Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Пекарский, Сопряженные функции и их связь с равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 2, 175–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8289>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:21:20

УДК 517.51+517.53

А. А. Пекарский

Сопряженные функции и их связь с равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями

Как известно, между рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями функций существует тесная связь. Эта связь наиболее ярко проявляется при приближении в пространствах Лебега L_p при $0 < p < \infty$, $1/p \notin \mathbb{N}$. В настоящей работе, в частности, показано, что скорость равномерной рациональной аппроксимации функций достаточно хорошо описывается с помощью скоростей равномерных кусочно-полиномиальных приближений самой функции и ее сопряженной. Верно и обратное.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: сопряженные функции, наилучшие рациональные приближения, наилучшие кусочно-полиномиальные приближения, пространство Бесова.

DOI: 10.4213/sm8289

§ 1. Введение. Основной результат

Пусть $\mathbb{T}$ – факторгруппа действительных чисел по модулю 2π . Под *расстоянием между* $t, s \in \mathbb{T}$ подразумеваем длину наименьшей дуги окружности $|z| = 1$, соединяющей точки e^{it} и e^{is} . На $\mathbb{T}$ рассматриваем обычную меру Лебега. Через $L_\infty(\mathbb{T})$ и $C(\mathbb{T})$ обозначаем соответственно банаховы пространства комплексных существенно ограниченных и непрерывных функций на $\mathbb{T}$. При этом нормы для $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ и $g \in C(\mathbb{T})$ вводятся стандартно, т.е.

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{T})} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|, \quad \|g\|_{C(\mathbb{T})} = \|g\|_{L_\infty(\mathbb{T})} = \max_{t \in \mathbb{T}} |g(t)|.$$

Для $0 < p < \infty$ через $L_p(\mathbb{T})$ обозначим пространство Лебега комплексных измеримых функций на $\mathbb{T}$ таких, что функция $|f|^p$ суммируема на $\mathbb{T}$. Пространство $L_p(\mathbb{T})$ является квазибанаховым (банаховым при $1 \leq p < \infty$) относительно квазинормы

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\mathbb{T})} = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Через $\mathcal{R}_n$, $n \geq 0$, обозначим множество тригонометрических рациональных функций степени не выше n , т.е. $r \in \mathcal{R}_n$, если $r = p/q$, где p и q – тригонометрические полиномы степени не выше n , причем $q \not\equiv 0$.

Пусть $\mathcal{P}_n$ – множество алгебраических полиномов степени не более n . Для $n, s \in \mathbb{N}$ через $\Pi_n^s(\mathbb{T})$ обозначим множество кусочно-полиномиальных функций,

Работа выполнена в рамках ГПНИ НАН Беларуси “Конвергенция”.

определенных на $\mathbb{T}$, степени не выше $s - 1$ с не более чем n узлами. Именно, $\varphi \in \Pi_n^s(\mathbb{T})$, если $\varphi \in L_\infty(\mathbb{T})$ и существуют точки $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 2\pi$ такие, что $\varphi|_{(x_k, x_{k+1})} \in \mathcal{P}_{s-1}$ при $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Для $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p \leq \infty$, определим наилучшее приближение множествами $\mathcal{R}_n$ и $\Pi_n^s(\mathbb{T})$ соответственно:

$$R_n(f)_p = \inf_{r \in \mathcal{R}_n} \|f - r\|_p, \quad E_n^{(s)}(f)_p = \inf_{\varphi \in \Pi_n^s} \|f - \varphi\|_p.$$

Далее для $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p \leq \infty$, введем s -ю конечную разность $\Delta_h^s f(x)$ с шагом h ($s \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}$):

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x + h) - f(x), \quad \Delta_h^s f(x) = \Delta_h^1(\Delta_h^{s-1} f(x)), \quad s \geq 2.$$

