Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Сатаев, Свойство перемешивания и собственные функции сингулярно гиперболических аттракторов, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 4, 99–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8295>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 06:13:12

УДК 517.938

Е. А. Сатаев

Свойство перемешивания и собственные функции сингулярно гиперболических аттракторов

Работа посвящена исследованию сингулярно гиперболических потоков. Доказывается, что собственная функция не может быть непрерывной на эргодической компоненте, содержащей неподвижную точку. Однако собственная функция является непрерывной на некотором множестве (после изменения на множестве меры нуль). Доказывается альтернатива: либо на эргодической компоненте существует собственная функция, либо поток является перемешивающим на этой эргодической компоненте. Приводятся достаточные условия перемешивания.

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: сингулярно гиперболический аттрактор, инвариантная мера, перемешивание, собственная функция.

DOI: 10.4213/sm8295

§ 1. Введение

Определение сингулярно гиперболического потока впервые было приведено в работах [1], [2] как обобщение потока Лоренца, появившегося в [3] (свойства аттрактора типа аттрактора Лоренца изучались, например, в [4]). Похожее определение приведено Д. В. Тураевым и Л. П. Шильниковым в работе [5] (см. также [6]); в этих работах поток называется псевдогиперболическим. В настоящее время свойства сингулярно гиперболических потоков интенсивно исследуются (см., например, [7]–[18]).

В работе [17] построены инвариантные меры для общего сингулярно гиперболического потока. Для случая трехмерного многообразия и топологически транзитивного потока на сингулярно гиперболическом аттракторе инвариантные меры построены в [18]. Комментарии по поводу соотношения работ [17] и [18] приведены в [17].

Настоящая работа посвящена исследованию свойств перемешивания общего сингулярно гиперболического аттрактора на эргодической компоненте. Эти свойства оказываются во многом аналогичными соответствующим свойствам систем Аносова.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00666) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-5998.2012.1).

Структура работы следующая. Во введении приводятся определение сингулярно гиперболического потока, необходимые определения и свойства, определения и свойства инвариантных мер Синая–Боуэна–Рюэля и приводятся формулировки основных результатов настоящей работы. В § 2 доказывается, что собственная функция, если она существует, после изменения на множестве меры нуль становится непрерывной на некотором множестве (теорема 4; соответствующее множество обозначается через $M(b; \delta)$). В § 3 доказывается, что если поток не имеет собственной функции (по-другому, в спектре отсутствует дискретная компонента), то он перемешивающий (теорема 5). В § 4 приводятся некоторые условия: достаточное условие перемешивания (теорема 6), необходимое условие существования собственной функции (теорема 8).

Перемешивание для некоторых потоков типа потока Лоренца доказано в [19]. Метод доказательства, используемый в этой работе [19], не может быть перенесен на общий сингулярно гиперболический поток. Кроме того, для общего сингулярно гиперболического потока (и даже для некоторых потоков типа потока Лоренца) этот результат неверен. А именно, существует поток типа потока Лоренца, имеющий собственную функцию (работа готовится к публикации).

В работе [20] доказана центральная предельная теорема для некоторых потоков типа потока Лоренца.

В настоящей работе используется построение инвариантной меры, проведенное в [17].

1.1. Сингулярно гиперболические потоки.

Определение сингулярно гиперболического потока. Пусть Φ_t – поток на компактном римановом многообразии M размерности не менее 3, порожденный гладким (класса C^2) векторным полем $X(x)$. Возможно, что M – многообразие с краем и углами.

Касательное пространство в точке $x \in M$ обозначается через $T_x M$, дифференциал отображения Φ_t обозначается через $d\Phi_t$. Риманова метрика позволяет определить расстояние между точками, длину вектора $v \in T_x M$, угол между векторами $u, v \in T_x M$. Длина вектора $v \in T_x M$ обозначается через $|v|$, угол между векторами $u, v \in T_x M$ обозначается через $\angle(u, v)$, расстояние между точками $x, y \in M$ обозначается через $\rho(x, y)$.

Предполагается, что имеется открытое множество $U \subset M$ такое, что если $t > 0$, то $\text{clos}(\Phi_t(U))$ – компактное подмножество множества U , не содержащее точек края (здесь и далее через $\text{clos}(A)$ обозначается замыкание множества A). Траектория точки $x \in U$ обозначается через $x(t)$. Часть траектории, соответствующая интервалу $t \in (\alpha, \beta)$, обозначается через $\{x(t); t \in (\alpha, \beta)\}$.

Аттрактором называется множество

$$\Lambda = \bigcap_{t>0} \Phi_t(U).$$

Приведем определение сингулярно гиперболического потока, следуя работе [1]. В этом определении через $S(v_1, v_2)$ обозначена площадь параллелограмма, порожденного векторами v_1, v_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Поток Φ_t называется сингулярно гиперболическим на инвариантном подмножестве Λ n -мерного риманова многообразия, если для каждой точки $x \in \Lambda$ имеется инвариантное разложение касательного пространства $T_x M$ в прямую сумму двух подпространств

$$T_x M = E_x^{ss} \oplus E_x^c,$$

где пространства E_x^{ss} , E_x^c непрерывно зависят от точки x , $\dim E_x^{ss} = n - 2$, $\dim E_x^c = 2$; при этом выполнены следующие условия.

1. Существуют такие константы $c_1 > 0$, $\gamma_1 > 0$, что для любой точки $x \in \Lambda$, любого вектора $v \in E_x^{ss}$ и любого $t > 0$ справедливо неравенство

$$|d\Phi_t(v)| < c_1 e^{-\gamma_1 t} |v|.$$

2. Существуют такие константы $c_2 > 0$, $\gamma_2 > 0$, что для любой точки $x \in \Lambda$, любого $t > 0$, любых векторов $v \in E_x^{ss}$, $u \in E_x^c$ справедливо неравенство

$$\frac{|d\Phi_t(u)|}{|u|} > c_2 e^{\gamma_2 t} \frac{|d\Phi_t(v)|}{|v|}.$$

3. Все неподвижные точки гиперболически.
4. Существуют такие константы $c_3 > 0$, $\gamma_3 > 0$, что для любого $t > 0$, любой точки $x \in \Lambda$ и любых векторов $v_1, v_2 \in E_x^c$ справедливо неравенство

$$S(d\Phi_t(v_1), d\Phi_t(v_2)) > c_3 e^{\gamma_3 t} S(v_1, v_2). \quad (1.1)$$

Пространство E_x^{ss} называется строго устойчивым, пространство E_x^c называется центрально-неустойчивым. Семейство пространств E_x^{ss} однозначно продолжается до инвариантного семейства пространств на всей области U . Поэтому мы предполагаем, что пространства E_x^{ss} определены и непрерывно зависят от точки на всей области U .

Семейство пространств E_x^c , вообще говоря, либо не продолжается до инвариантного семейства на всей окрестности U , либо продолжается неоднозначно. В [16] показано, что если $x \in \Lambda$, то $X(x) \in E_x^c$.

Предполагается, что семейство строго неустойчивых пространств E_x^{ss} является ориентируемым. Это не ограничивает общности, так как в случае неориентируемого семейства пространств E_x^{ss} можно перейти к двуслойному ориентируемому накрытию.

Неподвижные точки. Как было показано в [16], неподвижные точки, принадлежащие сингулярно гиперболическому аттрактору, бывают двух типов. Первый тип называется типом (L) . Эти точки характеризуются тем, что у линеаризованного в этой точке потока имеются два вещественных собственных числа $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \gamma_3$, а остальные собственные числа лежат в области $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_2$.

Неподвижная точка типа (L) имеет $(n - 1)$ -мерное устойчивое многообразие, $(n - 2)$ -мерное строго устойчивое многообразие и одномерное неустойчивое многообразие, которое разделяется на две сепаратрисы. При этом строго устойчивое многообразие неподвижной точки не содержит точек, принадлежащих аттрактору, кроме самих неподвижных точек (см. [16]).

Второй тип неподвижных точек – это такие точки, что линеаризованный поток в этих точках имеет два собственных числа с положительной вещественной частью. Это могут быть два вещественных числа или пара комплексно-сопряженных чисел. Пересечение некоторой окрестности такой точки с аттрактором состоит только из этой точки и окрестности ее неустойчивого многообразия. Траектории, покидающие некоторую окрестность такой точки, не возвращаются в эту окрестность. Поэтому точки второго типа можно исключить из области U вместе с некоторой окрестностью и входящими в эту окрестность траекториями (см. [16]).

Исходя из вышеизложенного, мы предполагаем, что все неподвижные точки в окрестности U являются точками типа (L) . Множество неподвижных точек обозначим через Fix . Это множество состоит из конечного числа точек $Q_1, \dots, Q_k$.

Строго устойчивые многообразия. Условия 1, 2 в определении сингулярно гиперболического потока означают, что поток является частично гиперболическим. Из частичной гиперболичности следует, что существует семейство многообразий $W^{ss}(x)$, которые называются строго устойчивыми многообразиями (см, например, [21]).

Многообразие $W^{ss}(x)$ является гладким (класса C^2) многообразием, которое в каждой точке $y \in W^{ss}(x)$ касается пространства E_y^{ss} (точнее, пространство E_y^{ss} является касательным пространством к многообразию $W^{ss}(x)$ в точке $y \in W^{ss}(x)$). В общем случае гладкого частично гиперболического потока класс гладкости многообразия $W^{ss}(x)$ такой же, как и класс гладкости векторного поля, задающего поток.

Для систем Аносова существование строго устойчивых многообразий доказано Д. В. Аносовым в [22]; теория инвариантных многообразий изложена в [21]. Существование семейства строго устойчивых многообразий следует из результатов работы [21].

Многообразия $W^{ss}(x)$ характеризуются тем, что если $y \in W^{ss}(x)$, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(x(t), y(t)) = 0.$$

Различают локальные и глобальные многообразия. Локальное строго устойчивое многообразие $W_\alpha^{ss}(x)$ – это часть строго устойчивого многообразия, являющаяся шаром радиуса α относительно внутренней метрики многообразия $W^{ss}(x)$. Величина α называется размером локального многообразия $W_\alpha^{ss}(x)$. Глобальным строго устойчивым многообразием называется множество

$$W_{gl}^{ss}(x) = \bigcup_{t>0} d\Phi_{-t}(W_\alpha^{ss}(\Phi_t(x))).$$

Из компактности множества Λ следует, что существует такое число α_0 , что для каждой точки $x \in \Lambda$ шар радиуса α_0 в многообразии $W^{ss}(x)$ принадлежит множеству U . Отсюда следует, что если $\alpha < \alpha_0$, то многообразие $W_\alpha^{ss}(x)$ определено.

Под многообразием $W^{ss}(x)$ мы понимаем локальное многообразие фиксированного размера α , такого, что многообразие $W_\alpha^{ss}(x)$ существует по крайней мере для любой точки $x \in \Lambda$.

Устойчивые пространства и многообразия. Обозначим через E_x^0 одномерное подпространство пространства $T_x M$, порожденное вектором $X(x)$. Устойчивым пространством называется пространство $E_x^s = E_x^{ss} \oplus E_x^0$. Это пространство определено для таких точек $x \in U$, что $X(x) \notin E_x^{ss}$.

