Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Лопес Лагомасино, С. Медина Перальта, У. Фидаль-го Прието, Аппроксимации Эрмита–Паде для некоторых систем мероморфных функций, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 2, 57–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8293>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:59:04

УДК 517.53

Г. Лопес Лагомасино, С. Медина Перальта, У. Фидальго Прието

Аппроксимации Эрмита–Паде для некоторых систем мероморфных функций

Изучается сходимость аппроксимаций Эрмита–Паде 1-го и 2-го рода для некоторых систем мероморфных функций, составленных из рациональных модификаций никишинских систем функций.

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита–Паде, системы Никишина.

DOI: 10.4213/sm8293

§ 1. Введение

В настоящей работе исследуется сходимость последовательностей аппроксимаций Эрмита–Паде 1-го и 2-го рода. Основополагающую роль в изучении алгебраических и аналитических свойств таких аппроксимаций играют пионерские работы А. А. Гончара и Г. Шталя (см., например, [1]–[6]).

С момента своего появления в работе Ш. Эрмита [7] аппроксимации Эрмита–Паде представляют собой неоценимый инструмент в теории чисел (по поводу результатов в этой области мы отсылаем читателя к обзору [8]). Также они находят применение в построении квадратурных формул совместного численного интегрирования (см., например, [9], [10]). Недавно аппроксимации Эрмита–Паде были использованы в моделях, возникающих в теории случайных матриц и математической физике (по поводу таких моделей см. [11]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ – система из m формальных степенных рядов, где

$$f_j(z) = c_{0,j} + \frac{c_{1,j}}{z} + \frac{c_{2,j}}{z^2} + \dots, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Зафиксируем мультииндекс $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m \setminus \{\mathbf{0}\}$, где $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Набор $(Q_{\mathbf{n}}, P_{\mathbf{n},1}, \dots, P_{\mathbf{n},m})$ является *системой многочленов Эрмита–Паде 2-го рода* для системы $\mathbf{f}$, соответствующих мультииндексу $\mathbf{n}$, если для многочленов $Q_{\mathbf{n}}, P_{\mathbf{n},j}$, $j = 1, \dots, m$, выполнены условия

- i) $\deg Q_{\mathbf{n}} \leq |\mathbf{n}| = n_1 + \dots + n_m$, $Q_{\mathbf{n}} \neq 0$,
- ii) $(Q_{\mathbf{n}} f_j - P_{\mathbf{n},j})(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right)$, $j = 1, \dots, m$.

Работа выполнена при поддержке гранта MTM2012-36372-C03-01 (Ministerio de Economía y Competitividad, Spain).

Аналогично, набор $(a_{\mathbf{n},0}, \dots, a_{\mathbf{n},m})$ из многочленов $a_{\mathbf{n},j}$, $j = 0, \dots, m$, является *системой многочленов Эрмита–Паде 1-го рода* для системы $\mathbf{f}$, соответствующей мультииндексу $\mathbf{n}$, если выполнены условия

- iii) $\deg a_{\mathbf{n},j} \leq n_j - 1$, $j = 1, \dots, m$, и не все многочлены $\deg a_{\mathbf{n},j}$ тождественно равны нулю,
- iv) $\left(a_{\mathbf{n},0} + \sum_{j=1}^m a_{\mathbf{n},j} f_j\right)(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_1+\dots+n_m}}\right)$.

В правой части условий ii) и iv) содержатся формальные степенные ряды по убывающим степеням z . Соответственно равенство понимается в смысле коэффициентов.

Векторные рациональные функции

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n}} = \left(\frac{P_{\mathbf{n},1}}{Q_{\mathbf{n}}}, \dots, \frac{P_{\mathbf{n},m}}{Q_{\mathbf{n}}} \right)$$

называют (*векторными*) *аппроксимациями Эрмита–Паде 2-го рода* для $\mathbf{f}$, соответствующими мультииндексу $\mathbf{n}$. Характер приближения такими функциями определяется естественным образом через интерполяционные условия ii). При определенных условиях на $\mathbf{f}$ и последовательность мультииндексов $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ (см., например, теорему 1.3 ниже) можно ожидать, что компоненты $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}$ сходятся к компонентам $\mathbf{f}$ при $|\mathbf{n}| \rightarrow \infty$, $\mathbf{n} \in \Lambda$. В теореме 3.2 будет показано – и это достаточно неожиданно, – что рациональные функции

$$\mathbf{A}_{\mathbf{n}} = \left(\frac{a_{\mathbf{n},0}}{a_{\mathbf{n},m}}, \dots, \frac{a_{\mathbf{n},m-1}}{a_{\mathbf{n},m}} \right)$$

также обладают свойством сходимости при определенных условиях, хотя это совсем не очевидно из рассмотрения интерполяционных условий iv). Принимая это во внимание, мы будем называть векторную рациональную функцию $\mathbf{A}_{\mathbf{n}}$ *аппроксимацией Эрмита–Паде 1-го рода* для $\mathbf{f}$, соответствующей мультииндексу $\mathbf{n}$.

Легко видеть, что при заданных $\mathbf{f}$ и $\mathbf{n}$ аппроксимации Эрмита–Паде 1-го и 2-го рода всегда существуют. Для их построения следует решить однородную линейную систему уравнений, в которой количество уравнений на единицу меньше числа неизвестных. При $m = 1$ оба определения дают классические диагональные аппроксимации Паде. Отметим, что при $m \geq 2$ единственность приближений не гарантируется, в отличие от случая классических аппроксимаций Паде.

В настоящей работе особый упор сделан на исследование одного важного класса систем функций. Согласно классическим результатам А.А. Маркова [12] и Т. Стильтеса [13] преобразование Коши мер с носителем на действительной прямой $\mathbb{R}$ является краеугольным камнем теории сходимости диагональных аппроксимаций Паде. Для аппроксимаций Эрмита–Паде 1-го и 2-го рода аналогичную роль во многом играют системы Никишина, введенные в [14]. В частности, для таких систем имеют место теоремы типа Маркова и Стильтеса (см., например, [5], [6], [15]–[17]).

Всюду ниже через Δ будем обозначать интервал, лежащий на (одной из) полуосей действительной прямой. Через $\mathcal{M}(\Delta)$ мы обозначим класс всех знакопостоянных борелевских мер s с носителем бесконечной мощности, содержащимся в Δ , и $x^\nu \in L_1(s)$ для всех $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Мы также положим

$$\widehat{s}(z) = \int \frac{ds(x)}{z-x}.$$

Тогда

$$\widehat{s}(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{z^{j+1}}, \quad c_j = \int x^j ds(x). \quad (2)$$

Если носитель $\text{supp}(s)$ меры s ограничен, то ряд сходится в окрестности ∞ ; иначе разложение является асимптотическим в ∞ . Таким образом, для каждого $k \geq 0$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{k+1} \left(\widehat{s}(z) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{c_j}{z^{j+1}} \right) = c_k,$$

где предел берется по любой кривой, не являющейся касательной к $\text{supp}(s)$ в окрестности ∞ .

Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}_+$. Согласно теореме Стильтьеса (которая содержит теорему Маркова при ограниченном Δ) если проблема моментов при $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ является определенной, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}(z) = \widehat{s}(z) \quad (3)$$

равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C} \setminus \Delta$. Здесь $\{P_n/Q_n\}_{n \geq 0}$ – диагональная последовательность аппроксимаций Паде для $\widehat{s}$. Достаточное условие (Т. Карлеман [18]) для того, чтобы проблема моментов была определенной, состоит в том, чтобы

$$\sum_{n \geq 0} |c_n|^{-1/2n} = \infty. \quad (4)$$

В задаче распространения теоремы Маркова на общий класс мероморфных функций А. А. Гончар рассмотрел функции вида $\widehat{s} + r$, где r – векторная рациональная функция с полюсами в $\mathbb{C} \setminus \Delta$. Им было показано [19], что если Δ – ограниченный интервал и если для последовательности ортогональных многочленов по s существует асимптотика отношения, то имеет место (3), откуда следует, что каждый полюс функции r в $\mathbb{C} \setminus \Delta$ “притягивает” ровно столько нулей Q_n , каков его порядок, а оставшиеся нули Q_n аккумулируются у Δ при $n \rightarrow \infty$. Позже Е. А. Рахманов [20] получил полное обобщение теоремы Маркова в случае, если r имеет действительные коэффициенты; при этом для r с комплексными коэффициентами было показано, что аналогичный результат неверен без дополнительных предположений на меру s . В случае неограниченных Δ ответ был получен в [21] для r с действительными коэффициентами и в [22] для r с комплексными коэффициентами.

