Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Леонов, Функционалы с H -свойством в пространстве Соболева W_1^1 , *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 6, 121–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm829>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:32:43

УДК 517.98

А. С. Леонов

Функционалы с H -свойством в пространстве Соболева W_1^1

Рассматриваются специальные классы выпуклых функционалов в пространстве Соболева W_1^1 . Доказывается, что функционалы из этих классов обладают так называемым H -свойством: для них из слабой сходимости последовательностей аргументов и сходимости этих последовательностей по функционалу вытекает сильная сходимость последовательностей в W_1^1 .

Библиография: 6 названий.

§ 1. Введение

Пусть $W_1^1(T)$ – пространство Соболева функций $z(x)$, $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, определенных в ограниченной области T , $T \subset \mathbb{R}^N$, с нормой

$$\|z\|_W = \sum_{m=0}^N \|D_m z\|_L,$$

$$D_0 z = z(x), \quad D_m z = \frac{\partial z}{\partial x_m}(x), \quad m = 1, \dots, N$$

(см., например, [1]). Здесь $\|z\|_L = \int_T |z(x)| dx$ – норма в пространстве Лебега $L_1(T)$. Область T считается такой, что выполнена теорема вложения Соболева–Кондрашова [1]. Предположим, что на некотором непустом множестве $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset W_1^1(T)$, определен функционал $\Omega(z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функционал $\Omega(z)$ имеет на множестве $\mathcal{D}$ H -свойство, если для любой последовательности $\{z_n\} \subset \mathcal{D}$ из ее слабой сходимости в $W_1^1(T)$ при $n \rightarrow \infty$ к некоторому пределу $z_0 \in \mathcal{D}$ ($z_n \xrightarrow{W} z_0$) и ее сходимости по функционалу ($\Omega(z_n) \rightarrow \Omega(z_0)$) следует сильная сходимость в $W_1^1(T)$ ($z_n \xrightarrow{W} z_0$).

Аналогично дается определение H -свойства функционалов в других банаховых пространствах.

Известно, что в пространствах Лебега $L_p(T)$ и пространствах Соболева $W_p^l(T)$, $1 < p < \infty$, $l \geq 1$, функционал нормы $\Omega(z) = \|z\|$ обладает H -свойством [1]. Однако в пространствах $L_1(T)$ и $W_1^1(T)$ это не так. Легко, например, убедиться, что в пространстве $W_1^1[0, 2\pi]$ последовательность $\{z_n\}$, $z_n(x) = (\sin nx)/n + x$, слабо сходится к $z_0(x) = x$, причем $\|z_n\|_W \rightarrow \|z_0\|_W$, но сильной сходимости нет: $\|z_n - z_0\|_W \rightarrow 4$. С другой стороны, в [2] указаны классы и примеры функционалов

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00044).

с H -свойством в пространстве L_1 . Из этих результатов (см. [2; теоремы 2.5, 3.2]) следует, что интегральные функционалы вида

$$\Omega(z) = \int_0^1 f[z(x)] dx$$

обладают H -свойством на множестве $\mathcal{D}_+ = \{z : z(x) \geq 0, \Omega(z) < \infty\}$ пространства $L_1[0, 1]$, если $f(z) \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$, производная $f''(z) > 0$ монотонна при $z > 0$ и найдется такое число ρ , $0 \leq \rho \leq 1$, что $f''(z)z^\rho \geq \sigma = \text{const} > 0 \forall z > 0$.

В настоящей работе указываются классы функционалов в пространстве $W_1^1(T)$, которые имеют H -свойство, а также приводятся конкретные примеры таких функционалов.

§ 2. H -свойство функционалов общего вида

Введем некоторые обозначения и величины.

Пусть $\mathbf{L}_1(T) = L_1(T) \times \dots \times L_1(T)$ — прямое произведение $(N + 1)$ -го пространства $L_1(T)$, а $v(x) = (v_0(x), v_1(x), \dots, v_N(x))$ — элемент пространства $\mathbf{L}_1(T)$ с нормой

$$\|v\|_{\mathbf{L}} = \sum_{m=0}^N \|v_m\|_L.$$

Будем считать, что μ — мера Лебега, заданная на подмножествах области T . Рассмотрим произвольную совокупность $\{T_i\}_{i=1}^k$ измеримых множеств $T_i \subset T$ такую, что $\mu(T_i) > 0$, $\mu(T_i \cap T_j) = 0$, $i \neq j$, и $\mu(T \setminus \bigcup_{i=1}^k T_i) = 0$. Будем условно называть такую совокупность *разбиением области T* . Далее, возьмем произвольную вектор-функцию $v(x) = (v_0(x), v_1(x), \dots, v_N(x)) \in \mathbf{L}_1(T)$. Для заданного разбиения $\{T_i\}_{i=1}^k$ определим оператор $S_k : L_1(T) \rightarrow L_1(T)$, который сопоставляет каждой компоненте $v_m(x)$, $m = 0, 1, \dots, N$, элемента $v(x)$ “ступенчатую” функцию $S_k v_m(x)$ по следующему правилу:

$$S_k v_m(x) = \sum_{i=1}^k v_{mi} \chi(T_i), \quad v_{mi} = \frac{1}{\mu_i} \int_{T_i} v_m(x) dx. \quad (2.1)$$

Здесь $\chi(T_i)$ — характеристическая функция множества T_i , а $\mu_i = \mu(T_i)$. Таким образом, вектор-функции $v(x)$ ставится в соответствие ее “ступенчатый аналог” $S_k v(x) = (S_k v_0(x), S_k v_1(x), \dots, S_k v_N(x)) \in \mathbf{L}_1(T)$. В дальнейшем при рассмотрении фиксированного разбиения $\{T_i\}_{i=1}^k$ индекс k в символе ступенчатых функций будет иногда опускаться.

Для доказательства следующих двух утверждений понадобятся специальные разбиения множества T . Они строятся следующим образом. Зададим натуральное число K и число $k = 2K^2 + 2$. Для каждой компоненты $v_m(x)$, $m = 0, 1, \dots, N$, заданного элемента $v(x) \in \mathbf{L}_1(T)$ и каждого натурального j , $j = 1, 2, \dots, k$, определим множества $Q_m(j)$:

$$\begin{aligned} Q_m(j) &= \left\{ x \in T : \frac{j - K^2 - 1}{K} \leq v_m(x) < \frac{j - K^2}{K} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, k - 1; \\ Q_m(k) &= \left\{ x \in T : (v_m(x) < -K) \cup \left(v_m(x) \geq \frac{K^2 + 1}{K} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Затем для каждого мультииндекса $i = (i_0, i_1, \dots, i_N)$ с $i_m = 1, 2, \dots, k$, $m = 0, 1, \dots, N$, определим множества $T_i = Q_0(i_0) \cap Q_1(i_1) \cap \dots \cap Q_N(i_N)$. Введем также множество мультииндексов $I(k) = \{i : \mu_i \neq 0\}$. Совокупность $\{T_i\}_{i \in I(k)}$ будем называть *специальным разбиением области T* . Для специального разбиения очевидны соотношения: $\mu(T_i) > 0$, $\mu(T_i \cap T_j) = 0$ для различных мультииндексов i, j и $\mu(T \setminus \bigcup_{i \in I(k)} T_i) = 0$. Кроме того, если определить множества $I_m(k) = \{i \in I(k) : i_m = k\}$ для каждого $m = 0, 1, \dots, N$, то из (2.2) и определения множества T_i следует равенство $\mu(Q_m(k) \setminus \bigcup_{i \in I_m(k)} T_i) = 0$.