В [16] доказано, что если точка $x \in U$ не является неподвижной и не принадлежит строго устойчивому многообразию неподвижной точки, то пространства E_x^0 и E_x^{ss} линейно независимы и, следовательно, устойчивые многообразия для таких точек существуют.

Вообще говоря, устойчивым многообразием точки x называется множество, состоящее из таких точек y , для которых имеется монотонная непрерывная функция $\tau(t)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tau(t) = +\infty$, и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(x(t), y(\tau(t))) = 0.$$

Так как для каждой точки $x \in U$ существует строго устойчивое многообразие, то устойчивое многообразие для каждой точки тоже существует (исключая неподвижные точки и точки, принадлежащие строго устойчивым многообразиям неподвижных точек), а функция $\tau(t)$ в определении устойчивого многообразия равна $t + t_0$ при некотором t_0 . Величина t_0 определяется так, что $y(t_0) \in W^{ss}(x)$.

Таким образом, устойчивое многообразие $W^s(x)$ – это $(n - 1)$ -мерное многообразие, которое в каждой точке y касается пространства E_y^s , и если $y \in W^s(x)$, то существует такое $t_0 \in \mathbb{R}^1$, что

$$\rho(x(t), y(t + t_0)) \rightarrow 0, \quad \text{если } t \rightarrow +\infty.$$

Многообразие $W^s(x)$ является объединением строго устойчивых многообразий, проходящих через точки траектории $x(t)$. Это то же самое, что объединение траекторий, проходящих через многообразие $W^{ss}(x)$.

Множества $M(b; \delta)$. Эти множества играют важную роль в дальнейших построениях.

Пусть δ – фиксированная раз и навсегда константа, $2\delta < \gamma_3$, b – положительное число.

Рассмотрим множества

$$M(b; \delta) = \{x \in \Lambda : \rho(x(t), \text{Fix}) \geq b e^{-\delta|t|} \text{ для всех } t < 0\}, \quad (1.2)$$

где $x(t)$ – траектория точки $x \in \Lambda$, Fix – множество неподвижных точек.

Смысл этого определения состоит в том, что отрицательные полутраектории точек $x \in M(b; \delta)$ не подходят слишком близко к неподвижным точкам. Поэтому на этих множествах имеются равномерные оценки.

Нетрудно показать, что если $b_1 < b_2$, то $M(b_2; \delta) \subset M(b_1; \delta)$, и что если $t > 0$, то

$$\Phi_{-t}(M(b; \delta)) \subset M(be^{-\delta t}; \delta).$$

Через $M(0; \delta)$ обозначается множество

$$M(0; \delta) = \bigcup_{b>0} M(b; \delta).$$

Множества $M(b; \delta)$ являются замкнутыми, но не инвариантными. Множество $M(0; \delta)$ инвариантно, но не замкнуто.

Строго неустойчивые пространства и многообразия. Строго неустойчивое пространство E_x^{uu} точки x , не принадлежащей неустойчивой сепаратрисе неподвижной точки, — это множество таких векторов $v \in T_x M$, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |d\Phi_t(v)| = 0.$$

Строго неустойчивые пространства существуют не для всех точек. В работе [16] доказано, что если $x \in M(b; \delta)$, то пространство E_x^{uu} существует, пространство E_x^{uu} непрерывно зависит от точки x на каждом множестве $M(b; \delta)$ и если $v \in E_x^{uu}$, $t < 0$, то

$$|d\Phi_t(v)| < \frac{c}{b^2} e^{-|t|(\gamma_3 - 2\delta)} |v|$$

с некоторой константой $c > 0$.

Особенность сингулярно гиперболических потоков состоит в том, что угол между вектором $X(x)$ и пространством E_x^{uu} может быть как угодно малым. Кроме того, вообще говоря, нет непрерывной зависимости пространства E_x^{uu} от точки $x \in \Lambda$.

Строго неустойчивые многообразия. Строго неустойчивым многообразием точки $x \in \Lambda$ называется многообразие $W^{uu}(x)$, состоящее из таких точек $y \in \Lambda$, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \rho(\Phi_t(x), \Phi_t(y)) = 0.$$

ТЕОРЕМА 1 (см. [17]). *Существует такая константа $\varepsilon_1 > 0$, что для каждой точки $x \in M(b, \delta)$ определена кривая $W^{uu}(x)$ длины $\varepsilon_1 b$, называемая строго неустойчивым многообразием; при этом выполнены следующие свойства:*

- 1) $W^{uu}(x) \subset M(\varepsilon_1 b; \delta)$;
- 2) касательная к кривой $W^{uu}(x)$ в каждой точке $y \in W^{uu}(x)$ совпадает с пространством E_y^{uu} ;
- 3) семейство многообразий $W^{uu}(x)$ непрерывно зависит от x (в C^1 -топологии) на каждом множестве $M(b, \delta)$;
- 4) существует такая константа $c > 0$, что если $x \in M(b, \delta)$, $y \in W^{uu}(x)$, $t < 0$, то

$$\rho(\Phi_t(x), \Phi_t(y)) < \frac{c}{b^2} e^{-|t|(\gamma_3 - 2\delta)} \rho(x, y).$$

Отметим, что $M(\varepsilon_1 b; \delta) \subset \Lambda$, и поэтому из свойства 1 следует, что если $x \in M(b, \delta)$, то $W^{uu}(x) \subset \Lambda$.

1.2. Меры Синая–Боуэна–Рюэлля (SBR-меры). Инвариантные меры типа Синая–Боуэна–Рюэлля (SBR-меры) впервые были построены Я. Г. Синаем (см. [23], [24]) для диффеоморфизма Аносова. Впоследствии конструкция этих мер была перенесена Р. Боуэном и Д. Рюэллем на случай диффеоморфизмов и потоков, удовлетворяющих аксиоме А Смейла (см. [25]–[27]). Для общего сингулярно гиперболического потока SBR-меры построены в [17]. Другое построение для потока на трехмерном многообразии имеется в [18]. Мы будем использовать построение инвариантных мер, приведенное в [17].

Семейство условных мер. Для точек $x \in M(0; \delta)$ обозначим через $J^{uu}(x)$ величину

$$J^{uu}(x) = \frac{1}{|v(0)|} \left. \frac{d}{dt} |v(t)| \right|_{t=0},$$

где $v(t) = d\Phi_t v(0)$, $v(0) \in E_x^{uu}$. Из инвариантности семейства пространств E_x^{uu} следует, что $v(t) \in E_{x(t)}^{uu}$.

Пусть W – кривая, которая является отрезком многообразия $W^{uu}(x)$. На кривой W определена мера Лебега, порожденная римановой длиной. Определим меру μ_W на кривой W так, что эта мера абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и плотность $p(x)$ меры μ_W относительно меры Лебега определяется так, что для любых точек $x, y \in W$

$$\frac{p(x)}{p(y)} = \exp \left(\int_{-\infty}^0 (J^{uu}(y(t)) - J^{uu}(x(t))) dt \right). \quad (1.3)$$

Мера μ_W называется условной мерой. Отметим, что из экспоненциальной близости точек $x(t)$, $y(t)$, гладкости многообразия $W^{uu}(x)$ и гёльдеровости функции $J^{uu}(x)$ следует сходимость интеграла в (1.3).

Определение условных мер в [17] отличается от вышеприведенного, но эквивалентно ему.

Семейство условных мер инвариантно в том смысле, что если $W_2 = \Phi_t(W_1)$, то $\Phi_t(\mu_{W_1}) = \mu_{W_2}$.

Связки. Из ориентируемости семейства пространств E_x^{ss} (и, следовательно, пространств E_x^s) следует, что можно ориентировать отрезки, которые пересекаются с многообразиями W^s в каждой точке трансверсально. Выберем одну из двух ориентаций и назовем ее “слева направо”. Соответственно, один из концов отрезка является левым, другой – правым.

Связкой мы называем множество, состоящее из отрезков строго неустойчивых многообразий точек множества $M(b; \delta)$, соединяющих два локальных устойчивых многообразия. При этом левые концы этих отрезков принадлежат одному локальному устойчивому многообразию, которое называется левым граничным многообразием, а правые концы – другому граничному многообразию, которое называется правым граничным многообразием. Предполагается, что связка целиком принадлежит одному из множеств $M(b_1; \delta)$.

Мы говорим, что две связки не пересекаются, если все общие точки этих двух связок принадлежат одному граничному устойчивому многообразию. Иначе

говоря, либо эти связки не имеют общих точек, либо все общие точки лежат на одном устойчивом многообразии, которое для одной из этих связок является левым граничным многообразием, для другой – правым.

Нетрудно убедиться в том, что пересечение двух связок является связкой и что объединение двух связок можно представить как объединение некоторого количества (не более 5) непересекающихся связок.

Поперечным размером связки назовем максимальный диаметр пересечения связки с локальным устойчивым многообразием.

Пусть P – связка, ν – некоторая мера, определенная на P . Разбиение связки на строго неустойчивые многообразия является непрерывным и потому измеримым. Согласно теории измеримых разбиений на почти каждом отрезке W определена условная мера ν_W .

Назовем меру ν , определенную на связке, допустимой, если условные меры ν_W на почти каждом строго неустойчивом многообразии этой связки совпадают с условными мерами μ_W , определенными выше.

Определение SBR-меры. Пусть Φ_t – сингулярно гиперболический поток.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Мера μ называется мерой Синая–Боуэна–Рюэля (SBR-мерой), если она инвариантна относительно Φ_t , $\mu(M(0; \delta)) = 1$ и ограничение меры μ на любую связку положительной меры является допустимой мерой.

Отметим, что из равенства $\mu(M(0; \delta)) = 1$ следует, что для почти каждой точки $x \in \Lambda$ существует строго неустойчивое многообразие $W^{uu}(x)$.

Теорема о возвратности. Теорема о возвратности доказана в [17]. Из нее следует равенство $\mu(M(0; \delta)) = 1$ для меры, полученной в дальнейших построениях.

Нам потребуется следующее утверждение, которое является следствием теоремы 1.3 из работы [17].

ТЕОРЕМА 2. *Существуют константы $N_0 > 0$, $\kappa > 0$ со следующими свойствами.*

Для любых $b_1, b_2 > 0$ существует такое $T_0 > 0$, что для любого $t > T_0$ и для каждого многообразия $W = W^{uu}(x)$, $x \in M(b_2, \delta)$, найдется множество $\Delta \subset W$, состоящее из непересекающихся отрезков $\Delta_1, \dots, \Delta_m$, таких, что

- 1) $\mu_W(\Delta) > (1 - N_0 b_1^\kappa)$;
- 2) *для каждого отрезка Δ_j имеет место вложение $\Phi_t(\Delta_j) \subset M(b_1; \delta)$;*
- 3) $\Phi_t(\Delta_j)$ *является отрезком строго неустойчивого многообразия.*

Отличие этой теоремы от теоремы 1.3 из [17] состоит в том, что в [17] вместо многообразия $W^{uu}(x)$ рассматривается произвольная кривая, трансверсальная многообразиям $W^s(y)$, и используется другое определение множеств $M(b; \delta)$. Приведенная формулировка эквивалентна формулировке из [17] с другой константой N_0 .

