Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Кесельман, К критерию конформной параболичности риманова многообразия, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 3, 57–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8290>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:31:56

УДК 517.54+514.774

В. М. Кесельман

К критерию конформной параболичности риманова многообразия

Работа относится к кругу вопросов, касающихся связи конформного типа риманова многообразия и канонического вида его изопериметрической функции. В ней построены два специальных примера двумерных многообразий, разъясняющие смысл, роль и необходимость требований, которые присутствуют в полученном автором ранее критерии конформной параболичности некомпактного n -мерного риманова многообразия.

Библиография: 8 названий.

Ключевые слова: риманово многообразие, конформная метрика, конформная емкость, конформный тип многообразия, изопериметрическая функция риманова многообразия.

DOI: 10.4213/sm8290

§ 1. Введение

Некомпактные n -мерные римановы многообразия инвариантно относительно конформных замен метрики разбиваются на многообразия конформно-гиперболического типа (куда, например, входит пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$) и конформно-параболического типа (к таким многообразиям, например, относятся евклидово пространство $\mathbb{R}^n$).

В геометрической теории функций, точнее в теории римановых поверхностей, проблемой типа именуется круг задач, связанных с отысканием геометрических признаков (необходимых, достаточных условий и критериев) соответствующего конформного типа римановой поверхности.

Именно там впервые (по-видимому, Л. Альфорсом) была обнаружена связь этого вопроса с изопериметрическим неравенством.

Теория пространственных квазиконформных отображений привела к необходимости исследовать и решать проблему типа для римановых многообразий любой размерности.

В работах В. А. Зорича и автора была дана конформная классификация некомпактных n -мерных ($n \geq 2$) римановых многообразий и было доказано, что конформной заменой метрики изопериметрическая функция любого такого многообразия приводится к одному из двух канонических видов (к евклидову или Лобачевского) в соответствии с конформным типом исходного многообразия.

Наличие линейного изопериметрического неравенства, точнее реализуемость его в классе метрик, конформных исходной метрике многообразия, является критерием конформной гиперболичности многообразия.

Изопериметрическое же неравенство евклидова вида может выполняться на многообразиях любого конформного типа. Тем не менее в последующих работах автора результат о приведении изопериметрической функции к евклидову виду был развит и доведен до критерия конформной параболичности многообразия. Для этого понадобилась асимптотическая точность изопериметрического неравенства на семействе расширяющихся областей, исчерпывающих данное многообразие.

Более того, в параболическом случае на упомянутое исчерпание были наложены условия, которые в конечном счете требуют, чтобы исчерпание не было “диким”, а было близко к исчерпанию геодезическими шарами.

Цель настоящей работы – построение примеров (по сути контрпримеров), разъясняющих смысл, роль и необходимость этих дополнительных требований к исчерпанию в параболическом случае (который в некотором смысле является вырожденным по отношению к ситуации общего положения, когда многообразие имеет гиперболический конформный тип).

Идеи основных конструкций просты, но их реализации с подгонкой всех деталей оказались довольно трудоемкими. Однако в результате построенные примеры замыкают определенный круг результатов, относящихся к связи конформного типа риманова многообразия и канонического вида его изопериметрической функции.

§ 2. Основные понятия, цели и результаты

2.1. Конкретизация цели. Как уже отмечено, проблема типа, т.е. проблема отыскания геометрических признаков конформного типа некомпактного риманова многообразия, исходно появилась в двумерном случае в геометрической теории функций комплексного переменного и теории римановых поверхностей, а теория пространственных квазиконформных отображений привела к соответствующим вопросам и задачам в многомерном случае.

Это вопросы асимптотического (при уходе на бесконечность) поведения риманова многообразия, выраженные в терминах конформной геометрии, которая изучает свойства римановых многообразий, инвариантные относительно конформных замен метрики.

Напомним, что класс конформных (точнее, конформно-эквивалентных) метрик риманова многообразия (M^n, g) , $n \geq 2$, образуется умножением метрики g многообразия на всевозможные гладкие положительные функции $\lambda: M^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Мы рассматриваем некомпактные римановы многообразия M^n , которые всегда предполагаются (без дальнейших оговорок) связными. Допускается, что многообразие имеет край ∂M^n , хотя он может и отсутствовать. Нас интересует *изопериметрическое неравенство на M^n в метрике g* , под которым, как обычно, понимается соотношение вида

$$\mathcal{P}(V_g(D)) \leq S_g(\partial D), \quad (*)$$

справедливое для любой предкомпактной области $D \subset M^n$, имеющей в метрике g объем (т.е. n -мерную меру) $V_g(D)$ и площадь (т.е. $(n-1)$ -мерную меру) $S_g(\partial D)$ границы ∂D области D .

Здесь $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x)$, $0 < x < V_g(M^n)$, – некоторая функция, которая называется *изопериметрической функцией многообразия (M^n, g)* .

В случае, если $\partial M^n \neq \emptyset$, под границей ∂D будем понимать *относительную границу области D* (т.е. ту часть ее полной границы, которая лежит во внутренности многообразия) и будем обозначать ее также через $\partial^c D$.

В указанном случае $\partial M^n \neq \emptyset$ неравенство (*) называется также *относительным изопериметрическим неравенством*, а соответствующая изопериметрическая функция $\mathcal{P}$ – *относительной изопериметрической функцией*.

Среди всех изопериметрических функций многообразия (M^n, g) существует наибольшая функция, называемая *профилем многообразия*.

Изопериметрическая функция $\mathcal{P}$ будет профилем многообразия M^n в метрике g , если для любого $\varepsilon > 0$ она является ε -асимптотически точной (в метрике g), т.е. выполняется неравенство

$$S_g(\partial D) \leq (1 + \varepsilon) \mathcal{P}(V_g(D)) \quad (**)$$

для всех областей $D \subset M^n$ некоторого исчерпания многообразия M^n . Назовем такое исчерпание многообразия ε -асимптотически точным исчерпанием для функции $\mathcal{P}$ в метрике g .

Напомним хорошо известные изопериметрические неравенства для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$.

В $\mathbb{R}^n$ выполняется *евклидово изопериметрическое неравенство*

$$c(V(D))^{(n-1)/n} \leq S(\partial D), \quad (2.1)$$

где $c = nv_n^{1/n}$, v_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Иными словами, пространство $\mathbb{R}^n$ имеет изопериметрическую функцию вида $\mathcal{P}(x) = c \cdot x^{(n-1)/n}$.

В $\mathbb{H}^n$ выполняется *линейное изопериметрическое неравенство*

$$cV(D) \leq S(\partial D), \quad (2.2)$$

где $c = n - 1$. Итак, пространство $\mathbb{H}^n$ имеет изопериметрическую функцию линейного вида $\mathcal{P}(x) = c \cdot x$.

В неравенствах (2.1) и (2.2) объем V и площадь S рассматриваются в стандартных метриках соответствующих пространств $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{H}^n$.

Неравенство (2.1) является точным в $\mathbb{R}^n$, а неравенство (2.2) – асимптотически точным в $\mathbb{H}^n$, причем указанная для обоих неравенств точность реализуется на шаровых исчерпаниях соответствующих пространств.

Изопериметрическая функция (в частности, профиль многообразия) может иметь сколь угодно сложный вид или, наоборот, быть тождественно нулевой функцией. При конформных заменах метрики изопериметрическая функция многообразия, вообще говоря, меняется, однако при этом ее асимптотическое поведение на “бесконечности” (точнее, на областях, исчерпывающих многообразие) все же не является совсем произвольным и, оказывается, связано с конформным типом многообразия.

Конформный тип риманова многообразия – важный конформный инвариант (определение см., например, в [1]).

Формально для настоящей работы достаточно знать, что совокупность всех некомпактных римановых многообразий инвариантно относительно конформных замен метрики многообразия разбивается на два класса: класс многообразий конформно-параболического типа (включающий евклидово пространство $\mathbb{R}^n$) и класс многообразий конформно-гиперболического типа (куда относятся пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$ и открытый шар в $\mathbb{R}^n$).

Упомянутую выше связь асимптотического поведения изопериметрической функции многообразия на “бесконечности” с конформным типом многообразия выражает, например, следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (см. [2]). *Если для изопериметрической функции $\mathcal{P}$ (в какой-либо конформной метрике g многообразия M^n) сходится интеграл*

$$\int^{V_g(M^n)} \mathcal{P}(x)^{n/(1-n)} dx, \quad (2.3)$$

то многообразие M^n имеет конформно-гиперболический тип.

Значит, этот интеграл всегда расходится на многообразии M^n конформно-параболического типа.

Подчеркнем, что для многообразия M^n с непустым краем изопериметрическая функция $\mathcal{P}$ в этом утверждении предполагается относительной изопериметрической функцией.

В случае многообразия M^n бесконечного g -объема указанный интеграл расходится для функции евклидова вида $\mathcal{P}(x) = c \cdot x^{(n-1)/n}$ и сходится для функции линейного вида $\mathcal{P}(x) = c \cdot x$. Как было отмечено выше, именно такого вида функции являются изопериметрическими на каноническом конформно-параболическом пространстве $\mathbb{R}^n$ и каноническом конформно-гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n$ соответственно.

В. А. Зоричем была высказана следующая гипотеза.

Изопериметрическую функцию любого некомпактного n -мерного риманова многообразия в соответствии с его параболическим или гиперболическим конформным типом конформной заменой метрики можно привести либо к виду, который она имеет в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, либо к виду, который она имеет в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^n$.

В результате ряда работ (см. [3]–[6]) эта гипотеза в целом получила подтверждение и приобрела форму теоремы, названной теоремой о нормальном виде изопериметрической функции.

Более того, в работах [7], [8] обсуждался вопрос о возможности обращения этой теоремы. Итогом такого обсуждения, содержащим саму теорему о нормальном виде изопериметрической функции, выступают следующие два критерия конформного типа риманова многообразия.

ТЕОРЕМА. *Пусть M^n – произвольное некомпактное n -мерное ($n \geq 2$) риманово многообразие (с краем или без края).*

1) *Многообразие M^n имеет конформно-гиперболический тип тогда и только тогда, когда на M^n можно построить конформную исходной метрике многообразия метрику g , в которой объем многообразия M^n бесконечен, и существует изопериметрическая функция $\mathcal{P}$ линейного вида: $\mathcal{P}(x) = a \cdot x$ при всех $x > 0$, где $a > 0$ – некоторая постоянная.*

Более того, в этом критерии можно дополнительно считать, что для априори произвольно заданного $\varepsilon > 0$ изопериметрическая функция $\mathcal{P}$ является ε -асимптотически точной на исчерпании многообразия, сколь угодно близком к шаровому исчерпанию.

2) Многообразие M^n имеет конформно-параболический тип тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить конформную исходной метрике многообразия полную метрику g , в которой объем многообразия бесконечен, и существует ε -асимптотически точная изопериметрическая функция $\mathcal{P}$ евклидова вида $\mathcal{P}(x) = b \cdot x^{(n-1)/n}$ (где $x > \varepsilon$, $a, b > 0$ – некоторая постоянная) при условии, что указанная ε -асимптотическая точность реализуется на исчерпании многообразия, ε -близком к шаровому в метрике g .

Обратим внимание на то, что в формулировке достаточной части критерия 2) указанное там свойство исчерпания быть близким к шаровому является обязательным условием, в то время как критерий 1) действует и без этого предположения, которое там носит характер бонуса.

Отметим еще, что приведенное в критерии 2) требование к исчерпанию представляет собой несколько условий, составляющих определение понятия, названного нами *исчерпанием многообразия, ε -близким к шаровому* (это определение приведено в следующем пункте).

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать, что:

- во-первых, без какого-либо дополнительного предположения о виде ε -асимптотически точного исчерпания теорема не верна;
- во-вторых, существенны все условия, входящие в приводимое ниже определение исчерпания, ε -близкого к шаровому.

2.2. Исчерпание многообразия, близкое к шаровому. В сформулированной в предыдущем пункте теореме (для случая конформно-параболического многообразия) осталось неопределенным понятие исчерпания многообразия M^n , являющегося ε -близким к шаровому в метрике g . Приведем здесь определение указанного понятия.

Под *исчерпанием многообразия M^n* понимается, как обычно, семейство областей $D(t) \subset M^n$, $t \geq t_0$, таких, что $D(t_1) \subseteq D(t_2)$ при любых $t_0 \leq t_1 < t_2$, причем $\bigcup_t D(t) = M^n$. Здесь и далее $t_0 > 0$ фиксировано.

Непрерывная функция h на M^n называется *функцией исчерпания многообразия M^n* , если для всех значений $t \geq t_0$ множества

$$D_h(t) = \{p \in M^n \mid h(p) < t\}$$

являются предкомпактными, т.е. их замыкания $\overline{D_h(t)}$ компактны.

Говорят, что *исчерпание $\{D(t)\}$ многообразия M^n порождается функцией исчерпания h многообразия M^n* , если $D(t) = D_h(t)$ для всех достаточно больших значений $t > 0$.

Ясно, что две функции исчерпания h_1 и h_2 , порождающие одно и то же (в теоретико-множественном смысле) исчерпание многообразия M^n , связаны между собой соотношением $h_1 = \nu(h_2)$, где ν – некоторая положительная возрастающая функция.

В случае некомпактного полного многообразия (M^n, g) стандартным примером его функции исчерпания является функция расстояния $r_O = r_O(p)$, $p \in M^n$, от точки p до некоторой фиксированной точки $O \in M^n$.

Функция r_O порождает *шаровое исчерпание многообразия (M^n, g)* , состоящее из семейства геодезических шаров с центром в точке O . Функция r_O является локально липшицевой на M^n и характеризуется условием

$$|\nabla r_O|_g = 1 \quad \text{почти всюду в } M^n.$$

Здесь и всюду далее через $|\nabla(\cdot)|_g$ обозначается модуль градиента $\nabla(\cdot)$ соответствующей функции $(\cdot)$, рассматриваемый в метрике g .

В связи с указанными свойствами функции r_O произвольную локально липшицеву функцию исчерпания h многообразия M^n , удовлетворяющую почти всюду на каком-либо открытом множестве $H \subset M^n$ оценкам

$$1 - \varepsilon \leq |\nabla h|_g \leq 1 + \varepsilon \quad (2.4)$$

(для некоторого $\varepsilon \geq 0$), естественно называть ε -шаровой (или шаровой, если $\varepsilon = 0$) на области H в метрике g .

В приводимом ниже определении функция исчерпания h будет ε -шаровой вне некоторого множества $Q \subset M^n$ сколь угодно малого объема.