Определим понятие системы Никишина. Пусть $\Delta_\alpha, \Delta_\beta$ – два подынтервала действительной прямой, имеющих не более одной точки в пересечении. Рассмотрим $\sigma_\alpha \in \mathcal{M}(\Delta_\alpha)$ и $\sigma_\beta \in \mathcal{M}(\Delta_\beta)$ такие, что $\widehat{\sigma}_\beta \in L_1(\sigma_\alpha)$. Используя

дифференциальные обозначения, определим третью меру $\langle \sigma_\alpha, \sigma_\beta \rangle$ следующим образом:

$$d\langle \sigma_\alpha, \sigma_\beta \rangle(x) := \widehat{\sigma}_\beta(x) d\sigma_\alpha(x).$$

При рассмотрении последовательных произведений мер (к примеру, таких, как $\langle \sigma_\gamma, \sigma_\alpha, \sigma_\beta \rangle := \langle \sigma_\gamma, \langle \sigma_\alpha, \sigma_\beta \rangle \rangle$), мы будем предполагать не только, что $\widehat{\sigma}_\beta \in L_1(\sigma_\alpha)$, но также, что $\langle \sigma_\alpha, \sigma_\beta \rangle \in L_1(\sigma_\gamma)$, где $\langle \sigma_\alpha, \sigma_\beta \rangle$ – преобразование Коши меры $\langle \sigma_\alpha, \sigma_\beta \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Рассмотрим набор интервалов Δ_j , $j = 1, \dots, m$, со следующими свойствами:

$$\Delta_j \cap \Delta_{j+1} = \emptyset \quad \text{или} \quad \Delta_j \cap \Delta_{j+1} = \{x_{j,j+1}\}, \quad j = 1, \dots, m-1,$$

где $x_{j,j+1}$ – точка. Рассмотрим набор $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ мер таких, что

$$\text{Co}(\text{supp}(\sigma_j)) = \Delta_j, \quad \sigma_j \in \mathcal{M}(\Delta_j), \quad j = 1, \dots, m,$$

и

$$\langle \sigma_j, \dots, \sigma_k \rangle := \langle \sigma_j, \langle \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_k \rangle \rangle \in \mathcal{M}(\Delta_j), \quad 1 \leq j < k \leq m, \quad (5)$$

где $\text{Co}(E)$ обозначает выпуклую оболочку множества E . В случае $\Delta_j \cap \Delta_{j+1} = \{x_{j,j+1}\}$ мы также будем предполагать, что $x_{j,j+1}$ не является точечной массой меры σ_j или σ_{j+1} . По определению $\mathbf{s} = (s_{1,1}, \dots, s_{1,m}) = \mathcal{N}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, где

$$s_{1,1} = \sigma_1, \quad s_{1,2} = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle, \quad \dots, \quad s_{1,m} = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m \rangle$$

является никишинской системой мер, порождаемой набором $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$. Через $\widehat{\mathbf{s}} = (\widehat{s}_{1,1}, \dots, \widehat{s}_{1,m})$, где $\widehat{s}_{1,j}$ – преобразование Коши меры $s_{1,j}$, мы будем обозначать соответствующую никишинскую систему функций.

Данное определение обобщает определение [14] на случай, когда порождающие меры могут иметь неограниченный носитель и (или) когда любые два последовательных интервала Δ_j имеют общую концевую точку. Ниже для $1 \leq j \leq k \leq m$ введем обозначения

$$s_{j,k} := \langle \sigma_j, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_k \rangle, \quad s_{k,j} := \langle \sigma_k, \sigma_{k-1}, \dots, \sigma_j \rangle.$$

Отметим, что функции $\widehat{s}_{1,j}$ являются голоморфными в дополнении к Δ_1 , т.е. $\widehat{s}_{1,j} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Delta_1)$, $j = 1, \dots, m$. Рассмотрим векторную рациональную функцию

$$\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m) = \left(\frac{v_1}{t_1}, \dots, \frac{v_m}{t_m} \right)$$

такую, что $\deg t_j = d_j$ и $\deg v_j < d_j$ при всех $j = 1, \dots, m$. Будем предполагать, что дробь v_j/t_j , $j = 1, \dots, m$, несократима. Ниже мы будем рассматривать системы мероморфных функций вида $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m) = \widehat{\mathbf{s}} + \mathbf{r}$, где

$$f_j(z) = \widehat{s}_{1,j}(z) + r_j(z), \quad j = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Теорема типа Стильтьеса была установлена в [15] для аппроксимаций Эрмита–Паде 2-го рода системы Никишина $\hat{\mathbf{s}}$. Нашей целью будет получение аналога данного результата для систем функций вида $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{s}} + \mathbf{r}$. При $m = 2$ ответ в частном случае дается в [23]. Впоследствии мы будем предполагать, что $m \geq 2$, поскольку случай $m = 1$ соответствует аппроксимациям Паде, для которых соответствующие результаты известны.

Через $\text{dist}(E, F)$ мы будем обозначать расстояние между подмножествами E и F комплексной плоскости $\mathbb{C}$ относительно сферической метрики. Далее, пусть $\mathcal{C}(\Delta)$ – класс всех таких мер из $\mathcal{M}(\Delta)$, что после применения аффинного преобразования, переводящего Δ в подмножество полупрямой $\mathbb{R}_+$, образ меры удовлетворяет условию (4) (конечно, данный результат не зависит от выбора аффинного преобразования). Мы имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $\mathbf{s} = (s_{1,1}, \dots, s_{1,m}) = \mathcal{N}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ и $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)$, где рациональные функции r_j , $j = 1, \dots, m$, имеют действительные коэффициенты, их полюсы различны при различных j и лежат в $\mathbb{C} \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_m)$. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m$ – бесконечная последовательность различных мультииндексов такая, что

$$\sup \left\{ \max_{j=1, \dots, m} (n_j) - \min_{k=1, \dots, m} (n_k) : \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \Lambda \right\} \leq C < \infty. \quad (7)$$

Пусть выполнены следующие два дизъюнктивных условия: $\text{dist}(\Delta_1, \Delta_2) > 0$ или $\sigma_1 \in \mathcal{C}(\Delta_1)$, $\text{dist}(\Delta_{m-1}, \Delta_m) > 0$ или $\sigma_m \in \mathcal{C}(\Delta_m)$, и пусть $(\mathbf{R}_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n} \in \Lambda}$ – соответствующая последовательность аппроксимаций Эрмита–Паде 2-го рода для $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{s}} + \mathbf{r}$. Тогда при $j = 1, \dots, m$

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} \frac{P_{\mathbf{n},j}}{Q_{\mathbf{n}}} = f_j = \hat{s}_{1,j} + r_j \quad \text{внутри } (\mathbb{C} \setminus \Delta_1)', \quad (8)$$

где $(\mathbb{C} \setminus \Delta_1)'$ получено путем удаления из $\mathbb{C} \setminus \Delta_1$ всех полюсов функций r_j .

Более того, для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется $N > 0$ такое, что $\deg Q_{\mathbf{n}} = \sum_{k=1}^m n_k$ для всех $\mathbf{n} \in \Lambda$, $\sum_{k=1}^m n_k \geq N$. Если ζ – полюс некоторой r_j порядка κ , то $Q_{\mathbf{n}}$ имеет в точности κ нулей в диске $\{z : |z - \zeta| < \varepsilon\}$, а $Q_{\mathbf{n}}$ имеет в точности $\sum_{k=1}^m (n_k - d_k)$ простых нулей в $\mathring{\Delta}_1$ ($\mathring{\Delta}_1$ – внутренность интервала Δ_1 с евклидовой топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$).

Естественно попытаться в духе классической скалярной теоремы Гончара обобщить данный результат на случай, когда $\mathbf{r}$ имеет комплексные коэффициенты. При этом на порождающие меры системы Никишина следует наложить дополнительные ограничения. Как упоминалось ранее, подход Гончара состоял в использовании асимптотики отношения ортогональных многочленов. Е. А. Рахманов [24], [25] (см. также [26] по поводу более короткого доказательства) установил асимптотику отношения в случае, когда мера ортогональности s имеет компактный носитель из ограниченного интервала Δ и $s' > 0$ почти всюду на Δ . Для систем Никишина в [27] (см. также [28]) асимптотика отношения соответствующих совместно ортогональных многочленов была получена в случае, если порождающие меры σ_j , $j = 1, \dots, m$, имеют компактный

носитель из Δ_j и $\sigma'_j > 0$ почти всюду на Δ_j . Возможно, что схему Гончара можно адаптировать и к данному случаю.

Введенные в [14] АТ-системы играют важную роль при изучении систем Никишина. Пусть задан мультииндекс $\mathbf{n} = (n_0, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Система действительных непрерывных функций $(u_0, \dots, u_m)$, заданных на интервале Δ , называется АТ-системой на Δ , соответствующей мультииндексу $\mathbf{n}$, если линейная форма

$$\mathcal{L}(x) = p_0(x)u_0 + \dots + p_m(x)u_m(x)$$

имеет не более $n_0 + \dots + n_m - 1$ нулей на Δ для любых многочленов с действительными коэффициентами $p_0, \dots, p_m$ таких, что $\deg p_j \leq n_j - 1$, и не все из которых тождественно равны нулю. Соответственно система называется АТ-системой на Δ , если она является АТ-системой для любого мультииндекса $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

В соответствии с [29; теорема 1.1], если зафиксировать $N < n_0 + \dots + n_m$ точек $x_1, \dots, x_N$ из внутренности Δ , то мы можем найти подходящий набор многочленов $p_0, \dots, p_m$, $\deg p_j \leq n_j - 1, j = 0, \dots, m$, такой, что $\mathcal{L}$ меняет знак в точках $x_1, \dots, x_N$ и не имеет других перемен знака на Δ . Отметим, что системы Никишина являются АТ-системами (см. [30; теорема 1.1] и [31; теорема 1.1]).