Построение SBR-меры. Пусть P – связка, ν – допустимая мера на связке P , μ – предельная мера семейства мер

$$\mu_T = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_t(\nu) dt.$$

В [17] доказано, что μ – SBR-мера.

По существу, доказательство того, что μ – SBR-мера, состоит из двух шагов. Первый шаг: из теоремы о возвратности выводится равенство $\mu(M(0; \delta)) = 1$. Второй шаг: доказывается, что класс мер, которые на связках индуцируют допустимые меры, инвариантен относительно действий отображений из потока и замкнут относительно операций взвешенного среднего и перехода к пределу в $*$ -слабой топологии.

В той же работе [17] доказана следующая теорема о множестве всех SBR-мер на Λ .

ТЕОРЕМА 3. *Существует конечное количество инвариантных замкнутых множеств $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$, являющихся носителями мер $\mu_1, \dots, \mu_m$, таких, что*

- 1) *поток Φ_t с инвариантной мерой μ_j на множестве Λ_j эргодичен;*
- 2) *всякая SBR-мера имеет вид*

$$\mu = p_1\mu_1 + \dots + p_m\mu_m,$$

где $p_1, \dots, p_m$ – вещественные неотрицательные числа, $p_1 + \dots + p_m = 1$;

- 3) *имеются непересекающиеся множества $A_1, \dots, A_m \subset U$ такие, что их объединение – множество полной лебеговой меры в U , и если $x \in A_j$, то для всякой непрерывной на U функции h имеет место равенство*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(\Phi_t(x)) dt = \int_{\Lambda_j} h(x) d\mu_j.$$

Множества Λ_j называются эргодическими компонентами. Они могут быть аттракторами, но могут и не быть таковыми. Более того, возможно, что две различные эргодические компоненты имеют общие точки.

Существенные точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Точка $x \in \Lambda_j$ называется b -существенной, если для любой ε -окрестности $O_\varepsilon(x)$ мера множества $O_\varepsilon(x) \cap M(b; \delta)$ положительна.

Точка называется существенной, если она является b -существенной при некотором $b > 0$.

Множество b -существенных точек $x \in \Lambda_j$ обозначается через Λ_j^b . Через Λ_j^0 обозначается множество всех существенных точек $x \in \Lambda_j$. Иначе говоря,

$$\Lambda_j^0 = \bigcup_{b>0} \Lambda_j^b.$$

Очевидно, что множество Λ_j^b является носителем сужения меры μ_j на множество $M(b; \delta)$.

Множества Λ_j^b обладают следующими свойствами.

1. Если $b > 0$, то множество Λ_j^b замкнуто.
2. Множества $\Lambda_1^0, \dots, \Lambda_m^0$ не пересекаются.
3. Множество Λ_j^0 инвариантно.
4. $\mu_j(\Lambda_j^0) = 1$.
5. Если $x \in \Lambda_j^0$, то $W^{uu}(x) \subset \Lambda_j^0$.
6. $\text{clos}(\Lambda_j^0) = \Lambda_j$.

1.3. Формулировки результатов. В данном разделе мы рассматриваем поток на какой-то одной эргодической компоненте (одно из множеств Λ_j) с инвариантной мерой μ_j .

Собственные функции. Собственная функция, соответствующая собственному числу λ , – это такая функция $\varphi(x)$, что для любого t и почти всех $x \in \Lambda_j$ справедливо равенство

$$\varphi(\Phi_t(x)) = e^{i\lambda t} \varphi(x).$$

Из определения ясно, что если изменить собственную функцию на множестве меры нуль, то она останется собственной функцией.

Известно, что если $\varphi(x)$ – собственная функция для эргодического потока, то функция $|\varphi(x)|$ постоянна почти всюду.

Для потока Аносова с гладкой инвариантной мерой известно [22], что собственная функция непрерывна (в том смысле, что ее можно изменить на множестве меры нуль так, что она окажется непрерывной). Следующее утверждение показывает, что для сингулярно гиперболического потока это неверно.

ЛЕММА 1. *Если эргодическая компонента содержит неподвижную точку, то собственная функция (если она существует) не может быть непрерывной на этой эргодической компоненте.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если собственная функция непрерывна, то на траектории $x(t)$, принадлежащей устойчивому многообразию неподвижной точки, она равна $\varphi(x(0))e^{i\lambda t}$ и поэтому не имеет предела, когда $t \rightarrow \infty$ (т.е. $x(t)$ стремится к неподвижной точке). Следовательно, собственная функция имеет разрыв по крайней мере в неподвижной точке.

Можно показать, что собственная функция имеет разрыв в каждой точке неустойчивой сепаратрисы базисной неподвижной точки (определение базисной неподвижной точки см. ниже).

ТЕОРЕМА 4. *Собственную функцию можно изменить на множестве меры нуль так, что новая функция при любом $b > 0$ непрерывна на множестве Λ_j^b и постоянна на строго устойчивом многообразии и на строго неустойчивом многообразии каждой точки $x \in \Lambda_j^0$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что собственная функция не обязана быть постоянной на строго неустойчивом многообразии точки $x \in \Lambda_j$, если $x \in M(b; \delta)$ не является существенной.

Перемешивание. Настоящая работа посвящена изучению свойства перемешивания сингулярно гиперболического потока на множестве Λ_j с инвариантной мерой μ_j .

В работе [22] доказано, что если поток Аносова с абсолютно непрерывной (относительно меры Лебега) инвариантной мерой не имеет собственных функций, то он является перемешивающим.

В настоящей работе доказывается следующий аналог этого результата для сингулярно гиперболического потока.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть Φ_t – сингулярно гиперболический поток. Если не существует собственной функции на множестве Λ_j с инвариантной SBR-мерой μ_j , то поток Φ_t на множестве Λ_j с инвариантной мерой μ_j является перемешивающим.*

Неподвижная точка называется базисной, если ее устойчивое многообразие содержит существенную точку.

Ниже мы покажем (лемма 14), что если эргодическая компонента Λ_j содержит неподвижную точку, то она содержит базисную неподвижную точку.

Как следствие получаем, что если неподвижная точка, содержащаяся в эргодической компоненте, единственная, то она базисная.

Следующее утверждение дает достаточное условие перемешивания.

ТЕОРЕМА 6. *Если одномерная сепаратриса базисной неподвижной точки пересекается со строго устойчивым многообразием существенной точки, то поток на множестве Λ_j с мерой μ_j является перемешивающим.*

Отметим, что если у потока Аносова с абсолютно непрерывной инвариантной мерой имеется собственная функция, то этот поток является надстройкой над диффеоморфизмом Аносова с постоянным временем возвращения [22]. В случае сингулярно гиперболического потока подобное утверждение неверно. Имеется пример сингулярно гиперболического аттрактора типа аттрактора Лоренца с единственной эргодической компонентой, в которой содержится неподвижная точка и имеется собственная функция (работа готовится к публикации). Из-за наличия неподвижной точки поток не может быть представлен как надстройка над диффеоморфизмом с постоянным временем возвращения.

ТЕОРЕМА 7. *Если множество Λ_j не содержит неподвижных точек, то Λ_j – гиперболический аттрактор и имеется альтернатива: либо поток на Λ_j перемешивающий, либо существует собственная функция. Во втором случае поток топологически сопряжен надстройке над аттрактором гиперболического диффеоморфизма с постоянным временем возвращения, а собственная функция непрерывна.*

ТЕОРЕМА 8. *Если имеется собственная функция, то ω -предельное множество сепаратрисы базисной неподвижной точки является неподвижной точкой или периодической траекторией, не содержащей существенных точек.*

Следует отметить, что метод доказательства перемешивания основан на идее, употреблявшейся в [22]. Ключевой момент доказательства состоит в доказательстве утверждения о том, что собственная функция является постоянной на строго устойчивых и строго неустойчивых многообразиях. Так как строго неустойчивые многообразия непрерывно зависят от точки только на множестве существенных точек, то и собственная функция оказывается непрерывной только на этом множестве.

Вторая часть доказательства перемешивания состоит в выводе перемешивания из слабого перемешивания. Этот вывод, хотя формально и сильно отличается от применявшегося в [22], но по существу идея та же самая.

§ 2. Доказательство свойств собственных функций

В этом параграфе мы, как обычно, называем типичным свойство, которое выполняется на множестве полной меры. Например, выражение “типичное строго устойчивое многообразие обладает каким-то свойством” означает, что имеется множество полной меры, составленное из строго устойчивых многообразий, каждое из которых этим свойством обладает.

2.1. Собственная функция почти постоянна на почти каждом строго устойчивом многообразии и почти каждом строго неустойчивом многообразии. Объясним, что означает выражение “функция $\varphi(x)$ почти постоянна на почти каждом строго устойчивом многообразии”.

Пусть $b > 0$ – достаточно малое число, $x_0 \in \Lambda_J^b$. Так как $x_0 \in M(b; \delta)$, то существует строго неустойчивое многообразие $W^{uu}(x_0)$.

Напомним, что через $W_\alpha^{ss}(x)$ ($W_\alpha^{uu}(x)$) обозначается шар радиуса α относительно внутренней метрики в многообразии $W^{ss}(x)$ ($W^{uu}(x)$), центром которого является точка x .

Пусть α, β – достаточно малые числа (такие, что $W_\alpha^{uu}(x_0)$ и другие многообразия, используемые ниже, существуют). Прямоугольником ширины α и высоты β мы будем называть множество

$$\Pi_{\alpha, \beta}(x_0) = \bigcup_{y \in W_\alpha^{uu}(x_0)} W_\beta^{ss}(y).$$

Кубом мы будем называть множество

$$B_{\alpha, \beta}(x_0) = \bigcup_{t \in (-\alpha, \alpha)} \Phi_t(\Pi_{\alpha, \beta}(x_0)) = \bigcup_{y \in \Pi_{\alpha, \beta}(x_0)} \{y(t) : t \in (-\alpha, \alpha)\}.$$

Отметим, что хотя многообразия $W_\alpha^{ss}(y)$ гладкие, прямоугольник $\Pi_{\alpha, \beta}(x_0)$ является, вообще говоря, негладкой поверхностью.

Через $W_\alpha^{cu}(x_0)$ обозначим многообразие

$$W_\alpha^{cu}(x_0) = \bigcup_{y \in W_\alpha^{uu}(x_0)} \{y(t) : t \in (-\alpha, \alpha)\}.$$

Многообразие $W_\alpha^{cu}(x_0)$ называется центрально-неустойчивым. Очевидно, что

$$W_\alpha^{cu}(x_0) = \bigcup_{t \in (-\alpha, \alpha)} \Phi_t(W_\alpha^{uu}(x_0)).$$

Через $W^\beta(y)$, $y \in W_\alpha^{cu}(x_0)$, обозначим связную компоненту строго устойчивого многообразия, принадлежащую кубу $B_{\alpha, \beta}(x_0)$. Очевидно, что

$$W^\beta(y) = \Phi_t(W_\beta^{ss}(\Phi_{-t}(y))),$$

где $t \in (-\alpha, \alpha)$ таково, что $\Phi_{-t}(y) \in W_\alpha^{uu}(x_0)$.

