D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0)V)_{\varpi} - \lambda^0(\rho^0 U'', V)_{\varpi} \\ &= \lambda'(\rho^0 U^0, V)_{\varpi} + i\eta'(A^0 D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0)U', D(e_{(n)})V)_{\varpi} \\ &\quad - i\eta'(A^0 D(e_{(n)})U', D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0)V)_{\varpi} \\ &\quad - (\eta')^2(A^0 D(e_{(n)})U^0, D(e_{(n)})U^0)_{\varpi} \\ &\quad + i\eta''(A^0 D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0)U^0, d(e_{(n)})V)_{\varpi} \\ &\quad - i\eta''(A^0 D(e_{(n)})U^0, D(\nabla_y, \partial_z + i\eta^0)V)_{\varpi}, \quad V \in H_{\text{per}}^1(\varpi)^n.\end{aligned}\quad (4.27)$$

Оно требует, чтобы правая часть (4.27), вычисленная для $V = U^0$, обратилась в нуль. Скалярные произведения с множителем $i\eta''$ можно не принимать во внимание в силу соотношения (4.18). В результате при учете связи (4.26) обнаруживаем выражение (4.19) с коэффициентом $(\eta')^2$ в правой части (4.27) с $V = U^0$. В итоге обследуемое условие разрешимости превращается в квадратное уравнение

$$\lambda'(\rho^0 U^0, U^0)_{\varpi} + (\eta')^2 I = 0, \quad (4.28)$$

которое обладает вещественными корнями $\eta'_{\pm}$ разве лишь в случае $I \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Если $\eta^0 = 0$, то, являясь решением задачи (2.13), $k = 0$, с вещественными коэффициентами, собственный вектор U^0 может быть взят вещественным. В задаче (2.13) для присоединенного вектора U^1 (т.е. $k = 1$) правая часть становится чисто мнимой, и это свойство передается ее решению.

Точно так же векторы $\varrho^{i\pi z}U^0(y, z)$ и $ie^{i\pi z}U^1(y, z)$ вещественные при $\eta^0 = \pi$ (поскольку $e^{i\pi} = -1$, условия (2.3) превращаются для этих произведений в условия антипериодичности на торцах $\theta(0)$ и $\theta(1)$ ячейки ϖ). Таким образом, для всех точек η^0 , отмеченных символом ■ на рис. 2, а, с и рис. 3, а–с, вещественность величины (4.19), установленная косвенно при анализе уравнения (4.28), сомнений не вызывает. Автор не знает прямого способа проверки включения $I \in \mathbb{R}$ в общей ситуации на рис. 2, b.

Если $\lambda'I < 0$, то у уравнения (4.28) есть два вещественных корня

$$\eta' = \pm |I|^{-1/2} |\lambda'|^{1/2} (\rho^0 U^0, U^0)^{1/2}_{\varpi},$$

но в случае $\lambda'I > 0$ вещественных корней нет. Этот вывод вполне соответствует графикам на рис. 2, b: если η^0 – точка локального минимума (максимума), то вещественные собственные числа пучка $\mathfrak{A}_{\lambda^\delta}$ остаются лишь при увеличении (уменьшении) основного спектрального параметра (4.6).

В силу формул (4.21) сами волны Флоке (4.20) не переносят энергии вдоль волновода: продольная компонента осредненного по любому сечению (2.4) вектора Умова–Пойнтинга равна нулю. Вместе с тем, как обнаружено в статьях [22], [23] (см. также книгу [8; гл. 5]), волновые пакеты

$$w^\pm(x) = (2|I|)^{-1/2} (w^0(x) \pm w^1(x)) \quad (4.29)$$

нужным свойством обладают, так как в силу доказанной леммы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^0(w^\pm, w^\pm) &= \frac{1}{2|I|} \mathbf{q}^0(w^0 \pm w^1, w^0 \pm w^1) \\ &= \pm \frac{1}{2|I|} (\mathbf{q}^0(w^0, w^1) + \mathbf{q}^0(w^1, w^0)) = \mp \text{sign}(I)i. \end{aligned}$$

При этом направление переноса энергии волной (4.29) определяется не только знаком плюс/минус при линейно растущей волне Флоке, но и знаком величины I из списка (4.19), т.е. выпуклостью или вогнутостью графиков около точки η^0 локального экстремума.