Для доказательства теоремы 1.3 нам потребуется АТ-свойство для полиномиальных модификаций систем Никишина.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $(s_{1,1}, \dots, s_{1,m}) = \mathcal{N}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ и $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^{m+1}$, и пусть

$$\sup \left\{ \max_{j=0, \dots, m} (n_j) - \min_{k=0, \dots, m} (n_k) : \mathbf{n} = (n_0, \dots, n_m) \in \Lambda \right\} \leq C < \infty. \quad (9)$$

Далее, пусть $(t_0, \dots, t_m)$ – векторный многочлен с действительными коэффициентами, чьи нули лежат в $\mathbb{C} \setminus \Delta_m$, при этом при $j \neq k$ нули t_j и t_k различны. Предположим, что $\text{dist}(\Delta_{m-1}, \Delta_m) > 0$ или $\sigma_m \in \mathcal{C}(\Delta_m)$. Тогда $(t_0, t_1 \hat{s}_{1,1}, \dots, t_m \hat{s}_{1,m})$ является АТ-системой на любом интервале $\Delta \subset \mathbb{R} \setminus \Delta_1$ для всех $\mathbf{n} \in \Lambda$ при условии, что $n_0 + \dots + n_m$ достаточно велико.

Данный результат вытекает из сходимости многоточечных аппроксимаций Эрмита–Паде 1-го рода (см. теорему 3.2 ниже).

В дальнейшем мы будем придерживаться введенных выше обозначений.

Работа организована следующим образом. В §2 приводятся вспомогательные результаты и дается доказательство теоремы 1.3 в предположении, что выполнена теорема 1.4. В §3 изучается сходимость многоточечных аппроксимаций Эрмита–Паде 1-го рода и доказывается теорема 1.4. Нумерация выносных формул сплошная на протяжении работы. Определения, леммы, предложения и теоремы в каждом параграфе имеют независимую нумерацию.

§ 2. Вспомогательные результаты

Нам потребуется ряд вспомогательных результатов о системах Никишина, которые мы дадим ниже в сводной форме. Следующая лемма достаточно понятна (по поводу доказательства см. [17; лемма 2.1]). В этом параграфе везде (за исключением доказательства теоремы 1.3) предполагается, что рациональные функции r_j могут иметь общие полюсы.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\mathbf{s} = (s_{1,1}, \dots, s_{1,m}) = \mathcal{N}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$. Предположим, что найдутся многочлены с действительными коэффициентами $a_0, \dots, a_m$ и многочлен w с действительными коэффициентами, нули которого лежат в $\mathbb{C} \setminus \Delta_1$, такие, что

$$\frac{\mathcal{A}_0(z)}{w(z)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Delta_1), \quad \frac{\mathcal{A}_0(z)}{w(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^N}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

где $\mathcal{A}_0 := a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \widehat{s}_{1,k}$, $N \geq 1$. Далее, пусть $\mathcal{A}_1 := a_1 + \sum_{k=2}^m a_k \widehat{s}_{2,k}$. Тогда

$$\frac{\mathcal{A}_0(z)}{w(z)} = \int \frac{\mathcal{A}_1(x)}{(z-x)} \frac{d\sigma_1(x)}{w(x)}. \quad (10)$$

Если $N \geq 2$, то, дополнительно,

$$\int x^\nu \mathcal{A}_1(x) \frac{d\sigma_1(x)}{w(x)} = 0, \quad \nu = 0, \dots, N-2. \quad (11)$$

В частности, $\mathcal{A}_1$ имеет по крайней мере $N-1$ перемен знака в $\mathring{\Delta}_1$.

Ниже запись $\mathcal{O}(1/z^N)$ означает, что $z \rightarrow \infty$, а предел берется по любой кривой, не являющейся касательной к полупрямой, содержащей носитель рассматриваемых мер. Через T мы обозначим наименьшее общее кратное знаменателей $t_1, \dots, t_m$ рациональных функций $r_1, \dots, r_m$. В настоящем параграфе также предполагается, что $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ и $|\mathbf{n}| := n_1 + \dots + n_m$.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\mathbf{R}_n = (P_{\mathbf{n},1}/Q_{\mathbf{n}}, \dots, P_{\mathbf{n},m}/Q_{\mathbf{n}})$ – аппроксимации Эрмита-Паде 2-го рода для $\mathbf{f} = \widehat{\mathbf{s}} + \mathbf{r}$ и $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^m \setminus \{\mathbf{0}\}$. Предположим, что

$$n_j > D := \deg T, \quad j = 1, \dots, m.$$

Тогда для любого $j = 1, \dots, m$

$$\int x^\nu t_j(x) Q_{\mathbf{n}}(x) ds_{1,j}(x) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n_j - d_j - 1, \quad (12)$$

где $d_j = \deg t_j$. Как следствие

$$\int Q_{\mathbf{n}}(x) \left(p_1 t_1 + \sum_{j=2}^m p_j t_j \widehat{s}_{2,j} \right) (x) d\sigma_1(x) = 0 \quad (13)$$

для любого многочлена p_j , $\deg p_j \leq n_j - d_j - 1$, $j = 1, \dots, m$, и

$$\int (T Q_{\mathbf{n}})(x) \left(p_1 + \sum_{j=2}^m p_j \widehat{s}_{2,j} \right) (x) d\sigma_1(x) = 0 \quad (14)$$

для любого многочлена p_j , $\deg p_j \leq n_j - D - 1$, $j = 1, \dots, m$.

Более того, $Q_{\mathbf{n}}$ имеет по крайней мере $|\mathbf{n}| - mD$ нулей в $\mathring{\Delta}_1$ и

$$\left(TQ_{\mathbf{n}}\widehat{s}_{1,j} + TQ_{\mathbf{n}}\frac{v_j}{t_j} - TP_{\mathbf{n},j}\right)(z) = \int \frac{(TQ_{\mathbf{n}})(x)}{z-x} ds_{1,j}(x). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\mathbf{n}$, где $n_j \geq D$, $j = 1, \dots, m$. Для каждого $j = 1, \dots, m$ условие ii) записывается как

$$Q_{\mathbf{n}}(z) \left(\widehat{s}_{1,j} + \frac{v_j}{t_j} \right)(z) - P_{\mathbf{n},j}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (\Delta_1 \cup \aleph_j)),$$

где $\aleph_j$ – множество нулей для t_j . Умножая на t_j , мы получаем

$$(Q_{\mathbf{n}}t_j\widehat{s}_{1,j} + Q_{\mathbf{n}}v_j - t_jP_{\mathbf{n},j})(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_j-d_j+1}}\right) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Delta_1),$$

откуда (12) следует из формулы (11) леммы 2.1. Теперь (13) получается, если мы возьмем линейные комбинации соотношений (12).

Если в (12) мы заменим x^ν , $\nu = 0, \dots, n_j - d_j - 1$, на $x^\nu T/t_j$, $\nu = 0, \dots, n_j - D - 1$, и возьмем линейные комбинации только что полученных соотношений ортогональности, то получим (14).

Из [31; теорема 1.1] мы знаем, что $(1, \widehat{s}_{2,2}, \dots, \widehat{s}_{2,m})$ образует АТ-систему на Δ_1 . Предположим, что $Q_{\mathbf{n}}$ имеет не более $|\mathbf{n}| - mD - 1$ перемен знака на $\mathring{\Delta}_1$. Соответственно мы можем подобрать $p_1, \dots, p_m$ таким образом, что

$$p_1 + \sum_{j=2}^m p_j \widehat{s}_{2,j}, \quad \deg p_j \leq n_j - D - 1, \quad j = 1, \dots, m,$$

будет иметь простые нули в точках перемены знака $Q_{\mathbf{n}}$ на $\mathring{\Delta}_1$ и не иметь других нулей на Δ_1 . Это, однако, противоречит (14). Таким образом, $Q_{\mathbf{n}}$ имеет по крайней мере $|\mathbf{n}| - mD$ нулей на $\mathring{\Delta}_1$ (аналогичный прием будет неоднократно использоваться нами в дальнейшем, и мы не будем каждый раз на этом подробно останавливаться). Окончательно, (15) вытекает из соотношения (10), полученного в лемме 2.1.