Обозначим концы многообразия $W_\alpha^{uu}(x_0)$ через x_l, x_r . В соответствии с определенной выше ориентацией нумерацию определим так, что x_l является левой точкой, x_r – правой.левой границей куба $B_{\alpha, \beta}(x_0)$ назовем множество

$$\Gamma_l = \bigcup_{t \in (-\alpha, +\alpha)} \Phi_t(W_\alpha^{ss}(x_l)).$$

Аналогично определяется правая граница.

Множество $B_{\alpha, \beta}(x_0)$ открыто, и поэтому $\mu_j(B_{\alpha, \beta}(x_0) \cap M(b; \delta)) > 0$, если $x_0 \in \Lambda_j^b$. Очевидно, что множество $B_{\alpha, \beta}(x_0)$ является объединением локальных строго устойчивых многообразий всех точек центрально-неустойчивого многообразия $W_\alpha^{cu}(x_0)$.

Пусть α, β – некоторые достаточно малые положительные числа, $B_{\alpha, \beta}(x_0)$ – куб. Разбиение множества $B_{\alpha, \beta}(x_0)$ на подмножества $W^\beta(y)$, $y \in W_\alpha^{cu}(x_0)$, является измеримым, и поэтому на почти каждом подмногообразии $W^\beta(y)$ имеется условная мера. Эта мера, вообще говоря, сосредоточена на множестве лебеговой меры нуль; скорее всего, она сосредоточена на канторовом множестве нулевой меры. Заметим, что если пересечение двух кубов имеет положительную меру, то это пересечение состоит из некоторых подмножеств строго устойчивых многообразий. Для типичного строго устойчивого многообразия две условные меры, которые получаются как условные меры разбиения двух кубов, совпадают.

Мы говорим, что функция φ почти постоянна на почти каждом строго устойчивом многообразии, если для каждого куба $B_{\alpha, \beta}(x_0)$ имеется множество $D \subset B_{\alpha, \beta}(x_0)$ полной меры, составленное из подмножеств $W^\beta(y)$, $y \in W_\alpha^{cu}(x_0)$, такое, что в каждом многообразии $W^\beta(y) \subset D$ имеется подмножество полной условной меры, на котором функция φ постоянна.

ЛЕММА 2. Пусть $\varphi(x)$ – собственная функция сингулярно гиперболического потока на множестве Λ_j с инвариантной мерой μ_j . Тогда для любого множества $B_{\alpha, \beta}(x_0)$ положительной меры и любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $h(x)$, постоянная на каждом строго устойчивом многообразии $W^\beta(x) \subset B_{\alpha, \beta}(x_0)$, такая, что

$$\left(\int_{B_{\alpha, \beta}(x_0)} |\varphi(x) - h(x)|^2 d\mu_j \right)^{1/2} < 2\varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В ходе доказательства через $\|f\|_2$ обозначается норма функции f в пространстве $L_2(\Lambda_j)$ (с мерой μ_j).

Хорошо известно, что для любой функции $\varphi(x) \in L_2(\Lambda_j)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная функция $f(x)$ такая, что

$$\|\varphi(x) - f(x)\|_2 < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Из инвариантности меры μ_j следует, что

$$\|\varphi(\Phi_t(x)) - f(\Phi_t(x))\|_2 = \|\varphi(x) - f(x)\|_2 < \varepsilon.$$

Если $\varphi(x)$ – собственная функция, то для почти всех x

$$\varphi(\Phi_t(x)) = e^{i\lambda t} \varphi(x)$$

и потому

$$\|e^{i\lambda t} \varphi(x) - f(\Phi_t(x))\|_2 < \varepsilon,$$

откуда, с учетом равенства $|e^{i\lambda t}| = 1$, получаем

$$\|\varphi(x) - e^{-i\lambda t} f(\Phi_t(x))\|_2 < \varepsilon. \quad (2.2)$$

Следовательно, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывная функция $f(x)$, что для любого $t > 0$ справедливо неравенство

$$\left(\int_{B_{\alpha}(x_0)} |\varphi(x) - e^{-i\lambda t} f(\Phi_t(x))|^2 d\mu_j \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Далее мы воспользуемся тем, что непрерывная на компакте функция является равномерно непрерывной, и тем, что размер многообразия $\Phi_t(W^{ss}(y))$ с ростом t экспоненциально уменьшается. Следовательно, если t достаточно велико, то для любых точек $x_1, x_2 \in W^{ss}(y)$ ($y \in B_{\alpha, \beta}(x_0)$) справедливо неравенство

$$|e^{-i\lambda t} f(\Phi_t(x_1)) - e^{-i\lambda t} f(\Phi_t(x_2))| < \varepsilon. \quad (2.3)$$

Пусть π – проекция множества $B_{\alpha, \beta}(x_0)$ на многообразие $W^{cu}(x_0)$ вдоль многообразий $W^{ss}(y)$, $y \in W^{cu}(x_0)$, $h(x)$ – функция, определенная на $B_{\alpha, \beta}(x_0)$ и равная $e^{-i\lambda t} f(\Phi_t(\pi(x)))$.

Очевидно, что функция $h(x)$ постоянна на многообразиях $W^{ss}(y)$, $y \in W^{cu}(x_0)$. Из неравенства (2.3) следует, что для любой точки $x \in B_{\alpha, \beta}(x_0)$ справедливо неравенство

$$|e^{-i\lambda t} f(\Phi_t(x)) - h(x)| < \varepsilon.$$

Отсюда и из (2.2) получаем, что

$$\left(\int_{B_{\alpha, \beta}(x_0)} |\varphi(x) - h(x)|^2 d\mu_j \right)^{1/2} < 2\varepsilon.$$

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Собственная функция сингулярно гиперболического потока на множестве Λ_j с инвариантной мерой μ_j почти постоянна на почти каждом строго устойчивом многообразии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in \Lambda_j^b$, $B_{\alpha,\beta}(x_0)$ – куб, $h(x)$ – функция, определенная в предыдущей лемме. В ходе доказательства мы рассматриваем меру, которая получается как (нормированное) ограничение меры μ_j на множество $B_{\alpha,\beta}(x_0)$.

Пусть $y \in W^{cu}(x_0)$, $W(y) = W^{ss}(y)$. Так как разбиение множества $B_{\alpha,\beta}(x_0)$ на множества $W(y)$ измеримо, то на почти каждом множестве $W(y)$ определена условная мера $\mu_{W(y)}$. Обозначим через $g(x)$ функцию, постоянную на $W(y)$ и равную $\int_{W(y)} \varphi(x) d\mu_{W(y)}$.

Функция $g(x)$ определена на почти всех многообразиях $W(y)$. Очевидно, что $g(x)$ является ортогональной проекцией в пространстве $L_2(B_{\alpha,\beta}(x_0))$ на подпространство функций, постоянных на многообразиях $W(y)$. Поэтому для любой функции f , постоянной на многообразиях $W(y)$, справедливо неравенство $\|\varphi - g\|_2 \leq \|\varphi - f\|_2$. В частности, для функции $h(x)$, построенной в предыдущей лемме, справедливо $\|\varphi - g\|_2 \leq \|\varphi - h\|_2$. Из предыдущей леммы следует, что $\|\varphi - g\|_2 = 0$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Собственная функция почти постоянна на почти каждом строго неустойчивом многообразии.*

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3 с той разницей, что вместо куба следует рассмотреть связку положительной меры, принадлежащей множеству $M(b; \delta)$.

2.2. Непрерывность собственной функции на множестве $M(b; \delta)$.

ЛЕММА 5. *Для каждого $b > 0$ найдутся такие $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что для каждой точки $x_0 \in \Lambda_j^b$ функцию φ можно изменить на множестве меры нуль так, что новая функция окажется непрерывной на множестве $B_{\alpha,\beta}(x_0) \cap \Lambda_j^b$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В ходе доказательства нам потребуются некоторые требования на малость α , β . Мы не будем уточнять эти требования, а писать только “если α , β достаточно малы, то ...”. В силу компактности множества Λ_j^b и в силу равномерности оценок на множестве $M(b; \delta)$ соответствующие α , β можно выбрать одними и теми же для всех точек $x_0 \in \Lambda_j^b$.

Первое требование на малость α , β состоит в том, что для каждой точки $y \in \Pi_{\alpha,\beta}(x_0)$ траектория $\{y(t) : t \in (-\alpha, \alpha)\}$ определена.

Обозначим через ξ разбиение множества $B_{\alpha,\beta}(x_0)$ на поверхности уровня функции φ (т.е. на множества вида $\varphi(x) = \text{const}$). Так как функция φ измерима, то и разбиение ξ измеримо. Следовательно, согласно теории измеримых разбиений на почти каждом элементе C разбиения ξ определена условная мера μ_C .

Через η обозначим разбиение куба на многообразия $W^{ss}(y)$, $y \in W_{\alpha}^{cu}(x_0)$. Разбиение η измеримо, и поэтому на почти каждом элементе этого разбиения определена условная мера.

Из леммы 3 следует, что разбиение η мельче, чем ξ . Следовательно, почти в каждом элементе $W^{ss}(y)$ разбиения ξ имеется множество $V(y)$ полной меры (имеется в виду условная мера на $W^{ss}(y)$), целиком принадлежащее одному из элементов разбиения ξ . Мы будем считать, что множество $V(y)$ определено только тогда, когда оно имеет полную меру.

Очевидно, что для типичного элемента C разбиения ξ объединение множеств $V(y)$, принадлежащих C , является множеством полной меры в C (по отношению к мере μ_C). Объединение всех множеств $V(y)$, принадлежащих данному элементу C , обозначим через N_C . В типичном элементе C множество N_C является множеством полной меры.

Пусть z – b -существенная точка, $z \in B_{\alpha,\beta}(x_0)$.

Так как z – b -существенная точка, то пересечение любой ее окрестности с множеством $M(b; \delta)$ имеет положительную меру. Зафиксируем некоторую малую окрестность точки x_0 и обозначим ее пересечение с множеством Λ_j^b через R . По построению, $R \subset \Lambda_j^b$ и $\mu_j(R) > 0$.

Под строго неустойчивым многообразием $W^{uu}(x)$ точки $x \in R$ мы понимаем отрезок строго неустойчивого многообразия, концы которого лежат на левой и правой границах куба $B_{\alpha,\beta}(x_0)$. Объединение всех строго неустойчивых многообразий $W^{uu}(x)$, $x \in R$, обозначим через P . Очевидно, что множество P является связкой; так как x_0 – b -существенная точка, то P имеет положительную меру. Сами многообразия $W^{uu}(x)$ образуют измеримое разбиение множества P . Условные меры на многообразиях $W^{uu}(x)$ совпадают с теми, которые мы определили выше. Так как $\mu(P) > 0$, то объединение таких элементов C разбиения ξ , что $\mu_C(P \cap C) > 0$, имеет положительную меру.