Для специального разбиения можно по аналогии с (2.1) определить оператор S_k : $S_k v_m(x) = \sum_{i \in I(k)} v_{mi} \chi(T_i)$. Справедлива

ЛЕММА 2.1. *Для всякой вектор-функции $v(x) \in \mathbf{L}_1(T)$ и для построенных на соответствующих специальных разбиениях $\{T_i\}_{i \in I(k)}$ ее ступенчатых аналогов $S_k v(x)$ выполнено соотношение $\|v(x) - S_k v(x)\|_{\mathbf{L}} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное число $K = 1, 2, \dots$ и при $k = 2K^2 + 2$ зададим специальное разбиение, как указано выше. Для каждого фиксированного m на всяком множестве T_i этого специального разбиения с $i \in I(k) \setminus I_m(k)$ из соотношений (2.2) и из (2.1) следуют неравенства

$$\begin{aligned} \frac{i_m - K^2 - 1}{K} &\leq v_m(x) < \frac{i_m - K^2}{K}, \\ \frac{i_m - K^2 - 1}{K} &\leq v_{mi} = \frac{1}{\mu_i} \int_{T_i} v_m(x) dx \leq \frac{i_m - K^2}{K} \end{aligned}$$

при всех допустимых i_m , $1 \leq i_m < k$. Отсюда ясно, что

$$|v_m(x) - v_{mi}| \leq \frac{1}{K} \quad \forall x \in T_i, \quad i \in I(k) \setminus I_m(k). \quad (2.3)$$

Далее, из неравенства Чебышёва [1] получим

$$\mu(Q_m(k)) \leq \mu\{x \in T : |v_m(x)| > K\} \leq \frac{1}{K} \int_T |v_m(x)| dx = \sqrt{\frac{2}{k-2}} \|v_m\|_L.$$

Поэтому $\mu(Q_m(k)) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, откуда в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что

$$\lambda_m(k) = \int_{Q_m(k)} |v_m(x)| dx \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

при $k \rightarrow \infty$. В силу отмеченного выше свойства $\mu(Q_m(k) \setminus \bigcup_{i \in I_m(k)} T_i) = 0$ верна также цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \int_{Q_m(k)} |S_k v_m(x)| dx &= \sum_{i \in I_m(k)} \int_{T_i} |S_k v_m(x)| dx = \sum_{i \in I_m(k)} \int_{T_i} |v_{mi}| \chi(T_i) dx \\ &= \sum_{i \in I_m(k)} |v_{mi}| \mu_i = \sum_{i \in I_m(k)} \left| \int_{T_i} v_m(x) dx \right| \leq \sum_{i \in I_m(k)} \int_{T_i} |v_m(x)| dx \\ &= \int_{Q_m(k)} |v_m(x)| dx = \lambda_m(k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из (2.3)–(2.5) вытекает оценка

$$\begin{aligned}
\|v_m(x) - S_k v_m(x)\|_L &= \sum_{i \in I(k)} \int_{T_i} |v_m(x) - S_k v_m(x)| dx \\
&= \sum_{i \in I(k) \setminus I_m(k)} \int_{T_i} |v_m(x) - v_{mi}| dx + \sum_{i \in I_m(k)} \int_{T_i} |v_m(x) - S_k v_m(x)| dx \\
&\leq \sum_{i \in I(k)} \frac{\mu_i}{K} + \int_{Q_m(k)} |v_m(x) - S_k v_m(x)| dx \\
&\leq \frac{\mu(T)}{K} + \int_{Q_m(k)} |v_m(x)| dx + \int_{Q_m(k)} |S_k v_m(x)| dx \\
&\leq \frac{\mu(T)}{K} + 2\lambda_m(k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

и поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v(x) - S_k v(x)\|_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N \|v_m(x) - S_k v_m(x)\|_L = 0.$$

Рассмотрим теперь некоторый функционал $\omega[v] = \omega[v_0(x), v_1(x), \dots, v_N(x)]$, определенный на непустом множестве $\mathcal{V} \subset \mathbf{L}_1(T)$. Будем предполагать, что множество $\mathcal{V}$ наряду с каждым своим элементом $v(x)$ содержит и его ступенчатый аналог для каждого разбиения: $S_k v(x) \in \mathcal{V}$.

ТЕОРЕМА 2.2. *Предположим, что функционал $\omega[v]$ полунепрерывен снизу на множестве $\mathcal{V}$ относительно сходимости в $\mathbf{L}_1(T)$. Пусть, кроме того, для этого функционала существуют такие непрерывные и монотонно возрастающие при $t \geq 0$ функции $\Phi(t)$, $\Psi(t)$, $\Phi(0) = 0$, $\Psi(0) > 0$, что для любой вектор-функции $v(x) \in \mathcal{V}$ и для построенного на всяком разбиении $\{T_i\}_{i=1}^k$ ее ступенчатого аналога $S_k v(x)$ выполнено соотношение*

$$\omega[v] - \omega[S_k v] \geq \frac{\Phi(\|v - S_k v\|_L)}{\Psi(\|v\|_L)}. \quad (2.6)$$

Тогда каждая последовательность

$$\{v^{(n)}(x)\}_{n=1}^\infty = \{(v_0^{(n)}(x), v_1^{(n)}(x), \dots, v_N^{(n)}(x))\} \subset \mathcal{V},$$

которая слабо сходится в $\mathbf{L}_1(T)$ к $v^{(0)}(x) = (v_0^{(0)}(x), v_1^{(0)}(x), \dots, v_N^{(0)}(x)) \in \mathcal{V}$ и сходится к $v^{(0)}(x)$ по функционалу: $\omega[v^{(n)}] \rightarrow \omega[v^{(0)}]$, будет сильно сходиться в $\mathbf{L}_1(T)$: $v^{(n)} \xrightarrow{L} v^{(0)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве разбиения $\{T_i\}_{i=1}^k$ какое-либо фиксированное специальное разбиение $\{T_i\}_{i \in I(k)}$, построенное по элементу $v_0(x)$. Найдем соответствующие ступенчатые аналоги для $v_m^{(n)}(x)$ и $v_m^{(0)}(x)$ по аналогии с (2.1):

$$\begin{aligned}
S_k v_m^{(n)}(x) &= \sum_{i \in I(k)} v_{mi}^{(n)} \chi(T_i), \quad v_{mi}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} \int_{T_i} v_m^{(n)}(x) dx, \\
S_k v_m^{(0)}(x) &= \sum_{i \in I(k)} v_{mi}^{(0)} \chi(T_i), \quad v_{mi}^{(0)} = \frac{1}{\mu_i} \int_{T_i} v_m^{(0)}(x) dx, \quad m = 0, 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

Из слабой сходимости $v^{(n)}(x) \xrightarrow{L} v^{(0)}(x)$ следуют слабые сходимости в $L_1(T)$: $v_m^{(n)}(x) \xrightarrow{L} v_m^{(0)}(x)$. Они, в свою очередь, по критерию слабой сходимости в L_p , $1 \leq p < \infty$, [1] дают при каждом $m = 0, 1, \dots, N$ соотношения

$$\begin{aligned} \|v_m^{(n)}(x)\|_L &\leq M_m = \text{const}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T_i} v_m^{(n)}(x) dx &= \int_{T_i} v_m^{(0)}(x) dx \quad \forall T_i \in \{T_i\}_{i \in I(k)}. \end{aligned}$$