Хорошо известно, что для меры $\sigma \in \mathcal{M}(\Delta)$, где Δ содержится на вещественной полуоси, найдутся мера $\tau \in \mathcal{M}(\Delta)$ и многочлен $\ell(z) = az + b$, $a = 1/|\sigma|$, $b \in \mathbb{R}$, такие, что

$$\frac{1}{\widehat{\sigma}(z)} = \ell(z) + \widehat{\tau}(z), \quad (16)$$

где $|\sigma|$ – полная вариация меры σ (см. [29; приложение] по поводу мер с компактным носителем и [30; лемма 2.3] в случае, если носитель содержится в полупрямой). Мера τ часто называют *обратной* к мере σ . Ниже обратные меры будут возникать достаточно часто, и мы будем придерживаться только что введенного обозначения для таких мер. Если в обозначении меры участвуют индексы, то они будут сохраняться и при обозначении обратной меры. К примеру,

через $\tau_{j,k}$ обозначаем обратную меру для меры $s_{j,k}$, при этом соответствующий многочлен обозначаем через $\ell_{j,k}$. Таким образом,

$$\frac{1}{\widehat{s}_{j,k}(z)} = \ell_{j,k}(z) + \widehat{\tau}_{j,k}(z).$$

Для каждого $j \in \{2, \dots, m\}$ определим вспомогательную систему Никишина

$$\begin{aligned} S^j &= (s_{2,2}^j, \dots, s_{2,m}^j) = \mathcal{N}(\sigma_2^j, \dots, \sigma_m^j) \\ &:= \mathcal{N}(\tau_{2,j}, \widehat{s}_{2,j} d\tau_{3,j}, \dots, \widehat{s}_{j-1,j} d\tau_{j,j}, \widehat{s}_{j,j} d\sigma_{j+1}, \sigma_{j+2}, \dots, \sigma_m). \end{aligned}$$

Мы также положим

$$S^1 = (s_{2,2}^1, \dots, s_{2,m}^1) = \mathcal{N}(\sigma_2, \dots, \sigma_m).$$

Такие вспомогательные системы использовались в доказательствах лемм 5 и 6 работы [15] и теоремы 3.1.3 работы [3]. Позже в [30; лемма 3.2] были установлены несколько формул для отношений преобразований Коши (по поводу случая неограниченных или пересекающихся носителей порождающих мер см. [31; лемма 2.10]). Для удобства читателя мы приведем указанные формулы в принятых здесь обозначениях:

$$\frac{1}{\widehat{s}_{2,j}} = \ell_{2,j} + \widehat{\tau}_{2,j}, \quad (17)$$

$$\frac{\widehat{s}_{1,k}}{\widehat{s}_{1,1}} = \frac{|s_{1,k}|}{|s_{1,1}|} - \langle \tau_{1,1}, \langle s_{2,k}, \sigma_1 \rangle \widehat{\rangle}, \quad 1 < k \leq m, \quad (18)$$

$$\frac{\widehat{s}_{2,k}}{\widehat{s}_{2,j}} = b_{j,k} + (-1)^{k-1} \widehat{s}_{2,k+1}^j + c_{j,k} \widehat{s}_{2,k}^j, \quad k = 2, \dots, j-1, \quad (19)$$

$$\frac{\widehat{s}_{2,k}}{\widehat{s}_{2,j}} = b_{j,k} + c_{j,k} \widehat{s}_{2,k}^j(z), \quad k = j+1, \dots, m, \quad (20)$$

где $b_{j,k}$ и $c_{j,k}$ – некоторые (совершенно определенные) константы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$. Для каждого $j = 1, \dots, m$ определим *ассоциированный мультииндекс* $\mathbf{n}^j = (n_2^j, \dots, n_m^j)$ следующим образом:

$$n_k^j = \begin{cases} \min(n_1, \dots, n_{k-1}, n_j - 1), & k = 2, \dots, j, \\ \min(n_j, n_k), & k = j+1, \dots, m \end{cases}$$

(всего $m-1$ компонент). Мы также определим

$$|\mathbf{n}^j| = \sum_{k=2}^m n_k^j.$$

Далее, положим

$$\Phi_{\mathbf{n},j} := \left(TQ_{\mathbf{n}} \widehat{s}_{1,j} + TQ_{\mathbf{n}} \frac{v_j}{t_j} - TP_{\mathbf{n},j} \right), \quad j = 1, \dots, m$$

(см. (15)).

ЛЕММА 2.4. Пусть $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$ – мультииндекс, $n_k > D = \deg T$, $k = 1, \dots, m$. Тогда для любого $j = 1, \dots, m$

$$\int (p_k \Phi_{\mathbf{n},j})(x) ds_{2,k}^j(x) = 0, \quad \deg p_k < n_k^j - D, \quad k = 2, \dots, m. \quad (21)$$

Далее, пусть $N^j = |\mathbf{n}^j| + n_j$. Тогда для каждого $j = 1, \dots, m$ найдется приведенный многочлен $w_{\mathbf{n},j}$, $\deg w_{\mathbf{n},j} \geq |\mathbf{n}^j| - (m-1)D$, с простыми нулями, лежащими в Δ_2 , такой, что

$$\frac{\Phi_{\mathbf{n},j}(z)}{w_{\mathbf{n},j}(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{N^j - mD + 1}}\right) \in H(\mathbb{C} \setminus \Delta_1), \quad (22)$$

$$0 = \int x^\nu T(x) Q_{\mathbf{n}}(x) \frac{ds_{1,j}(x)}{w_{\mathbf{n},j}(x)}, \quad \nu = 0, 1, \dots, N^j - mD - 1. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $j \in \{1, \dots, m\}$. Из определения $\Phi_{\mathbf{n},j}$ и (15) имеем

$$\int (p_k \Phi_{\mathbf{n},j})(x) ds_{2,k}^j(x) = \int p_k(x) \int \frac{T(t) Q_{\mathbf{n}}(t)}{x-t} ds_{1,j}(t) ds_{2,k}^j(x).$$

Так как $\deg p_k < n_k^j - D \leq n_j - D$, то из (12) и теоремы Фубини

$$\begin{aligned} & \int p_k(x) \int \frac{T(t) Q_{\mathbf{n}}(t)}{x-t} ds_{1,j}(t) ds_{2,k}^j(x) \\ &= \iint \frac{(p_k T Q_{\mathbf{n}})(t)}{x-t} ds_{1,j}(t) ds_{2,k}^j(x) = - \int (p_k T Q_{\mathbf{n}} \widehat{s}_{2,k}^j)(t) ds_{1,j}(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Вначале мы докажем утверждение леммы в случае $j+1 \leq k \leq m$. Если $j = m$, то множество таких k пусто и доказывать нечего. Пусть $j \leq m-1$. Из (20) получаем

$$\begin{aligned} - \int (p_k T Q_{\mathbf{n}} \widehat{s}_{2,k}^j)(t) ds_{1,j}(t) &= \int (p_k T Q_{\mathbf{n}})(t) \left(\frac{\widehat{s}_{2,k}(t)}{\widehat{s}_{2,j}(t)} - a_{j,k} \right) ds_{1,j}(t) \\ &= -a_{j,k} \int (p_k T Q_{\mathbf{n}})(t) ds_{1,j}(t) + \int (p_k T Q_{\mathbf{n}})(t) ds_{1,k}(t). \end{aligned}$$

По условию

$$\deg p_k < n_k^j - D \leq \min\{n_j - D, n_k - D\}.$$

Учитывая (12), получаем, что оба члена в последнем равенстве равны нулю. Это доказывает первый случай.

Теперь рассмотрим случай $2 \leq k \leq j$. Применяя сначала несколько раз формулу (19) для понижения k до 2 и потом формулу (17), мы имеем

$$\begin{aligned} \widehat{s}_{2,k}^j &= (-1)^k \left(\frac{\widehat{s}_{2,k-1}}{\widehat{s}_{2,j}} - a_{j,k-1} - c_{j,k-1} \widehat{s}_{2,k-1}^j \right) \\ &= (-1)^k \left(\frac{\widehat{s}_{2,k-1}}{\widehat{s}_{2,j}} - a_{j,k-1} - (-1)^{k-1} c_{j,k-1} \left(\frac{\widehat{s}_{2,k-2}}{\widehat{s}_{2,j}} - a_{j,k-2} - c_{j,k-2} \widehat{s}_{2,k-2}^j \right) \right) \\ &= \dots = \mathcal{L}_j^* + \frac{1}{\widehat{s}_{2,j}} \sum_{l=1}^{k-1} c_l^* \widehat{s}_{2,l}, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\mathcal{L}_j^*$ – многочлен степени 1, $\widehat{s}_{2,1} \equiv 1$, а c_l^* , $l = 1, \dots, k-1$, – константы. Подставляя (25) в (24), находим, что

$$\begin{aligned} & \int (p_k T Q_{\mathbf{n}} \widehat{s}_{2,k}^j)(t) ds_{1,j}(t) \\ &= - \int (p_k T Q_{\mathbf{n}})(t) \mathcal{L}_j^*(t) ds_{1,j}(t) - \sum_{l=1}^{k-1} c_l^* \int (p_k T Q_{\mathbf{n}})(t) ds_{1,l}(t). \end{aligned}$$

По условию

$$\deg p_k \leq \min(n_1 - D - 1, \dots, n_{k-1} - D - 1, n_j - D - 2),$$

откуда из (12) вытекает, что интегралы в правой части данного равенства равны нулю. Это доказывает (21).

Далее из (21) вытекает, что

$$\int \Phi_{\mathbf{n},j}(x) \left(p_2 + \sum_{k=3}^m p_k \widehat{s}_{3,k}^j \right)(x) d\sigma_2^j(x) = 0 \quad (26)$$

для любых многочленов p_k , $\deg p_k < n_k^j - D$, $k = 2, \dots, m$. По теореме 1.1 из [31] имеем, что $(1, \widehat{s}_{3,3}^j, \dots, \widehat{s}_{3,m}^j)$ образует АТ-систему на Δ_2 . Отсюда и из (26) вытекает, что $\Phi_{\mathbf{n},j}$ имеет по крайней мере $|\mathbf{n}^j| - (m-1)D$ перемен знака в Δ_2 . Пусть $w_{\mathbf{n},j}$ – приведенный многочлен, в нулях которого $\Phi_{\mathbf{n},j}$ меняет знак во внутренности Δ_2 . Учитывая, что $\deg w_{\mathbf{n},j} \geq |\mathbf{n}^j| - (m-1)D$, мы доказываем (22), что вместе с (11) дает (23). Лемма 2.4 доказана.