Элемент C разбиения ξ назовем хорошим, если $\mu_C(N_C) = 1$ и существует множество $G \subset C$, $\mu_C(G) > 0$, составленное из многообразий $W^{uu}(x) \subset P$, пересекающихся с C по множеству полной условной меры. Из леммы 4 следует, что мера хороших элементов C разбиения ξ положительна.

Покажем, что если C – хороший элемент, то существует прямоугольник, почти целиком принадлежащий C .

Действительно, так как $\mu_C(N_C) = 1$, то почти каждое многообразие $W^{uu}(x)$, почти целиком принадлежащее множеству C , пересекается с множеством N_C по множеству полной условной меры. Следовательно, существует по крайней мере одно многообразие $W^{uu}(x)$, пересекающееся с множеством N_C по множеству полной условной меры. Для такого многообразия множество

$$\Pi = \bigcup_{y \in W^{uu}(x)} W^{ss}(y)$$

является прямоугольником, почти целиком принадлежащим множеству C .

Типичный хороший элемент C разбиения ξ почти совпадает с построенным прямоугольником. Это следует из того, что всякий отрезок траектории, принадлежащий $B_{\alpha,\beta}(x_0)$, пересекается с прямоугольником в единственной точке,

а типичный отрезок траектории пересекается с типичным элементом разбиения ξ тоже в единственной точке.

Следовательно, типичное подмножество куба, на котором функция постоянна, с точностью до множества меры нуль является прямоугольником.

Для типичных элементов C_1, C_2 разбиения ξ имеет место равенство $\varphi(C_2) = e^{i\lambda t}\varphi(C_1)$, если $C_2 = \Phi_t(C_1)$. Поэтому существует такой прямоугольник Π_0 и число a , что почти всякий элемент C разбиения ξ пересекается с прямоугольником $\Phi_t(\Pi_0)$ по множеству полной меры, а значение функции φ на этом элементе совпадает с величиной $ae^{i\lambda t}$.

Изменим функцию φ на множестве меры нуль так, что она равна величине a на прямоугольнике Π_0 , а на траектории $\{x(t) : t \in (-\alpha, \alpha)\}$, $x(0) \in \Pi_0$, совпадает с величиной $ae^{i\lambda t}$. Очевидно, что после изменения полученная функция будет непрерывна на множестве $B_{\alpha,\beta}(x_0)$ и почти всюду совпадает с φ . Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. *Собственную функцию можно изменить на множестве меры нуль так, что она окажется непрерывной в окрестности каждой точки $x \in \Lambda_j^0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как множество Λ_j^b компактно, то существует конечное покрытие множества Λ_j^b кубами $B_{\alpha,\beta}(x_i)$, $i = 1, \dots, k$. На каждом кубе $B_{\alpha,\beta}(x_i)$ изменим функцию $\varphi(x)$ так, что новая функция непрерывна в этом кубе и отличается от старой на множестве меры нуль.

Отметим, что два изменения, полученные из разных кубов, на их пересечении совпадают, так как две непрерывные функции, совпадающие почти всюду, совпадают на самом деле всюду (на носителе меры). Следовательно, после изменения на всех кубах новая функция окажется непрерывной на множестве $\bigcup_i B_{\alpha,\beta}(x_i)$. Так как подобную конструкцию можно осуществить на любом множестве Λ_j^b , то полученная в конце концов функция будет непрерывной на множестве Λ_j^0 . Лемма доказана.

Новая функция отличается от старой функции на множестве, которое является объединением счетного числа множеств меры нуль. Следовательно, новая функция отличается от старой на множестве меры нуль. Ввиду непрерывности новой функции она единственна (если две непрерывных функции отличаются на множестве меры нуль, то на носителе соответствующей меры они совпадают).

ЛЕММА 7. *Собственная функция $\varphi(x)$, непрерывная на множестве существующих точек, постоянна на строго неустойчивом многообразии каждой собственной точки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $x - b$ -существенная точка, $O_\varepsilon(x)$ — ее ε -окрестность. Множество $O_\varepsilon(x) \cap \Lambda_j^b$ имеет положительную меру. Следовательно, объединение многообразий $W^{uu}(y)$, $y \in O_\varepsilon(x) \cap M(b; \delta)$, тоже имеет положительную меру. Из непрерывности функции φ и из того, что она постоянна на почти каждом строго неустойчивом многообразии, следует, что в любой окрестности точки x существует точка y такая, что на $W^{uu}(y)$ функция φ

постоянна. Из непрерывной зависимости многообразия $W^{uu}(y)$ от y на множестве $M(b; \delta)$ и непрерывности функции φ следует, что функция φ постоянна на $W^{uu}(x)$.

Отметим, что собственная функция не обязана быть непрерывной во всех точках $x \in M(b; \delta)$ и постоянной на каждом строго неустойчивом многообразии. Имеется пример, в котором собственная функция не является непрерывной в точках периодической траектории и не является постоянной на строго неустойчивом многообразии точек этой траектории (работа готовится к публикации).

2.3. Случай гиперболического аттрактора. В этом пункте доказываются теорема 7.

Пусть Λ_j – эргодическая компонента, не содержащая неподвижных точек. В этом случае, как показано в [17], Λ_j – гиперболический аттрактор. Кроме того, траектории точек $x \in \Lambda_j$ не заходят в некоторые фиксированные окрестности неподвижных точек, и поэтому существует такое $b > 0$, что все точки аттрактора принадлежат множеству $M(b; \delta)$ и являются b -существенными. Поэтому всякая собственная функция является непрерывной (естественно, после изменения на множестве меры нуль). При этом собственная функция постоянна на каждом строго устойчивом многообразии и каждом строго неустойчивом многообразии.

Пусть φ – собственная функция (согласно сказанному выше, считаем функцию φ непрерывной), λ – собственное число (напомним, что это означает, что $\varphi(\Phi_t(x)) = e^{i\lambda t} \varphi(x)$).

Пусть $x_0 \in \Lambda_j$ – произвольная точка. Обозначим через Λ_F множество

$$\Lambda_F = \{x \in \Lambda_j : \varphi(x) = \varphi(x_0)\}.$$

Обозначим через T наименьшее положительное число такое, что $e^{i\lambda T} = 1$. Очевидно, что $\lambda T = 2\pi$. Из этого равенства следует, что $\Phi_T(\Lambda_F) = \Lambda_F$.

Далее мы построим поверхность Π коразмерности 1, отображение F поверхности Π такое, что F – отображение последования потока Φ_t на поверхности Π , $F(\Pi) \subset \Pi$; кроме того,

$$\bigcap_{n>0} F^n(\Pi) = \Lambda_F.$$

Сначала построим поверхность Π_0 как объединение строго устойчивых многообразий $W_\alpha^{ss}(x)$ достаточно малого размера α , где объединение берется по всем точкам $x \in \Lambda_F$.

Из инвариантности слоения на строго устойчивые многообразия следует, что при любом $t > 0$ $\Phi_t(W_\alpha^{ss}(x))$ – строго устойчивое многообразие точки $\Phi_t(x)$. Из экспоненциального сжатия на многообразии $W_\alpha^{ss}(x)$ следует, что найдется такое $t_0 > 0$, что если $t > t_0$, то

$$\Phi_t(W_\alpha^{ss}(x)) \subset W_{0,9\alpha}^{ss}(\Phi_t(x)).$$

Пусть m – такое число, что $mT > t_0$. В этом случае

$$\Phi_{mT}(W_\alpha^{ss}(x)) \subset W_{0,9\alpha}^{ss}(\Phi_{mT}(x)).$$

Обозначим

$$\Pi = \bigcup_{k=0}^m \Phi_{kT}(\Pi_0), \quad F = \Phi_T.$$

Из сказанного выше следует, что $F(\Pi) \subset \Pi$, $\text{clos } F^m(\Pi) \subset \Pi$. Из экспоненциального сжатия на строго устойчивых многообразиях следует, что

$$\bigcap_{k>0} F^k(\Pi) = \Lambda_F.$$

В силу условия постоянства собственной функции $\varphi(x)$ на строго устойчивых многообразиях мы можем продолжить ее на множество

$$U_F = \bigcup_{t \in [0, T]} \Phi_t(\Pi).$$

Нетрудно убедиться в том, что если $t > 0$, то $\Phi_t(U_F) \subset U_F$, $\bigcup_{t>0} \Phi_t(U_F) = \Lambda_j$.

Покажем, что отображение F топологически сопряжено с гиперболическим аттрактором.

Возможно, что поверхность Π не является гладким подмногообразием.

Если множество Π негладкое, то мы можем ввести на нем гладкую структуру. Для этого в окрестности каждой точки $x \in \Lambda_F$ построим новые локальные координаты.

Определим в окрестности каждой точки $x \in \Lambda_F$ достаточно малую гладкую поверхность $V(x)$ коразмерности один, касательную к многообразиям $W^{uu}(x)$, $W^{ss}(x)$ и трансверсальную траекториям потока. Тогда отрезок траектории точки $y \in V(x)$ пересекается с поверхностью $V(x)$ в единственной точке. Так как этот же отрезок пересекается с Π тоже в единственной точке, то тем самым определено отображение ψ_x поверхности $V(x)$ в множество Π вдоль траекторий. Определив координаты на поверхности $V(x)$, определим локальную систему координат в окрестности $\psi_x(V(x))$ точки x на множестве Π .

Так как отображение вдоль траекторий одного гладкого многообразия на другое является гладким, то и переход от локальной системы координат в окрестности $\psi_{x_1}(V(x_1))$ точки x_1 к локальной системе координат в окрестности $\psi_{x_2}(V(x_2))$ точки x_2 является гладким. Тем самым гладкая структура определена.

Отметим, что объединение окрестностей $\psi_x(V(x))$, $x \in \Pi_0(x_0)$, может не совпадать с Π . В этом случае изменим множество Π , рассмотрев вместо Π множество $F^k(\Pi)$ с таким k , что объединение окрестностей $\psi_x(V(x))$ по всем $x \in \Pi$ содержит $F^k(\Pi)$.

Мы доказали, что поток топологически сопряжен с потоком, который получается как надстройка над диффеоморфизмом F с постоянным временем возвращения T .

Покажем, что отображение F гиперболично. Действительно, устойчивые и неустойчивые многообразия отображения F – это строго устойчивые и строго неустойчивые многообразия исходного потока.

§ 3. Доказательство перемешивания

Этот параграф посвящен доказательству теоремы 5. Как и выше, через Λ_j обозначается эргодическая компонента потока Φ_t , через μ_j – SBR-мера на Λ_j .

Метрика в пространстве мер. Обозначим через $C(\Lambda_j)$ пространство непрерывных функций с нормой $\|g\|_0 = \sup_{x \in \Lambda_j} |g(x)|$, через CL_1 класс функций $h(x)$, определенных на Λ_j и удовлетворяющих условию

$$\sup_{x \in \Lambda_j} |h(x)| \leq 1, \quad \sup_{x, y \in \Lambda_j} \frac{|h(x) - h(y)|}{\rho(x, y)} \leq 1.$$

Из теоремы Арцела–Асколи следует, что класс CL_1 компактен в пространстве $C(\Lambda_j)$. Очевидно, что линейные комбинации функций из CL_1 плотны в пространстве $C(\Lambda_j)$.