Это означает, что $\|v^{(n)}(x)\|_L \leq M = \text{const}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{mi}^{(n)} = v_{mi}^{(0)}$ для всех рассматриваемых m и $i \in I(k)$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_k v^{(n)} - S_k v^{(0)}\|_L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N \|S_k v_m^{(n)}(x) - S_k v_m^{(0)}(x)\|_L \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N \sum_{i \in I(k)} \int_{T_i} |S_k v_m^{(n)}(x) - S_k v_m^{(0)}(x)| dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N \sum_{i \in I(k)} |v_{mi}^{(n)} - v_{mi}^{(0)}| = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Далее, из условия (2.6), примененного к рассматриваемому разбиению, с учетом монотонности и непрерывности функций $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ получим

$$\begin{aligned} \|v^{(n)} - S_k v^{(n)}\|_L &\leq \Phi^{-1}(\Psi(\|v^{(n)}\|_L)(\omega[v^{(n)}] - \omega[S_k v^{(n)}])) \\ &\leq \Phi^{-1}(\Psi(M)(\omega[v^{(n)}] - \omega[S_k v^{(n)}])). \end{aligned} \quad (2.8)$$

По условию теоремы $\omega[v^{(n)}] \rightarrow \omega[v^{(0)}]$, а из доказанной сходимости (2.7) и полунепрерывности снизу функционала $\omega[v]$ получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega[S_k v^{(n)}] \geq \omega[S_k v^{(0)}]$. Это вместе с (2.8) дает

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|v^{(n)} - S_k v^{(n)}\|_L \leq \Phi^{-1}(\Psi(M)(\omega[v^{(0)}] - \omega[S_k v^{(0)}])). \quad (2.9)$$

Переходя теперь к пределу в неравенстве

$$\|v^{(n)} - v^{(0)}\|_L \leq \|v^{(n)} - S_k v^{(n)}\|_L + \|S_k v^{(n)} - S_k v^{(0)}\|_L + \|S_k v^{(0)} - v^{(0)}\|_L$$

и учитывая предельные соотношения (2.7) и (2.9), получаем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|v^{(n)} - v^{(0)}\|_L \leq \Phi^{-1}(\Psi(M)(\omega[v^{(0)}] - \omega[S_k v^{(0)}])) + \|S_k v^{(0)} - v^{(0)}\|_L \quad (2.10)$$

для рассматриваемого специального разбиения $\{T_i\}_{i \in I(k)}$. Пусть, далее, берется последовательность таких разбиений с $k \rightarrow \infty$. Тогда в силу леммы 2.1 имеем $\|S_k v^{(0)} - v^{(0)}\|_L \rightarrow 0$. Эта сходимость и полунепрерывность снизу функционала $\omega[v]$ дают $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega[S_k v^{(0)}] \geq \omega[v^{(0)}]$. Последнее неравенство вместе с вытекающим из (2.6) неравенством $\omega[v^{(0)}] - \omega[S_k v^{(0)}] \geq 0$ приводит к соотношению

$$0 \leq \omega[v^{(0)}] - \lim_{k \rightarrow \infty} \omega[S_k v^{(0)}] \leq \omega[v^{(0)}] - \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \omega[S_k v^{(0)}] \leq \omega[v^{(0)}] - \omega[v^{(0)}] = 0,$$

так что $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega[S_k v^{(0)}] = \omega[v^{(0)}]$. Но тогда из оценки (2.10) после перехода к пределу при $k \rightarrow \infty$ следует доказываемая сильная сходимость $v^{(n)} \xrightarrow{L} v^{(0)}$.

Введем теперь функционал

$$\Omega[z] = \omega[Dz] = \omega[D_0 z(x), D_1 z(x), \dots, D_N z(x)],$$

определенный на множестве $\mathcal{D} = \{z(x) \in W_1^1(T) : Dz \in \mathcal{V}\}$, которое предполагается непустым. Справедлива

ТЕОРЕМА 2.3. *Если функционал $\omega[v]$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2 и, кроме того, порождаемые им непустые множества $M_C = \{v \in \mathcal{V} : \omega[v] \leq C\}$, $C = \text{const}$, относительно слабо компактны в $\mathbf{L}_1$, то функционал $\Omega[z] = \omega[Dz]$ имеет H -свойство на $\mathcal{D}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную последовательность $\{z_n\} \subset \mathcal{D}$ такую, что $z_n \xrightarrow{W} z_0 \in \mathcal{D}$ и $\Omega(z_n) \rightarrow \Omega(z_0)$ при $n \rightarrow \infty$. Из теоремы Соболева–Кондрашова [1] следует, что оператор вложения $\mathbf{V}: W_1^1(T) \rightarrow L_1(T)$ вполне непрерывен, так что из $z_n \xrightarrow{W} z_0$ вытекает сильная сходимость $z_n \xrightarrow{L} z_0$ и, значит, аналогичная слабая сходимость. Если эту слабую сходимость рассматривать для линейных непрерывных в $L_1(T)$ функционалов $\langle z, h \rangle$, порождаемых бесконечно дифференцируемыми и финитными на T функциями $h(x)$, то из нее получаются следующие сходимости для обобщенных производных как элементов из $L_1(T)$: $\langle D_m z_n, h \rangle \rightarrow \langle D_m z_0, h \rangle$, $m = 1, \dots, N$ (см., например, [3]). Поэтому последовательность $\{v^{(n)}\} = \{Dz_n\} = \{(z_n, D_1 z_n, \dots, D_N z_n)\}$ слабо сходится к $v^{(0)} = Dz_0 = (z_0, D_1 z_0, \dots, D_N z_0)$ на подпространстве линейных ограниченных в $\mathbf{L}_1(T)$ функционалов, порождаемых бесконечно дифференцируемыми финитными функциями. Так как последовательность $\{\omega[v^{(n)}]\} = \{\Omega[z_n]\}$ ограничена, то из условия слабой компактности множеств M_C следует, что в $\mathbf{L}_1$ найдется хотя бы одна слабая предельная точка последовательности $\{v^{(n)}\}$. Но тогда в силу единственности слабого предела она обязана совпадать с $v^{(0)}$, и, значит, последовательность $\{v^{(n)}\}$ слабо сходится к $v^{(0)}$ в $\mathbf{L}_1$. В итоге, справедливы следующие сходимости:

$$\begin{aligned} v^{(n)} &= (z_n, D_1 z_n, \dots, D_N z_n) \xrightarrow{L} (z_0, D_1 z_0, \dots, D_N z_0) = v^{(0)}, \\ \omega[v^{(n)}] &= \Omega[z_n] \rightarrow \Omega[z_0] = \omega[v^{(0)}]. \end{aligned}$$

Отсюда по теореме 2.2 получается, что

$$v^{(n)} = (z_n, D_1 z_n, \dots, D_N z_n) \xrightarrow{L} (z_0, D_1 z_0, \dots, D_N z_0) = v^{(0)},$$

т.е. $z_n \xrightarrow{W} z_0$. Это означает выполнение H -свойства функционала $\Omega[z]$ на $\mathcal{D}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Требование относительной слабой компактности множеств M_C в теореме 2.3 можно обеспечить с помощью следующего дополнительного условия на функционал $\omega[v]$. Предположим, что для всякого $v(x) \in \mathcal{V}$ и каждого m , $m = 0, 1, \dots, N$, выполнено неравенство

$$\omega[v_0(x), v_1(x), \dots, v_N(x)] \geq \|\Phi_0(v_m(x))\|_L,$$

где $\Phi_0(t)$ – непрерывная в $\mathbb{R}$ четная функция, для которой $\Phi_0(t)/t \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда для элементов $v \in M_C$ выполнены неравенства $\|\Phi_0(v_m(x))\|_L \leq C$, и из критерия Валле Пуссена слабой компактности множеств в L_1 (см. [4; с. 15–17]) следует, что непустые M_C обладают требуемым свойством слабой компактности.