Теперь мы готовы доказать сходимость аппроксимаций Эрмита–Паде 2-го рода в слабом смысле. Нам потребуется понятие сходимости в смысле обхвата по Хаусдорфу.

Для подмножества B комплексной плоскости $\mathbb{C}$ через $\mathcal{U}(B)$ обозначим множество всех покрытий множества B не более чем счетным семейством дисков. Далее, положим

$$h(B) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |U_j| : \{U_j\} \in \mathcal{U}(B) \right\},$$

где $|U_j|$ – радиус диска U_j . Величина $h(B)$ называется одномерным обхватом по Хаусдорфу множества B .

Пусть $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность комплексных функций, определенных на области $\Omega \subset \mathbb{C}$, и пусть φ – другая функция, определенная на Ω (возможно, принимающая значение ∞). Последовательность $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится в смысле обхвата по Хаусдорфу к функции φ внутри Ω (это записывается сокращенно так: $h\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$), если для каждого компактного $\mathcal{K} \subset \Omega$ и каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h\{z \in \mathcal{K} : |\varphi_n(z) - \varphi(z)| > \varepsilon\} = 0$$

(при этом мы считаем, что $\infty \pm \infty = \infty$). При некоторых предположениях имеет место лемма А. А. Гончара [32; лемма 1], которая гарантирует равномерную

сходимость, если имеет место сходимость в смысле обхвата по Хаусдорфу. Мы воспользуемся этой идеей ниже.

Пусть $s \in \mathcal{M}(\Delta)$, где Δ содержится в (одной из) полуоси действительной прямой, и пусть $r = p/q$, $(p, q) \equiv 1$, $\deg p < \deg q$, – рациональная функция с действительными коэффициентами, чьи полюсы содержатся в $\mathbb{C} \setminus \Delta$. Положим $f = \widehat{s} + r$ и зафиксируем $\kappa \geq -1$ и $\ell \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим последовательность многочленов $(w_n)_{n \in \Lambda}$, $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+$, $\deg w_n = \kappa_n \leq 2n + \kappa - \ell + 1$, нули которых содержатся в $\mathbb{R} \setminus \Delta$. Далее, пусть $(R_n)_{n \in \Lambda}$ – последовательность функций $R_n = p_n/q_n$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющих следующему условию для каждого $n \in \Lambda$:

- а) $\deg p_n \leq n + \kappa$, $\deg q_n \leq n$, $q_n \neq 0$,
- б) $\frac{(q_n f - p_n)(z)}{w_n(z)} = \mathcal{O}(z^{-n-1+\ell}) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (\Delta \cup \{r = \infty\}))$.

Мы будем называть R_n *неполной диагональной многоточечной аппроксимацией Паде* для f .

Отметим, что в данной конструкции для каждого $n \in \Lambda$ число свободных параметров равно $2n + \kappa + 2$, а число однородных линейных уравнений для нахождения q_n и p_n равно $2n + \kappa - \ell + 1$. При $\ell = 0$ число параметров только на единицу превышает количество уравнений, поэтому R_n определено единственным образом и совпадает с диагональной многоточечной аппроксимацией Паде f . При $\ell \geq 1$ единственность не гарантируется, что объясняет происхождение термина “неполный”.

Для последовательностей неполных диагональных многоточечных аппроксимаций Паде имеет место следующая теорема типа Стильтьеса (см. [15; лемма 2]) для сходимости по логарифмической емкости. Для сходимости по обхвату по Хаусдорфу рассуждения практически идентичны.

ЛЕММА 2.5. *Предположим, что $(R_n)_{n \in \Lambda}$ удовлетворяет условиям а)–б). Предположим также, что выполнено одно из следующих двух условий: количество нулей w_n , лежащих на ограниченном интервале из $\mathbb{R} \setminus \Delta$, стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$, или $s \in \mathcal{C}(\Delta)$. Тогда*

$$h\text{-}\lim_{n \in \Lambda} R_n = \widehat{s} \quad \text{внутри } \mathbb{C} \setminus \Delta.$$

Непосредственным следствием леммы 2.5 является

ЛЕММА 2.6. *Пусть заданы $(s_{1,1}, \dots, s_{1,m}) = \mathcal{N}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ и $(r_1, \dots, r_m)$, где рациональные функции r_j , $j = 1, \dots, m$, имеют действительные коэффициенты, а их полюсы лежат в $\mathbb{C} \setminus \Delta_1$. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m$ – бесконечная последовательность различных мультииндексов, удовлетворяющая условию (7). Предположим, что $\text{dist}(\Delta_1, \Delta_2) > 0$ или $\sigma_1 \in \mathcal{C}(\Delta_1)$. Тогда при $j = 1, \dots, m$*

$$h\text{-}\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} \frac{P_{\mathbf{n},j}}{Q_{\mathbf{n}}} = f_j = \widehat{s}_{1,j} + r_j \quad \text{внутри } \mathbb{C} \setminus \Delta_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $j = 1, \dots, m$. По лемме 2.4 нули $w_{\mathbf{n},j}$ лежат в $\mathbb{R} \setminus \Delta_1$. Используя (22), (7), полагая $n = |\mathbf{n}|$, $\kappa = -1$ и соответствующим

образом выбирая ℓ , легко проверить, что для всех достаточно больших $\mathbf{n}$ рациональная функция $P_{\mathbf{n},j}/Q_{\mathbf{n}}$ является неполной аппроксимацией Паде для f_j . Также ясно, что $\sigma_1 \in \mathcal{C}(\Delta_1)$ влечет, что $s_{1,j} \in \mathcal{C}(\Delta_1)$. Теперь требуемое утверждение вытекает из леммы 2.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Пусть имеет место теорема 1.4. Как следствие, найдется N такое, что $(t_1, t_2 \hat{s}_{2,2}, \dots, t_m \hat{s}_{2,m})$ образует АТ-систему на Δ_1 для мультииндекса $(n_1 - d_1, n_2 - d_2, \dots, n_m - d_m)$ при $|\mathbf{n}| > N$. Из (13) вытекает, что $Q_{\mathbf{n}}$ имеет по крайней мере $|\mathbf{n}| - D$, $D := d_1 + d_2 + \dots + d_m$, нулей в $\mathring{\Delta}_1$ при $|\mathbf{n}| > N$.

Пусть ζ – полюс r_j порядка κ . Из леммы 2.6 и [32; лемма 1] следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ $Q_{\mathbf{n}}$ имеет по крайней мере κ нулей в $\{z : |z - \zeta| < \varepsilon\}$. При этом полюсы разных r_j различны. Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших $|\mathbf{n}|$ нули $Q_{\mathbf{n}}$ лежат или в $\mathring{\Delta}_1$ или внутри ε -окрестности полюсов r_j . Окончательно, (8) следует из леммы 2.6 и [32; лемма 1].

§ 3. Аппроксимации Эрмита–Паде 1-го рода

В этом параграфе мы считаем, что

$$\mathbf{n} := (n_0, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad |\mathbf{n}| = n_0 + \dots + n_m, \\ N_{\mathbf{n}} = \max\{n_0, n_1 - 1, \dots, n_m - 1\}.$$

Нам потребуется аналог леммы 2.6 для аппроксимаций Эрмита–Паде 1-го рода. Пусть $(s_{1,1}, \dots, s_{1,m}) = \mathcal{N}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ и пусть задан мультииндекс $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Зафиксируем число $\ell \in \mathbb{Z}_+$ и многочлен $w_{\mathbf{n}}$, $\deg w_{\mathbf{n}} \leq |\mathbf{n}| - \ell - 1$, нули которого лежат в $\mathbb{R} \setminus \Delta_1$. Рассмотрим ненулевой векторный многочлен $(p_{\mathbf{n},0}, \dots, p_{\mathbf{n},m})$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\text{i')} \quad \deg p_{\mathbf{n},j} \leq n_j - 1, \quad j = 0, \dots, m, \\ \text{ii')} \quad \frac{\mathcal{A}_{\mathbf{n},0}}{w_{\mathbf{n}}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{|\mathbf{n}| - N_{\mathbf{n}} - \ell}}\right) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Delta_1), \quad \mathcal{A}_{\mathbf{n},0} := p_{\mathbf{n},0} + \sum_{k=1}^m p_{\mathbf{n},k} \hat{s}_{1,k}.$$

Мы будем называть $(p_{\mathbf{n},0}/p_{\mathbf{n},m}, \dots, p_{\mathbf{n},m-1}/p_{\mathbf{n},m})$ неполной многоточечной аппроксимацией Эрмита–Паде 1-го рода для $(\hat{s}_{1,1}, \dots, \hat{s}_{1,m})$, соответствующей многочлену $w_{\mathbf{n}}$ и мультииндексу $\mathbf{n}$.