Одной из характеристик поведения локально липшицевой функции исчерпания h на произвольном множестве Q служит *неубывающая непрерывная функция* $\mu_{h,Q}(t)$, $t \geq t_0$ (для сколь угодно большого значения $t_0 > 0$), такая, что

$$\forall t \geq t_0 \quad \sup_{\partial D_h(t) \cap Q} |\nabla h|_g \leq \mu_{h,Q}(t). \quad (2.5)$$

Такую функцию $\mu_{h,Q}(t)$, $t \geq t_0$, будем называть *оценкой роста функции исчерпания h на множестве Q в метрике g* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Предположим, что многообразие M^n имеет бесконечный объем в метрике g . Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное, но фиксированное число. Исчерпание многообразия (M^n, g) будем называть *исчерпанием, ε -близким к шаровому в метрике g* , если оно порождается локально липшицевой функцией исчерпания h со следующими свойствами:

- (i) функция исчерпания h является ε -шаровой в метрике g вне некоторого замкнутого множества $Q \subset M^n$, объем которого $V_g(Q) < \varepsilon$;
- (ii) для указанного в (i) множества Q выполняется условие

$$\int^{+\infty} \frac{dt}{\mu_{h,Q}(t)} = +\infty, \quad (2.6)$$

где $\mu_{h,Q}(t)$ – оценка роста функции h на множестве Q в метрике g .

2.3. Формулировка основных результатов работы. В примерах (контрпримерах), которые мы строим ниже, в качестве основного многообразия будет выступать открытый круг U (для определенности – единичного радиуса) двумерной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, так что исходной метрикой в U является евклидова метрика, которую будем иногда обозначать через g_e . Значит, произвольная конформная метрика в (U, g_e) – это конформно-евклидова метрика.

В связи с тем, что размерность многообразия $n = 2$, принятые выше обозначения вместе с их названиями: V – объем и S – площадь, мы заменяем соответственно на более естественные в данном случае обозначения и термины: S – *площадь* и L – *длина*. При этом, как и прежде, если длины или площади рассматриваются в какой-либо метрике, отличной от евклидовой, эта метрика указывается в виде нижнего индекса.

Кроме того, вместо терминов “шар (на многообразии)”, “шаровое исчерпание”, “шаровая функция исчерпания (многообразия)” мы, конечно, будем говорить “круг”, “круговое исчерпание”, “круговая функция исчерпания” соответственно.

В частности, вместо слов “исчерпание, ε -близкое к шаровому” будем, разумеется, говорить “исчерпание, ε -близкое к круговому”.

Многообразие $U = (U, g_e)$ является простейшим примером многообразия конформно-гиперболического типа.

Для любой области $D \Subset U$ выполняется евклидово изопериметрическое неравенство (2.1), которое при $n = 2$ принимает следующий вид:

$$2\sqrt{\pi}\sqrt{S(D)} \leq L(\partial D), \quad (2.7)$$

и это неравенство является точным (т.е. обращается в равенство) в случае, когда область D представляет собой какой-либо круг.

То, что в круге (U, g_e) действует евклидово изопериметрическое неравенство, точное на круговом исчерпании круга, не противоречит приведенному в основной теореме критерию конформной параболичности многообразия (точнее, достаточной части этого критерия), поскольку многообразие (U, g_e) непольно и имеет конечную площадь.

Тем не менее в круге U (имеющем гиперболический конформный тип) можно построить конформно-евклидову полную метрику, в которой площадь круга бесконечна и будет выполняться асимптотически точное изопериметрическое неравенство евклидова вида на исчерпании, которое всего лишь немного (в уточненном ниже смысле) отличается в этой метрике от кругового исчерпания.

Дадим теперь точные формулировки рассматриваемых примеров. Сами их построения и все обоснования будут приведены в следующих параграфах.

ПРИМЕР 1. В открытом круге U евклидовой плоскости для любого $\varepsilon > 0$ строится конформно-евклидова полная метрика g , в которой площадь круга U бесконечна, и выполняется ε -асимптотически точное евклидова вида изопериметрическое неравенство

$$C\sqrt{S_g(D)} \leq L_g(\partial D) \quad (2.8)$$

для всех предкомпактных областей в U таких, что $S_g(D) > \varepsilon$.

При этом ε -асимптотически точное исчерпание круга U , соответствующее неравенству (2.8), порождается такой функцией исчерпания h круга U , которая обладает следующими свойствами:

- (i) функция исчерпания h является ε -круговой в метрике g вне некоторой замкнутой области Q , для которой $S_g(Q) < \varepsilon$;
- (ii) на самой области Q оценкой $\mu_{h,Q}(t)$ роста рассматриваемой функции исчерпания h в метрике g может служить вещественная функция

$$\mu_{h,Q}(t) = ct \ln^2 t, \quad t \geq t_0, \quad (2.9)$$

где значение $t_0 > 0$ сколь угодно велико, $c > 0$ – некоторая постоянная.

Напомним, что функция $\mu_{h,Q}(t)$, $t \geq t_0$, согласно определению удовлетворяет условию (2.5).

ПРИМЕР 2. В открытом круге U евклидовой плоскости строится замкнутая относительно U некомпактная подобласть $\tilde{U}$, которая имеет конформно-гиперболический тип (в классе конформно-евклидовых метрик).

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ строится конформно-евклидова полная метрика $\tilde{g}$ в $\tilde{U}$, в которой площадь области $\tilde{U}$ бесконечна и выполняется ε -асимптотически точное евклидова вида относительное изопериметрическое неравенство (2.8) (с заменой в нем g на $\tilde{g}$) для всех предкомпактных областей $D \in \tilde{U}$ таких, что $S_{\tilde{g}}(D) > \varepsilon$.

При этом ε -асимптотически точное исчерпание области $\tilde{U}$, соответствующее неравенству (2.8), обладает всеми свойствами определения 1 исчерпания, близкого к ε -круговому в метрике $\tilde{g}$, за исключением монотонности функции $\mu_{h,Q}(t)$, удовлетворяющей условиям (2.5) и (2.6).

ДОПОЛНЕНИЕ. При фиксированном значении ε изопериметрическую постоянную C в неравенстве (2.8) для примеров 1 и 2 можно выбрать сколь угодно близкой слева к числу $\sqrt{2\pi}$.

Итак, примеры 1 и 2 показывают не только необходимость каких-то требований к исчерпанию, на котором реализуется асимптотическая точность евклидова изопериметрического неравенства в критерии конформной параболичности риманова многообразия (см. часть 2) приведенной выше теоремы), но также роль и существенность каждого из условий определения 1 исчерпания, ε -близкого к шаровому, главным образом определенную точность условия (2.6) на рост функции $\mu_{h,Q}(t)$ и требование монотонности этой функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Оценка (2.9) является точной по степени t и может быть усилена лишь по степени функции $\ln t$. Возможно, точной по степени вхождения логарифма является оценка $\mu_{h,Q}(t) \leq ct \ln^\alpha t$ с любым $\alpha > 1$.

§ 3. Описание конструкций примера 1

3.1. Схема построения примера 1. Для удобства читателя сначала опишем в общих чертах построение примера 1, обратив внимание на принципиальные моменты этого построения.

В круге U рассматриваются две гладкие не пересекающиеся между собой спирали, которые идут от центра к границе круга, навиваясь на граничную окружность. Эти спирали разбивают круг U на две односвязные области с общей границей, составленной из самих спиралей. Пусть это будут области H и Q . Одна из указанных областей (для определенности область H) будет основным носителем будущей метрики.

Мы отображаем область H конформно на верхнюю полуплоскость, обозначаемую через Π , переводя центр круга U – граничную точку области H – в начало координат комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и переносим в H метрику полуплоскости, обозначая ее через g_H .

Поскольку на замкнутой полуплоскости $\bar{\Pi}$ действует классическое относительное изопериметрическое неравенство, точное на полуокружностях с диаметром на границе полуплоскости, то такое же относительное изопериметрическое неравенство будет автоматически выполнено в замкнутой (относительно круга U) области $\bar{H}$ по отношению к метрике g_H , причем оно будет точным, например, на прообразах B_r полуокружностей $\{z \in \bar{\Pi} \mid |z| \leq r\}$.

Теперь нам предстоит некоторым разумным образом распространить построенную в замкнутой области $\bar{H}$ метрику g_H до искомой конформно-евклидовой

метрики g на всем круге U . (Круг имеет конформно-гиперболический тип, в отличие от конформно-параболической области $\bar{H}$.)

Если, продолжая метрику g_H до метрики g во всем круге (с учетом заданного значения ε), сделать меру (площадь) области Q достаточно малой, то уже и в круге U с метрикой g (как и в области $\bar{H}$ с метрикой g_H) также будет выполняться евклидова вида изопериметрическое неравенство, правда, для областей, g -площадь которых больше ε .

Одновременно продолжая в область Q метрику g_H до метрики g , мы подчиняем g условию отграниченности от нуля в этой области, чтобы обеспечить полноту итоговой метрики g в круге.

Наиболее деликатная часть построения связана с достижением в метрике g асимптотической точности указанного изопериметрического неравенства, реализуемой на исчерпании круга с обещанной оценкой роста (2.9) этого исчерпания на области Q .

Для этого строится специального вида функция исчерпания q области $\bar{Q}$. С ее помощью исчерпание $\{B_r\}$ области $\bar{H}$ дополняется до исчерпания всего круга U , причем одновременно продолжение метрики g_H в область Q выполняется так, что g -длины всех линий уровня функции исчерпания q оказываются достаточно малыми (в соответствии с ε).

В результате в построенной метрике g функция исчерпания h круга U , порождающая его указанное исчерпание, благодаря своему специально подобранному виду в области Q удовлетворяет в этой области оценке роста (2.9).

Наконец, отметим, что технически удобнее работать не со спиралевидными подобластями H и Q круга U , а с представляющими их областями, обозначаемыми соответственно через $\mathcal{H}$ и $\mathcal{Q}$, в плоскости полярных координат. Поэтому описанные выше построения сначала проводятся для областей $\mathcal{H}$ и $\mathcal{Q}$, а затем переносятся на области H и Q с помощью перехода $\theta: (\varphi, \rho) \rightarrow (x, y)$ от полярных координат к декартовым.

Отображение θ не является конформным, однако оно почти изометрично в той части области $\mathcal{H}$ или $\mathcal{Q}$, где радиус ρ достаточно близок к единице, и этого обстоятельства оказывается достаточно, чтобы перенести описанные построения из областей $\mathcal{H}$ и $\mathcal{Q}$ в единичный круг.

3.2. Определения областей H и $\mathcal{H}$, Q и $\mathcal{Q}$. Возьмем в единичном круге U две гладкие не пересекающиеся между собой спирали Γ_a , Γ_b , которые идут от центра к границе круга, навиваясь на граничную окружность. Пусть $\rho = \Gamma_a(\varphi)$ и $\rho = \Gamma_b(\varphi)$ – уравнения кривых Γ_a и Γ_b в полярных координатах (φ, ρ) , $-\infty < \varphi < +\infty$, $0 \leq \rho < 1$.

Спираль Γ_a и Γ_b разбивают круг U на две односвязные области, которые обозначим через H и Q :

$$\begin{aligned} H &:= \{(x, y) \in U : \Gamma_b(\varphi) < \rho < \Gamma_a(\varphi)\}, \\ Q &:= \{(x, y) \in U : \Gamma_a(\varphi - 2\pi) < \rho < \Gamma_b(\varphi)\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для точности определений (3.1) полагаем, что $\Gamma_a(\varphi) = 0$ при $\varphi \leq a$ и $\Gamma_b(\varphi) = 0$ при $\varphi \leq b$, где числа a и b такие, что $0 \leq a < b < a + 2\pi$.

Технически удобнее работать не со спиралевидными подобластями H и Q круга U , а с представляющими их областями, обозначаемыми соответственно через $\mathcal{H}$ и $\mathcal{Q}$, в плоскости полярных координат (φ, ρ) .

Формально области $\mathcal{H}$ и $\mathcal{Q}$ определяются двойными неравенствами, фигурирующими в определениях (3.1) областей H и Q соответственно. Таким образом, если θ – переход от полярных координат к декартовым,

$$\theta: (\varphi, \rho) \rightarrow (x, y), \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (3.2)$$

то $\overline{H} = \theta(\overline{\mathcal{H}})$ и $Q = \theta(\overline{\mathcal{Q}})$, причем отображения $\theta|_{\overline{\mathcal{H}}}: \overline{\mathcal{H}} \rightarrow \overline{H}$ и $\theta|_{\overline{\mathcal{Q}}}: \overline{\mathcal{Q}} \rightarrow \overline{Q}$ диффеоморфны, за исключением точек, где $\rho = 0$.

Боковые границы областей $\mathcal{H}$ и $\mathcal{Q}$ составляют кривые

$$\mathcal{T}_a := \{\rho = \Gamma_a(\varphi)\}, \quad \mathcal{T}_b := \{\rho = \Gamma_b(\varphi)\}, \quad \mathcal{T}_{a+2\pi} := \{\rho = \Gamma_a(\varphi - 2\pi)\}, \quad (3.3)$$

являющиеся прообразами спиралей Γ_a и Γ_b при отображении (3.2).

Точнее, кривые $\mathcal{T}_a$ и $\mathcal{T}_b$ ограничивают соответственно слева и справа область $\mathcal{H}$, а кривые $\mathcal{T}_b$ и $\mathcal{T}_{a+2\pi}$ ограничивают соответственно слева и справа область $\mathcal{Q}$. Снизу области $\mathcal{H}$ и $\mathcal{Q}$ ограничены соответственно отрезками $[a, b]$ и $[b, a + 2\pi]$ оси $O\varphi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Соотношение $dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$ показывает, что если $\rho \in [\tau, 1]$, где $\tau > 0$, то переход θ между декартовыми и полярными координатами является квазиизометрией, причем отображение θ тем ближе к изометрии, чем ρ ближе к 1.

Вообще в любой точке $\zeta = (\varphi, \rho)$ при $0 < \rho < 1$ дифференциал $d\theta_\zeta$ отображения θ удовлетворяет, очевидно, неравенствам

$$\rho|v| \leq |d\theta_\zeta(v)| \leq |v|, \quad (3.4)$$

где $|v|$ и $|d\theta_\zeta(v)|$ – евклидова норма (длина) соответствующего вектора.

Конкретные определения спиралей. Конкретизируем сейчас рассматриваемые спирали Γ_a и Γ_b , а точнее, определяющие их функции $\Gamma_a(\varphi)$ и $\Gamma_b(\varphi)$. Именно, всюду далее считаем

$$\begin{aligned} \Gamma_a(\varphi) &:= \frac{2}{\pi} \arccos e^{\pi(a-\varphi)/2}, & \varphi \in [a, +\infty), \\ \Gamma_b(\varphi) &:= \frac{2}{\pi} \arccos e^{\pi(b-\varphi)/2}, & \varphi \in [b, +\infty). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Легко проверить, что указанные функции удовлетворяют условиям

$$\Gamma_a(a) = 0, \quad \Gamma_b(b) = 0, \quad \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \Gamma_a(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \Gamma_b(\varphi) = 1, \quad (3.6)$$

$$\forall \varphi > b \quad \Gamma_a(\varphi) > \Gamma_b(\varphi) > \Gamma_a(\varphi - 2\pi). \quad (3.7)$$

Эти условия обеспечивают корректность определений (3.1) областей H и Q , образующих разбиение круга U , и связанных с ними областей $\mathcal{H}$ и $\mathcal{Q}$.