Тогда L_p -модулем гладкости порядка s функции f называется ее характеристика

$$\omega_s(t, f)_p = \sup_{0 \leq h \leq t} \|\Delta_h^s f(\cdot)\|_p, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Для $\alpha > 0$ и $p \in (0, \infty)$ определим (см., например, [1]) пространство Бесова $B_p^\alpha = B_p^\alpha(\mathbb{T})$ функций $f \in L_p(\mathbb{T})$, для которых при $s = [\alpha] + 1$ ($[\alpha]$ – целая часть α)

$$\|f\|_{B_p^\alpha} := \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{\omega_s(t, f)_p}{t^\alpha} \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} < \infty.$$

Обозначим через $W_1^1(\mathbb{T})$ пространство абсолютно непрерывных функций на $\mathbb{T}$. Отметим [1] следующие непрерывные некомпактные вложения для пространств $W_1^1(\mathbb{T})$, $L_p(\mathbb{T})$ и $B_p^\alpha(\mathbb{T})$:

$$B_{1/\alpha}^\alpha(\mathbb{T}) \subset W_1^1(\mathbb{T}), \quad \alpha \geq 1; \quad (1.1)$$

$$B_\sigma^\alpha(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T}), \quad 0 < p < \infty, \quad \alpha > 0, \quad \frac{1}{\sigma} = \alpha + \frac{1}{p}. \quad (1.2)$$

Вложение (1.1) следует понимать так: каждая функция из $B_{1/\alpha}^\alpha(\mathbb{T})$ при $\alpha \geq 1$ с точностью до множества лебеговой меры нуль совпадает с некоторой функцией из $W_1^1(\mathbb{T})$. Поэтому для удобства в дальнейшем считаем, что все функции пространства $B_{1/\alpha}^\alpha(\mathbb{T})$, $\alpha \geq 1$, абсолютно непрерывны на $\mathbb{T}$.

В приведенных ниже теоремах 1, 2 и леммах естественно предполагать, что рассматриваемые функции действительны.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < p < \infty$, причем $1/p \notin \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $s \in \mathbb{N} \cap (\alpha, \infty)$, $1/\sigma = \alpha + 1/p$ и $f \in L_p(\mathbb{T})$. Тогда следующие условия эквивалентны:

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (n^\alpha R_n(f)_p)^\sigma < \infty;$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (n^\alpha E_n^{(s)}(f)_p)^\sigma < \infty;$$

$$(iii) \quad f \in B_\sigma^\alpha(\mathbb{T}).$$

Кроме того, эквивалентность 1(ii) $\iff$ 1(iii) имеет место и при $1/p \in \mathbb{N}$.

Теорема 1 по существу известна. Именно, эквивалентность $1(i) \iff 1(iii)$ при $1 < p < \infty$ получена автором [2]. Эквивалентность $1(ii) \iff 1(iii)$ для всех $0 < p < \infty$ есть результат совместных исследований Петрушева, Попова и Девора, выполненных в конце 80-х годов прошлого столетия (подробности см. в [1]). Автором и Петрушевым были получены (см., например, [3]) двусторонние соотношения для рациональных и кусочно-полиномиальных приближений в пространстве L_p , $1 < p < \infty$. Используя эти соотношения, можно доказать эквивалентность $1(i) \iff 1(ii)$ для $1 < p < \infty$. Вместе с эквивалентностью $1(ii) \iff 1(iii)$ это дает новый подход к доказательству эквивалентности $1(i) \iff 1(iii)$ для $1 < p < \infty$. Автор и Шталь [4] обобщили указанные выше соотношения автора и Петрушева на случай L_p -приближений с $0 < p < 1$ и $1/p \notin \mathbb{N}$. Используя результаты [4], легко обобщить эквивалентность $1(i) \iff 1(ii)$ для $0 < p < 1$ с $1/p \notin \mathbb{N}$. Это и означает справедливость теоремы 1.

Отметим еще, что эквивалентность $1(ii) \iff 1(iii)$ из [1] и указанные выше соотношения из [3], [4] были получены в алгебраическом, а не тригонометрическом случае. Однако это не имеет принципиального значения.

Эквивалентность $1(i) \iff 1(ii)$ не имеет места для равномерных приближений, иначе говоря, для $p = \infty$ и L_p -приближений с $1/p \in \mathbb{N}$. Это следует из примеров, построенных автором и Е. И. Стельмах [5].