Доказательство следующего результата сводится к лемме 2.5. При $\ell = 0$ это утверждение содержится в [17; лемма 3.1]; для произвольных ℓ изменения незначительны, соответственно, доказательство не приводится.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\mathbf{s} = (s_{1,1}, \dots, s_{1,m}) = \mathcal{N}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, и пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m$ – бесконечная последовательность различных мультииндексов. Зафиксируем число $\ell \in \mathbb{Z}_+$ и последовательность многочленов $(w_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n} \in \Lambda}$, $\deg w_{\mathbf{n}} \leq |\mathbf{n}| - \ell - 1$, нули которых содержатся в $\mathbb{R} \setminus \Delta_1$. Рассмотрим последовательность неполных многоточечных аппроксимаций Эрмита–Паде 1-го рода для $\mathbf{s}$, соответствующих последовательности $(w_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n} \in \Lambda}$. Предположим, что выполнено (9) и

что $\text{dist}(\Delta_{m-1}, \Delta_m) > 0$ или $\sigma_m \in \mathcal{C}(\Delta_m)$. Тогда для каждого фиксированного $j = 0, \dots, m-1$

$$h\text{-}\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} \frac{p_{\mathbf{n},j}}{p_{\mathbf{n},m}} = (-1)^{m-j} \widehat{s}_{m,j+1}, \quad h\text{-}\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} \frac{p_{\mathbf{n},m}}{p_{\mathbf{n},j}} = \frac{(-1)^{m-j}}{\widehat{s}_{m,j+1}} \quad (27)$$

внутри $\mathbb{C} \setminus \Delta_m$. При этом существует не зависящая от Λ константа C_1 такая, что для всех $\mathbf{n} \in \Lambda$ многочлены $p_{\mathbf{n},j}$, $j = 0, \dots, m$, имеют по крайней мере $(|\mathbf{n}|/(m+1)) - C_1$ нулей в $\dot{\Delta}_m$.

Нас будет интересовать специальный тип неполных многоточечных аппроксимаций Эрмита–Паде 1-го рода. Пусть $(t_0, t_1, \dots, t_m)$, $\deg t_j = d_j$, – векторный многочлен с действительными коэффициентами, и пусть $D := \sum_{j=0}^m d_j$. Зафиксируем $\mathbf{n} = (n_0, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^{m+1}$, $n_j > D$, $j = 0, \dots, m$. Для системы $(s_{1,1}, \dots, s_{1,m}) = \mathcal{N}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ и многочлена с действительными коэффициентами $w_{\mathbf{n}}$, $\deg w_{\mathbf{n}} \leq |\mathbf{n}| - D - 1$, с нулями, лежащими в $\mathbb{R} \setminus \Delta_1$, существуют многочлены $a_{\mathbf{n},0}, a_{\mathbf{n},1}, \dots, a_{\mathbf{n},m}$, не все тождественно равные нулю, такие, что

$$\text{a')} \quad \deg a_{\mathbf{n},j} t_j \leq n_j - 1, j = 0, \dots, m,$$

$$\text{b')} \quad \frac{(a_{\mathbf{n},0}(z)t_0(z) + \sum_{j=1}^m a_{\mathbf{n},j}(z)t_j(z)\widehat{s}_{1,j}(z))}{w_{\mathbf{n}}(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^{|\mathbf{n}|-N_{\mathbf{n}}-D}}\right) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Delta_1).$$

Иными словами, мы пользуемся свободой в построении неполных аппроксимаций Эрмита–Паде 1-го рода для того, чтобы многочлены $p_{\mathbf{n},j}$, $j = 0, \dots, m$, имели бы заданные наперед нули. Систему $(a_{\mathbf{n},0}/a_{\mathbf{n},m}, \dots, a_{\mathbf{n},m-1}/a_{\mathbf{n},m})$ можно рассматривать как многоточечную аппроксимацию Эрмита–Паде 1-го рода для $(t_1 \widehat{s}_{1,1}/t_0, \dots, t_m \widehat{s}_{1,m}/t_0)$, соответствующую мультииндексу $(n_0 - d_0, \dots, n_m - d_m)$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $(s_{1,1}, \dots, s_{1,m}) = \mathcal{N}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, и пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^{m+1}$ – бесконечная последовательность различных мультииндексов, удовлетворяющая условию (9). Предположим, что многочлены $t_0, t_1, \dots, t_m$ не имеют общих нулей и все их нули лежат в $\mathbb{C} \setminus \Delta_m$, а также, что $\text{dist}(\Delta_{m-1}, \Delta_m) > 0$ или $\sigma_m \in \mathcal{C}(\Delta_m)$. Далее, пусть для каждого $\mathbf{n} \in \Lambda$ многочлены $a_{\mathbf{n},0}, a_{\mathbf{n},1}, \dots, a_{\mathbf{n},m}$ удовлетворяют условиям а')–б'). Тогда при $j = 0, 1, \dots, m-1$

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} \frac{a_{\mathbf{n},j}}{a_{\mathbf{n},m}} = (-1)^{m-j} \frac{t_m}{t_j} \widehat{s}_{m,j+1} \quad \text{внутри } (\mathbb{C} \setminus \Delta_m)', \quad (28)$$

где множество $(\mathbb{C} \setminus \Delta_m)'$ получено удалением из $\mathbb{C} \setminus \Delta_m$ нулей всех многочленов t_j . Более того, существует не зависящая от Λ константа C_1 такая, что для каждого $j = 0, \dots, m$ и $\mathbf{n} \in \Lambda$ многочлены $a_{\mathbf{n},j}$ имеют по крайней мере $(|\mathbf{n}|/(m+1)) - C_1$ нулей в $\dot{\Delta}_m$.

Далее, пусть $j, k = 0, \dots, m$ фиксированы и пусть ζ – нуль кратности k многочлена t_k , $k \neq j$. Тогда для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что для всех $\mathbf{n} \in \Lambda$, $|\mathbf{n}| > N$, многочлен $a_{\mathbf{n},j}$ имеет в точности k нулей в $\{z : |z - \zeta| < \varepsilon\}$. Оставшиеся нули $a_{\mathbf{n},j}$ или лежат в Δ_m , или аккумулируются у $\Delta_m \cup \{\infty\}$ при $|\mathbf{n}| \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка снизу на число нулей многочлена $a_{\mathbf{n},j}$ в области $\mathring{\Delta}_m$ дается леммой 3.1. Через $\bar{j}$ обозначим номер последнего элемента набора $(n_0, \dots, n_m)$, для которого

$$n_{\bar{j}} = \min_{j=0, \dots, m} (n_j).$$

Установим, что $a_{\mathbf{n},\bar{j}}$ имеет по крайней мере $n_{\bar{j}} - D - 1$ нулей в $\mathring{\Delta}_m$. Иными словами, для $\bar{j}$ -й компоненты мы хотим получить более точную оценку снизу на число нулей.

Согласно [30; теорема 1.3] (см. также [31; теорема 3.2]) найдется перестановка λ набора $(0, \dots, m)$, переставляющая компоненты набора $(n_0, n_1, \dots, n_m)$ в невозрастающем порядке, т.е. $n_{\lambda(0)} \geq \dots \geq n_{\lambda(m)}$. Далее, найдется ассоциированная система Никишина $(r_{1,1}, \dots, r_{1,m}) = \mathcal{N}(\rho_1, \dots, \rho_m)$ такая, что

$$\mathcal{A}_{\mathbf{n},0} = \left(q_{\mathbf{n},0} + \sum_{k=1}^m q_{\mathbf{n},k} \widehat{r}_{1,k} \right) \widehat{s}_{1,\lambda(0)}, \quad \deg q_{\mathbf{n},k} \leq n_{\lambda(k)} - 1, \quad k = 0, \dots, m,$$

где

$$\mathcal{A}_{\mathbf{n},0} = a_{\mathbf{n},0} t_0 + \sum_{j=1}^m a_{\mathbf{n},j} t_j \widehat{s}_{1,j}$$

и $\widehat{s}_{1,\lambda(0)} \equiv 1$ при $\lambda(0) = 0$. Перестановку можно выбрать таким образом, что если $0 \leq j < k \leq n$, $n_j = n_k$, то $\lambda(j) < \lambda(k)$. В этом случае (см. формулы (31) в доказательстве леммы 2.3 из [30]) имеем, что $q_{\mathbf{n},m}$ есть $a_{\mathbf{n},\bar{j}} t_{\bar{j}}$ или $-a_{\mathbf{n},\bar{j}} t_{\bar{j}}$.