3.3. Определение вспомогательной метрики $g_{\mathcal{H}}$ в области $\overline{\mathcal{H}}$. Построим некоторое конформное отображение области $\mathcal{H}$ на верхнюю полуплоскость Π , гомеоморфно продолженное до отображения

$$\eta: \overline{\mathcal{H}} \rightarrow \overline{\Pi}, \quad (3.8)$$

и перенесем в $\overline{\mathcal{H}}$ метрику полуплоскости $\overline{\Pi}$, обозначив ее через $g_{\mathcal{H}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. По самому определению в метрике $g_{\mathcal{H}}$ длина произвольной спрямляемой кривой $\gamma \subset \overline{\mathcal{H}}$ и площадь произвольной предкомпактной области $D \subset \overline{\mathcal{H}}$ находятся как евклидовы длина кривой $\eta(\gamma) \subset \overline{\Pi}$ и площадь области $\eta(D) \subset \overline{\Pi}$ соответственно.

Как известно, на замкнутой полуплоскости $\overline{\Pi}$ выполняется классическое относительное изопериметрическое неравенство

$$\sqrt{2\pi}\sqrt{S(D)} \leq L(\partial^c D) \quad (3.9)$$

для произвольной предкомпактной области $D \subset \overline{\Pi}$ площади $S(D)$ с кусочно гладкой относительно в $\overline{\Pi}$ границей длины $L(\partial^c D)$.

При этом указанное неравенство является точным (т.е. обращается в равенство) для области D , представляющей собой любой полукруг $B^+(r)$ радиуса r с диаметром, лежащим на границе $\partial\Pi$ полуплоскости Π .

Тогда в силу замечания 3 изопериметрическое неравенство (3.9) автоматически переносится в область $\overline{\mathcal{H}}$ с метрикой $g_{\mathcal{H}}$. Точнее, справедлива

ЛЕММА 1. Для произвольной предкомпактной открытой в $\overline{\mathcal{H}}$ области $D \subset \overline{\mathcal{H}}$ с кусочно гладкой относительно в $\overline{\mathcal{H}}$ границей $\partial_{\mathcal{H}}^c D$ выполняется относительное изопериметрическое неравенство

$$\sqrt{2\pi}\sqrt{S_{g_{\mathcal{H}}}(D)} \leq L_{g_{\mathcal{H}}}(\partial_{\mathcal{H}}^c D), \quad (3.10)$$

где $S_{g_{\mathcal{H}}}$ и $L_{g_{\mathcal{H}}}$ – соответственно площадь и длина в метрике $g_{\mathcal{H}}$.

При этом неравенство (3.10) является точным, а именно, обращается в равенство для любой области D , являющейся прообразом при отображении η полукруга $B^+(r)$ радиуса r с диаметром на $\partial\Pi$. Иными словами,

$$\forall r > 0 \quad \sqrt{2\pi}\sqrt{S_{g_{\mathcal{H}}}(B_{\eta}(r))} = L_{g_{\mathcal{H}}}(E_{\eta}(r)), \quad (3.11)$$

где приняты обозначения

$$B_{\eta}(r) := \eta^{-1}(B^+(r)), \quad E_{\eta}(r) := \eta^{-1}(\partial B^+(r) \cap \Pi). \quad (3.12)$$

Заметим, что семейство $\{B_{\eta}(r)\}$, $r > 0$, образует круговое исчерпание области $\overline{\mathcal{H}}$ в метрике $g_{\mathcal{H}}$, а функцией, порождающей это исчерпание, может служить модуль $|\eta|$ функции (3.8).

Поэтому равенства (3.11) означают, что функция $|\eta|$ является точной функцией исчерпания замкнутой области $\overline{\mathcal{H}}$.

Конкретизация отображения η . Построим конкретное отображение (3.8), представив его в виде суперпозиции двух отображений: отображения области $\overline{\mathcal{H}}$ в прямолинейную полуполосу и отображения этой полуполосы в полуплоскость $\overline{\Pi} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y \geq 0\}$.

Первое из названных отображений определим следующей функцией:

$$e(\zeta) := e^{\pi(\zeta - i)/2}, \quad \zeta = \varphi + i\rho \in \mathbb{C}, \quad (3.13)$$

которая однолистка на областях $\overline{\mathcal{H}}$ и $\overline{\mathcal{D}}$.

Непосредственно проверяется с использованием уравнения (3.5), что отображение (3.13) конформно отображает область $\overline{\mathcal{H}}$ в полуполосу

$$\overline{P}_{\mathcal{H}} := \{u + iv \in \mathbb{C} : u \geq 0, -e^{\pi b/2} \leq v \leq -e^{\pi a/2}\}. \quad (3.14)$$

При этом кривые $\mathcal{T}_a$ и $\mathcal{T}_b$ вида (3.3) переходят соответственно в горизонтальные лучи l_a и l_b , где используется обозначение

$$l_c := \{u - ie^{\pi c/2} \in \mathbb{C}, u \geq 0\}, \quad c > 0. \quad (3.15)$$

Теперь воспользуемся функцией $\sin(u + iv)$, которая, как известно, переводит полуполосу $\{u + iv \in \mathbb{C} : |u| \leq \pi/2, v \geq 0\}$ в замкнутую полуплоскость $\overline{\Pi}$, однолистка на этой полуполосе и конформна в ней всюду, за исключением двух угловых точек $(\pm\pi/2, 0)$. Тогда функция

$$s(w) := \sin \frac{i\pi}{2c_2}(w + ic_1), \quad w = u + iv \in \mathbb{C}, \quad (3.16)$$

где обозначено $c_1 := \frac{1}{2}(e^{\pi a/2} + e^{\pi b/2})$ и $c_2 := \frac{1}{2}(e^{\pi b/2} - e^{\pi a/2})$, осуществляет диффеоморфное отображение полуполосы $\overline{P}_{\mathcal{H}}$ из (3.14) в замкнутую полуплоскость $\overline{\Pi}$, причем это отображение конформно в полуполосе $\overline{P}_{\mathcal{H}}$ всюду, за исключением двух точек $(0, -e^{\pi b/2})$ и $(0, -e^{\pi a/2})$.

В результате построено отображение (3.8), имеющее вид

$$\eta := s \circ e, \quad (3.17)$$

где функции $e: \overline{\mathcal{H}} \rightarrow \overline{P}_{\mathcal{H}}$ и $s: \overline{P}_{\mathcal{H}} \rightarrow \overline{\Pi}$ определены в (3.13) и (3.16).

Отображение $\eta = \eta(\zeta)$, $\zeta = \varphi + i\rho$, является конформным ($\eta'_\zeta \neq 0$) во всех точках области $\overline{\mathcal{H}}$, за исключением двух точек $A = (a, 0)$ и $B = (b, 0)$ (в этих точках $\eta'_\zeta = 0$).

В силу построения отображение η переводит кривые $\mathcal{T}_a$ и $\mathcal{T}_b$ соответственно в лучи $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ вещественной оси, а отрезок $[a, b]$ нижней части границы области $\mathcal{H}$ переходит в отрезок $[-1, 1]$ вещественной оси.

Конкретизация метрики $g_{\mathcal{H}}$. Теперь, используя конкретный вид (3.17) отображения (3.8), запишем в явном виде введенную выше метрику $g_{\mathcal{H}}$ в области $\overline{\mathcal{H}}$:

$$\forall \zeta = (\varphi, \rho) \in \overline{\mathcal{H}} \quad g_{\mathcal{H}}(\zeta) = \lambda_{\mathcal{H}}^2(\zeta) (d\varphi^2 + d\rho^2), \quad \text{где} \quad \lambda_{\mathcal{H}}(\zeta) := |\eta'_\zeta(\zeta)|, \quad (3.18)$$

а η'_ζ – производная функции η , определенной формулой (3.17).

Поскольку $\lambda_{\mathcal{H}} = 0$ только в точках $A(a, 0)$ и $B(b, 0)$, то $g_{\mathcal{H}}$ является конформно-евклидовой метрикой в области $\overline{\mathcal{H}} \setminus \{A \cup B\}$.

3.4. Определение функции исчерпания q области $\overline{\mathcal{Q}}$. Построим функцию q исчерпания области $\overline{\mathcal{Q}}$, осуществляющую продолжение исчерпания $\{B_\eta(r)\}$ вида (3.12) области $\overline{\mathcal{H}}$, причем такое, что области порожденного функцией q исчерпания вместе с областями $B_\eta(r)$ после их отображения (3.2) из плоскости переменных (φ, ρ) в плоскость переменных (x, y) можно будет “склеить” друг с другом в открытые области $D(r)$, составляющие исчерпание круга U .

Такая функция q должна учитывать “склепку” соответствующих точек кривых $\mathcal{T}_a$ и $\mathcal{T}_{a+2\pi}$ при переходе (3.2), и это требование выражается условием (3.21) нижеследующей леммы.

На основании остальных свойств леммы указанное исчерпание $\{D(r)\}$ станет искомым ε -асимптотически точным исчерпанием с обещанной оценкой (2.9) роста функции этого исчерпания в области Q .

Прежде чем определять указанную функцию q , введем обозначения для точек пересечения кривых $E_\eta(r)$ вида (3.12) (т.е. линий r -уровня функции $|\eta|$) с компонентами $\mathcal{T}_a$ и $\mathcal{T}_b$ боковой границы области $\mathcal{H}$:

$$\forall r \geq 1 \quad \zeta_a(r) := E_\eta(r) \cap \mathcal{T}_a, \quad \zeta_b(r) := E_\eta(r) \cap \mathcal{T}_b. \quad (3.19)$$

При $r < 1$ кривая $E_\eta(r)$ не пересекает кривые $\mathcal{T}_a$ и $\mathcal{T}_b$, поскольку последние под действием отображения η переходят, как было отмечено в конце предыдущего пункта, в лучи $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ вещественной оси.

ЛЕММА 2. *Определим функцию $q = q(\zeta)$, $\zeta = (\varphi, \rho) \in \overline{\mathcal{D}}$, полагая*

$$q(\zeta) := \frac{e^{\pi\varphi/2} \sin(\pi\rho/2)}{e^{\pi\varphi/2} \cos(\pi\rho/2) - A}, \quad (3.20)$$

где $A = e^{\pi^2}(e^{\pi b/2} - e^{\pi a/2})/(e^{\pi^2} - 1)$ – положительная постоянная.

Тогда q является функцией исчерпания замкнутой области $\overline{\mathcal{D}}$ и удовлетворяет следующим свойствам:

$$\forall r > 1 \quad q(\zeta_a(r) + 2\pi) = q(\zeta_b(r)), \quad (3.21)$$

где $\zeta_a(r)$ и $\zeta_b(r)$ определены в (3.19) и понимаются как комплексное числа;

$$|\nabla q| = O(q^2) \quad \text{при} \quad q \rightarrow +\infty, \quad (3.22)$$

где $|\nabla q|$ рассматривается в евклидовой метрике.

Кроме того, если $E_q(t) := q^{-1}(t)$ – линия t -уровня функции q , то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} L(E_q(t)) = 2\pi, \quad (3.23)$$

где L обозначает евклидову длину соответствующей кривой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся в справедливости равенства (3.21). Как отмечено в п. 3.3, при отображении (3.13) кривые $\mathcal{T}_a$ и $\mathcal{T}_b$, заданные уравнениями (3.5), переходят соответственно в горизонтальные лучи l_a и l_b , определенные в (3.15). Поэтому, вычисляя мнимую часть функции $e(\zeta)$, имеем равенства

$$\forall \zeta \in \mathcal{T}_a \quad e^{\pi\varphi/2} \cos \frac{\pi\rho}{2} = e^{\pi a/2}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{T}_b \quad e^{\pi\varphi/2} \cos \frac{\pi\rho}{2} = e^{\pi b/2}. \quad (3.24)$$

Далее, по определению (3.19) точки $\eta(\zeta_a(r))$ и $\eta(\zeta_b(r))$ лежат на вещественной оси (границе полуплоскости Π) симметрично относительно нуля. Согласно заданию (3.17) отображения η указанные точки являются образами точек $e(\zeta_a(r))$ и $e(\zeta_b(r))$ при отображении s . Тогда, используя явный вид (3.16) функции s , заключаем, что точки $e(\zeta_a(r))$ и $e(\zeta_b(r))$ имеют одинаковые вещественные части. Поэтому, вычисляя вещественную часть функции $e(\zeta)$, получаем

$$e^{\pi\varphi_{a,r}/2} \sin \frac{\pi\rho_{a,r}}{2} = e^{\pi\varphi_{b,r}/2} \sin \frac{\pi\rho_{b,r}}{2}, \quad (3.25)$$

где через $(\varphi_{a,r}, \rho_{a,r})$ и $(\varphi_{b,r}, \rho_{b,r})$ обозначены полярные координаты точек $\zeta_a(r)$ и $\zeta_b(r)$ соответственно.

Теперь равенство (3.21) непосредственно вытекает из соотношений (3.24) и (3.25) с учетом определения числа A .

Остальные свойства (3.22) и (3.23) функции q легко выводятся из конкретного вида (3.20) этой функции.

3.5. Определение функции исчерпания h круга U . Теперь с помощью построенных выше функции $|\eta|$ исчерпания области $\mathcal{H}$ (см. п. 3.3) и функции q исчерпания области $\overline{\mathcal{Q}}$ (см. п. 3.4) образуем, используя отображение (3.2) перехода из плоскости переменных (φ, ρ) в плоскость исходных переменных (x, y) , искомую для примера 1 функцию исчерпания h круга U .

Сначала для согласования значений функций $|\eta|$ и q на кривой $\mathcal{T}_b$, являющейся общей границей областей $\mathcal{H}$ и $\overline{\mathcal{Q}}$ (см. п. 3.2), введем следующую вещественную функцию $\nu = \nu(t)$, $t > 0$:

$$\forall t > 0 \quad \nu(t) := |\eta|_{|\mathcal{T}_b} \circ q_{|\mathcal{T}_b}^{-1}(t), \quad (3.26)$$

где через $|\eta|_{|\mathcal{T}_b}$ и $q_{|\mathcal{T}_b}$ обозначены следы функций $|\eta|$ и q на $\mathcal{T}_b$.

ЛЕММА 3. *Определим в круге U функцию*

$$h := \begin{cases} |\eta| \circ \theta_{|\mathcal{H}}^{-1} & \text{в } \overline{H} \setminus O \quad (h(O) := 1), \\ \nu(q) \circ \theta_{|\overline{\mathcal{Q}}}^{-1} & \text{в } \overline{Q}, \end{cases} \quad (3.27)$$

где вещественная функция ν определена в (3.26). Здесь и далее ради краткости применяются следующие обозначения: $\theta_{|\mathcal{H}}^{-1} := (\theta_{|\mathcal{H}})^{-1}$ и $\theta_{|\overline{\mathcal{Q}}}^{-1} := (\theta_{|\overline{\mathcal{Q}}})^{-1}$.