Конструкцию (4.29) пакетов волн, отвечающих одиночной жордановой цепочке длины 2, следует признать канонической: к осциллирующей волне Флоке w^0 прибавляется или из нее вычитается линейная волна w^1 (см. определение (1.10)). Однако для произвольной канонической системы жордановых цепочек (2.10) пакеты осциллирующих полиномиальных волн, подчиненных условиям ортогональности и нормировки (3.19), устроены более сложно; общая процедура приведена в статьях [22], [23] (см. также книгу [8; гл. 5]).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. К сожалению, даже в случае одной жордановой цепочки $\{U^0, U^1\}$ базис (4.29) волновых пакетов не определен однозначно. Рассмотрим две матрицы

$$\Xi(\psi) = \begin{pmatrix} \cosh \psi & i \sinh \psi \\ -i \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix}, \quad \Theta(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

с гиперболическими и тригонометрическими функциями. Ортогональная матрица $\Theta(\varphi)$ получается из эрмитовой матрицы $\Xi(\psi)$ заменой аргумента $\psi \mapsto \varphi = i\psi$. Нетрудно убедиться в том, что волны $W_{(\pm)}$, найденные по формуле

$$\begin{pmatrix} W_{(+)} \\ W_{(-)} \end{pmatrix} = \Xi(\psi) \begin{pmatrix} w_{(+)} \\ w_{(-)} \end{pmatrix}$$

с любым $\psi \in \mathbb{R}$, удовлетворяют тем же условиям (3.19), что и исходные волны $w_{(\pm)}$.

4.4. О полиномиальных волнах. Бытует вполне обоснованное мнение (см., например, [5; § 20]), что на порогах непрерывного спектра, т.е. при возникновении жордановых цепочек длины $\varkappa > 1$ и полиномиально растущих волн Флоке, обычная постановка задачи теории упругости, дифференциальная (1.2) или вариационная (1.8), (1.12), перестает правильно отражать механические процессы распространения упругих волн из-за нарушения предположения о малости деформаций и потому нуждается в изменениях путем учета нелинейности, физической и/или геометрической, или диссипации энергии, в частности вследствие трения. По-видимому, указанная в замечании 9 неоднозначность выбора условий излучения вызвана именно изъянами механической интерпретации задачи при пороговом значении спектрального параметра λ . Вместе с тем многие вопросы асимптотического анализа, относящиеся, например, к известным аномалиям Вуда, околопороговым точкам дискретного спектра (ниже существенного спектра или в лакунах) и пр., оперируют дифракционными характеристиками упругого волновода в зоне действия привычной линейной модели, но после выполнения предельных переходов требуют корректной постановки задачи и в случае полиномиальных волн Флоке, где без условий излучения Умова–Мандельштама не обойтись. В математической теории неоднозначность выбора условий излучения при сохранении основных свойств не имеет принципиального значения – достаточно уметь перечислять все возможные типы таких условий, т.е. базисы в пространстве волн (3.4), удовлетворяющие соотношениям (3.19). Информацию о подходящих базисах в конечномерном симплектическом пространстве $\mathfrak{W}$ можно почерпнуть в монографиях [27], [28] и др., впрочем при решении конкретных асимптотических задач зачастую хватает одного, неважно какого, базиса $\{\mathfrak{w}_{(\pm)}^1, \dots, \mathfrak{w}_{(\pm)}^{\kappa}\}$ и общих свойств соответствующей матрицы рассеяния S из теоремы 4.