Положим

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{n},j} := q_{\mathbf{n},j} + \sum_{k=j+1}^m q_{\mathbf{n},k} \widehat{r}_{1,k}, \quad j = 0, \dots, m-1, \quad \mathcal{Q}_{\mathbf{n},m} := q_{\mathbf{n},m}.$$

Предположим, что $\lambda(0) = 0$, тогда $\widehat{s}_{1,\lambda(0)} \equiv 1$. Далее, $N_{\mathbf{n}} = n_0 = n_{\lambda(0)}$. Из b') вытекает, что

$$\frac{\mathcal{Q}_{\mathbf{n},0}(z)}{w_{\mathbf{n}}(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{|\mathbf{n}| - n_{\lambda(0)} - D}}\right) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Delta_1). \quad (29)$$

При $\lambda(0) \neq 0$ мы имеем, что $N_{\mathbf{n}} = n_{\lambda(0)} - 1$ и $\widehat{s}_{1,\lambda(0)} = \mathcal{O}(1/z)$. Отсюда и из b') мы снова получаем (29). Применяя (11), находим, что

$$\int x^\nu \mathcal{Q}_{\mathbf{n},1}(x) \frac{d\rho_1(x)}{w_{\mathbf{n}}(x)} = 0, \quad \nu = 0, \dots, |\mathbf{n}| - n_{\lambda(0)} - D - 2.$$

Отсюда вытекает, что $\mathcal{Q}_{\mathbf{n},1}$ имеет по крайней мере $|\mathbf{n}| - n_{\lambda(0)} - D - 1$ перемен знака в $\mathring{\Delta}_1$. Пусть $w_{\mathbf{n},1}$ — приведенный многочлен, нули которого являются точками перемены знака $\mathcal{Q}_{\mathbf{n},1}$ в $\mathring{\Delta}_1$. Тогда

$$\frac{\mathcal{Q}_{\mathbf{n},1}(z)}{w_{\mathbf{n},1}(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{|\mathbf{n}| - n_{\lambda(0)} - n_{\lambda(1)} - D}}\right) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Delta_2).$$

Снова используя (11), находим

$$\int x^\nu \mathcal{Q}_{\mathbf{n},2}(x) \frac{d\rho_2(x)}{w_{\mathbf{n},1}(x)} = 0, \quad \nu = 0, \dots, |\mathbf{n}| - n_{\lambda(0)} - n_{\lambda(1)} - D - 2.$$

Следовательно, $\mathcal{Q}_{\mathbf{n},2}$ имеет по крайней мере $|\mathbf{n}| - n_{\lambda(0)} - n_{\lambda(1)} - D - 1$ перемен знака в $\mathring{\Delta}_2$. Повторяя рассуждения m раз, мы убеждаемся, что $\mathcal{Q}_{\mathbf{n},m} = q_{\mathbf{n},m}$ имеет по крайней мере $n_{\bar{j}} - D - 1$ перемен знака в $\mathring{\Delta}_m$. Отсюда вытекает требуемое утверждение, так как $q_{\mathbf{n},m} = \pm a_{\mathbf{n},\bar{j}} t_{\bar{j}}$, а нули $t_{\bar{j}}$ лежат вне Δ_m .

По лемме 3.1 мы имеем при $j = 0, \dots, m-1$

$$h\text{-}\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} \frac{a_{\mathbf{n},j}}{a_{\mathbf{n},m}} = (-1)^{m-j} \frac{t_m \widehat{s}_{m,j+1}}{t_j} \quad \text{внутри } \mathbb{C} \setminus \Delta_m. \quad (30)$$

Из (30) и [32; лемма 1] следует, что каждый нуль ζ многочлена t_j кратности κ притягивает по крайней мере κ нулей $a_{\mathbf{n},m}$ при $|\mathbf{n}| \rightarrow \infty$, $\mathbf{n} \in \Lambda$ (напомним, что t_m и t_j взаимно простые). Покажем, что число притягиваемых ζ нулей равно κ , при этом оставшиеся нули $a_{\mathbf{n},m}$ или лежат в $\mathring{\Delta}_m$, или аккумулируются у $\Delta_m \cup \{\infty\}$. Отсюда (28) вытекает как следствие из [32; лемма 1] и (30).

Определенный выше индекс $\bar{j}$ может зависеть от $\mathbf{n} \in \Lambda$. Для $\bar{j} \in \{0, \dots, m\}$ через $\Lambda(\bar{j})$ обозначим множество всех таких $\mathbf{n} \in \Lambda$, что $\bar{j}$ есть номер последнего элемента набора $(n_0, \dots, n_m)$, для которого выполнено $n_{\bar{j}} = \min_{j=0, \dots, m} (n_j)$. Зафиксируем $\bar{j}$ и предположим, что $\Lambda(\bar{j})$ содержит бесконечно много мультииндексов. Если $\bar{j} = m$, то $a_{\mathbf{n},m}$ имеет $n_m - D - 1$ нулей в $\mathring{\Delta}_m$, а оставшиеся нули сходятся к нулям t_j , $j = 0, \dots, m-1$, в соответствии с их кратностями, что и требуется.

Теперь предположим, что $\bar{j} \neq m$. По лемме 3.1

$$h\text{-}\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda(\bar{j})} \frac{a_{\mathbf{n},m}}{a_{\mathbf{n},\bar{j}}} = (-1)^{m-\bar{j}} \frac{t_{\bar{j}}}{t_m \widehat{s}_{m,\bar{j}+1}} \quad \text{внутри } \mathbb{C} \setminus \Delta_m. \quad (31)$$

Для каждого $j \in \{0, \dots, m-1\} \setminus \{\bar{j}\}$ и каждого нуля ζ кратности κ многочлена t_j выберем κ нулей $a_{\mathbf{n},m}$, сходящихся к ζ при $|\mathbf{n}| \rightarrow \infty$, $\mathbf{n} \in \Lambda(\bar{j})$. Пусть q_n – приведенный многочлен, имеющий нулями данные точки. Ясно, что

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda(\bar{j})} q_{\mathbf{n}} = \prod_{k=0}^{m-1} \frac{t_k}{t_j}$$

(равномерно на компактных подмножествах). Из (31) имеем, что

$$h\text{-}\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda(\bar{j})} \frac{a_{\mathbf{n},m}}{q_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n},\bar{j}}} = (-1)^{m-\bar{j}} \frac{t_{\bar{j}}^2}{\prod_{k=0}^m t_k \widehat{s}_{m,\bar{j}+1}} \quad \text{внутри } \mathbb{C} \setminus \Delta_m. \quad (32)$$

Воспользовавшись еще раз [32; лемма 1], имеем, что при $j \in \{0, \dots, m\} \setminus \{\bar{j}\}$ каждый нуль многочлена t_j притягивает в точности столько же нулей $a_{\mathbf{n},\bar{j}}$, какова его кратность (отметим, что нули $q_{\mathbf{n}}$ и нули $a_{\mathbf{n},m}$ взаимно сокращаются). Как следствие, все нули $a_{\mathbf{n},\bar{j}}$ располагаются или на Δ_m , или в достаточно малой окрестности нулей многочлена $\prod_{k=0}^m t_k / t_{\bar{j}}$. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda(\bar{j})} \frac{a_{\mathbf{n},m}}{a_{\mathbf{n},\bar{j}}} = (-1)^{m-\bar{j}} \frac{t_{\bar{j}}}{t_m \widehat{s}_{m,\bar{j}+1}} \quad \text{внутри } (\mathbb{C} \setminus \Delta_m)'. \quad (33)$$

Функция в правой части (33) является мероморфной в $\mathbb{C} \setminus \Delta_m$. Ее нули соответствуют нулям $t_{\bar{j}}$ (с учетом кратностей), а ее полюсы являются нулями t_m

порядка, равного кратности нуля. Используя принцип аргумента, для каждого $j \in \{0, \dots, m-1\}$ из (33) вытекает, что если ζ – нуль t_j кратности κ , то ζ притягивает в точности κ нулей $a_{\mathbf{n},m}$ при $|\mathbf{n}| \rightarrow \infty$, $\mathbf{n} \in \Lambda(\bar{j})$, а оставшиеся нули $a_{\mathbf{n},m}$ аккумулируются у Δ_m . Это верно для каждого $\bar{j}$. Как следствие, утверждение о нулях $a_{\mathbf{n},m}$ имеет место для $\mathbf{n} \in \Lambda$ и (28) выполнено.

Окончательно, требуемая асимптотика нулей $a_{\mathbf{n},j}$, $j = 0, \dots, m-1$, вытекает из (28) с учетом известного асимптотического подведения нулей $a_{\mathbf{n},m}$ и принципа аргумента.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Без ограничения общности мы ограничимся рассмотрением мультииндексов вида $(n_0 - d_0, \dots, n_m - d_m) \in \mathbb{Z}_+^{m+1}$, где $d_j = \deg t_j$, $j = 0, \dots, m$. Будем рассуждать от противного.

Предположим, что найдется бесконечная последовательность мультииндексов $\Lambda' \subset \Lambda$ такая, что для каждого $\mathbf{n} \in \Lambda'$ найдутся многочлены $p_{\mathbf{n},0}, \dots, p_{\mathbf{n},m}$, $\deg p_{\mathbf{n},j} \leq n_j - d_j - 1$, с действительными коэффициентами, не все из которых равны нулю, такие, что $p_{\mathbf{n},0}t_0 + \sum_{j=1}^m p_{\mathbf{n},j}t_j\hat{s}_{1,j}$ имеет по крайней мере $|\mathbf{n}| - D$ нулей на некотором интервале $\Delta \subset \mathbb{R} \setminus \Delta_1$, где $D = \sum_{j=0}^m d_j$. Пусть $w_{\mathbf{n}}$ – многочлен, у которого множество нулей совпадает с множеством нулей многочлена $p_{\mathbf{n},0}t_0 + \sum_{j=1}^m p_{\mathbf{n},j}t_j\hat{s}_{1,j}$ на Δ . Тогда легко проверить, что

$$\frac{1}{w_{\mathbf{n}}} \left(p_{\mathbf{n},0}t_0 + \sum_{j=1}^m p_{\mathbf{n},j}t_j\hat{s}_{1,j} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{z^{|\mathbf{n}| - N_{\mathbf{n}} - D + 1}} \right) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Delta_1).$$

Следовательно, многочлены $p_{\mathbf{n},0}, \dots, p_{\mathbf{n},m}$ удовлетворяют условиям а')–б') с дополнительной степенью $1/z$ в правой части условия б').