§ 3. Интегральные функционалы с H -свойством

Предположим, что функция $f(u) = f(u_0, u_1, \dots, u_N)$ непрерывна, выпукла и ограничена снизу в области $U_0 = \{u \in \mathbb{R}^{N+1} : u_0 \geq 0\}$. Введем функционал

$$\omega[v] = \int_T f(v(x)) dx = \int_T f(v_0(x), v_1(x), \dots, v_N(x)) dx, \quad (3.1)$$

определенный на множестве $\mathcal{V}_0 = \{v \in \mathbf{L}_1(T) : v_0(x) \geq 0, \omega[v] < \infty\}$. Он порождает интегральный функционал

$$\Omega[z] = \omega[Dz] = \int_T f(Dz(x)) dx = \int_T f(z(x), D_1z(x), \dots, D_Nz(x)) dx \quad (3.2)$$

с областью определения $\mathcal{D} = \{z(x) \in W_1^1(T) : z(x) \geq 0, \Omega[z] < \infty\}$.

ЛЕММА 3.1. *При выполнении указанных условий на производящую функцию $f(u)$ функционал (3.1) имеет следующие свойства:*

- а) его область определения $\mathcal{V}_0$ выпукла в $\mathbf{L}_1(T)$ и сам он является выпуклым на $\mathcal{V}_0$;
- б) он полунепрерывен снизу на $\mathcal{V}_0$ в смысле сходимости в $\mathbf{L}_1(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпуклость функционала (3.1) и множества $\mathcal{V}_0$ следует из выпуклости производящей функции $f(u)$ на выпуклом множестве U_0 (см., например, [2]). Для доказательства полунепрерывности снизу функционала $\omega[v]$ на множестве $\mathcal{V}_0$ рассмотрим произвольный элемент $v(x) = (v_0(x), v_1(x), \dots, v_N(x))$ из $\mathcal{V}_0$ и любую последовательность

$$\{v^{(n)}(x)\} = \{(v_0^{(n)}(x), v_1^{(n)}(x), \dots, v_N^{(n)}(x))\} \subset \mathcal{V}_0$$

такую, что $v^{(n)}(x) \rightarrow v(x)$ в $\mathbf{L}_1(T)$, т.е. $v_m^{(n)}(x) \rightarrow v_m(x)$ в $L_1(T)$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $m = 0, 1, \dots, N$.

Если $s \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \omega[v^{(n)}] = +\infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega[v^{(n)}] \geq \omega[v]$, и условие полунепрерывности снизу функционала выполнено. Если же предел s конечен, то можно выбрать такую подпоследовательность $\{v^{(n_k)}(x)\}$, что, с одной стороны, $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega[v^{(n_k)}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega[v^{(n)}] = s$, а с другой стороны, $v_m^{(n_k)}(x) \rightarrow v_m(x)$ почти всюду на T . Выполнение последнего условия можно обеспечить в силу сходимостей $v_m^{(n)}(x) \rightarrow v_m(x)$ в $L_1(T)$ для каждого $m = 0, 1, \dots, N$ (см. [1]). Поэтому $f(v^{(n_k)}(x)) \rightarrow f(v(x))$ почти всюду в T вследствие непрерывности функции $f(u)$. Так как

$$\omega[v^{(n_k)}] = \int_T f(v^{(n_k)}(x)) dx \leq s + 1 = \text{const}$$

при достаточно больших k и, кроме того, функция $f(u)$ ограничена снизу, то из леммы Фату [1] следует

$$\omega[v] = \int_T f(v(x)) dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_T f(v^{(n_k)}(x)) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega[v^{(n_k)}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega[v^{(n)}],$$

и полунепрерывность снизу функционала $\omega[v]$ доказана.

Заметим, что всякий функционал вида (3.1), будучи по лемме 3.1 полунепрерывным снизу на $\mathcal{V}_0$, при выполнении условия (2.6) порождает функционал (3.2), который имеет H -свойство на $\mathcal{D}$ (теорема 2.3). Поэтому указать функционалы (3.2) с H -свойством в $W_1^1(T)$ можно, например, выделяя классы функционалов вида (3.1), для которых справедливо условие (2.6). В процессе этого исследования понадобятся ряд лемм.

Зафиксируем некоторый элемент $v(x) \in \mathcal{V}_0$. Введем произвольное разбиение $\{T_i\}_{i=1}^k$ области T и найдем для $v(x)$ соответствующую ступенчатую функцию $S_k v(x) = Sv(x)$, используя (2.1). Очевидно, $Sv(x) \in \mathcal{V}_0$. Введем также множества $P_0^{(m)}(i) = \{x \in T_i : v_{mi} \leq v_m(x)\}$, $P_1^{(m)}(i) = \{x \in T_i : v_{mi} > v_m(x)\}$, с помощью которых образуем семейство множеств $P_\alpha(i) = P_{\alpha_0}^{(0)}(i) \cap P_{\alpha_1}^{(1)}(i) \cap \dots \cap P_{\alpha_N}^{(N)}(i)$. Здесь $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$ и каждый индекс α_m , $m = 0, 1, \dots, N$, принимает значения $\{0, 1\}$. Ясно, что $T_i = P_0^{(m)}(i) \cup P_1^{(m)}(i)$. Кроме того, если A — множество всех возможных мультииндексов α , для которых $\mu_{\alpha i} = \mu(P_\alpha(i)) > 0$, то $\mu(T_i \setminus \bigcup_{\alpha \in A} P_\alpha(i)) = 0$ и $\sum_{\alpha \in A} \mu_{\alpha i} = \mu_i$.

ЛЕММА 3.2. *Если функция $f(u)$ непрерывна и выпукла в U_0 , то для всякой функции $v(x) \in \mathcal{V}_0$ и для каждого элемента разбиения T_i выполнены соотношения*

$$\int_{T_i} f(v(x)) dx \geq \sum_{\alpha \in A} \mu_{\alpha i} f\left(\frac{1}{\mu_{\alpha i}} \int_{P_\alpha(i)} v(x) dx\right) \geq \mu_i f(v_i) = \int_{T_i} f(Sv(x)) dx, \quad (3.3)$$

где $v_i = (v_{0i}, v_{1i}, \dots, v_{Ni})$ — значения ступенчатого аналога $Sv(x)$ вектор-функции $v(x)$ на T_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для выпуклой и непрерывной в U_0 функции $f(u)$, для всякой вектор-функции $v(x) \in \mathcal{V}_0$ и для любого множества P , $P \subset T$, $\mu(P) > 0$, справедливо известное неравенство Иенсена:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(P)} \int_P f(v(x)) dx &= \frac{1}{\mu(P)} \int_P f(v_0(x), v_1(x), \dots, v_N(x)) dx \\ &\geq f\left(\frac{1}{\mu(P)} \int_P v_0(x) dx, \frac{1}{\mu(P)} \int_P v_1(x) dx, \dots, \frac{1}{\mu(P)} \int_P v_N(x) dx\right) \\ &= f\left(\frac{1}{\mu(P)} \int_P v(x) dx\right). \end{aligned}$$

Из него при $P = P_\alpha(i)$ получается первое неравенство в следующей цепочке:

$$\begin{aligned} \int_{T_i} f(v(x)) dx &= \sum_{\alpha \in A} \int_{P_\alpha(i)} f(v(x)) dx \geq \sum_{\alpha \in A} \mu_{\alpha i} f\left(\frac{1}{\mu_{\alpha i}} \int_{P_\alpha(i)} v(x) dx\right) \\ &\geq \left(\sum_{\alpha \in A} \mu_{\alpha i}\right) f\left(\left(\sum_{\alpha \in A} \mu_{\alpha i}\right)^{-1} \sum_{\alpha \in A} \mu_{\alpha i} \frac{1}{\mu_{\alpha i}} \int_{P_\alpha(i)} v(x) dx\right) \\ &= \mu_i f\left(\frac{1}{\mu_i} \sum_{\alpha \in A} \int_{P_\alpha(i)} v(x) dx\right) = \mu_i f\left(\frac{1}{\mu_i} \int_{T_i} v(x) dx\right) \\ &= \mu_i f(v_{0i}, v_{1i}, \dots, v_{Ni}) = \int_{T_i} f(Sv(x)) dx. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Второе неравенство в (3.4) следует из выпуклости функции $f(u)$. Предпоследнее и последнее равенства являются непосредственным следствием определения величин v_i и $Sw(x)$. Остальные равенства выражают аддитивность интеграла.