Тогда функция h является кусочно гладкой функцией исчерпания круга U и удовлетворяет (в евклидовой метрике) соотношению

$$|\nabla h| = O(h \ln^2 h) \quad \text{в области } \overline{Q} \text{ при } h \rightarrow +\infty. \quad (3.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что условие (3.21) для функции q обеспечивает непрерывность функции h на границах областей H и Q , а значит h кусочно-гладкое в круге U .

С учетом оценки $|\nabla \theta| \geq \rho$ (см. (3.4)) соотношение (3.28) непосредственно вытекает из соотношения (3.22), если использовать явный вид функции ν , который легко получить на основании определений (3.17) и (3.20) отображения η и функции q соответственно. А именно

$$\forall t > 0 \quad \nu(t) = \text{ch}(ct) \quad (3.29)$$

для некоторой абсолютной постоянной $c > 0$.

3.6. Построение метрики g в круге U . Построим, наконец, искомую для примера 1 метрику g в круге U . Напомним, что в области $\mathcal{H}$ построена метрика $g_{\mathcal{H}}$ вида (3.18). Тогда под действием отображения (3.2) эта метрика индуцирует в области $\overline{H}$ конформно-евклидову метрику g_H следующего вида:

$$\forall p = (x, y) \in \overline{H} \quad g_H(p) = \lambda_H^2(p) (dx^2 + dy^2), \quad \text{где } \lambda_H := \lambda_{\mathcal{H}} \circ \theta_{|\mathcal{H}}^{-1}. \quad (3.30)$$

Мы будем использовать эту метрику только в той части области H , которая лежит вне некоторого круга с центром в точке O какого-либо радиуса $\tau \in (0, 1)$. Эту часть области H будем обозначать через H_τ , а дополнительную к $\overline{H_\tau}$ часть всего круга U обозначим через Q_τ .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из соотношений (3.4) непосредственно следует (см. лемму 8), что метрика g_H в области $\overline{H_\tau}$ квазиизометрична метрике $g_{\mathcal{H}}$ в соответствующей области при отображении $\theta: \mathcal{H} \rightarrow \overline{H}$.

В частности, в силу леммы 1 в области $\overline{H_\tau}$ с метрикой g_H также действует относительное изопериметрическое неравенство евклидова вида, асимптотически точное на ε -круговом исчерпании (для некоторого $\varepsilon > 0$), соответствующем круговому исчерпанию $\{B_\eta(r)\}$, $r > 0$, области $\mathcal{H}$ при отображении θ .

Теперь продолжим метрику g_H в область Q_τ до метрики, обозначаемой далее через g_τ , с соблюдением следующих условий.

Во-первых, метрика g_τ должна быть отграниченной от нуля всюду в Q_τ . Это достижимо ввиду легко проверяемого свойства отграниченности от нуля метрики g_H в области H_τ .

Во-вторых, относительно метрики g_τ площадь области Q_τ должна оставаться конечной или, что не меняет дела, быть достаточно малой.

В-третьих, продолжение g_τ в область Q_τ должно быть связано с линиями уровня $E_h(t) = h^{-1}(t)$, $t > 0$, определенной в (3.27) функции исчерпания h круга U . А именно, в метрике g_τ длины частей $E_h(t) \cap Q_\tau$ всех линий уровня $E_h(t)$ должны быть равномерно ограничены сверху.

Последнее условие (несмотря на отграниченность от нуля метрики g_τ) обеспечивается вытекающим из (3.23) свойством равномерной ограниченности сверху евклидовых длин всех указанных частей $E_h(t) \cap Q_\tau$.

Наконец, искомая метрика g будет отличаться от построенной метрики g_τ произвольным положительным множителем, который подбирается в зависимости от произвольно заданного в примере 1 числа $\varepsilon > 0$.

Результат описанных построений резюмирует

ЛЕММА 4. Возьмем произвольное $\tau \in (0, 1)$, и пусть $U(\tau) \subset U$ – открытый круг с центром в точке O евклидова радиуса τ . Обозначим

$$H_\tau := H \setminus \overline{U(\tau)}, \quad Q_\tau := U \setminus \overline{H_\tau}. \quad (3.31)$$

Тогда в круге U можно построить гладкую положительную функцию λ , для которой конформно-евклидова метрика g_τ вида

$$g_\tau(p) = \lambda^2(p) (dx^2 + dy^2) \quad \forall p = (x, y) \in U \quad (3.32)$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$g_\tau = g_H \quad \text{всюду в } \overline{H_\tau}, \quad (3.33)$$

где метрика g_H в области $\overline{H}$ определена в (3.30);

$$\lambda \geq \delta \quad \text{всюду в } \overline{Q_\tau}, \quad (3.34)$$

где $\delta > 0$ – сколь угодно малая (в зависимости от τ) постоянная;

$$S_{g_\tau}(Q_\tau) < \delta^2, \quad (3.35)$$

$$\forall t > t_0 \quad L_{g_\tau}(E_h(t) \cap Q_\tau) < c, \quad (3.36)$$

где $E_h(t) := h^{-1}(t)$ – линии уровня функции (3.27), а $t_0 > 0$ и $c > 0$ – некоторые сколь угодно большие значения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для произвольных $\tau \in (0, 1)$ и $\epsilon > 0$ положим

$$g := \epsilon^2 g_\tau, \quad (3.37)$$

где метрика g_τ определена в (3.32).

Желающие ограничиться рассмотрением примера 1 могут сразу перейти к § 5, где рассматривается обоснование его утверждений.

§ 4. Описание конструкций примера 2

4.1. Схематичное описание примера 2. В примере 1 в круге U построена метрика $g = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$, основная часть которой сосредоточена в области H (см. замечание 4), а в дополнительной к $\bar{H}$ области Q метрика g удовлетворяет условиям (3.34), (3.35) и (3.36) леммы 4.

Построена также функция h исчерпания круга U , которая, как будет доказано в § 5, служит в метрике g искомой для примера 1 асимптотически точной функцией исчерпания для евклидова вида изопериметрического неравенства.

Для построения примера 2 будут произведены определенные изменения как метрики g (точнее, функции λ), так и функции h , но только в области Q , включая изменение самой этой области.

Более того, эти изменения будут выполнены лишь на некоторой последовательности достаточно узких не пересекающихся между собой полосок в Q , соединяющих противоположные части границы области Q , т.е. спирали Γ_b и $\Gamma_{a+2\pi}$. Две компоненты границы каждой такой полоски, лежащие в области Q , будут образованы двумя линиями уровня функции h в Q .

Для наглядного описания построения, выполняемого на каждой указанной полоске, будем представлять ее в виде прямоугольника P , горизонтальные отрезки границы которого отвечают линиям уровня функции h в Q , а вертикальные отрезки его границы лежат на границе области Q .

Разделим прямоугольник P с помощью четырех внутренних линий, соединяющих горизонтальные отрезки его границы, на пять частей и удалим среднюю открытую часть и две открытые части, примыкающие к вертикальным отрезкам границы прямоугольника.

Проделав эту процедуру для каждой из указанных полосок в области Q , мы получим некоторую (замкнутую) подобласть в круге U , которая и будет выступать в качестве области $\tilde{U}$ в примере 2.

При этом должно быть выполнено легко достигаемое (при выборе полосок и их делений на части) условие, чтобы общий периметр всех удаляемых частей был ограничен. Это условие, как будет показано в § 5, обеспечивает гиперболичность конформного типа области $\tilde{U}$.

Изменения метрики g и функции исчерпания h проведем на оставшихся двух частях каждой полоски P , которые будем рассматривать замкнутыми и обозначим через P_l и P_r (индексы l и r – от слов *left* и *right*), а их объединение обозначим через $\tilde{P}$. Вне всех множеств $\tilde{P}$ определяемые ниже новые функция исчерпания $\tilde{h}$ области $\tilde{U}$ и метрика $\tilde{g}$ в $\tilde{U}$ будут совпадать с прежними функцией h и метрикой g соответственно.

Более того, функцию исчерпания $\tilde{h}$ и в области $\tilde{Q} = \tilde{U} \setminus H$ мы сохраним эквивалентной функции h в том смысле, что исчерпания области $\tilde{Q}$, порождаемые этими функциями, будут совпадать как классы множеств.

Переходя к определениям $\tilde{h}$ и $\tilde{g}$ на множествах P_l и P_r , сначала разделим последние на три части, проведя разрезы вдоль двух линий уровня функции h , лежащих между “горизонтальными” границами полосы P , так, чтобы значения функции h на этих границах и указанных двух ее линиях уровня отличались на одинаковую величину $\delta > 0$.

Обозначим среднюю из частей, на которые поделено каждое множество P_l и P_r , через $P_l(\delta)$ и $P_r(\delta)$ соответственно, а “нижнюю” и “верхнюю” (в понятном смысле) из указанных трех частей множеств P_l и P_r обозначим соответственно через P_{l-} и P_{l+} для P_l , и P_{r-} и P_{r+} для P_r .

Функция исчерпания $\tilde{h}$ определяется на P_l следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{h} &:= h \quad \text{на } P_{l-}, & \tilde{h} &:= \alpha \cdot h + \beta \quad \text{на } P_{l+}, \\ \tilde{h} &:= \frac{h}{\mu} + \gamma \quad \text{на } P_l(\delta), & \text{где } \mu &= \max_{\tilde{P}} |\nabla h|, \end{aligned}$$

а постоянные α, β, γ подобраны так, что функция $\tilde{h}$ непрерывна на P_l и совпадает с h на “верхней горизонтальной” границе множества P_l .

При таком определении функция $\tilde{h}$ является эквивалентной функции h на множестве P_l , а для того, чтобы эта эквивалентность имела место на всем множестве $\tilde{P}$, требуется, чтобы значения функции $\tilde{h}$ на множестве P_r совпадали со значениями функции $\tilde{h}$ на P_l в точках любой линии уровня функции h в $\tilde{P}$.

Формализуя указанное требование, полагаем

$$\tilde{h} := \tilde{\nu} \circ h \quad \text{на } P_r,$$

где $\tilde{\nu}: h(P_r) \rightarrow \tilde{h}(P_l)$ – вещественная функция вида $\tilde{\nu} = \tilde{h}|_{P_l} \circ h^{-1}$. Тем самым, функция исчерпания $\tilde{h}$ области $\tilde{U}$ будет построена.

После этого определяется метрика $\tilde{g} = \tilde{\lambda}^2(dx^2 + dy^2)$ в области $\tilde{U}$, точнее функция $\tilde{\lambda}$ на множествах P_l и P_r для любой полосы P . В первую очередь эта функция определяется на частях $P_l(\delta)$ и $P_r(\delta)$ формулами

$$\tilde{\lambda} := \frac{|\nabla h|}{\mu} \quad \text{на } P_l(\delta), \quad \tilde{\lambda} := \frac{\mu}{\delta} \quad \text{на } P_r(\delta),$$

а затем естественным образом продолжается на множества P_l и P_r , а значит, и на всю область $\tilde{U}$, с сохранением для функции $\tilde{\lambda}$ в области $\tilde{Q}$ отмеченных выше свойств функции λ в области Q (установленных в лемме 4), а именно:

- 1) ограниченности $\tilde{g}$ -площади области $\tilde{Q}$;
- 2) равномерной ограниченности сверху $\tilde{g}$ -длин линий уровня функции $\tilde{h}$ в области $\tilde{Q}$;
- 3) отграниченности от нуля метрики $\tilde{g}$, точнее функции $\tilde{\lambda}$ в области $\tilde{Q}$.

При этом в целях сохранения свойств 1) и 2) на множествах P_r , где метрика $\tilde{g}$ может быть сколь угодно велика, придется сузить эти множества, но такие сужения, как легко видеть, сохраняют принятое выше условие об ограничении общего периметра всех удаленных из полосок P частей при образовании множеств P_l и P_r .

Тем самым, построение всех конструкций примера 2 будет завершено. Однако доказательства справедливости всех его утверждений будут проводиться (как и в примере 1) для метрики $\tilde{g}$ в $\tilde{U}$, отличающейся от построенной выше метрики $\tilde{g}$ произвольным множителем ϵ^2 , выбор которого будет зависеть от заданного по условию примера 2 произвольного $\epsilon > 0$.

Соответственно, вместо построенной выше функции исчерпания $\tilde{h}$ области $\tilde{U}$ будет рассматриваться функция исчерпания этой области вида $\epsilon \cdot \tilde{h}$, за которой оставим здесь обозначение $\tilde{h}$.

Поясним основные моменты доказательств утверждений примера 2.

Благодаря приведенным выше основным свойствам метрики $\tilde{g}$ в области $\tilde{Q}$ свойства метрики g в области $\bar{H}$, касающиеся ее полноты и выполнимости асимптотически точного изопериметрического неравенства евклидова вида (см. замечание 4), распространяются на метрику $\tilde{g}$ во всей области $\tilde{U}$.

Конкретно: свойство 1) отвечает за выполнимость в метрике $\tilde{g}$ относительно-го евклидова вида изопериметрического неравенства для всех областей $D \subseteq \tilde{U}$, $\tilde{g}$ -площадь которых больше, чем ϵ ; свойство 2) ответственно за асимптотическую точность указанного изопериметрического неравенства на исчерпании области $\tilde{U}$, порождаемом функцией исчерпания $\tilde{h}$; свойство 3) гарантирует полноту метрики $\tilde{g}$ в области $\tilde{U}$ (в силу полноты метрики $\tilde{g} = g$ в области $\bar{H}$).

Наконец, объясним, почему исчерпание области $\tilde{U}$, порождаемое функцией $\tilde{h}$, удовлетворяет в метрике $\tilde{g}$ всем условиям определения 1 исчерпания, ϵ -близкого к круговому, за исключением условия монотонности указанной в этом определении функции $\mu_{h,Q}(t)$.

Прежде всего, в качестве фигурируемого в определении 1 множества, на котором функция $\tilde{h}$ является ϵ -круговой в метрике $\tilde{g}$, т.е. удовлетворяет в этой метрике оценкам (2.4), можно взять (и берется) множество $\tilde{H}$, полученное присоединением к области H частей $P_1(\delta)$ всех полосок P .

Действительно, из приведенных выше определений функции $\tilde{h}$ и метрики $\tilde{g}$ на множествах $P_1(\delta)$ следует, что $|\nabla \tilde{h}|_{\tilde{g}} \equiv 1$ всюду в $P_1(\delta)$, поэтому оценки (2.4), справедливые в области H для функции h относительно метрики g , сохраняются и на множестве $\tilde{H}$ для функции $\tilde{h}$ в метрике $\tilde{g}$.

Осталось проверить справедливость равенства (2.6), в котором роль множества Q играет теперь множество $Q_r := \tilde{U} \setminus \tilde{H}$, а в качестве функции $\mu_{h,Q}(t)$ можно взять функцию вида

$$\mu_{\tilde{h},Q_r}(\tilde{t}) := \sup_{E_{\tilde{h}}(\tilde{t}) \cap Q_r} |\nabla \tilde{h}|_{\tilde{g}}, \quad (4.1)$$

где через $E_{\tilde{h}}(\tilde{t})$ обозначена линия $\tilde{t}$ -уровня функции $\tilde{h}$.