§ 5. Сравнение с другими критериями излучения

5.1. Принцип предельного поглощения. Этот принцип (см. [34]–[36], [5], [6] и многочисленные другие публикации по теме) подразумевает введение в систему уравнений теории упругости (1.2) комплексного параметра

$$\lambda^\delta = \lambda^0 + i\delta, \quad \delta > 0, \quad (5.1)$$

делающего задачу (1.12) однозначно разрешимой при любом непрерывном (анти)линейном функционале $f \in H^{-1}(\Omega))^n$ (см. п. 1.2), и последующий предельный переход $\delta \rightarrow +0$. Развита в статье [11] (см. также [8; § 3.4 и гл. 5]) теория применима к получившейся несамосопряженной формально краевой задаче в области с периодическим выходом на бесконечность, и поэтому теоремы 1 и 2 сохраняют силу с незначительными и понятными изменениями. Поскольку интерес представляют только получающиеся таким образом условия излучения, предположим, что на рассматриваемой частоте $\sqrt{\lambda^0}$ волновод Ω не производит захват упругих волн, т.е.

$$\dim \ker \mathcal{A}_\beta(\lambda_0) = 0 \quad \text{при} \quad \beta \in (0, \beta_0(\lambda^0)), \quad (5.2)$$

где $\beta_0(\lambda^0)$ – положительное число, введенное формулой (3.4). По теореме 3 задача (1.2) с условиями излучения Умова–Мандельштама становится однозначно разрешимой в классе (3.20), а ее решение $u^{um} \in \mathbf{W}_\beta^1(\Omega; \lambda)^+$ допускает оценку (3.21). Логично предположить, что решения $u^{li,0}$ и u^{um} , полученные согласно двум упомянутым принципам, совпадают, однако далее будет проверено, что в случае появления полиномиальных волн Флоке это не так.

5.2. Операторная формулировка. Обратимся к оператору $\mathcal{A}_{-\beta}(\lambda^0)$ задачи (1.12), определенному по формуле (2.18) и оказавшемуся фредгольмовым эпиморфизмом в силу теоремы 1 и соотношений (3.7), (5.2). Также введем оператор

$$\mathcal{A}^{li}(\lambda^0 + \delta i): H^1(\Omega)^n \rightarrow H^{-1}(\Omega)^n \quad (5.3)$$

задачи (1.12) с комплексным параметром (5.1). Он является изоморфизмом при всяком $\delta > 0$, но имеет бесконечно большую норму при $\delta \rightarrow +0$, т.е. непосредственный предельный переход затруднителен. Как и в п. 3.1, рассмотрим прообраз $\mathcal{A}^{li}(\lambda^0 + \delta i)^{-1}W_{-\beta}^{-1}(\Omega)^n$, который лежит в $H^1(\Omega)^n \subset W_{-\beta}^1(\Omega)^n$, так как $W_{-\beta}^{-1}(\Omega)^n \subset H^{-1}(\Omega)^n$ ввиду экспоненциального затухания соответствующих функционалов. По теореме об асимптотике (см. [11], а также [8; теорема 3.4.7] и ср. теорему 2) справедливо разложение

$$\mathcal{A}^{li}(\lambda^0 + \delta i)^{-1}W_{-\beta}^{-1}(\Omega)^n = \mathfrak{W}_\delta^{li} \dot{+} W_\beta^1(\Omega)^n, \quad (5.4)$$

где $\mathfrak{W}_\delta^{li}$ – линейное подпространство экспоненциально затухающих волн Флоке (2.15), порожденных собственными числами пучка $\mathfrak{A}_{\lambda^0 + i\delta}$ в прямоугольнике

$$\{\eta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \eta \in [0, 2\pi), \operatorname{Im} \eta \in (0, \beta_0(\lambda))\} \quad (5.5)$$

(ср. прямоугольник (3.4) удвоенной высоты). На нижнем основании Υ_0 прямоугольника (5.5) нет собственных чисел пучка $\mathfrak{A}_{\lambda^0 + i\delta}$ с $\delta > 0$ (так как оператор (5.3) фредгольмов; ср. теорему 1), однако при $\delta \rightarrow +0$ собственные числа, расположенные в прямоугольнике (5.5), спускаются и попадают как раз на Υ_0 . В силу общих результатов, изложенных в монографии [20; гл. 1], этот процесс непрерывный и доступны асимптотические формулы, полученные, например, в книге [33; гл. 9].