Определим метрику в пространстве борелевских мер на Λ_j :

$$\rho_1(\mu_1, \mu_2) = \sup_{h \in CL_1} \left| \int_{\Lambda_j} h(x) d\mu_1(x) - \int_{\Lambda_j} h(x) d\mu_2(x) \right|.$$

ЛЕММА 8. *Топология, определяемая метрикой ρ_1 в пространстве мер, совпадает со $*$ -слабой топологией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность мер ν_n сходится к мере ν в $*$ -слабой топологии. Так как множество CL_1 компактно в $C(\Lambda)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся функции $h_1(x), \dots, h_m(x)$, образующие ε -сеть в множестве CL_1 (относительно нормы $\|\cdot\|_0$). Из сходимости последовательности ν_n в $*$ -слабой топологии следует, что найдется такое $n(\varepsilon)$, что при любом $n > n(\varepsilon)$ и любом $k \in \{1, \dots, m\}$ верно неравенство

$$\left| \int_{\Lambda_j} h_k(x) d\nu_n(x) - \int_{\Lambda_j} h_k(x) d\nu(x) \right| < \varepsilon.$$

Пусть функция h принадлежит множеству CL_1 . Тогда найдется такое k , что

$$\|h(x) - h_k(x)\|_0 < \varepsilon.$$

Если $n > n(\varepsilon)$, то

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Lambda_j} h(x) d\nu_n(x) - \int_{\Lambda_j} h(x) d\nu(x) \right| \\ & \leq \left| \int_{\Lambda_j} h(x) d\nu_n(x) - \int_{\Lambda_j} h_k(x) d\nu_n(x) \right| + \left| \int_{\Lambda_j} h_k(x) d\nu_n(x) - \int_{\Lambda_j} h_k(x) d\nu(x) \right| \\ & \quad + \left| \int_{\Lambda_j} h_k(x) d\nu(x) - \int_{\Lambda_j} h(x) d\nu(x) \right| \end{aligned}$$

$$= \left| \int_{\Lambda_j} (h(x) - h_k(x)) d\nu_n(x) \right| + \left| \int_{\Lambda_j} (h_k(x) d\nu_n(x) - \int_{\Lambda_j} h_k(x) d\nu(x)) \right| \\ + \left| \int_{\Lambda_j} (h_k(x) - h(x)) d\nu(x) \right|.$$

Но первое и третье слагаемые в правой части последнего неравенства не превосходят величины ε , так как для любой нормированной меры ν выполнено неравенство

$$\left| \int_{\Lambda_j} g(x) d\nu(x) \right| \leq \|g\|_0,$$

а $\|h(x) - h_k(x)\|_0 < \varepsilon$. Второе не превосходит величины ε в силу выбора $n(\varepsilon)$. Следовательно,

$$\left| \int_{\Lambda_j} h(x) d\nu_n(x) - \int_{\Lambda_j} h(x) d\nu(x) \right| < 3\varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n(\varepsilon)$, что если $n > n(\varepsilon)$, то

$$\rho_1(\nu_n, \nu) \leq 3\varepsilon.$$

Тем самым доказано, что из сходимости в $*$ -слабой топологии следует сходимость в метрике ρ_1 .

Пусть теперь последовательность мер ν_n сходится к мере ν в метрике ρ_1 . Тогда для любой функции $h(x)$, которая является линейной комбинацией функций из CL_1 , последовательность $\int_{\Lambda_j} h(x) d\nu_n$ сходится к $\int_{\Lambda_j} h(x) d\nu$. Так как линейные комбинации функций из CL_1 всюду плотны в $C(\Lambda_j)$, а последовательность ν_n ограничена (как последовательность функционалов на пространстве $C(\Lambda_j)$), то последовательность ν_n сходится в $*$ -слабой топологии (см. [28; гл. V, п. 1, теорема 10]).

Лемма 8 доказана.

Абсолютная непрерывность. Ниже нам потребуется свойство абсолютной непрерывности слоения на устойчивые многообразия.

Сформулируем свойство абсолютной непрерывности в том виде, который нам потребуется.

Пусть $x_1, x_2 \in M(b, \delta)$ – достаточно близкие точки, $W_i = W^{uu}(x_i)$, $i = 1, 2$, – строго неустойчивые многообразия точек x_1, x_2 . Определим отображение $\psi: W_1 \rightarrow W_2$ так, что для точки $y_1 \in W_1$

$$\psi(y_1) = W_2 \cap W^s(y_1).$$

Тогда отображение ψ переводит меру μ_{W_1} в меру $\psi(\mu_{W_1})$, абсолютно непрерывную относительно меры μ_{W_2} ; при этом плотность меры $\psi(\mu_{W_1})$ относительно меры μ_{W_2} близка к единице.

Из непрерывной зависимости многообразий $W^{uu}(x)$ от точки x на множестве $M(b, \delta)$ следует, что для любых $b > 0$, $\varepsilon > 0$ найдется такое $\alpha > 0$, что если

$x_1, x_2 \in M(b; \delta)$, $\rho(x_1, x_2) < \alpha$, то для любой точки $y_1 \in W^{uu}(x_1)$ справедливо $\rho(y_1, \psi(y_1)) < \varepsilon$. Из абсолютной непрерывности можно вывести следующее утверждение.

ЛЕММА 9. *Для любых $b > 0$, $\varepsilon > 0$ найдется такое $\alpha > 0$, что если $x_1, x_2 \in M(b; \delta)$, $\rho(x_1, x_2) < \alpha$, то для любой функции $f \in CL_1$ справедливо неравенство*

$$\left| \int_{W_1} f(x) d\mu_{W_1} - \int_{W_2} f(x) d\mu_{W_2} \right| < \varepsilon,$$

где $W_1 = W^{uu}(x_1)$, $W_2 = W^{uu}(x_2)$, μ_{W_1} , μ_{W_2} – условные меры на многообразиях W_1 , W_2 .

Из абсолютной непрерывности и теоремы о возвратности выводится следующее утверждение.

ЛЕММА 10. *Для любых $\varepsilon > 0$, $b > 0$ найдутся такие $\alpha > 0$, $T > 0$, что если P – связка, принадлежащая множеству $M(b; \delta)$ и имеющая поперечный диаметр меньше чем α , то для любых двух допустимых мер ν_1, ν_2 на связке P и любого $t > T$ справедливо неравенство*

$$\rho_1(\Phi_t(\nu_1), \Phi_t(\nu_2)) < \varepsilon.$$

Напомним, что через μ_j обозначается эргодическая SBR-мера на множестве Λ_j .

ЛЕММА 11. *Поток Φ_t является перемешивающим тогда и только тогда, когда для любой связки P и любой допустимой меры ν на связке P справедливо равенство*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho_1(\Phi_t(\nu), \mu_j) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее через L_1 обозначается пространство $L_1(\Lambda_j, \mu_j)$.

Напомним, что перемешивание потока Φ_t с инвариантной мерой μ_j означает, что для любых функций $h(x), f(x) \in L_1$ имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Lambda_j} h(x) f(\Phi_t(x)) d\mu_j = \int_{\Lambda_j} h(x) d\mu_j \cdot \int_{\Lambda_j} f(x) d\mu_j. \quad (3.1)$$

Хорошо известно, что если равенство (3.1) справедливо для функций $h(x)$, $f(x)$ из некоторых классов, таких, что линейные комбинации функций из этих классов плотны в L_1 , то это равенство справедливо для всех функций из L_1 .

Мы докажем равенство (3.1) для функций $h(x) \in CL_1$ и функций $f(x)$ вида

$$f(x) = \frac{1}{\mu_j(P)} \chi(x), \quad (3.2)$$

где P – некоторая связка положительной меры, $\chi(x)$ – характеристическая функция связки P (т.е. такая функция, что $\chi(x) = 1$, если $x \in P$, и $\chi(x) = 0$, если $x \notin P$).

Обозначим через μ_P сужение меры μ_j на связку P . Нетрудно заметить, что равенство (3.1) для функций $h(x) \in CL_1$ и $f(x)$ вида (3.2) означает, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Lambda_j} h(x) d\Phi_t(\mu_P) = \int_{\Lambda_j} h(x) d\mu_j. \quad (3.3)$$

Но равенство (3.3) означает, что предел мер $\Phi_t(\mu_P)$ при $t \rightarrow +\infty$ в $*$ -слабой топологии равен μ_j . Из леммы 8 следует, что перемешивание эквивалентно сходимости мер $\Phi_t(\mu_P)$ к мере μ_j в метрике ρ_1 .

Но мера μ_P является допустимой. Следовательно, из сходимости мер $\Phi_t(\nu)$ к мере μ_j для любой допустимой меры ν на связке P следует перемешивание.

Покажем теперь, что из перемешивания следует сходимость $\Phi_t(\nu)$ к мере μ_j .

Пусть поток Φ_t на Λ_j является перемешивающим. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое T , что если $t > T$, то

$$\rho_1(\Phi_t(\nu), \mu_j) < \varepsilon.$$

Разобьем связку P на несколько непересекающихся связок $P_1, \dots, P_m$ так, что поперечный размер связки P_k меньше чем α . Величину α подберем так, что для любых допустимых мер ν_1, ν_2 на связке P_k и любого $t > 0$ справедливо неравенство

$$\rho_1(\Phi_t(\nu_1), \Phi_t(\nu_2)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выше мы показали, что перемешивание эквивалентно тому, что $\Phi_t(\mu_{P_k}) \rightarrow \mu_j$. Следовательно, существует такое T , что при $t > T$ и любом $k \in \{1, \dots, m\}$ имеет место неравенство

$$\rho_1(\Phi_t(\mu_{P_k}), \mu_j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, для любого $k \in \{1, \dots, m\}$, любого $t > T$ и любой допустимой меры ν_k на связке P_k справедливо

$$\rho_1(\Phi_t(\nu_k), \mu_j) < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Но всякая допустимая мера ν на связке P представляется в виде $\nu = p_1\nu_1 + \dots + p_m\nu_m$, где ν_k — допустимая мера на связке P_k , $p_1 + \dots + p_m = 1$, $p_k \geq 0$. В этом представлении ν_k — сужение меры ν на связку P_k . Нетрудно показать, что из (3.4) следует, что при $t > T$ имеет место неравенство

$$\rho_1(\Phi_t(\nu), \mu_j) < \varepsilon.$$

Тем самым лемма 11 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Напомним, что если у потока Φ_t с инвариантной мерой μ отсутствуют собственные функции, то поток является слабо перемешивающим. Это означает, что для любых измеримых множеств A и B существует множество $S \subset \mathbb{R}^1$ единичной плотности такое, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty, t \in S} \mu(\Phi_t(A) \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B).$$

Точно так же, как и лемма 11, доказывается следующее утверждение.

ЛЕММА 12. Поток Φ_t является слабо перемешивающим тогда и только тогда, когда для любой связки P и любой допустимой меры ν на связке P найдется такое множество $S \subset \mathbb{R}^1$ единичной плотности, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty, t \in S} \rho_1(\Phi_t(\nu), \mu_j) = 0.$$

Теорема 5 следует из следующего утверждения.