Поскольку функции исчерпания $\tilde{h}$ и h эквивалентны в области $\tilde{Q}$ по построению, то их линии уровня $E_{\tilde{h}}(\tilde{t})$ и $E_h(t)$ в этой области совпадают (как множества) при соответствующих значениях функций $\tilde{h}$ и h .

Тогда для значений $\tilde{t} \in \tilde{h}(P_r(\delta))$ функции $\tilde{h}$ соответствующие линии уровня функции $h|_{\tilde{Q}}$ лежат в $P_1(\delta) \cup P_r(\delta)$, поэтому пересекаются с множеством Q_r только по множествам $P_r(\delta)$, т.е.

$$\forall \tilde{t} \in \tilde{h}(P_r(\delta)) \quad E_{\tilde{h}}(\tilde{t}) \cap Q_r = E_h(t) \cap Q_r = E_h(t) \cap P_r(\delta),$$

где $\tilde{t} = \tilde{\nu}(t)$ согласно определению функции $\tilde{h}$ на множестве $P_r(\delta)$. Поэтому для любого значения $\tilde{t} \in \tilde{h}(P_r(\delta))$ имеем

$$\mu_{\tilde{h}, Q_r}(\tilde{t}) := \sup_{E_h(t) \cap P_r(\delta)} \frac{|\nabla \tilde{h}|}{\tilde{\lambda}} = \tilde{\nu}'(t) \sup_{E_h(t) \cap P_r(\delta)} \frac{|\nabla h|}{\tilde{\lambda}} \leq \tilde{\nu}'(t) \cdot \delta.$$

При этом были использованы определения функций $\tilde{h}$ и $\tilde{\lambda}$ на множестве $P_r(\delta)$, а также оценка $|\nabla h| \leq \mu$ на этом множестве.

Для проверки равенства вида (2.6) перейдем сначала к неравенству

$$\int^{+\infty} \frac{d\tilde{t}}{\mu_{\tilde{h}, Q_r}(\tilde{t})} \geq \sum \int_{\tilde{h}(P_r(\delta))} \frac{d\tilde{t}}{\mu_{\tilde{h}, Q_r}(\tilde{t})},$$

где суммирование проводится по всем отрезкам $\tilde{h}(P_r(\delta))$, а затем осуществим замену переменной $\tilde{t} = \tilde{\nu}(t)$ в каждом из интегралов, стоящих под знаком суммы в последнем неравенстве. Тогда с учетом приведенной выше оценки для $\mu_{\tilde{h}, Q_r}(\tilde{t})$ для этих интегралов получаем оценку

$$\int_{\tilde{h}(P_r(\delta))} \frac{d\tilde{t}}{\mu_{\tilde{h}, Q_r}(\tilde{t})} \geq \int_{h(P_r(\delta))} \frac{dt}{\delta} = 1$$

(длина отрезка $h(P_r(\delta))$ равна δ по определению этого отрезка). Следовательно, требуемое равенство вида (2.6) действительно справедливо.

Перейдем теперь к строгому построению требуемых для примера 2 объектов: области $\tilde{U}$, ее функции исчерпания $\tilde{h}$ и метрики $\tilde{g}$ в $\tilde{U}$.

4.2. Построение области $\tilde{U}$ для примера 2. Искомая для примера 2 область $\tilde{U} \subset U$ будет получена удалением из круга U некоторой последовательности открытых множеств, суммарная площадь и суммарный периметр которых достаточно малы. При этом все удаляемые множества будут находиться в области $\overline{Q}$, а их вид будет определяться ее функцией исчерпания $h|_{\overline{Q}}$.

Однако для удобства описания указанных множеств и других построений мы будем использовать также соответствующую области $\overline{Q}$ при отображении θ область $\overline{\mathcal{Q}}$ и ее функцию исчерпания q (конкретный вид (3.20) которой нам, по существу, не потребуются), связанную с функцией $h|_{\overline{Q}}$ согласно определению (3.27) соотношением $h|_{\overline{Q}} = \nu(q) \circ \theta|_{\overline{\mathcal{Q}}}^{-1}$.

Исходя из построения областей Q и $\mathcal{Q}$ (см. п. 3.2), для произвольной точки $(\varphi, \rho) \in \overline{\mathcal{Q}}$ можно ввести новые координаты (s, t) , $s \in [b, a + 2\pi]$, $t > 1$, определяемые следующими уравнениями:

$$\forall (\varphi, \rho) \in \overline{\mathcal{Q}} \quad \pi\rho = 2 \arccos e^{\pi(s-\varphi)/2}, \quad t = \nu(q(\varphi, \rho)). \quad (4.2)$$

Здесь первое уравнение определяет кривую, лежащую между кривыми $\mathcal{T}_b$ и $\mathcal{T}_{a+2\pi}$ вида (3.3), (3.5), соответствующими спиралями Γ_b и $\Gamma_{a+2\pi}$, образующими боковую границу области Q . А значение t – это значение функции исчерпания h в точке $(x, y) \in \overline{Q}$, имеющей полярные координаты (φ, ρ) .

Договоримся, что далее для краткости пара (s, t) будет обозначать (однозначно определяемую) точку $z = (x, y) \in \overline{Q}$, полярные координаты (φ, ρ) которой удовлетворяют уравнениям (4.2).

В соответствии с этой договоренностью первое из уравнений в (4.2) при фиксированном значении s задает некоторую спираль в области $\bar{Q}$, совпадающую при $s = b$ и $s = a + 2\pi$ со спиралями Γ_b и $\Gamma_{a+2\pi}$ соответственно, а второе уравнение в (4.2) – это уравнение t -линии уровня $E_{h|\bar{Q}}(t)$ функции $h|_{\bar{Q}}$.

Для произвольных значений $s_1, s_2 \in [b, a + 2\pi]$, $s_1 < s_2$, и τ_1, τ_2 , $1 \leq \tau_1 < \tau_2$, введем в рассмотрение множества

$$P_{\tau_1}^{\tau_2}(s_1, s_2) := \{(s, t) \in \bar{Q} \mid s_1 < s < s_2, \tau_1 < t < \tau_2\}. \quad (4.3)$$

В случае $s_1 = b$, $s_2 = a + 2\pi$ эти множества будем обозначать через $P_{\tau_1}^{\tau_2}$ (они представляют собой те самые полосы P , которые рассматривались в п. 4.1 при схематичном описании примера 2).

Зафиксируем какую-либо возрастающую числовую последовательность $\{t_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, такую, что $1 < t_i \nearrow +\infty$ при $i \rightarrow +\infty$. Далее, возьмем пока произвольную положительную бесконечно малую последовательность $\{\delta_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, для которой множества $\overline{P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}}$, $i \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются.

Для построения искомой области $\tilde{U}$ из каждого множества $P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}$, $i \in \mathbb{N}$, будут удалены следующие его три подмножества:

$$P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}(b, s_{1i}), \quad P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}(s_{2i}, s_{3i}), \quad P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}(s_{4i}, a + 2\pi), \quad (4.4)$$

такие, что $b < s_{1i} < s_{2i} < s_{3i} < s_{4i} < a + 2\pi$.

Выбор этих трех множеств определяет следующая

ЛЕММА 5. *Указанные выше последовательности значений $\{\delta_i\}$ и $\{s_{1i}\}$, $\{s_{2i}\}$, $\{s_{3i}\}$, $\{s_{4i}\}$, $i \in \mathbb{N}$, можно выбрать так, что для множеств вида (4.4) будут выполняться следующие условия (для любого $i \in \mathbb{N}$):*

$$L(\partial P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}(b, s_{1i}) \cup \partial P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}(s_{2i}, s_{3i}) \cup \partial P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}(s_{4i}, a + 2\pi)) < 2^{-i}, \quad (4.5)$$

$$\forall t \in [t_i, t_i + 3\delta_i] \quad \frac{\mu_i}{\delta_i} L(E_q(t) \cap P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}(s_{3i}, s_{4i})) < 2^{-i}, \quad (4.6)$$

$$\left(\frac{\mu_i}{\delta_i}\right)^2 S(P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}(s_{3i}, s_{4i})) < 2^{-i}. \quad (4.7)$$

Здесь использовано обозначение

$$\mu_i := \sup_{P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}} |\nabla h|, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (4.8)$$

а символы L и S обозначают, напомним, евклидовы длину и площадь.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Положим $\tilde{U} := \bar{H} \cup \tilde{Q}$, где

$$\tilde{Q} := \bar{Q} \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} (P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}(b, s_{1i}) \cup P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}(s_{2i}, s_{3i}) \cup P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}(s_{4i}, a + 2\pi)), \quad (4.9)$$

а участвующие здесь множества вида (4.4) удовлетворяют лемме 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Согласно (4.9) замкнутая область $\tilde{U}$ получена удалением из круга U не пересекающихся между собой открытых множеств вида (4.4) (для всех $i \in \mathbb{N}$), удовлетворяющих условиям (4.5)–(4.7).

Отметим, что (как будет видно из доказательств утверждений 5 и 6) условие (4.5) обеспечивает гиперболический конформный тип области $\tilde{U}$, а условия (4.6) и (4.7) ответственны за выполнимость в $(\tilde{U}, \tilde{g})$ евклидова вида изопериметрического неравенства и условия роста (2.6) в метрике $\tilde{g}$.

4.3. Построение функции исчерпания $\tilde{h}$ области $\tilde{U}$. Здесь и в следующем пункте мы построим искомые для примера 2 функцию исчерпания $\tilde{h}$ области $\tilde{U}$ и метрику $\tilde{g}$ в $\tilde{U}$, исходя из уже построенной выше функции исчерпания h круга U и его метрики g , изменив их значения только на следующих подмножествах вида (4.4) области $\tilde{Q}$:

$$(P_l)_{t_i}^{t_i+3\delta_i} := P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}(s_{1i}, s_{2i}), \quad (P_r)_{t_i}^{t_i+3\delta_i} := P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}(s_{3i}, s_{4i}), \quad (4.10)$$

где $\{\delta_i\}$ и $\{s_{1i}\}, \{s_{2i}\}, \{s_{3i}\}, \{s_{4i}\}$, $i \in \mathbb{N}$, удовлетворяют лемме 5. (Здесь индексы l и r – от слов *left* и *right*; множества (4.10) – это множества P_l и P_r , введенные в п. 4.1.)

Далее, в обозначениях (4.10) мы будем при необходимости вместо значений t_i и $t_i + 3\delta_i$ указывать и другие значения из промежутка $[t_i, t_i + 3\delta_i]$. Основную роль в построениях будут играть множества $(P_l)_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i}$ и $(P_r)_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i}$ (в п. 4.1 они обозначены через $P_l(\delta)$ и $P_r(\delta)$ соответственно).

С учетом переобозначений (4.10) введем также обозначение

$$\tilde{P}_{t_i}^{t_i+3\delta_i} := \overline{(P_l)_{t_i}^{t_i+3\delta_i}} \cup \overline{(P_r)_{t_i}^{t_i+3\delta_i}}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (4.11)$$

Тогда область $\tilde{Q}$, определенная в (4.9), представляется в виде

$$\tilde{Q} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\tilde{P}_{t_i}^{t_i+3\delta_i} \cup \overline{(P_r)_{t_i+3\delta_i}^{t_{i+1}}}) \cup \overline{P_1^{t_1}}, \quad (4.12)$$

где, напомним, множество вида $P_{\tau_1}^{\tau_2}$ определено в (4.3) при $s_1 = b$ и $s_2 = a + 2\pi$.

Переходя к построению функции $\tilde{h}$, сначала изменим функцию h на множествах $\overline{(P_l)_{t_i}^{t_i+3\delta_i}}$, $i \in \mathbb{N}$, определив на каждом из этих множеств функцию $\tilde{h}_i$ вида

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \tilde{h}_i := \begin{cases} t_i + \frac{h - t_i}{\mu_i} & \text{на } \overline{(P_l)_{t_i}^{t_i+2\delta_i}}, \\ \alpha_i h + \beta_i & \text{на } \overline{(P_l)_{t_i+2\delta_i}^{t_i+3\delta_i}}, \end{cases} \quad (4.13)$$

где значение μ_i определено в (4.8).

При этом числа $\alpha_i \geq 0$ и β_i таковы, что функция $\tilde{h}_i$ непрерывна на линии $E_{h|\tilde{Q}}(t_i + 2\delta_i)$, причем $\tilde{h}_i \equiv t_i + 3\delta_i$ на $E_{h|\tilde{Q}}(t_i + 3\delta_i)$. Явный вид таких α_i и β_i легко найти, но мы их не выписываем за ненадобностью.

Далее, изменим функцию h на каждом множестве $\overline{(P_r)_{t_i}^{t_i+3\delta_i}}$, $i \in \mathbb{N}$, исходя из построенной функции $\tilde{h}_i$ вида (4.13). С этой целью введем следующую вещественную функцию $\tilde{v}_i = \tilde{v}_i(t)$, $t \in [t_i, t_i + 3\delta_i]$:

$$\forall t \in [t_i, t_i + 3\delta_i] \quad \tilde{v}_i(t) := \tilde{h}_i \left(E_{h|\tilde{Q}}(t) \cap \overline{(P_l)_{t_i}^{t_i+3\delta_i}} \right). \quad (4.14)$$

Функция $\tilde{v}_i$ является непрерывной возрастающей, причем $\tilde{v}_i(t_i) = t_i$ и $\tilde{v}_i(t_i + 3\delta_i) = t_i + 3\delta_i$ благодаря самому определению (4.13) с учетом указанного

выше выбора чисел α_i и β_i . Теперь положим

$$\tilde{h}_i := \tilde{\nu}_i \circ h \quad \text{на} \quad \overline{(P_r)_{t_i}^{t_i+3\delta_i}}. \quad (4.15)$$

Тем самым, на каждом множестве $\tilde{P}_{t_i}^{t_i+3\delta_i}$, $i \in \mathbb{N}$, вида (4.11) мы определили функцию $\tilde{h}_i$ по формулам (4.13) и (4.15).

ЛЕММА 6. *Функция следующего вида:*

$$\tilde{h} := \begin{cases} \tilde{h}_i & \text{на } \tilde{P}_{t_i}^{t_i+3\delta_i}, \quad i \in \mathbb{N}, \\ h & \text{на } \tilde{U} \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{P}_{t_i}^{t_i+3\delta_i}, \end{cases} \quad (4.16)$$

является кусочно гладкой функцией исчерпывания области $\tilde{U}$.

При этом линии уровня функций $\tilde{h}|_{\tilde{Q}}$ и $h|_{\tilde{Q}}$ совпадают.

4.4. Построение метрики $\tilde{g}$ в $\tilde{U}$ для примера 2. Для определения метрики $\tilde{g}$ в области $\tilde{U}$ обратимся к уже построенной в U (см. определение 2) метрике $g = \epsilon^2 \lambda^2 g_e$, $\epsilon > 0$, где g_e – евклидова метрика, а λ – гладкая положительная функция в U , удовлетворяющая лемме 4.