Топология, индуцированная в пространстве (5.4) теоремой об асимптотике, согласована с топологией разложения

$$\mathcal{A}_{-\beta}(\lambda^0)^{-1}W_{-\beta}^{-1}(\Omega)^n = \mathfrak{W} \dot{+} W_\beta^1(\Omega)^n,$$

сопутствующего введению 2κ -мерного пространства (3.9) осциллирующих волн Флоке (2.15), которые порождены вещественными собственными числами (3.1) пучка $\mathfrak{A}_{\lambda^0}$. Таким образом,

$$\mathfrak{W}_0^{li} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \mathfrak{W}_\delta^{li} \subset \mathfrak{W}, \quad (5.6)$$

и истолкование предельного перехода при $\delta \rightarrow +0$, требуемого в концепции принципа предельного поглощения, становится элементарным. Остается выяснить, как соотносятся подпространства $\mathfrak{W}_0^{li}$ и $\mathfrak{W}^+$, найденные в соответствии с обсуждаемыми принципами излучения, впрочем этот вопрос решается несложно – на основе известного асимптотического анализа собственных чисел операторного пучка $\mathfrak{A}_{\lambda\delta}$, причем вполне достаточно изучить формальное разложение, так как обоснование асимптотик приведено в книге [33; гл. 9].

5.3. Алгебраически простые собственные числа пучка. Рассмотрим точки $\eta_{\pm} \in (0, 2\pi)$, изображенные на рис. 2, а (ср. пп. 4.1, 4.2). Если положить $\lambda' = i$, то формула (4.6) превратится в формулу (5.1), а асимптотические анзацы (4.7) и задача (4.8) для определения поправок $\eta'_{\pm}$ и $U'_{(\pm)}$ останутся без изменений. Условие разрешимости (4.9) этой задачи приводит к равенству

$$\eta'_{\pm} = -iJ(U_{(\pm)}^0)^{-1}(\rho^0 U_{(\pm)}^0 U_{(\pm)}^0)_{\varpi}. \quad (5.7)$$

Поскольку $|\tilde{\eta}_{\pm}^{\delta}| \leq c$, собственное число $\eta_{\pm}^{\delta} = \eta_{\pm} + \delta\eta'_{\pm} + \delta^2\tilde{\eta}_{\pm}^{\delta}$ пучка $\mathfrak{A}_{\lambda^0+\delta i}$ имеет при малом $\delta > 0$ положительную мнимую часть и, тем самым, попадая в прямоугольник (5.5), порождает экспоненциально затухающую при $z \rightarrow +\infty$ волну Флоке тогда и только тогда, когда $J(U_{(\pm)}^0) < 0$. Именно это неравенство гарантировало в п. 4.1, что соответствующая волна Флоке (4.4), порожденная собственным числом $\eta_{\pm}$ предельного ($\delta = 0$) пучка $\mathfrak{A}_{\lambda^0}$, оказывается уходящей по Умову–Мандельштаму. Поскольку

$$\eta_{\pm}^{\delta} \rightarrow \eta_{\pm}, \quad U_{(\pm)}^{\delta} \rightarrow U_{(\pm)}^0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0 \quad (5.8)$$

благодаря анзацам (4.7) и упомянутым оценкам [33; гл. 9] асимптотических остатков $\delta^2\tilde{\eta}_{\pm}^{\delta}$ и $\delta^2\tilde{U}_{(\pm)}^{\delta}$, принцип предельного поглощения предоставляет такую же классификацию волн (4.4): по теореме об асимптотике (см. [11]) разложение решения $u^{li,\delta} \in H^1(\Omega)^n$ задачи (1.12) с комплексным параметром (5.1) включает экспоненциально затухающую волну

$$\chi(z)e^{i\eta_{\pm}^{\delta}z}U_{(\pm)}^{\delta}(y,z) \quad (5.9)$$

с некоторым коэффициентом. Иными словами, волна (5.9) попадает в подпространство $\mathfrak{W}_{\delta}^{li}$, а ее предел $\chi(z)w_{(\pm)}^0(y,z)$ – в подпространство (5.6).