Основной результат настоящей статьи заключается в том, что теорема 1 выполняется при $p = \infty$ и $\alpha > 1$, если к условию 1(ii) добавить аналогичное условие для сопряженной функции.

Напомним (см., например, [6]) определение сопряженной функции $\tilde{f}$ для $f \in L_1(\mathbb{T})$. Именно,

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(t) dt}{\operatorname{tg}((x-t)/2)}, \quad x \in \mathbb{T},$$

где несобственный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Как известно, $\tilde{f}$ конечна почти всюду на $\mathbb{T}$.

Отмеченный выше основной результат мы сформулируем в виде теоремы 2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha > 1$, $s \in \mathbb{N} \cap (\alpha, \infty)$ и $f \in C(\mathbb{T})$. Тогда следующие условия равносильны:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (R_n(f)_{\infty})^{1/\alpha} < \infty$;
- (ii) $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (E_n^{(s)}(f)_{\infty})^{1/\alpha} < \infty, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (E_n^{(s)}(\tilde{f})_{\infty})^{1/\alpha} < \infty; \end{cases}$
- (iii) $f \in B_{1/\alpha}^{\alpha}(\mathbb{T})$.

В связи с теоремой 2 отметим, что первый пример полного обращения прямой и обратной теорем рациональной аппроксимации получен В. В. Пеллером (см. подробности в его монографии [7]). В частности, в [7] для $\alpha > 0$ получена

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

$$f \in B_{1/\alpha}^\alpha(\mathbb{T}) \iff \sum_{n=1}^{\infty} (R_n(f)_{\text{ВМО}})^{1/\alpha} < \infty.$$

Здесь $\text{ВМО} = \text{ВМО}(\mathbb{T})$ – пространство функций, определенных на $\mathbb{T}$, ограниченной средней осцилляции, а $R_n(f)_{\text{ВМО}}$ – соответствующее наилучшее приближение функции $f \in \text{ВМО}$ посредством множества $\mathcal{R}_n$.

Эквивалентность $2(i) \iff 2(iii)$ получена нами в [8]. Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно получить импликации $2(i) \implies 2(ii) \implies 2(iii)$.

§ 2. Доказательство основного результата

Приведем леммы, необходимые для доказательства импликации $2(i) \implies 2(ii)$.

ЛЕММА 2.1 [9]. Пусть $1 < p < \infty$ и $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – неотрицательная числовая последовательность такая, что $\sum a_n^p < \infty$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p.$$

Условимся далее через $c, c_1, c_2, \dots$ обозначать абсолютные положительные постоянные; $c(\cdot), c_1(\cdot), c_2(\cdot), \dots$ – некоторые положительные величины, зависящие лишь от указанных параметров.

Следующая лемма 2.2 является фрагментом доказательства теоремы 1.3.1 из [10]. Лемма 2.3 для $s = 1$ получена В. А. Поповым, а для $s \geq 2$ – автором (см., например, [3]).

ЛЕММА 2.2. Пусть $0 < q < 1$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – неотрицательная невозрастающая числовая последовательность такая, что $\sum b_n^q < \infty$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} b_k \right)^q \leq c(q) \sum_{n=1}^{\infty} b_n^q.$$

ЛЕММА 2.3. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$ и $s \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$E_n^{(s)}(f)_{\infty} \leq c(s) \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (R_k(f)_{\infty})^{1/s} \right]^s.$$

В работах А. А. Гончара, Л. Д. Григоряна [11] и Л. Д. Григоряна [12] решена задача о сравнении норм рациональной функции и ее сопряженной, а также даны некоторые приложения полученного результата. В частности, в [12] показано, что если $f \in C(\mathbb{T})$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n(f)_{\infty} < \infty, \tag{2.1}$$

то $\tilde{f} \in C(\mathbb{T})$. Позже автор [8] получил следующую лемму.