ЛЕММА 3.3. Пусть $\varepsilon_m(i) = \frac{1}{2} \int_{T_i} |v_m(x) - v_{mi}| dx$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{P_0^{(m)}(i)} v_m(x) dx &= v_{mi} \mu(P_0^{(m)}(i)) + \varepsilon_m(i), \\ \int_{P_1^{(m)}(i)} v_m(x) dx &= v_{mi} \mu(P_1^{(m)}(i)) - \varepsilon_m(i). \end{aligned} \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения множеств $P_0^{(m)}(i)$ и $P_1^{(m)}(i)$, а также величины $\varepsilon_m(i)$ следует цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \int_{P_0^{(m)}(i)} v_m(x) dx - \int_{P_1^{(m)}(i)} v_m(x) dx &= \left(\int_{P_0^{(m)}(i)} v_m(x) dx - v_{mi} \mu(P_0^{(m)}(i)) \right) \\ &\quad + \left(v_{mi} \mu(P_1^{(m)}(i)) - \int_{P_1^{(m)}(i)} v_m(x) dx \right) + v_{mi} \mu(P_0^{(m)}(i)) - v_{mi} \mu(P_1^{(m)}(i)) \\ &= \int_{P_0^{(m)}(i)} (v_m(x) - v_{mi}) dx + \int_{P_1^{(m)}(i)} (v_{mi} - v_m(x)) dx \\ &\quad + v_{mi} \mu(P_0^{(m)}(i)) - v_{mi} \mu(P_1^{(m)}(i)) \\ &= \int_{T_i} |v_m(x) - v_{mi}| dx - 2\varepsilon_m(i) + (v_{mi} \mu(P_0^{(m)}(i)) + \varepsilon_m(i)) \\ &\quad - (v_{mi} \mu(P_1^{(m)}(i)) - \varepsilon_m(i)) \\ &= (v_{mi} \mu(P_0^{(m)}(i)) + \varepsilon_m(i)) - (v_{mi} \mu(P_1^{(m)}(i)) - \varepsilon_m(i)). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \int_{P_0^{(m)}(i)} v_m(x) dx + \int_{P_1^{(m)}(i)} v_m(x) dx &= \int_{T_i} v_m(x) dx = v_{mi} \mu(T_i) \\ &= (v_{mi} \mu(P_0^{(m)}(i)) + \varepsilon_m(i)) + (v_{mi} \mu(P_1^{(m)}(i)) - \varepsilon_m(i)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из (3.6) и (3.7) следует (3.5).

ТЕОРЕМА 3.4. Предположим, что функция $f(u)$ дважды дифференцируема на множестве $U_+ = \{u \in \mathbb{R}^{N+1} : u_0 > 0\}$. Пусть, кроме того, квадратичная форма ее второго дифференциала строго положительна в следующем смысле:

$$\sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N f''_{u_l u_m}(u) \eta_l \eta_m \geq \beta(u) \sum_{m=0}^N \eta_m^2 \quad \forall u \in U_+, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^{N+1}, \quad (3.8)$$

где $\beta(u) = \gamma_1 (\gamma_2 + \sum_{m=0}^N |u_m|^\rho)^{-1}$, а $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ и ρ , $0 \leq \rho \leq 1$, — постоянные. Тогда для функционала (3.1) на множестве $\mathcal{V}_+ = \{v \in \mathcal{V}_0 : v_0(x) > 0 \text{ п.в. на } T\}$ при любом разбиении $\{T_i\}_{i=1}^k$ выполняется оценка вида (2.6):

$$\omega[v] - \omega[Sw] \geq \frac{\gamma_1 \|v - Sw\|_{\mathbf{L}}^2}{2^{N+2} (\gamma_2 \mu(T) + (2^\rho + 1)(N+1)^{1-\rho} \mu^{1-\rho}(T) \|v\|_{\mathbf{L}}^\rho) (N+1)}. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего оценим снизу величину

$$\Delta_i = \int_{T_i} f(v(x)) dx - \int_{T_i} f(Sv(x)) dx$$

для произвольной $v(x) \in \mathcal{V}_+$. Условия теоремы обеспечивают справедливость леммы 3.2 и неравенства (3.3). Из него и из формулы Тейлора получаются соотношения

$$\begin{aligned} \Delta_i &\geq \sum_{\alpha \in A} \mu_{\alpha i} \left(f \left(\frac{1}{\mu_{\alpha i}} \int_{P_{\alpha}(i)} v(x) dx \right) - f(v_i) \right) \\ &= \sum_{\alpha \in A} \mu_{\alpha i} \left(\sum_{m=0}^N f'_{u_m}(v_i) \left(\frac{1}{\mu_{\alpha i}} \int_{P_{\alpha}(i)} v_m(x) dx - v_{mi} \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in A} \mu_{\alpha i} \left(\sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N f''_{u_l u_m}(\xi_{\alpha i}) \left(\frac{1}{\mu_{\alpha i}} \int_{P_{\alpha}(i)} v_l(x) dx - v_{li} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{1}{\mu_{\alpha i}} \int_{P_{\alpha}(i)} v_m(x) dx - v_{mi} \right) \right) = S_1(i) + S_2(i). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha i} &= (\xi_{\alpha i 0}, \xi_{\alpha i 1}, \dots, \xi_{\alpha i N}) = (1 - \theta_{\alpha i})v_i + \theta_{\alpha i}V_{\alpha i}, \\ V_{\alpha i} &= (V_{\alpha i 0}, \dots, V_{\alpha i N}), \quad V_{\alpha i m} = \frac{1}{\mu_{\alpha i}} \int_{P_{\alpha}(i)} v_m(x) dx, \quad 0 < \theta_{\alpha i} < 1. \end{aligned}$$

При этом $\xi_{\alpha i} \in U_+$ в силу выпуклости множества U_+ и в силу включений $v_i \in U_+$, $V_{\alpha i} \in U_+$. Продолжим оценку (3.10). По определению величин v_{mi} , $\mu_{\alpha i}$ и в силу равенств $\mu(T_i \setminus \bigcup_{\alpha \in A} P_{\alpha}(i)) = 0$, $\sum_{\alpha \in A} \mu_{\alpha i} = \mu_i$ имеем

$$\begin{aligned} S_1(i) &= \sum_{m=0}^N f'_{u_m}(v_i) \sum_{\alpha \in A} \left(\int_{P_{\alpha}(i)} v_m(x) dx - v_{mi} \mu_{\alpha i} \right) \\ &= \sum_{m=0}^N f'_{u_m}(v_i) \left(\int_{T_i} v_m(x) dx - v_{mi} \mu_i \right) = 0. \end{aligned}$$