Точно такой же вывод, впрочем при отсутствии информации о правильной нормировке волн, можно сделать и в ситуации из п. 4.2, т.е. для алгебраически простых собственных чисел. В итоге при условии алгебраической простоты собственных чисел (3.1) (нет полиномиальных осциллирующих волн Флоке) заключаем, что принцип предельного поглощения и энергетический принцип излучения Умова–Мандельштама равносильны.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Если Π – прямой цилиндр $\theta \times \mathbb{R}$, то благодаря возможности разделить переменные собственный вектор $U_{(+)}^0(y,z)$ задачи (2.1)–(2.3) на ячейке $\varpi = \theta \times (0,1)$ принимает вид $e^{2\pi iq}\mathscr{U}_{(+)}^0(y)$, где $q \in \mathbb{Z}$ – некоторое целое число. В силу соотношений (4.1) волны Флоке (4.4) превращаются в обычные волны

$$\begin{aligned} w_{(+)}^0(y,z) &= e^{i\eta_+z}e^{2\pi iq}\mathscr{U}_{(+)}^0(y) = e^{i(\eta_++2\pi q)z}\mathscr{U}_{(+)}^0(y), \\ w_{(-)}^0(y,z) &= e^{i\eta_-z}e^{-2\pi iz}\overline{e^{2\pi iqz}\mathscr{U}_{(+)}^0(y)} = e^{-i(\eta_++2\pi q)z}\overline{\mathscr{U}_{(+)}^0(y)}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Согласно условиям излучения Зоммерфельда направление распространения волн (5.10) определяется знаком волнового числа $\pm(\eta_+ + 2q\pi)$. Следовательно, принцип излучения Зоммерфельда может вступать в полное противоречие с обоими обсуждаемыми принципами. Это обстоятельство известно давно (см., например, [37] и [5; § 18]).

5.4. Алгебраически кратные собственные числа пучка. Пусть теперь, как и в п. 4.3, собственное число η^0 пучка $\mathfrak{A}_{\kappa^0}$ имеет только одну жорданову цепочку $\{U^0, U^1\}$ длиной 2. В этом случае асимптотическая процедура из [33; гл. 9] дает прежние анзацы (4.24) для собственных чисел (простых) и собственных векторов пучка $\mathfrak{A}_{\lambda^0+i\delta}$, причем формулы (4.25)–(4.28) сохраняются без каких-либо изменений. Соотношение (4.28) с множителем $\lambda' = i$ (ср. предположения (4.6) и (5.1)) означает, что

$$\begin{aligned} (\eta')^2 &= -iI^{-1}(\rho^0 U^0, U^0)_{\varpi} = e^{-\pi i \operatorname{sign}(I)/2} |I|^{-1} (\rho^0 U^0, U^0)_{\varpi} \\ \implies \eta'_{\pm} &= \pm e^{-\pi i \operatorname{sign}(I)/4} |I|^{-1/2} (\rho^0 U^0, U^0)_{\varpi}^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

При любом знаке величины (4.19) один из корней (5.11) приобретает положительную мнимую часть, и, тем самым, собственное число $\eta_{\pm}^{\delta} = \eta^0 + \sqrt{\delta} \eta'_{\pm} + \tilde{\eta}_{\pm}^{\delta}$ пучка $\mathfrak{A}_{\lambda^0+i\delta}$ содержится в прямоугольнике (5.5) и порождает экспоненциально затухающую при $z \rightarrow +\infty$ волну (5.9), присутствующую в разложении решения $u^{li,\delta} \in H^1(\Omega)^n$. Другой корень имеет отрицательную мнимую часть и отвечает экспоненциально растущей волне Флоке, которая не попадает в пространство Соболева и потому отсутствует в разложении решения $u^{li\delta}$.

Асимптотические представления (4.24), обоснованные в [33; гл. 9], и предельный переход $\delta \rightarrow +0$ обеспечивают соотношение

$$\eta_{\pm}^{\delta} \rightarrow \eta^0, \quad U_{(\pm)}^{\delta} \rightarrow U^0. \quad (5.12)$$

Следовательно, затухающая волна (5.9) превращается в пределе при $\delta \rightarrow +0$ в осциллирующую и ограниченную волну Флоке $w^0(y, z)$, а другая, линейно растущая волна $w^1(y, z)$ из списка (4.20) таким предельным переходом быть получена не может. Этот же вывод сохраняется и при любой жордановой цепочке длины $\varkappa > 1$.