ЛЕММА 13. Если поток Φ_t на Λ_j с инвариантной SBR-мерой μ_j является слабо перемешивающим, то для любой связки P положительной меры и сужения μ_P меры μ_j на связку P имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho_1(\Phi_t(\mu_P), \mu_j) = 0. \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства последнего равенства мы при заданном $\varepsilon > 0$ построим вспомогательное разбиение. Построим конечный набор непересекающихся связок $P_1, \dots, P_m$, покрывающих множество $M(b; \delta)$, каждая из которых имеет поперечный размер не более α . Через P_0 обозначим множество

$$P_0 = \Lambda_j \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_m).$$

Числа b, α и $\tilde{T}$ выберем так, чтобы для любых допустимых мер ν_1, ν_2 на связке $P_k, k = 1, \dots, m$, и любого $t > \tilde{T}$ выполнялось неравенство

$$\rho_1(\Phi_t(\nu_1), \Phi_t(\nu_2)) < \varepsilon$$

и, кроме того,

$$1 - \mu_j(P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_m) = \mu_j(P_0) < \varepsilon.$$

Пусть Q – связка (имеется в виду связка P или одна из связок $P_1, \dots, P_m$). Полным отрезком связки Q мы будем называть отрезок неустойчивого многообразия, принадлежащего связке и соединяющего правое и левое граничные устойчивые многообразия связки Q . Неполным отрезком будем называть отрезок строго неустойчивого многообразия, принадлежащего полному отрезку.

Пусть W – полный отрезок связки P . Для заданного $T > 0$ поделим отрезок W на три части. Хорошая часть отрезка W (обозначим эту часть W_g) состоит из таких отрезков Δ , что $\Phi_T(\Delta)$ – полный отрезок одной из связок $P_1, \dots, P_m$; эти отрезки назовем хорошими. Вторая часть (плохая) состоит из таких точек $x \in W$, что $\Phi_T(x) \in P_0$ (объединение таких точек обозначим W_b). Третью часть составляют концы отрезка W такие, что $\Phi_T(\Delta)$ – неполный отрезок одной из связок $P_1, \dots, P_m$; обозначим объединение этих отрезков через W_e .

Заметим, что если T достаточно велико, то величина $\mu_W(W_e)$ мала. Это следует из того, что длина многообразия $\Phi_T(W)$ экспоненциально растет при $T \rightarrow \infty$, а длина полных отрезков связок $P_1, \dots, P_m$ ограничена.

Определим множество $N_0 = N_0(T) \subset P$ как

$$N_0 = \bigcup_{W \subset P} (W_b \cup W_e).$$

Для $k = 1, \dots, m$ определим множество $N_k = N_k(T)$ как объединение таких хороших отрезков Δ , что $\Phi_T(\Delta)$ – полный отрезок связки P_k .

Отметим, что множества $N_0, \dots, N_m$ зависят от T .

Пусть $p_k = \mu_j(P_k)$, $k = 0, \dots, m$. Обозначим через ν_k нормированное сужение меры μ_j на множество P_k , $k = 0, \dots, m$. Из инвариантности меры μ_j и равенства $\mu_j(P_0 \cup \dots \cup P_m) = 1$ следует, что при всяком $t > 0$ справедливо равенство

$$p_0 \Phi_t(\nu_0) + \dots + p_m \Phi_t(\nu_m) = \mu_j. \quad (3.6)$$

Обозначим через $\tilde{p}_k$, $k = 0, \dots, m$, величины

$$\tilde{p}_k = \tilde{p}_k(T) = \mu_j(N_k).$$

Из теоремы о возвратности и из экспоненциального убывания размера многообразия $\Phi_{-T}(W^{uu}(x))$ следует, что если T достаточно велико, то $\tilde{p}_0 < \varepsilon$. Из слабого перемешивания и из $\mu_P(N_e(T)) \rightarrow 0$ следует, что найдется такая последовательность $T_s \rightarrow \infty$, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m |\tilde{p}_k(T_s) - p_k(T_s)| = 0.$$

Следовательно, найдется такое $T > 0$, что

$$\sum_{k=0}^m |\tilde{p}_k(T) - p_k(T)| < \varepsilon. \quad (3.7)$$

Далее $T > 0$ считаем фиксированным так, что выполнено неравенство (3.7).

Обозначим через ν_k сужение SBR-меры μ_j на связку P_k , через $\tilde{\nu}_k$ обозначим меру $\Phi_T(\mu_{N_k})$, где μ_{N_k} – сужение меры μ_j на множество N_k . Из инвариантности системы условных мер следует, что для $k = 1, \dots, m$ мера $\tilde{\nu}_k$ – допустимая мера. По построению связок P_k , для любого $t > \tilde{T}$ и любого $k \in \{1, \dots, m\}$ имеем

$$\rho_1(\Phi_t(\nu_k), \Phi_t(\tilde{\nu}_k)) < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(\Phi_t \left(\sum_{k=0}^m \tilde{p}_k \tilde{\nu}_k \right), \Phi_t \left(\sum_{k=0}^m p_k \nu_k \right) \right) &\leq \sum_{k=1}^m p_k \rho_1(\Phi_t(\tilde{\nu}_k), \Phi_t(\nu_k)) \\ &+ \sum_{k=1}^m |p_k - \tilde{p}_k| + p_0 \rho_1(\Phi_t(\tilde{\nu}_0), \Phi_t(\nu_0)) + |\tilde{p}_0 - p_0| < 4\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отметим, что из инвариантности меры μ_j и из определения мер ν_k и величин p_k следует, что

$$\sum_{k=0}^m p_k \Phi_t(\nu_k) = \Phi_t \left(\sum_{k=0}^m p_k \nu_k \right) = \Phi_t(\mu_j) = \mu_j. \quad (3.9)$$

Кроме того, $\tilde{\nu}_k = \Phi_T(\mu_{N_k})$, откуда получаем

$$\Phi_T(\mu_P) = \Phi_T\left(\sum_{k=0}^m \tilde{p}_k \mu_{N_k}\right) = \sum_{k=0}^m \tilde{p}_k \Phi_T(\mu_{N_k}) = \sum_{k=0}^m \tilde{p}_k \tilde{\nu}_k.$$

Отсюда, из (3.8) и (3.9) следует, что при всех $t > \tilde{T}$ имеем

$$\rho_1(\Phi_{T+t}(\mu_P), \mu_j) < 4\varepsilon. \quad (3.10)$$

Итак, мы доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $T > 0$, что при всех $t > 0$ справедливо неравенство (3.10). Но это означает, что $\Phi_t(\mu_P) \rightarrow \mu_j$ при $t \rightarrow \infty$. Лемма 13 доказана.

Согласно лемме 11 из леммы 13 следует перемешивание. Тем самым перемешивание доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если у потока отсутствуют собственные функции, то для любого отрезка W строго неустойчивого многообразия и меры μ_W имеет место сходимост

$$\Phi_t(\mu_W) \rightarrow \mu_j, \quad \text{если } t \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Это следует из леммы 11. Действительно, можно рассмотреть связку, состоящую из одного отрезка W . Тогда мера μ_W – допустимая мера, и потому равенство (3.11) верно.

§ 4. Свойства перемешивающих потоков

Базисные неподвижные точки. Как было сказано выше, линеаризованное векторное поле в неподвижной точке, принадлежащей множеству Λ_j , имеет одно положительное собственное число λ_1 , одно отрицательное число λ_2 , $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \gamma_3$, а остальные собственные значения лежат в области $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_2$. Соответственно, имеется $(n-1)$ -мерное устойчивое многообразие и одномерное неустойчивое многообразие, которое делится на две сепаратрисы. Устойчивое многообразие расслаивается на $(n-2)$ -мерные строго устойчивые многообразия.

ЛЕММА 14. *Если множество Λ_j содержит неподвижную точку, то Λ_j содержит базисную неподвижную точку.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы покажем, что на строго неустойчивом многообразии любой существенной точки содержится точка, принадлежащая устойчивому многообразию неподвижной точки.

Пусть W – отрезок строго неустойчивого многообразия некоторой существенной точки, W_1 – отрезок, который получается из W после удаления малых окрестностей его концов.

Покажем, что имеется альтернатива: либо для некоторого $t > 0$ отрезок $\Phi_t(W)$ пересекается с устойчивым многообразием некоторой неподвижной точки, либо при любом $t > 0$ множество $\Phi_t(W_1)$ не содержит точек некоторой окрестности множества Fix неподвижных точек.

В первом случае соответствующая неподвижная точка является базисной. Во втором случае существует окрестность $O_\varepsilon(\text{Fix})$ множества неподвижных точек Fix , в которую не попадают траектории точек $x \in W_1$. Отсюда следует, что для меры

$$\mu_T = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_t(\mu_{W_1}) dt$$

справедливо равенство $\mu_T(O_\varepsilon(\text{Fix})) = 0$; так как μ_T при $T \rightarrow \infty$ сходится к мере μ_j , то и мера μ_j сосредоточена на множестве, отделенном от неподвижных точек, т.е. Λ_j не содержит неподвижных точек.

Докажем сформулированную выше альтернативу. Заметим, что отрезок W трансверсален устойчивым многообразиям и что если многообразия $\Phi_t(W_1)$ для $t \in (0, T)$ не содержат точек некоторой окрестности множества Fix , то угол между многообразием $\Phi_t(W_1)$ и устойчивыми многообразиями равномерно отделен от нуля. Поэтому существует такое $\varepsilon > 0$, что если для некоторого $t > 0$ отрезок $\Phi_t(W_1)$ содержит точку, принадлежащую ε -окрестности устойчивого многообразия неподвижной точки, то $\Phi_t(W)$ пересекается с этим многообразием. Тем самым альтернатива доказана.

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Мы предположим, что существует собственная функция φ и придем к противоречию.

Согласно теореме 4 будем предполагать, что φ непрерывна на каждом множестве $M(b; \delta)$, постоянна на каждом строго устойчивом многообразии и каждом строго неустойчивом многообразии существенной точки.

Предположим, что сепаратриса базисной неподвижной точки пересекается со строго устойчивым многообразием существенной точки x_0 (точку пересечения обозначим x_1). Согласно теореме 4 предполагаем, что функция φ постоянна на поверхности P , состоящей из строго неустойчивых многообразий точек $y \in W^{uu}(x_0)$. Обозначим через a значение функции φ на поверхности P . Функция φ непрерывна на множестве

$$B = \bigcup_{t \in (-\alpha, \alpha)} \Phi_t(P)$$

и значение функции φ на множестве $\Phi_t(P)$ равно $e^{i\lambda t}a$.

Очевидно, что сепаратриса содержит отрезок траектории $I = \{x_1(t) : t \in (-\alpha, \alpha)\}$, а значение функции φ в точке $x_1(t)$ равно $e^{i\lambda t}a$, поэтому функция φ не может быть постоянной на отрезке сепаратрисы.

