Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Бесчастный, Об оптимальном качении сферы с прокручиванием, без проскальзывания, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 2, 3–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8296>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:55:33

УДК 517.538

И. Ю. Бесчастный

Об оптимальном качении сферы с прокручиванием, без проскальзывания

Рассматривается задача о качении сферы по плоскости с прокручиванием, без проскальзывания. Требуется перекатить сферу из одной конфигурации в другую так, чтобы достигался минимум действия. Получена полная параметризация экстремальных траекторий и исследуются естественные симметрии гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина (вращения и отражения) и их неподвижные точки. На основе полученных оценок для неподвижных точек доказаны верхние оценки времени разреза, т.е. момента времени, когда экстремальная траектория теряет оптимальность. Более детально рассмотрена задача о переориентации сферы, в частности, найдены диффеоморфные области в прообразе и образе экспоненциального отображения, которые используются для построения оптимального синтеза.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: оптимальное управление, геометрические методы, симметрии, качение поверхностей.

DOI: 10.4213/sm8296

§ 1. Введение

Рассматривается механическая система, состоящая из сферы, катящейся по плоскости с прокручиванием, но без проскальзывания. Состояние такой системы в каждый момент времени характеризуется точкой на плоскости и ориентацией сферы в пространстве. Требуется перекатить сферу из заданного начального состояния в заданное конечное так, чтобы достигался минимум действия. Отсутствие проскальзывания означает, что точка контакта сферы и плоскости имеет нулевую мгновенную скорость, наличие прокручивания означает, что вектор угловой скорости сферы может быть направлен в произвольном направлении.

Эта задача является естественной модификацией задачи об оптимальном качении сферы по плоскости без прокручивания и проскальзывания, которая была впервые поставлена в работе Дж. Хаммерсли [1]. Позже А. Артур и Дж. Уолш получили уравнения для экстремальных траекторий в терминах кватернионов [2]. В. Джурджевич провел качественное исследование этих траекторий и показал, что при оптимальном качении точка контакта сферы и

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.В25.31.0029) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 12-01-00913 и № 13-01-91162-ГФЕН_а).

плоскости движется по эллипсам Эйлера [3]. Ю. Л. Сачков начал изучение оптимальности полученных траекторий. Он исследовал симметрии гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина и получил верхние оценки для времени разреза (момента времени, в котором экстремальные траектории теряют оптимальность) [4]. В работах [5], [6] им и А. П. Маштаковым была исследована асимптотика экстремальных траекторий и времени Максвелла при качении сферы по синусоидам малой амплитуды.

Случай без прокручивания все еще не изучен до конца и является, вероятно, одной из наиболее сложных левоинвариантных задач оптимального управления [5]. Это связано прежде всего со сложной структурой экстремальных траекторий, которые описываются эллиптическими функциями Якоби. Аналогичные трудности встречаются и во многих других известных задачах этого типа: в субримановой задаче на группе движений плоскости [7], [8], группе Энгеля [9], обобщенной задаче Дидоны [10], [11] и др. В работе [12] было показано, что в отличие от перечисленных задач экстремальные траектории в задаче об оптимальном качении сферы с прокручиванием, без проскальзывания описываются элементарными функциями. В частности, точка контакта сферы и плоскости в этом случае движется по синусоиде или прямой. Благодаря простой параметризации геодезических многим свойствам можно дать наглядную механическую или геометрическую трактовку, и потому задача представляет особый интерес с точки зрения математической теории управления и субримановой геометрии. Примером механической системы, в которой имеется прокручивание, является бильярдный шар. Решение этой задачи может быть в дальнейшем применено для исследования подобных систем.

В настоящей работе получена полная параметризация экстремальных траекторий и начато исследование их оптимальности. Исследуются непрерывные и дискретные симметрии гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина и соответствующие точки Максвелла, т.е. точки, в которые несколько экстремальных траекторий приходят в один момент времени с одинаковым значением функционала. Как известно, после такой точки экстремальная траектория не оптимальна [11], и потому соответствующее время дает верхнюю оценку времени разреза. В работе более детально рассматривается подзадача о возвращении сферы в исходную точку с заданной ориентацией. В этом случае доказано, что экспоненциальное отображение – двулистное накрытие определенных областей в слое касательного расслоения на соответствующие области в $SO(3)$. Рассмотрена связанная с задачей о возвращении метрика на группе вращений трехмерного пространства и ее основные свойства.