Оставляя функцию λ неизменной на области $\overline{H}$, изменим ее на области $\tilde{Q}$, точнее, только на на множествах $\tilde{P}_{t_i}^{t_i+3\delta_i} := \overline{(P_l)_{t_i}^{t_i+3\delta_i}} \cup \overline{(P_r)_{t_i}^{t_i+3\delta_i}}$, $i \in \mathbb{N}$, на каждом из которых определим новую функцию $\tilde{\lambda}_i$, $i \in \mathbb{N}$, следующими формулами в координатах (s, t) , введенных в (4.2):

$$\tilde{\lambda}_i(s, t) := \begin{cases} \frac{|\nabla h|(s, t) - \mu_i \lambda(s, t)}{\delta_i \mu_i} (t - t_i) + \lambda(s, t) & \text{на } \overline{(P_l)_{t_i}^{t_i+\delta_i}}, \\ \frac{|\nabla h|(s, t)}{\mu_i} & \text{на } \overline{(P_l)_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i}}, \\ \frac{\mu_i \lambda(s, t) - |\nabla h|(s, t)}{\delta_i \mu_i} (t - t_i - 3\delta_i) + \lambda(s, t) & \text{на } \overline{(P_l)_{t_i+2\delta_i}^{t_i+3\delta_i}}, \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\tilde{\lambda}_i(s, t) := \begin{cases} \frac{\mu_i - \delta_i \lambda(s, t)}{\delta_i^2} (t - t_i) + \lambda(s, t) & \text{на } \overline{(P_r)_{t_i}^{t_i+\delta_i}}, \\ \frac{\mu_i}{\delta_i} & \text{на } \overline{(P_r)_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i}}, \\ \frac{\delta_i \lambda(s, t) - \mu_i}{\delta_i^2} (t - t_i - 3\delta_i) + \lambda(s, t) & \text{на } \overline{(P_r)_{t_i+2\delta_i}^{t_i+3\delta_i}}. \end{cases} \quad (4.18)$$

Теперь мы можем определить метрику $\tilde{g}$ в $\tilde{U}$ и привести основные ее свойства, необходимые для обоснования всех утверждений примера 2.

ЛЕММА 7. *Функция следующего вида:*

$$\tilde{\lambda} := \begin{cases} \tilde{\lambda}_i & \text{на } \tilde{P}_{t_i}^{t_i+3\delta_i}, \quad i \in \mathbb{N}, \\ \lambda & \text{на } \tilde{U} \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{P}_{t_i}^{t_i+3\delta_i} \end{cases} \quad (4.19)$$

(где функция λ построена в лемме 4 для произвольного $\tau \in (0, 1)$), является непрерывной кусочно гладкой в $\tilde{U}$, и метрика

$$\tilde{g}_\tau(p) = \tilde{\lambda}^2(p) (dx^2 + dy^2) \quad \forall p = (x, y) \in \tilde{U} \quad (4.20)$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$\tilde{g}_\tau = g_H \quad \text{всюду на } \overline{H_\tau}, \quad (4.21)$$

где метрика g_H и область H_τ определены в (3.30) и (3.31) соответственно;

$$\tilde{\lambda} \geq \delta \quad \text{всюду в } \tilde{Q}, \quad (4.22)$$

где $\delta > 0$ сколь угодно мало (в зависимости от τ);

$$S_{\tilde{g}_\tau}(\tilde{Q}) < +\infty, \quad (4.23)$$

$$\forall t > t_0 \quad L_{\tilde{g}_\tau}(E_{\tilde{h}}(t) \cap \tilde{Q}) < c, \quad (4.24)$$

где $E_{\tilde{h}}(t) := \tilde{h}^{-1}(t)$ – линии уровня функции (4.16) исчерпания области $\tilde{U}$, а $t_0 > 0$ и $c > 0$ – некоторые сколь угодно большие значения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для произвольных $\tau \in (0, 1)$ и $\epsilon > 0$ положим

$$\tilde{g} := \epsilon^2 \tilde{g}_\tau, \quad (4.25)$$

где метрика $\tilde{g}_\tau$ определена в (4.20).

Доказательство этой леммы непосредственно основывается на свойствах функции λ , построенной в лемме 4, и определениях (4.17) и (4.18), которые обеспечивают выполнение требуемых свойств функции $\tilde{\lambda}$ в Q в силу условий (4.6) и (4.7), принятых при определении области $\tilde{Q}$.

§ 5. Проверка свойств построенных объектов

Итак, построены метрика $g = \epsilon^2 g_\tau$ в круге U (см. лемму 4 и определение 2) и метрика $\tilde{g} = \epsilon^2 \tilde{g}_\tau$ в области $\tilde{U}$ (см. лемму 7 и определения 3 и 4).

В этом параграфе доказываются все утверждения примеров 1 и 2 для указанных метрик g и $\tilde{g}$ соответственно при сколь угодно близких к единице $\tau \in (0, 1)$ и сколь угодно малых $\epsilon > 0$, отвечающих заданному в условиях обоих примеров произвольному $\varepsilon > 0$.

Обоснование примера 1 составляют утверждения 1–4, а утверждения 5 и 6 содержат обоснование примера 2, включая дополнение к примерам.

Поскольку метрики g и $\tilde{g}$ совпадают на области $\overline{H}$ и несколько различаются только на области Q , то обоснования примеров 1 и 2 во многом проводятся одинаково. Поэтому, чтобы избежать повторений при проведении обоснования примера 2, после каждого из доказательств утверждений 1–4 мы отмечаем те свойства метрики g в области Q , на которых оно основано.

Обоснование примера 1. Отметим сначала свойство квазиизометричности метрик $g_\tau|_H = g_H$ вида (3.30) и $g_{\mathcal{H}}$ вида (3.18).

ЛЕММА 8. Пусть $H_\tau := H \setminus \overline{U(\tau)}$, где $U(\tau) \in U$ – круг с центром в точке O евклидова радиуса $\tau \in (0, 1)$. Тогда для произвольных кусочно гладкой кривой $\gamma \subset \overline{H_\tau}$ и области $D \in \overline{H_\tau}$ выполняются неравенства

$$\tau L_{g_{\mathcal{H}}}(\theta_{|\mathcal{H}}^{-1}(\gamma)) \leq L_{g_\tau}(\gamma) \leq L_{g_{\mathcal{H}}}(\theta_{|\mathcal{H}}^{-1}(\gamma)), \quad (5.1)$$

$$\tau^2 S_{g_{\mathcal{H}}}(\theta_{|\mathcal{H}}^{-1}(D)) \leq S_{g_\tau}(D) \leq S_{g_{\mathcal{H}}}(\theta_{|\mathcal{H}}^{-1}(D)), \quad (5.2)$$

где $\theta_{|\mathcal{H}}: \overline{\mathcal{H}} \rightarrow \overline{H}$ – сужение отображения (3.2) на область $\overline{\mathcal{H}}$, а метрики g_τ в U и $g_{\mathcal{H}}$ в $\mathcal{H}$ определены в (3.32) и (3.18) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем для метрики g_τ условие (3.33) в виде

$$\forall p \in \overline{H_\tau} \quad \lambda(p) = \lambda_{\mathcal{H}}(\zeta), \quad \text{где} \quad \zeta = \theta_{|\mathcal{H}}^{-1}(p) \in \overline{\mathcal{H}}.$$

Тогда в силу соотношений (3.4) в любой точке $\zeta = (\varphi, \rho)$, $\rho \geq \tau$, имеем

$$\tau^2 \lambda_{\mathcal{H}}^2(\zeta) (d\varphi^2 + d\rho^2) \leq \lambda^2(p) (dx^2 + dy^2) \leq \lambda_{\mathcal{H}}^2(\zeta) (d\varphi^2 + d\rho^2).$$

Отсюда непосредственно вытекают искомые неравенства (5.1) и (5.2).

СЛЕДСТВИЕ. Площадь круга U в метрике g вида (3.37) бесконечна.

Это утверждение является очевидным следствием соотношений (5.2) и самого определения метрики $g_{\mathcal{H}}$ (см. п. 3.3), на основании которого $S_{g_{\mathcal{H}}}(\mathcal{H}) = +\infty$. Менее очевидным является следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Метрика g вида (3.37) является полной в U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что области $\overline{H_\tau}$ и $\overline{Q_\tau}$ являются полными пространствами относительно метрики g .

Действительно, полнота метрики g в области $\overline{H_\tau}$ следует из того, что эта область с метрикой g является в силу леммы 8 квазиизометричной области $\theta_{|\mathcal{H}}^{-1}(\overline{H_\tau})$ с метрикой $g_{\mathcal{H}}$, а последняя метрика по самому построению (см. п. 3.3) индуцируется евклидовой метрикой замкнутой полуплоскости $\overline{\Pi}$ при конформном отображении $\mathcal{H}$ в Π .

В свою очередь, полнота метрики g в области $\overline{Q_\tau}$ является простым следствием условия (3.34) и полноты области $\overline{Q}$ относительно евклидовой метрики.

Обращаясь непосредственно к утверждению 1, предположим вопреки ему, что в круге U метрика g не является полной. Тогда найдется кусочно гладкая (связная) кривая $\Gamma \subset U$, которая в метрике g имеет конечную длину, но не будет предкомпактной. Не ограничивая общности, будем считать, что $\Gamma \subset U \setminus U(\tau)$.

Рассмотрим сначала пересечение кривой Γ с областью H_τ .

Если это пересечение $\Gamma \cap H_\tau$ не пусто, то можно считать, что оно и не предкомпактно. (В противном случае вместо кривой Γ возьмем ту ее связную некомпактную часть, которая уже не пересекается с H_τ , и этот случай будет рассмотрен в конце данного доказательства.)

Множество $\Gamma \cap H_\tau$ распадается на связные компоненты, каждая из которых представляет собой некоторую открытую кривую γ в H_τ , причем любая такая кривая γ является предкомпактной в $\overline{H_\tau}$, поскольку иначе ее g -длина была

бы (вопреки условию выбора кривой Γ) бесконечной в силу отмеченной выше полноты метрики g в $\overline{H_\tau}$.

Поэтому каждая указанная кривая γ должна иметь ровно две концевые точки, скажем, p_1 и p_2 (возможно, совпадающие), принадлежащие границе области H . Поскольку ∂H состоит из двух спиралей Γ_a и Γ_b (см. п. 3.2), то возможны следующие два альтернативных случая.

Случай 1: обе точки p_1 и p_2 лежат на одной спирали Γ_a или Γ_b .

Случай 2: точки p_1 и p_2 расположены на различных спиральных Γ_a и Γ_b .

В случае 1 заменим компоненту γ на дугу $\gamma(p_1, p_2)$, соединяющую точки p_1 и p_2 и принадлежащую той же спирали, что и эти точки. При этом $\gamma(p_1, p_2) \subset \partial H \setminus \overline{U(\tau)}$, так как точки p_1 и p_2 по условию лежат вне круга $\overline{U(\tau)}$. Тогда, применяя к дугам $\gamma(p_1, p_2)$ и γ неравенства (5.1) и сравнивая между собой $g_{\mathcal{H}}$ -длины кривых $\theta_{|\mathcal{H}}^{-1}(\gamma(p_1, p_2))$ и $\theta_{|\mathcal{H}}^{-1}(\gamma)$ (с учетом замечания 3) легко получить соотношение

$$L_g(\gamma(p_1, p_2)) < \tau^{-1} L_g(\gamma). \quad (5.3)$$

Случай 2 можно исключить из рассмотрения. Действительно, в этом случае концевые точки $\theta_{|\mathcal{H}}^{-1}(p_1)$ и $\theta_{|\mathcal{H}}^{-1}(p_2)$ кривой $\gamma_{\mathcal{H}} = \theta_{|\mathcal{H}}^{-1}(\gamma)$ лежат на кривых $\mathcal{T}_a = \theta_{|\mathcal{H}}^{-1}(\Gamma_a)$ и $\mathcal{T}_b = \theta_{|\mathcal{H}}^{-1}(\Gamma_b)$, которые при конформном отображении η вида (3.17) переходят в лучи $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ вещественной оси (см. п. 3.3). Следовательно, $L_{g_{\mathcal{H}}}(\gamma_{\mathcal{H}}) = L(\eta(\gamma_{\mathcal{H}})) > 2$ (где L – евклидова длина). Отсюда в силу (5.1) получаем оценку

$$L_g(\gamma) = \epsilon L_{g_\tau}(\gamma) > 2\epsilon\tau$$

для любой компоненты γ , удовлетворяющей случаю 2. Поскольку g -длина всей кривой Γ конечна, то таких компонент γ может быть только конечное число. Но тогда можно считать (укоротив при необходимости кривую Γ на компактную часть), что множество $\Gamma \cap H_\tau$ вообще не имеет компонент связности γ , удовлетворяющих условию случая 2.

Итак, резюмируя рассмотрения в указанных случаях 1 и 2, мы можем считать, что каждая связная компонента γ множества $\Gamma \cap H_\tau$ удовлетворяет условию случая 1, и тогда мы заменим γ на дугу $\gamma(p_1, p_2) \subset \partial H \setminus \overline{U(\tau)}$, имеющую общие с γ концевые точки p_1, p_2 и удовлетворяющую неравенству (5.3).

В результате таких замен мы получим связную кривую $\tilde{\Gamma} \subset U \setminus \overline{U(\tau)}$, которая не пересекается с областью H_τ и, следовательно, лежит в замкнутой области $\overline{Q_\tau} = \overline{U} \setminus H_\tau$. При этом кривая $\tilde{\Gamma}$, очевидно, не является предкомпактной, а в силу (5.3) имеет (так же, как Γ) конечную g -длину.

Но это невозможно в силу отмеченной в начале доказательства утверждения полноты области $\overline{Q_\tau}$ относительно метрики g . Полученное противоречие и доказывает утверждение 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Для доказательства утверждения 1 конкретный вид продолжения метрики g на область Q не важен, а используется только свойство полноты замкнутой области $\overline{Q}$ относительно метрики $g|_{\overline{Q}}$. Последнее свойство является следствием полноты области $\overline{Q}$ в евклидовой метрике и условия (3.34) отграниченности в $\overline{Q}$ метрики g от нуля.

В следующих утверждениях 2–4 метрика g вида (3.37) будет подобрана при определенных значениях $\tau \in (0, 1)$ и $\epsilon \in (0, \tau^2)$, отвечающих произвольно заданному $\varepsilon > 0$ в условии примера 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда в метрике g вида (3.37) при любом $\tau \in (0, 1)$ и сколь угодно малом $\epsilon > 0$ выполняется с некоторой положительной постоянной $C < \sqrt{2\pi}$ евклидова вида изопериметрическое неравенство (2.8) для любой области $D \Subset U$ такой, что $S_g(D) > \varepsilon$.

Постоянную C можно априори взять сколь угодно близкой к $\sqrt{2\pi}$. В этом случае значение τ будет сколь угодно близким к единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть значение $\tau \in (0, 1)$ в определении (3.32) метрики g_τ и значение $\epsilon > 0$ в определении (3.37) метрики g пока произвольные.