Оценим $S_2(i)$ снизу, вводя обозначение $\eta_{\alpha i m} = \frac{1}{\mu_{\alpha i}} \int_{P_{\alpha}(i)} v_m(x) dx - v_{mi}$. Используя условие (3.8) и выражение для $\xi_{\alpha i m}$, получаем

$$\begin{aligned} S_2(i) &\geq \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in A} \mu_{\alpha i} \gamma_1 \left(\gamma_2 + \sum_{m=0}^N |\xi_{\alpha i m}|^\rho \right)^{-1} \sum_{m=0}^N \eta_{\alpha i m}^2 \\ &= \frac{\gamma_1}{2} \sum_{\alpha \in A} \sum_{m=0}^N \frac{(\mu_{\alpha i} \eta_{\alpha i m})^2}{\mu_{\alpha i} \gamma_2 + \mu_{\alpha i} \sum_{m=0}^N |v_{mi} + \theta_{\alpha i} \eta_{\alpha i m}|^\rho} \\ &= \frac{\gamma_1}{2} \sum_{\alpha \in A} \sum_{m=0}^N (\mu_{\alpha i} \eta_{\alpha i m})^2 \cdot S_3^{-1}(\alpha, i). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Принимая во внимание неравенства $\mu_{\alpha i} \leq \mu_i$, $|a+b|^\rho \leq |a|^\rho + |b|^\rho$ и $\sum_{m=0}^N |a_m|^\rho \leq (N+1)^{1-\rho} \left(\sum_{m=0}^N |a_m|\right)^\rho$ при $0 \leq \rho \leq 1$, оценим сверху входящий в (3.11) член:

$$\begin{aligned} S_3(\alpha, i) &= \mu_{\alpha i} \gamma_2 + \mu_{\alpha i} \sum_{m=0}^N |v_{mi} + \theta_{\alpha i} \eta_{\alpha i m}|^\rho \\ &\leq \mu_i \gamma_2 + \mu_{\alpha i} \left(\sum_{m=0}^N |v_{mi}|^\rho + \sum_{m=0}^N |\eta_{\alpha i m}|^\rho \right) \\ &\leq \mu_i \gamma_2 + (N+1)^{1-\rho} \left(q \left(\sum_{m=0}^N |v_{mi}| \mu_{\alpha i} \right)^\rho + \left(\sum_{m=0}^N |\eta_{\alpha i m}| \mu_{\alpha i} \right)^\rho \right) \mu_{\alpha i}^{1-\rho}. \end{aligned}$$

Для продолжения этой оценки используем определения чисел v_{mi} , $\eta_{\alpha i m}$ и неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^N |v_{mi}| \mu_{\alpha i} &\leq \sum_{m=0}^N |v_{mi}| \mu_i = \sum_{m=0}^N \left| \int_{T_i} v_m(x) dx \right| \leq \sum_{m=0}^N \int_{T_i} |v_m(x)| dx, \\ \sum_{m=0}^N |\eta_{\alpha i m}| \mu_{\alpha i} &= \sum_{m=0}^N \left| \int_{P_\alpha(i)} v_m(x) dx - v_{mi} \mu_{\alpha i} \right| \\ &\leq \sum_{m=0}^N \left(\int_{P_\alpha(i)} |v_m(x)| dx + |v_{mi}| \mu_{\alpha i} \right) \\ &\leq \sum_{m=0}^N \int_{T_i} |v_m(x)| dx + \sum_{m=0}^N |v_{mi}| \mu_i \leq 2 \sum_{m=0}^N \int_{T_i} |v_m(x)| dx. \end{aligned}$$

Тогда

$$S_3(\alpha, i) \leq \gamma_2 \mu_i + (N+1)^{1-\rho} \mu_i^{1-\rho} (2^\rho + 1) \left(\sum_{m=0}^N \int_{T_i} |v_m(x)| dx \right)^\rho = \zeta_i,$$

и поэтому из (3.11) следует

$$S_2(i) \geq \frac{\gamma_1}{2\zeta_i} \sum_{m=0}^N \sum_{\alpha \in A} (\mu_{\alpha i} \eta_{\alpha i m})^2. \quad (3.12)$$

Далее, оценим снизу последнюю сумму в (3.12). Введем множества мультииндексов: $B(m)$ – множество таких $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N) \in A$, у которых $\alpha_m = 0$, $C(m)$ – аналогичное множество с $\alpha_m = 1$. Ясно, что $A = B(m) \cup C(m)$. Учтем, что $\mu(P_0^{(m)}(i) \setminus \bigcup_{\alpha \in B(m)} P_\alpha(i)) = 0$, $\mu(P_1^{(m)}(i) \setminus \bigcup_{\alpha \in C(m)} P_\alpha(i)) = 0$, а также то, что каждое из множеств $B(m)$, $C(m)$ содержит не более 2^N элементов. Тогда, применяя известное неравенство $\sum_\alpha a_\alpha^2 \geq \left(\sum_\alpha a_\alpha\right)^2 \left(\sum_\alpha 1\right)^{-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in A} (\eta_{\alpha i m} \mu_{\alpha i})^2 &= \sum_{\alpha \in B(m)} (\eta_{\alpha i m} \mu_{\alpha i})^2 + \sum_{\alpha \in C(m)} (\eta_{\alpha i m} \mu_{\alpha i})^2 \\ &\geq \frac{1}{2^N} \left(\left(\sum_{\alpha \in B(m)} \eta_{\alpha i m} \mu_{\alpha i} \right)^2 + \left(\sum_{\alpha \in C(m)} \eta_{\alpha i m} \mu_{\alpha i} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^N} \left(\left(\sum_{\alpha \in B(m)} \left(\int_{P_\alpha(i)} v_m(x) dx - v_{mi} \mu_{\alpha i} \right) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{\alpha \in C(m)} \left(\int_{P_\alpha(i)} v_m(x) dx - v_{mi} \mu_{\alpha i} \right) \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2^N} \left(\left(\int_{P_0^{(m)}(i)} v_m(x) dx - v_{mi} \mu(P_0^{(m)}(i)) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_{P_1^{(m)}(i)} v_m(x) dx - v_{mi} \mu(P_1^{(m)}(i)) \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2^N} ((\varepsilon_m(i))^2 + (-\varepsilon_m(i))^2) = \frac{1}{2^{N-1}} \varepsilon_m^2(i). \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Предпоследнее равенство получено с использованием леммы 3.3. Из (3.10), (3.12) и (3.13) следует оценка

$$\Delta_i \geq \frac{\gamma_1}{2^N \zeta_i} \sum_{m=0}^N \varepsilon_m^2(i).$$

Используем ее для получения требуемого неравенства (3.9). Начнем с соотношения

$$\begin{aligned}
\omega[v] - \omega[Sw] &= \sum_{i=1}^k \left(\int_{T_i} f(v(x)) dx - \int_{T_i} f(Sv(x)) dx \right) \\
&= \sum_{i=1}^k \Delta_i \geq \frac{\gamma_1}{2^N} \sum_{m=0}^N \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon_m^2(i)}{\zeta_i}. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Далее, используем неравенство Коши–Буняковского:

$$\frac{1}{2} \int_T |v_m(x) - Sv_m(x)| dx = \sum_{i=1}^k \varepsilon_m(i) \leq \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{\zeta_i} \varepsilon_m^2(i) \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^k \zeta_i \right)^{1/2}. \tag{3.15}$$

Продолжая (3.15), оценим сверху сумму

$$\sum_{i=1}^k \zeta_i = \gamma_2 \mu(T) + (N+1)^{1-\rho} (2^\rho + 1) \sum_{i=1}^k \mu_i^{1-\rho} \left(\sum_{m=0}^N \int_{T_i} |v_m(x)| dx \right)^\rho. \tag{3.16}$$

Согласно неравенству Гёльдера

$$\sum_i |a_i| |b_i| \leq \left(\sum_i |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_i |b_i|^q \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