Пусть $\bar{j}$ и $\Lambda(\bar{j})$ такие же, как в доказательстве теоремы 3.2. Ясно, что $\Lambda(\bar{j})$ содержит бесконечно много мультииндексов из Λ' при некотором $\bar{j} \in \{0, \dots, m\}$. Выберем такое $\bar{j}$. Рассуждая как при доказательстве теоремы 3.2, мы видим, что $p_{\mathbf{n},\bar{j}}t_{\bar{j}}$ имеет по крайней мере $n_{\bar{j}} - D$ нулей на Δ_m и, для всех достаточно больших $|\mathbf{n}|$, имеет столько же нулей рядом с каждым из нулей t_j , $j = 0, \dots, m$, какова их кратность. Следовательно,

$$\deg p_{\mathbf{n},\bar{j}}t_{\bar{j}} = n_{\bar{j}}$$

для всех достаточно больших $|\mathbf{n}|$, $\mathbf{n} \in \Lambda(\bar{j}) \cap \Lambda'$. Это противоречит тому, что по построению

$$\deg p_{\mathbf{n},\bar{j}}t_{\bar{j}} \leq n_{\bar{j}} - 1.$$

Таким образом, наше начальное предположение было неверно и теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Теорему 1.3 можно обобщить на случай многоточечных аппроксимаций Эрмита–Паде 2-го рода для $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{s}} + \mathbf{r}$.

Список литературы

- [1] K. Driver, H. Stahl, “Normality in Nikishin systems”, *Indag. Math. (N.S.)*, **5**:2 (1994), 161–187.
- [2] K. Driver, H. Stahl, “Simultaneous rational approximants to Nikishin-systems. I”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **60**:1-2 (1995), 245–263.
- [3] K. Driver, H. Stahl, “Simultaneous rational approximants to Nikishin systems. II”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **61**:1-4 (1995), 261–284.
- [4] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его девяностолетию, Тр. МИАН СССР, **157**, 1981, 31–48; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “On the convergence of simultaneous Padé approximants for systems of functions of Markov type”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **157** (1983), 31–50.
- [5] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, “Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа”, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 33–58; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, V. N. Sorokin, “Hermite–Padé approximants for systems of Markov-type functions”, *Sb. Math.*, **188**:5 (1997), 671–696.
- [6] H. Stahl, “Simultaneous rational approximants”, *Computational methods and function theory* 1994 (Penang), Ser. Approx. Decompos., **5**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995, 325–349.
- [7] Ch. Hermite, “Sur la fonction exponentielle”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **77** (1873), 18–24, 74–79, 226–233, 285–293; reprinted in *Œuvres de Charles Hermite*, v. III, Gauthier-Villars, Paris, 1912, 150–181.
- [8] W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence”, *Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation* (Columbia, MO, 1998), Contemp. Math., **236**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 325–342.
- [9] J. Coussement, W. Van Assche, “Gaussian quadrature for multiple orthogonal polynomials”, *J. Comput. Appl. Math.*, **178**:1-2 (2005), 131–145.
- [10] U. Fidalgo Prieto, J. Illán González, G. López Lagomasino, “Convergence and computation of simultaneous rational quadrature formulas”, *Numer. Math.*, **106**:1 (2007), 99–128.
- [11] A. B. J. Kuijlaars, “Multiple orthogonal polynomial ensembles”, *Recent trends in orthogonal polynomials and approximation theory*, Contemp. Math., **507**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 155–176.
- [12] A. Markoff, “Deux démonstrations de la convergence de certains fractions continues”, *Acta Math.*, **19**:1 (1895), 93–104.
- [13] T.-J. Stieltjes, “Recherches sur les fractions continues”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.*, **8**:4 (1894), J1–J122; Suite et fin, **9**:1 (1895), A1–A47.
- [14] Е. М. Никишин, “О совместных аппроксимациях Паде”, *Матем. сб.*, **113(155)**:4(12) (1980), 499–519; англ. пер.: E. M. Nikishin, “On simultaneous Padé approximants”, *Math. USSR-Sb.*, **41**:4 (1982), 409–425.
- [15] Ж. Бустаманте, Г. Лопес Лагомасино, “Аппроксимации Эрмита–Паде для систем Никишина аналитических функций”, *Матем. сб.*, **183**:11 (1992), 117–138; англ. пер.: J. Bustamante, G. López Lagomasino, “Hermite–Padé approximation for Nikishin systems of analytic functions”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **77**:2 (1994), 367–384.
- [16] U. Fidalgo Prieto, G. López Lagomasino, “General results on the convergence of multipoint Hermite–Padé approximants of Nikishin systems”, *Constr. Approx.*, **25**:1 (2007), 89–107.

- [17] G. López Lagomasino, S. Medina Peralta, “On the convergence of type I Hermite–Padé approximants”, *Adv. in Math.*, **273** (2015), 124–148.
- [18] T. Carleman, *Les fonctions quasi-analytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926, 115 pp.
- [19] А. А. Гончар, “О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **97(139)**:4(8) (1975), 607–629; англ. пер.: A. A. Gonchar, “On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **26**:4 (1975), 555–575.
- [20] Е. А. Рахманов, “О сходимости диагональных аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **104(146)**:2(10) (1977), 271–291; англ. пер.: E. A. Rakhmanov, “Convergence of diagonal Padé approximants”, *Math. USSR-Sb.*, **33**:2 (1977), 243–260.
- [21] Г. Л. Лопес, “О сходимости аппроксимаций Паде для мероморфных функций стильтесовского типа”, *Матем. сб.*, **111(153)**:2 (1980), 308–316; англ. пер.: G. L. Lopes, “On the convergence of the Padé approximants for meromorphic functions of Stieltjes type”, *Math. USSR-Sb.*, **39**:2 (1981), 281–288.
- [22] Г. Л. Лопес, “Сходимость аппроксимаций Паде мероморфных функций стильтесовского типа и сравнительная асимптотика для ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **136(178)**:2(6) (1988), 206–226; англ. пер.: G. L. Lopes, “Convergence of Padé approximants of Stieltjes type meromorphic functions and comparative asymptotics for orthogonal polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **64**:1 (1989), 207–227.
- [23] J. Bustamante, G. López Lagomasino, “Hermite–Padé approximation to a Nikishin type system of meromorphic functions”, *J. Approx. Theory*, **81**:1 (1995), 1–12.
- [24] Е. А. Рахманов, “Об асимптотике отношения ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **103(145)**:2(6) (1977), 237–252; англ. пер.: E. A. Rakhmanov, “On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **32**:2 (1977), 199–213.
- [25] Е. А. Рахманов, “Об асимптотике отношения ортогональных многочленов. II”, *Матем. сб.*, **118(160)**:1(5) (1982), 104–117; англ. пер.: E. A. Rakhmanov, “On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials. II”, *Math. USSR-Sb.*, **46**:1 (1983), 105–117.
- [26] Е. А. Рахманов, “Об асимптотических свойствах многочленов, ортогональных на окружности с весами, не удовлетворяющими условию Szegő”, *Матем. сб.*, **130(172)**:2(6) (1986), 151–169; англ. пер.: E. A. Rakhmanov, “On asymptotic properties of polynomials orthogonal on the circle with weights not satisfying the Szegő’s condition”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:1 (1987), 149–167.
- [27] А. И. Аптекарев, Г. Лопес Лагомасино, И. А. Роча, “Асимптотика отношения полиномов Эрмита–Паде для систем Никishина”, *Матем. сб.*, **196**:8 (2005), 3–20; англ. пер.: A. I. Aptekarev, G. López Lagomasino, I. Alvarez Rocha, “Ratio asymptotics of Hermite–Padé polynomials for Nikishin systems”, *Sb. Math.*, **196**:8 (2005), 1089–1107.
- [28] A. López García, G. López Lagomasino, “Ratio asymptotic of Hermite–Padé orthogonal polynomials for Nikishin systems. II”, *Advances in Math.*, **218**:4 (2008), 1081–1106.
- [29] М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, Наука, М., 1973, 551 с.; англ. пер.: M. G. Krein, A. A. Nudel’man, *The Markov moment problem and extremal problems*, Transl. Math. Monogr., **50**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977, v+417 pp.
- [30] U. Fidalgo Prieto, G. López Lagomasino, “Nikishin systems are perfect”, *Constr. Approx.*, **34**:3 (2011), 297–356.
- [31] U. Fidalgo Prieto, G. López Lagomasino, “Nikishin systems are perfect. The case of unbounded and touching supports”, *J. Approx. Theory*, **163**:6 (2011), 779–811.

- [32] А. А. Гончар, “О сходимости обобщенных аппроксимаций Паде мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **98(140)**:4(12) (1975), 564–577; англ. пер.: А. А. Gonchar, “On the convergence of generalized Padé approximants of meromorphic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **27**:4 (1975), 503–514.

Гиермо Лопес Лагомасино

(G. López Lagomasino)

Department of Mathematics,

Universidad Carlos III de Madrid, Spain

E-mail: lago@math.uc3m.es

Поступила в редакцию

25.10.2013 и 18.12.2014

Сэрхио Медина Перальта

(S. Medina Peralta)

Department of Mathematics,

Universidad Carlos III de Madrid, Spain

E-mail: smedina@math.uc3m.es

Улисес Фидальго Прието

(U. Fidalgo Prieto)

Department of Mathematics,

University of Mississippi, Oxford, USA

E-mail: ufidalgo@olemiss.edu