Рассмотрим области H_τ и Q_τ , введенные в (3.31), и представим g -площадь произвольной области $D \Subset U$ в виде

$$S_g(D) = S_g(D \cap H_\tau) + S_g(D \cap Q_\tau). \quad (5.4)$$

Оценим сверху каждое слагаемое этого разложения.

Обратимся к первому слагаемому. Сначала, применяя к нему соотношение (5.2) из леммы 8, запишем неравенство

$$S_g(D \cap H_\tau) \leq \epsilon^2 S_{g_{\mathcal{H}}}(D_{\mathcal{H}}), \quad \text{где } D_{\mathcal{H}} := \theta_{|\mathcal{H}}^{-1}(D \cap H_\tau).$$

Затем, применяя к каждой компоненте связности области $D_{\mathcal{H}}$ изопериметрическое неравенство (3.10) для метрики $g_{\mathcal{H}}$ в области $\mathcal{H}$, получаем изопериметрическое неравенство такого же вида для всей области $D_{\mathcal{H}}$:

$$\epsilon^2 S_{g_{\mathcal{H}}}(D_{\mathcal{H}}) \leq \frac{\epsilon^2}{2\pi} (L_{g_{\mathcal{H}}}(\partial_{\mathcal{H}}^c D_{\mathcal{H}}))^2.$$

Замечая теперь, что $\partial_{\mathcal{H}}^c D_{\mathcal{H}} = \theta_{|\mathcal{H}}^{-1}(\partial_H^c(D \cap H_\tau))$, запишем для правой части последнего неравенства на основании (5.1) соотношение

$$\epsilon L_{g_{\mathcal{H}}}(\partial_{\mathcal{H}}^c D_{\mathcal{H}}) \leq \frac{1}{\tau} L_g(\partial_H^c(D \cap H_\tau)).$$

Тогда, объединяя последние три выделенные неравенства, получаем

$$2\pi\tau^2 S_g(D \cap H_\tau) \leq (L_g(\partial_H^c(D \cap H_\tau)))^2.$$

Поскольку, очевидно, $\partial_H^c(D \cap H_\tau) \subset \partial D \cup \partial U(\tau)$, то ослабим (несущественно для нашей цели) последнее неравенство:

$$2\pi\tau^2 S_g(D \cap H_\tau) \leq (L_g(\partial D) + L_g(\partial U(\tau)))^2. \quad (5.5)$$

В свою очередь, для второго слагаемого разложения (5.4) в силу условия (3.35) для метрики g_τ в Q_τ имеем простую оценку

$$2\pi\tau^2 S_g(D \cap Q_\tau) \leq 2\pi\delta^2\tau^2\epsilon^2,$$

где $\delta = \delta(\tau) > 0$ – некоторая постоянная. Тогда, прибавляя эту оценку к (5.5), с учетом разложения (5.4) приходим к неравенству

$$\sqrt{2\pi\tau} \sqrt{S_g(D)} \leq L_g(\partial D) + A, \quad (5.6)$$

где временно обозначено

$$A = L_g(\partial U(\tau)) + \sqrt{2\pi}\delta\tau\epsilon. \quad (5.7)$$

Теперь, не меняя значение $\tau \in (0, 1)$, подберем значение $\epsilon_0 > 0$ настолько малым, чтобы при всех $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ имела место оценка

$$A < \sqrt{\epsilon} \cdot \sqrt{2\pi\epsilon} \quad (5.8)$$

(такой выбор ϵ_0 возможен, так как согласно (5.7) величина A имеет вид $A = \epsilon \cdot c(\tau)$, где $c(\tau) > 0$ – некоторое значение, зависящее только от τ).

Поскольку по условию доказываемого утверждения g -площадь области D удовлетворяет ограничению $S_g(D) > \epsilon$, то $A < \sqrt{\epsilon} \cdot \sqrt{2\pi S_g(D)}$ в силу (5.8). В таком случае из (5.6) следует неравенство

$$\sqrt{2\pi}(\tau - \sqrt{\epsilon})\sqrt{S_g(D)} \leq L_g(\partial D),$$

которое и приводит к искомому неравенству (2.8) с положительной постоянной $C < \sqrt{2\pi}\tau$ при любом сколь угодно малом (в зависимости от C , τ и заданного в условии ϵ) значении $\epsilon > 0$.

Утверждение 2 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Доказательство утверждения 2 опирается только на два свойства метрики g_τ , построенной в лемме 4, а именно на выполнимость в этой метрике условий (3.33) и (3.35).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $\epsilon > 0$ произвольно задано. Тогда в метрике g вида (3.37) при сколь угодно близком к единице $\tau \in (0, 1)$ и сколь угодно малом $\epsilon > 0$ изопериметрическое неравенство (2.8) является ϵ -асимптотически точным, причем участвующая в нем постоянная C может быть выбрана сколь угодно близкой слева к $\sqrt{2\pi}$.

При этом указанная точность изопериметрического неравенства достигается на исчерпании $\{B_h(r)\}$, $r > 0$, круга U , порождаемом функцией исчерпания h , определенной в (3.27).

Иными словами, в указанной метрике g для всех достаточно больших $r > 0$ выполняется неравенство

$$L_g(\partial B_h(r)) < (1 + \epsilon)C\sqrt{S_g(B_h(r))}, \quad (5.9)$$

где $C = C(\epsilon)$ – выбранная выше постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем постоянную $C \in (0, \sqrt{2\pi})$ такую, что

$$\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)C > \sqrt{2\pi}, \quad (5.10)$$

и для этой постоянной подберем на основании утверждения 2 сколь угодно близкое к единице значение $\tau \in (0, 1)$ в определении метрики g_τ , при котором для сколь угодно малого $\epsilon > 0$ в метрике g вида (3.37) выполняется неравенство (2.8). Тогда для такой метрики g и докажем (5.9).

Обратимся к исчерпанию $\{B_h(r)\}$, $r > 0$, и рассмотрим пересечение множеств этого исчерпания с областью $\overline{H}$. Согласно определению (3.27)

$$B_h(r) \cap \overline{H} = \theta_{|\mathcal{H}}(B_\eta(r)), \quad \partial B_h(r) \cap \overline{H} = \theta_{|\mathcal{H}}(E_\eta(r)), \quad (5.11)$$

где, в свою очередь, множества $B_\eta(r)$ и $E_\eta(r)$ определены в (3.12).

Далее мы считаем, что значения r сколь угодно большие. Для таких r границы $\partial B_h(r)$ множеств $B_h(r)$ лежат вне круга $\overline{U(\tau)}$. Следовательно, применяя к $\partial B_h(r) \cap \overline{H}$ с учетом (5.11) соотношение (5.1), имеем

$$L_{g_\tau}(\partial B_h(r) \cap \overline{H}) < L_{g_{\mathcal{H}}}(E_\eta(r)).$$

Отсюда, применяя к правой части равенство (3.11) (выражающее точность соответствующего изопериметрического неравенства), получаем

$$L_{g_\tau}(\partial B_h(r) \cap \overline{H}) < \sqrt{2\pi} \sqrt{S_{g_{\mathcal{H}}}(B_\eta(r))}. \quad (5.12)$$

Воспользуемся теперь для сравнения величин $S_{g_{\mathcal{H}}}(B_\eta(r))$ и $S_{g_\tau}(B_h(r) \cap \overline{H})$ соотношением (5.2). Хотя непосредственно его применить мы не можем (так как множества $B_h(r) \cap \overline{H}$ пересекаются с $U(\tau)$), из (5.2) с учетом (5.11) легко вывести несколько более слабое соотношение

$$\tau^2 S_{g_{\mathcal{H}}}(B_\eta(r)) < (1 + \epsilon) S_{g_\tau}(B_h(r) \cap \overline{H}), \quad (5.13)$$

справедливое для любого $\epsilon > 0$ при всех сколь угодно больших $r > 0$.

Действительно, (5.13) является прямым следствием соотношений

$$\begin{aligned} S_{g_{\mathcal{H}}}(B_\eta(r)) &< (1 + \epsilon) S_{g_{\mathcal{H}}}(B_\eta(r) \setminus \theta^{-1}(U(\tau))), \\ \tau^2 S_{g_{\mathcal{H}}}(B_\eta(r) \setminus \theta^{-1}(U(\tau))) &\leq S_{g_\tau}(B_h(r) \cap \overline{H}), \end{aligned}$$

первое из которых очевидно в силу того, что $S_{g_{\mathcal{H}}}(B_\eta(r)) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, а второе соотношение справедливо уже в силу (5.2) с учетом (5.11).

Тогда, подставляя (5.13) в (5.12), приходим к неравенству

$$\tau L_{g_\tau}(\partial B_h(r) \cap \overline{H}) < \sqrt{2\pi(1 + \epsilon)} \sqrt{S_{g_\tau}(B_h(r) \cap \overline{H})},$$

из которого, используя условие (5.10) и возможность выбора τ сколь угодно близким к единице, а значение ϵ сколь угодно малым, получаем

$$L_g(\partial B_h(r) \cap \overline{H}) < \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) C \sqrt{S_g(B_h(r) \cap \overline{H})}. \quad (5.14)$$

Рассмотрим теперь пересечение $\partial B_h(r) \cap \overline{Q}$. Поскольку $\partial B_h(r)$ — это линия r -уровня $E_h(r)$ функции h , то при всех сколь угодно больших r

$$L_g(\partial B_h(r) \cap \overline{Q}) < c \cdot \epsilon, \quad \text{где } c > 0,$$

согласно условию (3.36) в определении метрики g_τ .

Наконец, складывая последнее неравенство с неравенством (5.14), приходим к искомому неравенству (5.9).

Утверждение 3 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Доказательство утверждения 3 использует помимо утверждения 2 только свойство (3.36) метрики g_τ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Рассмотрим метрику g вида (3.37) (при сколь угодно близком к единице $\tau \in (0, 1)$ и сколь угодно малом $\epsilon > 0$), которая удовлетворяет утверждению 3.

Тогда функция исчерпания $\epsilon \cdot h$ (порождающая то же, что и h , исчерпание $\{B_h(r)\}$, $r > 0$, круга U) обладает в этой метрике g свойствами (i) и (ii) в формулировке примера 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим справедливость для функции исчерпания $\epsilon \cdot h$ свойств (i) и (ii) в формулировке примера 1 (записанных там по отношению к функции h), в которых в качестве области Q будет выступать область Q_τ указанного в (3.31) вида.

Прежде всего отметим, что $S_g(Q_\tau) < \epsilon$ (при всех сколь угодно малых $\epsilon > 0$) в силу условия (3.35), выполненного для метрики g_τ .

Убедимся теперь, что функция $\epsilon \cdot h$ является ϵ -круговой в метрике g на области $H_\tau = U \setminus \overline{Q_\tau}$, т.е. удовлетворяет всюду в H_τ оценкам (2.4).

Действительно, в области H функция h согласно определению (3.27) имеет вид $h = |\eta| \circ \theta|_{\mathcal{H}}^{-1}$. Следовательно,

$$\forall p \in H_\tau \quad |\nabla h|(p) = |\nabla |\eta|(\zeta)| \cdot |\nabla \theta(\zeta)|^{-1}, \quad \text{где } p = \theta(\zeta) \quad (5.15)$$

(здесь градиенты функций рассматриваются в евклидовой метрике).

Напомним, что метрика $g = \epsilon^2 g_\tau$ в области H имеет вид $g = \epsilon^2 g_H$ по условию (3.33), где метрика g_H определена в (3.30). Значит,

$$\forall p = (x, y) \in H_\tau \quad g(p) = \epsilon^2 |\eta'_\zeta(\zeta)|^2 (dx^2 + dy^2), \quad p = \theta(\zeta).$$

Поэтому из (5.15) для функции $\epsilon \cdot h$ в метрике g имеем равенство

$$\forall p \in H_\tau \quad |\nabla(\epsilon \cdot h)|_g(p) = \frac{|\nabla |\eta|(\zeta)|}{|\eta'_\zeta(\zeta)|} \cdot |\nabla \theta(\zeta)|^{-1}, \quad p = \theta(\zeta).$$

Отсюда, используя тождество $|\nabla |\eta|| \equiv |\eta'_\zeta|$, справедливое для любой аналитической функции η , получаем неравенства

$$1 \leq |\nabla(\epsilon \cdot h)|_g \leq \tau^{-1} \quad \text{всюду в } H_\tau.$$

При этом были учтены вытекающие из (3.4) оценки

$$\forall \zeta = (\varphi, \rho), \quad \rho \geq \tau, \quad \tau \leq |\nabla \theta(\zeta)| \leq 1. \quad (5.16)$$

Следовательно, в метрике g при значении τ , сколь угодно близком к единице, для функции $\epsilon \cdot h$ на множестве H_τ имеют место оценки (2.4).

Значит, свойство (i) в формулировке примера 1 для функции исчерпания $\epsilon \cdot h$ на множестве H_τ в метрике g справедливо.

Справедливость свойства (ii) в формулировке примера 1 для функции исчерпания $\epsilon \cdot h$ легко следует из оценки роста (3.28), в силу которой в области Q_τ выполняется (пока в евклидовой метрике) неравенство

$$|\nabla(\epsilon \cdot h)| < c(\epsilon \cdot h) \ln^2(\epsilon \cdot h),$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная. Отсюда с учетом условия (3.34) на метрику g_τ имеем уже в метрике $g = \epsilon^2 g_\tau$ неравенство

$$|\nabla(\epsilon \cdot h)|_g < c(g)(\epsilon \cdot h) \ln^2(\epsilon \cdot h),$$

где постоянная $c(g) := c\delta^{-1}\epsilon^{-1}$ зависит от метрики g , а δ то же, что и в (3.34).

На основании последнего неравенства в качестве функции $\mu_{h,Q}(t)$, определяемой условием (2.5) для функции исчерпания $\epsilon \cdot h$, можно взять функцию вида

$$\mu_{\epsilon h, Q}(t) = ct \ln^2 t.$$

Следовательно, свойство (ii) из примера 1 действительно справедливо.

Утверждение 4 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Как видно из доказательства утверждения 4, выполнимость свойства (i) для функции исчерпания $\epsilon \cdot h$ на области $\overline{H_\tau}$ обеспечивается конкретным видом на этой области функции исчерпания h и метрики g .

Таким образом, на основании утверждений 1–4 и приведенного выше следствия пример 1 (вместе с дополнением к нему) полностью обоснован.

Обоснование примера 2. Его составляют следующие два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть $\tilde{U}$ – область, введенная в определении 3. Тогда для любого $\epsilon > 0$ конформно-евклидова метрика $\tilde{g} = \tilde{g}(\tau, \epsilon)$, введенная в определении 4, при некоторых $\tau \in (0, 1)$ и сколь угодно малых $\epsilon > 0$ удовлетворяет примеру 2 и дополнению из п. 2.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, бесконечность площади области $\tilde{U}$ в метрике $\tilde{g}$ так же очевидна, как следствие для метрики g , поскольку $g \equiv \tilde{g}$ на области $\tilde{H}$ по построению.