Итак, при появлении среди собственных чисел (3.1) кратных алгебраический принцип предельного поглощения и энергетический принцип приводят к разным условиям излучения: в разложение решения $u^{li,0}$ допускается ограниченная волна w^0 из (4.20), а в разложение решения u^{um} – одна из линейных комбинаций (4.29), а именно уходящая.

На первый взгляд первый тип условий излучения представляется более предпочтительным при попытке дать физическую интерпретацию решения, которое оказывается ограниченным⁴; именно по этой причине в статьях [22], [23] и книге [8] условия излучения, оперирующие с пакетами полиномиальных волн, названы искусственными. На самом деле их установленная связь с вектором Умова–Пойнтинга показывает, что условия излучения Умова–Мандельштама проистекают из закона сохранения энергии, а принцип предельного поглощения способен вступить в противоречие с этим незыблемым законом.

5.5. Дополнительные пояснения. Предположим для простоты, что по-прежнему выполнено требование (5.2), и на полуинтервале Υ_0 имеется лишь одно собственное число η^0 пучка $\mathfrak{A}_{\lambda^0}$, причем ему отвечает только одна жорданова цепочка $\{U^0, U^1\}$ длины $\varkappa = 2$ (таким образом, либо $\eta^0 = \pi$, либо $\eta^0 = 0 \cong 2\pi$; ср. рис. 2, с). Пусть еще величина (4.19) отрицательна, т.е. волны

⁴При наличии жордановых цепочек с длинами $\varkappa > 2$ принцип предельного поглощения устраняет заведомо не все полиномиальные волны Флоке.

w^+ и w^- , определенные формулой (4.29), соответственно уходящая и приходящая по Умову–Мандельштаму. Тогда согласно теореме 3 неоднородная задача (1.12) при любой правой части $f \in W_{-\beta}^{-1}(\Omega)^n$ имеет единственное решение, допускающее представление

$$u^{um}(x) = \chi(z)c_+w^+(x) + \tilde{u}^{um}(x). \quad (5.13)$$

Решение той же задачи, полученное при помощи принципа предельного поглощения, должно выглядеть так:

$$u^{li,0}(x) = \chi(z)c_0w^0(x) + \tilde{u}^{li,0}(x). \quad (5.14)$$

Единственный инструмент для переделки одного решения в другое указан теоремой 4: в рассматриваемом случае вектор-функция (3.22) принимает вид

$$Z^0(x) = \chi(z)w^-(x) + \chi(z)Sw^+(x) + \tilde{Z}^0(x), \quad (5.15)$$

а матрица рассеяния S вырождается в скаляр, т.е. коэффициент отражения $S \in \mathbb{C}$, $|S| = 1$. Вспоминая определение (4.29), обнаруживаем, что при условии

$$S \neq 1 \quad (5.16)$$

линейная комбинация

$$u^{um} + aZ^0 = \chi(2I)^{-1/2}(c_+ + (S-1)a)w^1 + \chi(2I)^{-1/2}(c_+ + (S+1)a)w^0 + \tilde{u}^{um} + a\tilde{Z}^0$$

с коэффициентом $a = (1-S)^{-1}c_+$ допускает искомое разложение (5.14). Если же $S = 1$, то для построения решения (5.14) приходится предположить, что коэффициент c_+ в разложении (5.13) равен нулю. Поскольку подстановка вектор-функций u^{um} и Z^0 в формулу Грина с последующим применением соотношений (3.19) обеспечивает связь

$$f(Z^0) = i\bar{S}C_+,$$

задача (1.12) допускает решение в виде (5.14) лишь тогда, когда правая часть удовлетворяет условию ортогональности

$$f(Z^0) = 0.$$

Дело в том, что равенство $S = 1$ уничтожает линейную волну в разложении (5.15) и делает ограниченным само решение Z^0 однородной задачи (1.8), которое и порождает “странное” условие разрешимости. Подчеркнем, что выполненные ранее предельные переходы (5.8) и (5.12) относились исключительно к волнам Флоке (5.9), а зависимости от δ коэффициентов при этих волнах не отслеживались. В случае $S = 1$, но $f(Z^0) \neq 0$, такой коэффициент неограниченно возрастает при $\delta \rightarrow +0$.