Так как неподвижная точка базисная, то имеется существенная точка x_0 , принадлежащая устойчивому многообразию неподвижной точки. Под действием потока многообразие $\Phi_t(W^{uu}(x_0))$ вытягивается вдоль сепаратрисы. Поэтому в любой окрестности точки x_1 имеется последовательность существенных точек $x_n \in P$, $x_n \rightarrow x_1$, причем отрезки строго неустойчивых многообразий точек x_n принадлежат множеству B и сходятся к отрезку I . По теореме 4 функция φ постоянна на многообразиях $W^{uu}(x_n)$. Из непрерывности функции φ на множестве B следует, что φ постоянна на отрезке I .

Полученное противоречие доказывает теорему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8.

Лента. Назовем лентой множество отрезков траекторий, проходящих через некоторую гладкую кривую такую, что касательная плоскость к образованной этими траекториями поверхности совпадает с центрально-неустойчивым пространством E_x^c . Отметим, что если $x \in M(b; \delta)$, то лента является подмножеством неустойчивого многообразия. Сечением ленты назовем кривую, трансверсальную траекториям, принадлежащим ленте. Ортогональным сечением назовем сечение, ортогональное всем траекториям ленты. Сечение ленты не обязательно пересекается со всеми траекториями ленты. Шириной ленты в данной точке назовем длину максимального ортогонального сечения, проходящего через эту точку. Продолжением ленты назовем объединение положительных полутраекторий точек, принадлежащих ленте.

Пусть Q – базисная неподвижная точка. Тогда (по определению базисной точки) имеется существенная точка p , принадлежащая устойчивому многообразию $W^s(Q)$ точки Q . Локальное строго неустойчивое многообразие $W^{uu}(p)$ точки p делится точкой p на два отрезка. Рассмотрим один из них и обозначим его через W . Многообразие W – это кривая, трансверсальная многообразию $W^s(Q)$; один из концов кривой W принадлежит многообразию $W^s(Q)$. Проходящие через W траектории образуют ленту, траектории которой проходят как угодно близко к сепаратрисе (см. рис. 1).

Рис. 1

Пусть q – некоторая точка на сепаратрисе, расположенная с той же стороны от многообразия $W^s(Q)$, что и кривая W , Π – гладкая поверхность коразмерности 1, проходящая через точку q и трансверсальная траекториям потока. Траектории, проходящие через кривую W , пересекаются с поверхностью Π по некоторой гладкой кривой I . Один из концов кривой I – это точка q . Так как кривая I в каждой точке $x \in I$ (кроме точки q) касается пространства E_x^c , а

Рис. 2

это пространство непрерывно зависит от x , то кривая I дифференцируема и в точке q в том смысле, что в этой точке имеется односторонняя касательная.

Отметим, что все точки кривой I , кроме точки q , существенны. Действительно, из свойств существенных точек следует, что многообразие W состоит из существенных точек (если точка x существенная, то $W^{uu}(x)$ состоит из существенных точек), и множество существенных точек инвариантно.

Далее рассмотрим ленту, состоящую из траекторий точек, принадлежащих кривой I . Продолжение сепаратрисы является траекторией точки q , поэтому обозначим его $q(t)$.

Возможны следующие случаи.

Случай 1. Продолжение сепаратрисы не попадает в некоторые фиксированные окрестности неподвижных точек.

Так как площадь экспоненциально растет, а вектор скорости ограничен снизу, то в этом случае существует такое ε_0 , что для каждой точки $q(t)$ продолжения сепаратрисы ширина ленты в точке $q(t)$ не менее ε_0 . Отметим, что все точки ленты, кроме точек самой сепаратрисы, являются существенными.

Из компактности множества Λ_j следует, что найдутся точки $q(t_1)$, $q(t_1 + T_1)$, принадлежащие сепаратрисе, расстояние между которыми мало. Из ориентируемости следует, что возможны три случая: либо строго устойчивое многообразие точки $q(t_1)$ пересекается с лентой, либо строго устойчивое многообразие

точки $q(t_1 + T_1)$ пересекается с лентой, либо строго устойчивое многообразие точки $q(t_1)$ пересекается с продолжением сепаратрисы (см. рис. 2, а, b, c).

В первых двух случаях сепаратриса попадает на строго устойчивое многообразие существенной точки и, как следует из теоремы 6, поток перемешивает. В третьем случае имеется такое T , что $q(t_1 + T)$ принадлежит строго устойчивому многообразию точки $q(t_1)$. Отсюда нетрудно вывести, что ω -предельное множество сепаратрисы является предельным циклом. Если этот предельный цикл состоит из существенных точек, то поток согласно теореме 6 перемешивающий. Остается один случай: ω -предельное множество сепаратрисы – это предельный цикл, не содержащий существенных точек.

Случай 2. Имеется неподвижная точка, в любую окрестность которой заходит сепаратриса.

Отметим, что если эта точка базисная, то сепаратриса попадает на строго устойчивое многообразие некоторой существенной точки, и тогда поток на множестве Λ_j перемешивает (двумерная проекция вдоль строго устойчивых многообразий изображена на рис. 3).

Рис. 3

Рис. 4

Если эта точка не базисная, то сепаратриса входит в ее малую окрестность так, что соответствующая лента находится с той же стороны от устойчивого многообразия, что и сепаратриса (двумерная проекция вдоль строго устойчивых многообразий изображена на рис. 4).

В этом случае ширина продолжения ленты остается ограниченной снизу. Поэтому при следующем заходе в эту окрестность сепаратриса попадет на строго устойчивое многообразие точки, принадлежащей этой ленте. Остается случай, когда сепаратриса попадает на устойчивое многообразие, и потому не продолжается за пределы окрестности.

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] C. A. Morales, M. J. Pacífico, E. R. Pujals, “On C^1 robust singular transitive sets for three-dimensional flows”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **326**:1 (1998), 81–86.
- [2] C. A. Morales, M. J. Pacífico, E. R. Pujals, “Singular hyperbolic systems”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127**:11 (1999), 3393–3401.
- [3] E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow”, *J. Atmos. Sci.*, **20**:2 (1963), 130–141.
- [4] В. С. Афраймович, В. В. Быков, Л. П. Шильников, “О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца”, Тр. ММО, **44**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1982, 150–212.
- [5] Д. В. Тураев, Л. П. Шильников, “Пример дикого странного аттрактора”, *Матем. сб.*, **189**:2 (1998), 137–160; англ. пер.: D. V. Turaev, L. P. Shilnikov, “An example of a wild strange attractor”, *Sb. Math.*, **189**:2 (1998), 291–314.
- [6] L. Shilnikov, *Bifurcations and strange attractors*, arXiv:math/0304457.
- [7] S. Bautista, C. Morales, “A sectional-Anosov connecting lemma”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **30**:2 (2010), 339–359.
- [8] S. Bautista, C. A. Morales, “Existence of periodic orbits for singular-hyperbolic sets”, *Mosc. Math. J.*, **6**:2 (2006), 265–297.
- [9] S. Bautista, C. Morales, M. J. Pacífico, “On the intersection of homoclinic classes on singular-hyperbolic sets”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **19**:4 (2007), 761–775.
- [10] A. Arroyo, E. R. Pujals, “Dynamical properties of singular-hyperbolic attractors”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **19**:1 (2007), 67–87.
- [11] C. A. Morales, “Strong stable manifolds for sectional-hyperbolic sets”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **17**:3 (2007), 553–560.
- [12] C. A. Morales, “Example of singular-hyperbolic attracting sets”, *Dyn. Syst.*, **22**:3 (2007), 339–349.
- [13] C. A. Morales, M. J. Pacífico, “A spectral decomposition for singular-hyperbolic sets”, *Pacific J. Math.*, **229**:1 (2007), 223–232.
- [14] C. A. Morales, M. J. Pacífico, “Sufficient conditions for robustness of attractors”, *Pacific J. Math.*, **216**:2 (2004), 327–342.
- [15] C. A. Morales, “Sectional-Anosov flows”, *Monatsh. Math.*, **159**:3 (2010), 253–260.
- [16] Е. А. Сатаев, “Некоторые свойства сингулярно гиперболических аттракторов”, *Матем. сб.*, **200**:1 (2009), 37–80; англ. пер.: E. A. Sataev, “Some properties of singular hyperbolic attractors”, *Sb. Math.*, **200**:1 (2009), 35–76.
- [17] Е. А. Сатаев, “Инвариантные меры для сингулярно гиперболических аттракторов”, *Матем. сб.*, **201**:3 (2010), 107–160; англ. пер.: E. A. Sataev, “Invariant measures for singular hyperbolic attractors”, *Sb. Math.*, **201**:3 (2010), 419–470.
- [18] V. Araujo, M. J. Pacífico, E. R. Pujals, M. Viana, “Singular-hyperbolic attractors are chaotic”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **361**:5 (2009), 2431–2485.
- [19] S. Luzzatto, I. Melbourne, F. Paccaut, “The Lorenz attractor is mixing”, *Comm. Math Phys.*, **260**:2 (2005), 393–401.

- [20] M. Holland, I. Melbourne, “Central limit theorems and invariance principles for Lorenz attractors”, *J. Lond. Math. Soc.* (2), **76**:2 (2007), 345–364.
- [21] M. W. Hirsh, C. C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Math., **583**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977, ii+149 pp.
- [22] Д. В. Аносов, “Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны”, Тр. МИАН СССР, **90**, 1967, 3–210; англ. пер.: D. V. Anosov, “Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **90** (1967), 1–235.
- [23] Я. Г. Синай, “Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы”, *Функц. анализ и его прил.*, **2**:1 (1968), 64–89; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “Markov partitions and C-diffeomorphisms”, *Funct. Anal. Appl.*, **2**:1 (1968), 61–82.
- [24] Я. Г. Синай, “Гиббсовские меры в эргодической теории”, *УМН*, **27**:4(166) (1972), 21–64; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “Gibbs measures in ergodic theory”, *Russian Math. Surveys*, **27**:4 (1972), 21–69.
- [25] Р. Боуэн, “Равновесные состояния и эргодическая теория диффеоморфизмов Аносова”, в кн.: Р. Боуэн, *Методы символической динамики*, Мир, М., 1979, 9–91; пер. с англ.: R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math., **470**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1975, i+108 pp.
- [26] Р. Боуэн, Д. Рюэль, “Эргодическая теория потоков, удовлетворяющих аксиоме А”, в кн.: Р. Боуэн, *Методы символической динамики*, Мир, М., 1979, 144–177; пер. с англ.: R. Bowen, D. Ruelle, “The ergodic theory of Axiom A flows”, *Invent. Math.*, **29**:3 (1975), 181–202.
- [27] D. Ruelle, “A measure associated with Axiom-A attractors”, *Amer. J. Math.*, **98**:3 (1976), 619–654.
- [28] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967, 624 с.; пер. с англ.: K. Yosida, *Functional analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **123**, Academic Press, Inc., New York; Springer-Verlag, Berlin, 1965, xi+458 pp.

Евгений Анатольевич Сатаев
(Evgueni A. Sataev)

Обнинский институт атомной энергетики –
филиал Национального исследовательского
университета “МИФИ”
E-mail: sataev@iate.obninsk.ru

Поступила в редакцию
28.10.2013 и 22.01.2015