Далее, в силу замечания 6 свойство полноты метрики $\tilde{g}$ в области $\tilde{U}$ вытекает из утверждения 1 и свойства полноты метрики $\tilde{g}$ в замкнутой области $\tilde{Q}$, введенной в определении 3 области $\tilde{U}$. Последнее свойство, в свою очередь, является простым следствием полноты области $\tilde{Q}$ относительно евклидовой метрики g_ϵ и условия (4.22) для метрики $\tilde{g}$ в области $\tilde{Q}$. Тем самым, полнота метрики $\tilde{g}$ в области $\tilde{U}$ доказана.

Согласно замечаниям 7 и 8 справедливость утверждений 2 и 3 обеспечивают свойства (3.33), (3.35) и (3.36) метрики g_τ (из леммы 4). Поскольку указанные свойства совпадают соответственно со свойствами (4.21), (4.23) и (4.24) метрики $\tilde{g}_\tau$ (из леммы 7), то утверждения 2 и 3 распространяются и на метрику $\tilde{g}$ в области $\tilde{U}$.

Иными словами, в области $\tilde{U}$ с метрикой $\tilde{g} = \tilde{g}(\tau, \epsilon)$ (при τ сколь угодно близком к единице, а ϵ сколь угодно малом) выполняется ϵ -асимптотически точное евклидова вида изопериметрическое неравенство (2.8) с заменой в нем g на $\tilde{g}$ для всех предкомпактных областей $D \Subset \tilde{U}$ таких, что $S_{\tilde{g}}(D) > \epsilon$, причем постоянную $C \in (0, 2\pi)$ в неравенстве (2.8) можно выбрать при фиксированном ϵ сколь угодно близкой слева к $\sqrt{2\pi}$.

При этом указанная точность изопериметрического неравенства достигается на исчерпании $\{B_h(r)\}$, $r > 0$, области $\tilde{U}$, порождаемом функцией исчерпания $\tilde{h}$, определенной в (4.16).

Перейдем от функции $\tilde{h}$ к функции $\epsilon \cdot \tilde{h}$, порождающей то же, что и $\tilde{h}$, исчерпание $\{B_{\tilde{h}}(r)\}$, $r > 0$, области $\tilde{U}$.

Для завершения доказательства утверждения 5 осталось убедиться в справедливости для функции исчерпания $\epsilon \cdot \tilde{h}$ свойств (i) и (ii) из определения 1 исчерпания, ε -близкого к круговому, за исключением требования монотонности функции $\mu_Q(t)$ в условии (2.6).

Прежде всего, ссылаясь на замечание 9 и утверждение 4, можно подтвердить справедливость условия (i) для функции $\epsilon \cdot \tilde{h}$ на области H_τ , т.е. справедливость всюду в этой области оценок вида (2.4):

$$1 - \varepsilon \leq |\nabla(\epsilon \cdot \tilde{h})|_{\tilde{g}} \leq 1 + \varepsilon, \quad (5.17)$$

поскольку

$$g \equiv \tilde{g}, \quad h \equiv \tilde{h}$$

всюду в H_τ по построению.

При этом, конечно, выполнено присутствующее в условии (i) требование $S_{\tilde{g}}(\tilde{U} \setminus H_\tau) < \varepsilon$ по условию (4.23) построения метрики $\tilde{g}$.

Убедимся, что оценки (5.17) справедливы также и на множестве

$$Q_1 := \bigcup_{i=k}^{+\infty} (P_1)_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i} \quad (5.18)$$

для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Напомним, что обозначение $(P_1)_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i}$ введено в (4.10).

С этой целью сначала выпишем вид функции исчерпания $\tilde{h}$ и метрики $\tilde{g}$ на каждом из множеств $(P_1)_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i}$, $i \in \mathbb{N}$, согласно определениям (4.13) и (4.16) для функции $\tilde{h}$ и определениям (4.17) и (4.19) для метрики $\tilde{g}$:

$$\tilde{h} = t_i + \frac{h - t_i}{\mu_i}, \quad \tilde{g} = \epsilon^2 \left(\frac{|\nabla h|}{\mu_i} \right)^2 g_e \quad \text{на } (P_1)_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i}, \quad (5.19)$$

где g_e – евклидова метрика. Отсюда непосредственно следует, что $|\nabla(\epsilon \cdot \tilde{h})|_{\tilde{g}} \equiv 1$ на каждом множестве $(P_1)_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i}$, $i \in \mathbb{N}$, и, значит, на всем множестве Q_1 .

Поэтому функция исчерпания $\epsilon \cdot \tilde{h}$ действительно удовлетворяет свойству (i) из определения 1 на множестве $H_\tau \cup Q_1$ в метрике $\tilde{g}$.

Наконец, проверим условие (ii) из определения 1 для функции исчерпания $\epsilon \cdot \tilde{h}$ в метрике $\tilde{g}$ на множестве $Q_r := \tilde{U} \setminus (H_\tau \cup Q_1)$.

С этой целью, отбрасывая для простоты множитель ϵ в определениях указанной функции исчерпания и метрики $\tilde{g}$, докажем равенство (2.6), в котором в качестве функции $\mu_{h,Q}$ возьмем функцию $\mu_{\tilde{h},Q_r}$ вида (4.1) в метрике $\tilde{g}_r$.

В силу определения (5.18) множество Q_r содержит все множества $\overline{(P_r)_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i}}$, $i \in \mathbb{N}$. Рассмотрим тогда для каждого $i \in \mathbb{N}$ числовой отрезок $[\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$ таких значений $\tilde{t}$ функции $\tilde{h}$, для которых ее линии уровня $E_{\tilde{h}}(\tilde{t})$ имеют непустое пересечение с множеством $\overline{(P_r)_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i}}$.

Поскольку в силу леммы 6 в области $\tilde{Q}$ указанные линии $E_{\tilde{h}}(\tilde{t})$ совпадают с линиями уровня $E_h(t)$ функции h (для соответствующих t), то они не могут иметь других точек из Q_r , кроме точек из $\overline{(P_r)_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i}}$. Следовательно,

$$\forall \tilde{t} \in [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i] \quad E_{\tilde{h}}(\tilde{t}) \cap Q_r = E_{h_i}(\tilde{t}),$$

где через $\tilde{h}_i$ обозначен след функции $\tilde{h}$ на множество $\overline{(P_r)_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i}}$.

Поэтому для интеграла в (2.6), в котором вместо $\mu_{h,Q}$ выступает функция $\mu_{\tilde{h},Q_r}$ вида (4.1) в метрике $\tilde{g}_\tau$ (вместо g), имеем оценку

$$\int^{+\infty} \frac{d\tilde{t}}{\mu_{\tilde{h},Q_r}(\tilde{t})} \geq \sum_i^{+\infty} \int_{\tilde{a}_i}^{\tilde{b}_i} \frac{d\tilde{t}}{\max_{E_{\tilde{h}_i}(\tilde{t})} |\nabla \tilde{h}_i|_{\tilde{g}_\tau}}.$$

По определению (4.16) с учетом (4.15) функция $\tilde{h}$ на $\overline{(P_r)_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i}}$ имеет вид $\tilde{h}_i \equiv \tilde{\nu}_i(h_i)$, где функция $\tilde{\nu}_i(t)$, $t \in [t_i, t_i + 3\delta_i]$, определена в (4.14), а через h_i обозначено ограничение функции h на множество $\overline{(P_r)_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i}}$. Следовательно,

$$\forall \tilde{t} \in [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i] \quad E_{\tilde{h}_i}(\tilde{t}) = E_{h_i}(t), \quad \tilde{t} = \tilde{\nu}_i(t),$$

причем значениям $\tilde{t} = \tilde{a}_i$ и $\tilde{t} = \tilde{b}_i$ отвечают значения $t_i + \delta_i$ и $t_i + 2\delta_i$ в силу самого определения отрезка $[\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$. Тогда, осуществляя замену переменной $\tilde{t} = \tilde{\nu}_i(t)$, $t \in [t_i + \delta_i, t_i + 2\delta_i]$, в интегралах, стоящих под знаком суммы последнего неравенства, перепишем его в виде

$$\int^{+\infty} \frac{d\tilde{t}}{\mu_{\tilde{h},Q_r}(\tilde{t})} \geq \sum_i^{+\infty} \int_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i} \frac{dt}{\max_{E_{h_i}(t)} |\nabla h|_{\tilde{g}_\tau}}. \quad (5.20)$$

Оценим, наконец, $|\nabla h|_{\tilde{g}_\tau}$ в метрике $\tilde{g}_\tau = \tilde{\lambda}^2 g_e$ на множестве $\overline{(P_r)_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i}}$. Поскольку на этом множестве $\tilde{\lambda} = \mu_i/\delta_i$ по определению (4.18), то

$$|\nabla h|_{\tilde{g}_\tau} = \frac{|\nabla h|}{\tilde{\lambda}} \leq \frac{\mu_i}{\tilde{\lambda}} = \delta_i \quad \text{на } \overline{(P_r)_{t_i+\delta_i}^{t_i+2\delta_i}}.$$

Тогда, применяя эту оценку к интегралам в (5.20), получаем, что интеграл, стоящий в левой части неравенства (5.20), расходится. Значит, условие (2.6) из определения 1 для функции $\epsilon \cdot \tilde{h}$ в метрике $\tilde{g}$ действительно справедливо.

Утверждение 5 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Область $\tilde{U}$, введенная в определении 3, имеет конформно-гиперболический тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимся к предложению из п. 2.1 и с целью его применения проверим, что в области $\tilde{U}$ с евклидовой метрикой выполняется относительное изопериметрическое неравенство евклидова вида (2.1) (при $n = 2$) для любых областей $D \Subset \tilde{U}$, площадь которых $S(D) \geq s_0 > 0$, где $s_0 < S(\tilde{U})$ – некоторое значение. (При этом под границей области D в (2.1) понимается относительная в $\tilde{U}$ граница $\partial^c D$ этой области.)

Получим требуемое неравенство, исходя из классического евклидова изопериметрического неравенства (2.7) для любой области $D \in U$, в котором ∂D – это, естественно, полная граница области D .

Сначала оценим длину относительной в U границы $\partial\tilde{U}$ области $\tilde{U}$ и площадь $S(\tilde{U})$. (Здесь $\partial\tilde{U}$ – это край области $\tilde{U}$ как многообразия.) Согласно определению 3 области $\tilde{U}$

$$\partial\tilde{U} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (\partial P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}(b, s_{1i}) \cup \partial P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}(s_{2i}, s_{3i}) \cup \partial P_{t_i}^{t_i+3\delta_i}(s_{4i}, a + 2\pi)),$$

следовательно, $L(\partial\tilde{U}) < 1$ в силу условия (4.5).

Отсюда следует, во-первых, что $L(\partial D) \leq L(\partial^c D) + 1$ для любой области $D \in \tilde{U}$, а во-вторых, что площадь выброшенных из круга U множеств, ограниченных границей $\partial\tilde{U}$, не превышает в силу изопериметрического неравенства (2.7) величины $(4\pi)^{-1}$. Поэтому $S(\tilde{U}) \geq \pi - (4\pi)^{-1} > 1$.

Тогда для любой области $D \in \tilde{U}$, площадь которой $S(D) > 1$, в силу изопериметрического неравенства (2.7) имеем цепочку неравенств

$$2\sqrt{\pi}\sqrt{S(D)} \leq L(\partial D) \leq L(\partial^c D) + 1 < L(\partial^c D) + \sqrt{S(D)},$$

из которой получаем требуемое изопериметрическое неравенство

$$(2\sqrt{\pi} - 1)\sqrt{S(D)} \leq L(\partial^c D).$$

Поэтому к области $\tilde{U}$ с евклидовой метрикой можно применить предложение для изопериметрической функции $\mathcal{P}(x) = c \cdot \sqrt{x}$. Поскольку для этой функции интеграл (2.3) конечный, то область $\tilde{U}$ имеет гиперболический конформный тип.

Утверждение 6 доказано.

Таким образом, пример 2 полностью обоснован.

Я глубоко благодарен В. А. Зоричу за многолетнюю научную поддержку, причем не только при выполнении данной работы.

Что касается настоящей работы, то я также признателен Владимиру Антоновичу за многие ценные советы и обсуждения, в частности за существенную идею спиралевидного разбиения круга, которая и была технически реализована в рассмотренных выше примерах.

Список литературы

- [1] В. А. Зорич, В. М. Кесельман, “О конформном типе риманова многообразия”, *Функц. анализ и его прил.*, **30:2** (1996), 40–55; англ. пер.: V. A. Zorich, V. M. Kesel'man, “On the conformal type of a Riemannian manifold”, *Funct. Anal. Appl.*, **30:2** (1996), 106–117.
- [2] В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1985, 416 с.; англ. пер.: V. G. Maz'ja, *Sobolev spaces*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1985, xix+486 pp.

- [3] В. А. Зорич, В. М. Кесельман, “Изопериметрическое неравенство на многообразиях конформно-гиперболического типа”, *Функц. анализ и его прил.*, **35**:2 (2001), 12–23; англ. пер.: V. A. Zorich, V. M. Kesel'man, “The isoperimetric inequality on manifolds of conformally hyperbolic type”, *Funct. Anal. Appl.*, **35**:2 (2001), 90–99.
- [4] В. М. Кесельман, “Изопериметрическое неравенство на конформно-гиперболических многообразиях”, *Матем. сб.*, **194**:4 (2003), 29–48; англ. пер.: V. M. Kesel'man, “Isoperimetric inequality on conformally hyperbolic manifolds”, *Sb. Math.*, **194**:4 (2003), 495–513.
- [5] В. М. Кесельман, “Изопериметрическое неравенство на конформно-параболических многообразиях”, *Матем. сб.*, **200**:1 (2009), 3–36; англ. пер.: V. M. Kesel'man, “The isoperimetric inequality on conformally parabolic manifolds”, *Sb. Math.*, **200**:1 (2009), 1–33.
- [6] В. М. Кесельман, “Об относительном изопериметрическом неравенстве на конформно-параболическом многообразии с краем”, *Матем. сб.*, **202**:7 (2011), 117–134; англ. пер.: V. M. Kesel'man, “The relative isoperimetric inequality on a conformally parabolic manifold with boundary”, *Sb. Math.*, **202**:7 (2011), 1043–1058.
- [7] В. М. Кесельман, “Конформная классификация некомпактных римановых многообразий и нормальная форма изопериметрического неравенства”, *Современные проблемы математики и механики. Математика*, **VI**, № 2, Изд-во МГУ, Москва, 2011, 217–224.
- [8] В. М. Кесельман, “Евклидово изопериметрическое неравенство в классе конформных метрик некомпактного риманова многообразия”, *Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1. Матем. Физ.*, **2**:15 (2011), 33–42.

Владимир Михайлович Кесельман
(Vladimir M. Keselman)

Московский государственный индустриальный
университет

E-mail: vmkes@yandex.ru

Поступила в редакцию
11.10.2013