Наконец, попытка ввести матрицу рассеяния на основе принципа предельного поглощения не приводит к успеху при пороговых значениях основного спектрального параметра: она обязательно теряет свойство унитарности, а при нарушении ограничения (5.16) вообще перестает существовать.

Список литературы

- [1] С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*, 2-е изд., Наука, М., 1977, 415 с.; англ. пер.: S. G. Lekhnitskii, *Theory of elasticity of an anisotropic body*, Mir, М., 1981, 431 pp.

- [2] С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней*, т. 1: *Понижение размерности и интегральные оценки*, Научн. книга, Новосибирск, 2002, 406 с.
- [3] В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, “Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна”, *УМН*, **43**:5(263) (1988), 55–98; англ. пер.: V. A. Kondrat’ev, O. A. Oleinik, “Boundary-value problems for the system of elasticity theory in unbounded domains. Korn’s inequalities”, *Russian Math. Surveys*, **43**:5 (1988), 65–119.
- [4] С. А. Назаров, “Неравенства Корна для упругих сочленений массивных тел, тонких пластин и стержней”, *УМН*, **63**:1(379) (2008), 37–110; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Korn inequalities for elastic junctions of massive bodies, thin plates, and rods”, *Russian Math. Surveys*, **63**:1 (2008), 35–107.
- [5] И. И. Ворович, В. А. Бабешко, *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*, Наука, М., 1979, 320 с.
- [6] В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Ж. Ф. Зинченко, *Динамика неоднородных линейно-упругих сред*, Наука, М., 1989, 343 с.
- [7] С. А. Назаров, “Энергетические условия излучения Мандельштама и вектор Умова–Пойнтинга в упругих волноводах”, *Проблемы матем. анализа*, 2013, № 72, 101–146.
- [8] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*, Наука, М., 1991, 336 с.; англ. пер.: S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, de Gruyter Exp. Math., **13**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994, viii+525 pp.
- [9] Н. А. Умов, *Уравнения движения энергии в телах*, Тип. Ульриха и Шульце, Одесса, 1874, 58 с.
- [10] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, “Оценки в L_p и в классах Гёльдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе”, *Math. Nachr.*, **81**:1 (1978), 25–82; англ. пер.: V. G. Maz’ya, B. A. Plamenevskij, “Estimates in L_p and in Hölder classes and the Miranda–Agmon maximum principle for solutions of elliptic boundary value problems in domains with singular points on the boundary”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **123**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984, 1–56.
- [11] С. А. Назаров, “Эллиптические краевые задачи с периодическими коэффициентами в цилиндре”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:1 (1981), 101–112; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Elliptic boundary value problems with periodic coefficients in a cylinder”, *Math. USSR-Izv.*, **18**:1 (1982), 89–98.
- [12] П. А. Кучмент, “Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных”, *УМН*, **37**:4(226) (1982), 3–52; англ. пер.: P. A. Kuchment, “Floquet theory for partial differential equations”, *Russian Math. Surveys*, **37**:4 (1982), 1–60.
- [13] S. A. Nazarov, “Properties of spectra of boundary value problems in cylindrical and quasicylindrical domains”, *Sobolev spaces in mathematics. II*, Int. Math. Ser. (N. Y.), **9**, Springer, New York, 2009, 261–309.
- [14] М. М. Скриганов, “Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов”, *Тр. МИАН СССР*, **171**, 1985, 3–122; англ. пер.: M. M. Skriganov, “Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **171** (1987), 1–121.
- [15] P. Kuchment, *Floquet theory for partial differential equations*, Oper. Theory Adv. Appl., **60**, Birkhäuser, Basel, 1993, xiv+350 pp.
- [16] В. А. Кондратьев, “Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками”, *Тр. ММО*, **16**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1967, 209–292.