где $p = 1/(1-\rho)$, $q = 1/\rho$, $a_i = \mu_i^{1-\rho}$, $b_i = \sum_{m=0}^N \int_{T_i} |v_m(x)| dx$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k \mu_i^{1-\rho} \left(\sum_{m=0}^N \int_{T_i} |v_m(x)| dx \right)^\rho &\leq \left(\sum_{i=1}^k (\mu_i^{1-\rho})^{1/(1-\rho)} \right)^{1-\rho} \left(\sum_{i=1}^k ((b_i)^\rho)^{1/\rho} \right)^\rho \\
&= \left(\sum_{i=1}^k \mu_i \right)^{1-\rho} \left(\sum_{i=1}^k b_i \right)^\rho = \mu^{1-\rho}(T) \left(\sum_{i=1}^k \sum_{m=0}^N \int_{T_i} |v_m(x)| dx \right)^\rho \\
&= \mu^{1-\rho}(T) \|v\|_{\mathbf{L}}^\rho. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Поэтому из (3.15)–(3.17) следует

$$\sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon_m^2(i)}{\zeta_i} \geq \frac{1}{4\gamma_0} \left(\int_T |v_m(x) - Sv_m(x)| dx \right)^2, \quad (3.18)$$

где $\gamma_0 = \gamma_2 \mu(T) + (N+1)^{1-\rho} (2^\rho + 1) \mu^{1-\rho}(T) \|v\|_{\mathbf{L}}^\rho$. Окончательно из (3.14) и (3.18) получается доказываемая оценка (3.9) в виде

$$\begin{aligned} \omega[v] - \omega[Sv] &\geq \frac{\gamma_1}{2^{N+2}\gamma_0} \sum_{m=0}^N \left(\int_T |v_m(x) - Dv_m(x)| dx \right)^2 \\ &\geq \frac{\gamma_1}{2^{N+2}} \left(\sum_{m=0}^N \int_T |v_m(x) - Sv_m(x)| dx \right)^2 \\ &\quad \times \left((\gamma_2 \mu(T) + (N+1)^{1-\rho} (2^\rho + 1) \mu^{1-\rho}(T) \|v\|_{\mathbf{L}}^\rho) (N+1) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Введем теперь для произвольного элемента $v(x) = (v_0(x), \dots, v_N(x)) \in \mathcal{V}_0$ множество $T(v) = \{x \in T : v_0(x) = 0\}$. Образует подмножество $\tilde{\mathcal{V}}$, $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}_0$, состоящее из элементов $v(x)$ со следующим свойством: или $v(x) \in \mathcal{V}_+$, или $v(x) = 0 \forall x \in T(v)$, если $\mu(T(v)) > 0$. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 3.5. *При выполнении условий теоремы 3.4 неравенство (3.9) выполняется для каждого элемента $v(x) \in \tilde{\mathcal{V}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно рассмотреть случай, когда для $v(x) \in \tilde{\mathcal{V}}$ выполнено неравенство $\mu(T(v)) > 0$. Тогда $v(x) = 0$ на $T(v)$, и если $\mu(T_i \cap T(v)) = \mu(T_i)$, то

$$\Delta_i = \int_{T_i} f(v(x)) dx - \int_{T_i} f(Sv(x)) dx = \int_{T_i \cap T(v)} f(0) dx - \int_{T_i \cap T(v)} f(0) dx = 0.$$

Поэтому такие члены Δ_i не влияют на процедуру доказательства неравенства (3.9), приведенную выше. Для остальных элементов разбиения эта процедура не меняется.

Из доказанных утверждений следуют достаточные условия H -свойства интегрального функционала (3.2).

ТЕОРЕМА 3.6. *Пусть производящая функция $f(u)$:*

- i) *непрерывна и выпукла в U_0 ;*
- ii) *дважды дифференцируема на U_+ ;*
- iii) *для нее существует четная и непрерывная в $\mathbb{R}$ функция $\Phi_0(t)$ со свойством $\Phi_0(t)/t \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow \infty$, такая, что $f(u_0, u_1, \dots, u_N) \geq |\Phi_0(u_m)|$ в U_0 для всех m , $m = 0, 1, \dots, N$.*

Пусть, кроме того, выполнено условие (3.8). Тогда функционал (3.2) имеет H -свойство на множестве $\mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если для функции $z(x) \in \mathcal{D}$ оказывается, что $z(x) > 0$ почти всюду в T , то $Dz(x) \in \mathcal{V}_+ \subset \tilde{\mathcal{V}}$. Если же $z(x) = 0$ на некотором множестве T_0 , $T_0 \subset T$, $\mu(T_0) > 0$, то по свойствам обобщенных производных

$D_m z(x) = 0$ на T_0 , так что $Dz(x) \in \tilde{\mathcal{V}}$ и в этом случае. И так, $v(x) = Dz(x) \in \tilde{\mathcal{V}}$ для всякого $z(x) \in \mathcal{D}$. Далее, согласно заданным предположениям теоремы выполнены условия леммы 3.1 и теоремы 3.5. Результаты этих утверждений, вместе с условием iii) и замечанием 2.4, в свою очередь, гарантируют выполнение условий теорем 2.2 и 2.3 с неравенством (2.6) вида (3.9). Тогда теорема 2.3 обеспечивает H -свойство функционала (3.2) на $\mathcal{D}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 3.1 и теоремы 3.4–3.6 сохраняют силу, если в условиях этих утверждений заменить множества U_0 и U_+ на их выпуклые подобласти $\tilde{U}_0$ и $\tilde{U}_+$. Например, вместо U_+ можно рассматривать множество $\{u \in \mathbb{R}^{N+1} : u_0, u_1, \dots, u_N > 0\}$. При этом следует лишь заменить множества $\mathcal{V}_0$ и $\mathcal{D}$ на $\{v \in \mathbf{L}_1(T) : v_0(x) \subset \tilde{U}_0, \omega[v] < \infty\}$, $\{z(x) \in W_1^1(T) : Dz(x) \subset \tilde{U}_0, \Omega[z] < \infty\}$ соответственно.

§ 4. Функционалы со специальными производящими функциями

В этом параграфе мы рассмотрим два класса функционалов вида (3.1) и (3.2) со специальными производящими функциями.

4.1. Функционалы с производящей функцией $f(u) = \varphi\left(\sqrt{\sum_{m=0}^N u_m^2}\right) = \varphi(\|u\|)$. Предположим, что функция $\varphi(\tau) \geq 0$ имеет следующие свойства:

- j) она непрерывна, монотонно не убывает, выпукла при $\tau \geq 0$, а при $\tau > 0$ дважды дифференцируема;
- jj) для нее $\varphi(\tau)/\tau \rightarrow +\infty$ при $\tau \rightarrow +\infty$.

Из j) ясно, что суперпозиция $f(u)$ будет ограниченной снизу, непрерывной, выпуклой на выпуклом множестве U_0 (см., например, [5]) и дважды дифференцируемой на U_+ . В силу j) и jj) для $f(u)$ будет также выполнено условие iii) теоремы 3.6 с $\Phi_0(\tau) = \varphi(|\tau|)$: $f(u) \geq \varphi(|u_m|)$. Тогда из теоремы 3.6 следует, что функционал (3.2) с такой производящей функцией имеет H -свойство, если выполнено условие (3.8). Проверять это условие для конкретных функций $\varphi(\tau)$ удобно с помощью следующей леммы.