ЛЕММА 2.4. Если $f \in C(\mathbb{T})$ и выполнены условия (2.1), то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$R_n(\tilde{f})_\infty \leq \frac{c}{n} \sum_{k=[n/2]}^{\infty} R_k(f)_\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ИМПЛИКАЦИИ 2(i) $\implies$ 2(ii). Пусть $f \in C(\mathbb{T})$ и f удовлетворяет условию 2(i). Воспользуемся леммой 2.1 с $p = s/\alpha$, $a_n = (R_n(f)_\infty)^{1/s}$ и леммой 2.3. В итоге немедленно получим первое утверждение из 2(ii).

Из приведенных рассуждений видно также, что для доказательства второго утверждения из 2(ii) достаточно из 2(i) получить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (R_n(\tilde{f})_\infty)^{1/\alpha} < \infty. \quad (2.2)$$

С этой целью положим $b_n = R_{[n/2]}(f)_\infty$, $n = 1, 2, \dots$. Поскольку последовательность $\{R_n(f)_\infty\}_{n=0}^\infty$ не возрастает, то ввиду леммы 2.4

$$R_n(\tilde{f}) \leq \frac{c}{n} \sum_{k=n}^{\infty} b_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

Применим сейчас последнее неравенство и лемму 2.2 при $q = 1/\alpha$. В итоге получим неравенство (2.2):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (R_n(\tilde{f})_\infty)^{1/\alpha} &\leq c_1(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} b_k \right)^{1/\alpha} \\ &\leq c_2(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{1/\alpha} \leq 2c_2(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} (R_n(f)_\infty)^{1/\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

Этим импликация 2(i) $\implies$ 2(ii) доказана.

Для доказательства импликации 2(ii) $\implies$ 2(iii) нам понадобятся дополнительные сведения.

ЛЕММА 2.5. Если $f \in C(\mathbb{T})$, $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n^{(s)}(f)_\infty < \infty, \quad (2.3)$$

то функция $f \in W_1^1(\mathbb{T})$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$E_n^{(s-1)}(f')_1 \leq c_1(s)nE_n^{(s)}(f)_\infty + c_2(s) \sum_{k=n}^{\infty} E_k^{(s)}(f)_\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f \in C(\mathbb{T})$, то согласно [1; гл. 12, § 4] для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $\varphi_k \in \Pi_k^s(\mathbb{T}) \cap C(\mathbb{T})$ такая, что

$$\|f - \varphi_k\|_{C(\mathbb{T})} \leq 2E_k^{(s)}(f)_\infty. \quad (2.4)$$

Очевидно, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$f - \varphi_n = \sum_{m=0}^{\infty} u_m, \quad u_m := \varphi_{2^{m+1}n} - \varphi_{2^m n}, \quad (2.5)$$

где указанный ряд сходится равномерно на $\mathbb{T}$.

Далее мы воспользуемся теоремой 4 работы Е. П. Долженко [13] и некоторыми утверждениями, полученными при доказательстве этой теоремы. Именно, ввиду (2.3) и (2.4) находим, что $f \in W_1^1(\mathbb{T})$ и ряд (2.5) можно почленно дифференцировать почти всюду на $\mathbb{T}$. Следовательно,

$$E_n^{(s-1)}(f')_1 \leq \|f' - \varphi'_n\|_1 \leq \sum_{m=0}^{\infty} \|u'_m\|_1. \quad (2.6)$$

Остается заметить, что

$$u_m \in \Pi_{2^{m+2}n}^s(\mathbb{T}) \cap C(\mathbb{T})$$

и, см. (2.4),

$$\|u_m\|_{\infty} \leq 4E_{2^m n}^{(s)}(f)_{\infty}.$$

Значит,

$$\|u'_m\|_1 \leq c_3(s)2^m n E_{2^m n}^{(s)}(f)_{\infty}. \quad (2.7)$$

Из (2.6) и (2.7) следует утверждение леммы 2.5.

Определим (см., например, [6]) пространство Харди H_p , $0 < p < \infty$, функций g , аналитических в круге $D = \{z : |z| < 1\}$, для которых конечна квазинорма

$$\|g\|_{H_p} = \sup_{0 \leq \rho < 1} \|g(\rho e^{i\cdot})\|_{L_p(\mathbb{T})}.$$

Как известно, если $g \in H_p$, то для почти всех $\zeta \in \partial D$, ∂D – граница круга D , существует и конечен $\lim_{z \rightarrow \zeta} g(z) =: g(\zeta)$, когда $z \in D$ и z стремится к ζ по некасательным по отношению к ∂D путям.