- [17] И. М. Гельфанд, “Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами”, *Докл. АН СССР*, **73** (1950), 1117–1120.
- [18] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962, 829 с.; пер. с англ.: E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, rev. ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1957, xii+808 pp.
- [19] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972, 740 с.; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren Math. Wiss., **132**, Springer-Verlag, New York, 1966, xix+592 pp.
- [20] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965, 448 с.; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969, xv+378 pp.
- [21] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1980, 264 с.; англ. пер.: M. Sh. Birman, M. Z. Solomjak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, Math. Appl. (Soviet Ser.), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987, xv+301 pp.
- [22] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, “Об условиях излучения для самосопряженных эллиптических задач”, *Докл. АН СССР*, **311**:3 (1990), 532–536; англ. пер.: S. A. Nazarov, B. A. Plamenevskii, “On radiation conditions for selfadjoint elliptic problems”, *Soviet Math. Dokl.*, **41**:2 (1991), 274–277.
- [23] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, “Принципы излучения для самосопряженных эллиптических задач”, *Дифференциальные уравнения. Спектральная теория. Распространение волн*, Проблемы матем. физики, **13**, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1991, 192–244.
- [24] С. А. Назаров, “Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сращиваемых асимптотических разложений”, *Труды Санкт-Петербург. матем. об-ва*, **5** (1996), 112–183; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Asymptotic conditions at a point, selfadjoint extensions of operators, and the method of matched asymptotic expansions”, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **193**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 77–125.
- [25] J. H. Poynting, “On the transfer of energy in the electromagnetic field”, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **175** (1884), 343–361.
- [26] Л. И. Мандельштам, *Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике*, Полное собрание трудов, **5**, Изд-во АН СССР, М., 1950, 438 с.
- [27] С. Ленг, *Алгебра*, Мир, М., 1968, 564 с.; пер. с англ.: S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1965, xvii+508 pp.
- [28] А. Т. Фоменко, *Симплектическая геометрия. Методы и приложения*, Изд-во МГУ, М., 1988, 414 с.; англ. пер.: A. T. Fomenko, *Symplectic geometry*, Adv. Stud. Contemp. Math., **5**, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1988, xiv+387 pp.
- [29] С. А. Назаров, “О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач с периодическими коэффициентами”, *Вестн. ЛГУ. Сер. 1*, 1985, №3 (№ 15), 16–22.
- [30] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, “О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками”, *Math. Nachr.*, **76**:1 (1977), 29–60; англ. пер.: V. G. Maz’ya, B. A. Plamenevskij, “On the coefficients in the asymptotics of solutions of elliptic boundary value problems in domains with conical points”, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **123**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984, 57–88.

- [31] С. А. Назаров, “Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода”, *ТМФ*, **167**:2 (2011), 239–263; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Asymptotic expansions of eigenvalues in the continuous spectrum of a regularly perturbed quantum waveguide”, *Theoret. and Math. Phys.*, **167**:2 (2011), 606–627.
- [32] И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, “Расширенная матрица рассеяния и экспоненциально затухающие решения эллиптической задачи в цилиндрической области”, *Математические вопросы теории распространения волн*, 29, Зап. научн. сем. ПОМИ, **264**, ПОМИ, СПб., 2000, 66–82; англ. пер.: I. V. Kamotskii, S. A. Nazarov, “The augmented scattering matrix and exponentially decaying solutions of an elliptic problem in a cylindrical domain”, *J. Math. Sci. (New York)*, **111**:4 (2002), 3657–3666.
- [33] М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, М., 1969, 567 с.
- [34] А. Г. Свешников, “О принципе излучения”, *Докл. АН СССР*, **73**:5 (1950), 917–920.
- [35] А. Г. Свешников, “Принцип предельного поглощения для волновода”, *Докл. АН СССР*, **80**:3 (1951), 345–347.
- [36] Д. М. Эйдуc, “Принцип предельного поглощения в теории упругости”, *Вестн. ЛГУ, сер. матем. мех.*, 1963, № 7, 141–154.
- [37] R. D. Mindlin, “Waves and vibration in isotropic elastic plates”, 1960 *Structural mechanics*, Pergamon Press, New York, 1960, 199–232.

Сергей Александрович Назаров
(Sergei A. Nazarov)

Математико-механический факультет
Санкт-Петербургского государственного
университета;
Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию
26.09.2013 и 13.02.2014