ЛЕММА 4.1. *При сделанных предположениях относительно функции $\varphi(\tau)$ справедлива оценка*

$$\sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N f''_{u_l u_m}(u) \eta_l \eta_m \geq \min \left\{ \frac{\varphi'(\|u\|)}{\|u\|}, \varphi''(\|u\|) \right\} \|\eta\|^2 \quad \forall u \in U_+, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^{N+1}. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $t = \|u\| > 0$ и введем следующие множества: $\Phi_+ = \{t : \varphi''(t)t - \varphi'(t) \geq 0\}$, $\Phi_- = \{t : \varphi''(t)t - \varphi'(t) < 0\}$. Тогда оценка (4.1) получается из выкладки

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N f''_{u_l u_m}(u) \eta_l \eta_m &= \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N \left(\frac{\varphi'(t)}{t} \delta_{lm} + \frac{u_l u_m}{t^3} (\varphi''(t)t - \varphi'(t)) \right) \eta_l \eta_m \\ &= \frac{\varphi'(t)}{t} \|\eta\|^2 + \frac{\varphi''(t)t - \varphi'(t)}{t^3} \left(\sum_{m=0}^N u_m \eta_m \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \begin{cases} \frac{\varphi'(t)}{t} \|\eta\|^2, & t \in \Phi_+; \\ \frac{\varphi'(t)}{t} \|\eta\|^2 + \frac{\varphi''(t)t - \varphi'(t)}{t^3} \|\eta\|^2 \|u\|^2, & t \in \Phi_- \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{\varphi'(t)}{t} \|\eta\|^2, & t \in \Phi_+; \\ \varphi''(t) \|\eta\|^2, & t \in \Phi_- \end{cases} \geq \min \left\{ \frac{\varphi'(t)}{t}, \varphi''(t) \right\} \|\eta\|^2.
 \end{aligned}$$

Из леммы 4.1 ясно, что производящая функция $f(u) = \varphi(\|u\|)$ удовлетворяет условию (3.8) теоремы 3.4, если для $\gamma(\|u\|) = \min\{\varphi'(\|u\|)/(\|u\|), \varphi''(\|u\|)\}$ выполнено неравенство $\gamma(\|u\|)(\gamma_2 + \sum_{m=0}^N |u_m|^\rho) \geq \gamma_1 \forall u \in U_+$ с некоторыми константами $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ и ρ , $0 \leq \rho \leq 1$. Тогда соответствующий функционал (3.2) имеет H -свойство на $\mathcal{D}$.

Приведем конкретные примеры таких функционалов:

$$\begin{aligned}
 \Omega_1[z(x)] &= \int_T \sqrt{\sum_{m=0}^N |D_m z(x)|^2} \ln \left(1 + \sqrt{\sum_{m=0}^N |D_m z(x)|^2} \right) dx, \\
 \Omega_2[z(x)] &= \int_T \exp \left(\sqrt{\sum_{m=0}^N |D_m z(x)|^2} \right) dx, \\
 \Omega_3[z(x)] &= \int_T \exp \left(\sum_{m=0}^N |D_m z(x)|^2 \right) dx.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Легко убедиться, что определяющие их функции $\varphi(\tau) = \tau \ln(1 + \tau)$, $\varphi(\tau) = \exp(\tau)$, $\varphi(\tau) = \exp(\tau^2)$ подчинены приведенным выше требованиям j), jj) и удовлетворяют условиям леммы 4.1. При этом для первых двух функций $\gamma(\|u\|) \geq (1 + \|u\|)^{-1} \geq (1 + \sum_{m=0}^N |u_m|)^{-1}$, т.е. $\rho = 1$, для третьей $\gamma(\|u\|) \geq 2$, так что $\rho = 0$.

4.2. Функционалы с производящей функцией $f(u) = \sum_{m=0}^N \varphi_m(|u_m|)$. Предположим, что каждая функция одной переменной $\varphi_m(\tau) \geq 0$ монотонно не убывает, дважды дифференцируема при $\tau \geq 0$ и $\varphi_m(\tau)/\tau \rightarrow +\infty$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Пусть, кроме того, существуют такие константы $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ и ρ , $0 \leq \rho \leq 1$, что выполнено условие $\varphi_m''(\tau)(\gamma_2 + |\tau|^\rho) \geq \gamma_1 \forall \tau \geq 0$. Тогда для всякого $u \in U_+$ выполнено неравенство

$$\sum_{m=0}^N \varphi_m''(|u_m|) \eta_m^2 \geq \gamma_1 \sum_{m=0}^N \frac{\eta_m^2}{\gamma_2 + |u_m|^\rho} \geq \gamma_1 \sum_{m=0}^N \frac{\eta_m^2}{\gamma_2 + \sum_{k=0}^N |u_k|^\rho}. \tag{4.3}$$

Это означает, что для рассматриваемой производящей функции выполнены все условия леммы 3.1 и теорем 3.4, 3.6. При этом условие iii) теоремы 3.6 выполнено с $\Phi_0(t) = \min\{\varphi_0(|t|), \dots, \varphi_N(|t|)\}$. Тогда по теореме 3.6 функционал

$$\Omega[z(x)] = \int_T \sum_{m=0}^N \varphi_m(|D_m z(x)|) dx \tag{4.4}$$

имеет H -свойство на множестве $\mathcal{D}$.

Приведем конкретные примеры. Пусть $\varphi_m(|u_m|) = \varphi(|u_m|)$, где $\varphi(\tau)$ — одна из функций, порождающих функционалы (4.2). Ясно, что эти $\varphi_m(\tau)$ удовлетворяют сформулированным требованиям. Поэтому функционалы вида

$$\begin{aligned}\Omega_4[z(x)] &= \int_T \sum_{m=0}^N |D_m z(x)| \ln(1 + |D_m z(x)|) dx, \\ \Omega_5[z(x)] &= \int_T \sum_{m=0}^N \exp(|D_m z(x)|) dx, \\ \Omega_6[z(x)] &= \int_T \sum_{m=0}^N \exp(D_m^2 z(x)) dx\end{aligned}$$

имеют H -свойство на соответствующих множествах $\mathcal{D} \subset W_1^1(T)$.

Особый интерес представляет функционал

$$\Omega_0[z(x)] = \int_T \sum_{m=0}^N D_m z(x) \ln(D_m z(x)) dx,$$

рассматриваемый на множестве

$$\mathcal{D}_0 = \{z(x) \in W_1^1(T) : D_m z(x) > 0, m = 0, 1, \dots, N, \Omega_0[z(x)] < \infty\}.$$

Такой функционал вида (4.4) используется в так называемом (обобщенном) методе максимальной энтропии [2], [6]. Введем вспомогательный функционал

$$\overline{\Omega}_0[z] = \Omega_0[z] + (N+1)e^{-1}\mu(T).$$

Для него $\varphi_m(\tau) = \varphi(\tau) = \tau \ln(\tau) + e^{-1} \geq 0$, $m = 0, 1, \dots, N$. Эта функция выпуклая, дважды дифференцируема при $\tau > 0$ и $\varphi(\tau)/\tau \rightarrow +\infty$, $\tau \rightarrow +\infty$, причем $\varphi''(\tau)(1+\tau) \geq 1$. Для функционала с производящей функцией $f(u) = \sum_{m=0}^N \varphi(u_m)$ на множестве $\{u \in \mathbb{R}^{N+1} : u_0, \dots, u_N > 0\}$ верны (с учетом замечания 3.7) лемма 3.1 и теоремы 3.4–3.6, причем условие (3.8) имеет вид (4.3) с $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\rho = 1$. Таким образом, функционал $\overline{\Omega}_0$, а значит и Ω_0 , имеет H -свойство на $\mathcal{D}_0$.

Список литературы

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
2. Леонов А. С. Обобщение метода максимальной энтропии для решения некорректных задач // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41. № 4. С. 863–872.
3. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
4. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
5. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
6. Amato U., Hughes W. Maximum entropy regularization of Fredholm integral equations of the first kind // Inverse Problems. 1991. V. 7. P. 793–808.

Московский инженерно-физический институт
(технический университет)
E-mail: leonov@illposed.msk.ru

Поступила в редакцию
24.06.2003