Пространство Харди–Бесова $A_p^{\alpha} = A_p^{\alpha}(D)$, $\alpha > 0$, $0 < p < \infty$, аналитических в круге D функций определим (см. [14]) как подпространство функций $g \in H_p$ таких, что $f(t) := g(e^{it})$, $t \in \mathbb{T}$, принадлежит $B_p^{\alpha}(\mathbb{T})$. При этом положим

$$\|g\|_{A_p^{\alpha}} = \|f\|_{B_p^{\alpha}}.$$

Нам понадобится (см. [11]) то обстоятельство, что оператор интегрирования действует непрерывно из $A_p^{\alpha-1}(D)$ в $A_p^{\alpha}(D)$ при $\alpha > 1$ и $0 < p < \infty$. Этот результат мы будем использовать в следующей форме. Если $g \in A_p^{\alpha-1}(D)$, то функция

$$G(\rho e^{it}) = -i \int_0^{\rho} \frac{[g(\rho e^{it}) - g(0)]}{\rho} d\rho, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (2.8)$$

принадлежит $A_p^{\alpha}(D)$ и $\|G\|_{A_p^{\alpha}} \leq c(\alpha, p)\|g\|_{A_p^{\alpha-1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ИМПЛИКАЦИИ 2(ii) $\implies$ 2(iii). Пусть $f \in C(\mathbb{T})$ и f удовлетворяет условию 2(ii). Тогда, используя леммы 2.2 и 2.5, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (n^{\alpha-1} E_n^{(s-1)}(f')_1)^{1/\alpha} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} E_n^{(s-1)}(f')_1 \right)^{1/\alpha} \\ &\leq c_1(s, \alpha) \sum_{n=1}^{\infty} (E_n^{(s)}(f)_{\infty})^{1/\alpha} + c_2(s, \alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} E_k^{(s)}(f)_{\infty} \right)^{1/\alpha} \\ &\leq c_3(s, \alpha) \sum_{n=1}^{\infty} (E_n^{(s)}(f)_{\infty})^{1/\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом импликации 1(ii) $\implies$ 1(iii) находим $f' \in B_{1/\alpha}^{\alpha-1}(\mathbb{T})$. Аналогично получим $(\tilde{f})' \in B_{1/\alpha}^{\alpha-1}(\mathbb{T})$. Значит, ввиду вложения (1.2) имеем, что f' и $(\tilde{f})'$ принадлежат $L_1(\mathbb{T})$. Следовательно (см. [6; гл. 4]), функция $f'(t) + i(\tilde{f})'(t)$ почти всюду на $\mathbb{T}$ совпадает с $g(e^{it})$, где g – некоторая функция из H_1 . Поскольку $f', (\tilde{f})' \in B_{1/\alpha}^{\alpha-1}(\mathbb{T})$, согласно определению пространства $A_p^{\alpha}(D)$ имеем $g \in A_{1/\alpha}^{\alpha-1}(D)$. Тогда функция G , определяемая с помощью равенства (2.8), принадлежит $A_{1/\alpha}^{\alpha}(D)$. Согласно [6; теорема 3.11] имеем

$$G(e^{it}) = f(t) + i\tilde{f}(t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau. \quad (2.9)$$

Напомним, что функция f предполагается действительной. Поэтому из вложения $G \in A_{1/\alpha}^{\alpha}(D)$ и равенства (2.9) следует, что $f \in B_{1/\alpha}^{\alpha}(\mathbb{T})$. Импликация 2(ii) $\implies$ 2(iii) доказана и вместе с ней теорема 2.

В заключение сформулируем гипотезу, которую автор пытался доказать, начиная работу над данной статьей. Пусть $\alpha > 1$, $s \in \mathbb{N} \cap (\alpha, \infty)$ и $f \in C(\mathbb{T})$. Тогда для $n \in \mathbb{N}$ имеет место эквивалентность

$$R_n(f)_{\infty} = O(n^{-\alpha}) \iff \begin{cases} E_n^{(s)}(f)_{\infty} = O(n^{-\alpha}), \\ E_n^{(s)}(\tilde{f})_{\infty} = O(n^{-\alpha}). \end{cases}$$

Список литературы

- [1] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive approximation*, Grundlehren Math. Wiss., **303**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, x+449 pp.
- [2] А. А. Пекарский, “Классы аналитических функций, определяемые наилучшими рациональными приближениями в H_p ”, *Матем. сб.*, **127(169)**:1(5) (1985), 3–20; англ. пер.: A. A. Pekarskii, “Classes of analytic functions determined by best rational approximations in H_p ”, *Math. USSR-Sb.*, **55**:1 (1986), 1–18.
- [3] G. G. Lorentz, M. v. Golitschek, Y. Makovoz, *Constructive approximation. Advanced problems*, Grundlehren Math. Wiss., **304**, Springer-Verlag, Berlin, 1996, xii+649 pp.
- [4] А. А. Пекарский, Г. Шталь, “Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций в пространствах L_p при $p < 1$ ”, *Матем. сб.*, **186**:1 (1995), 119–130; англ. пер.: A. A. Pekarskii, H. Stahl, “Bernstein type inequalities for derivatives of rational functions in L_p spaces for $p < 1$ ”, *Sb. Math.*, **186**:1 (1995), 121–131.

- [5] А. А. Пекарский, Е. И. Стельмах, “Об исключительных случаях в соотношениях для наилучших рациональных и кусочно-полиномиальных приближений”, *Anal. Math.*, **35**:2 (2009), 119–130.
- [6] P. L. Duren, *Theory of H_p spaces*, Pure Appl. Math., **38**, Academic Press, New York–London, 1970, xii+258 pp.
- [7] В. В. Пеллер, *Операторы Ганкеля и их приложения*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва–Ижевск, 2005, 1028 с.; пер. с англ.: V. V. Peller, *Hankel operators and their applications*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, New York, 2003, xvi+784 pp.
- [8] А. А. Пекарский, “Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке”, *Матем. сб.*, **133(175)**:1(5) (1987), 86–102; англ. пер.: A. A. Pekarskii, “Tchebycheff rational approximation in the disk, on the circle, and on a closed interval”, *Math. USSR-Sb.*, **61**:1 (1988), 87–102.
- [9] Г. Харди, Дж. И. Литтлвуд, Г. Поля, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948, 456 с.; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Univ. Press, Cambridge, 1934, xii+314 pp.
- [10] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, Москва, 1980, 264 с.; пер. с англ.: J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren Math. Wiss., **223**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976, x+207 pp.
- [11] А. А. Гончар, Л. Д. Григорян, “Об оценках нормы голоморфной составляющей мероморфной функции”, *Матем. сб.*, **99(141)**:4 (1976), 634–638; англ. пер.: A. A. Gonchar, L. D. Grigoryan, “On estimates of the norm of the holomorphic component of a meromorphic function”, *Math. USSR-Sb.*, **28**:4 (1976), 571–575.
- [12] Л. Д. Григорян, “Оценки нормы голоморфных составляющих мероморфных функций в областях с гладкой границей”, *Матем. сб.*, **100(142)**:1(5) (1976), 156–164; англ. пер.: L. D. Grigoryan, “Estimates of the norm of the holomorphic components of functions meromorphic in domains with a smooth boundary”, *Math. USSR-Sb.*, **29**:1 (1976), 139–146.
- [13] Е. П. Долженко, “Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций”, *Матем. сб.*, **56(98)**:4 (1962), 403–432.
- [14] P. Oswald, “On Besov–Hardy–Sobolev spaces of analytic functions in the unit disc”, *Czechoslovak Math. J.*, **33**:108 (1983), 408–426.

Александр Антонович Пекарский
(Aleksandr A. Pekarskii)

Белорусский государственный университет, г. Минск
E-mail: pekarskii@gmail.com

Поступила в редакцию
10.10.2013 и 27.01.2014