§ 2. Постановка задачи

Выберем в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ такой неподвижный правый ортонормированный репер (e_1, e_2, e_3) , чтобы плоскость, по которой катится сфера, была натянута на (e_1, e_2) , а e_3 направлен в верхнее полупространство.

Выберем также подвижный правый ортонормированный репер (e'_1, e'_2, e'_3) , закрепленный в центре сферы. Тогда ориентация сферы задается матрицей поворота $SO(3) \ni R: (e'_1, e'_2, e'_3) \mapsto (e_1, e_2, e_3)$, а ее положение – координатами центра $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ в базисе (e_1, e_2) . В качестве управляющих параметров возьмем компоненты вектора угловой скорости сферы в неподвижном репере $\vec{\Omega} = (u_2, -u_1, u_3) \in \mathbb{R}^3$. Тогда кинематика системы задается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1, & \dot{y} &= u_2, & \dot{R} &= R \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & -u_1 \\ u_3 & 0 & -u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ (x, y) &\in \mathbb{R}^2, & R &\in SO(3), & (u_1, u_2, u_3) &\in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В качестве минимизируемого функционала $J[u]$ выберем квадратичный функционал

$$J[u] = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) dt, \quad (2.2)$$

который с точностью до постоянного множителя представляет собой интеграл от вращательной энергии сферы. Требуется перекачать сферу из начального состояния Q_0 в конечное Q_1 так, чтобы достигался минимум функционала $J[u]$.

Эта задача формулируется естественным образом как субриманова левоинвариантная задача на группе Ли $G = \mathbb{R}^2 \times SO(3)$. Напомним [13], что субримановым многообразием (M, Δ, g) называется гладкое многообразие M с распределением Δ , на котором задана риманова метрика g . Липшицева кривая называется допустимой, если она почти в любой своей точке касается распределения Δ . Субриманова задача ставится следующим образом: на субримановом многообразии необходимо отыскать кратчайшую (в смысле метрики g) допустимую кривую, соединяющую две заданные точки Q_0 и Q_1 .

Группу G можно представить как подгруппу $GL(6)$ с помощью матриц

$$Q = \begin{pmatrix} R & & 0 \\ & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем левоинвариантный репер на G

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad V_i(R) = R\tilde{A}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\tilde{A}_i$ – базис алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$,

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения (2.1) задают управляемую систему на группе G и могут быть записаны в виде

$$\dot{Q} = u_1 X_1(Q) + u_2 X_2(Q) + u_3 X_3(Q), \quad Q \in G, \quad (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3, \quad (2.3)$$

где

$$X_1 = e_1 - V_2, \quad X_2 = e_2 + V_1, \quad X_3 = V_3.$$

Векторные поля X_i задают распределение $\Delta = \text{span}\{X_1, X_2, X_3\} \subset TG$. Если $u(t)$ есть измеримое локально ограниченное отображение, то решение системы (2.3) является допустимой кривой.

На распределении Δ можно задать скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ следующим образом:

$$\langle QA, QB \rangle_Q = \langle A, B \rangle_{\text{Id}} = -\frac{1}{2} \text{tr}(AB), \quad Q \in G, \quad A, B \in \Delta,$$

где $\text{tr } A$ – след матрицы A . При этом длина допустимой кривой $Q(t)$, $t \in [0, t_1]$, выражается стандартным образом

$$l(Q) = \int_0^{t_1} \sqrt{\langle \dot{Q}, \dot{Q} \rangle} dt = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} dt. \quad (2.4)$$

С помощью неравенства Коши–Буняковского легко показать, что функционал длины и его минимизация (2.4) эквивалентны действию (2.2) и его минимизации. Этот прием часто используется при исследовании экстремальных кривых в римановой и субримановой геометрии [14].

Поскольку распределение Δ и метрика g являются левоинвариантными, то можно, не ограничивая общность, левыми сдвигами перевести Q_0 в единичный элемент, т.е. принять $Q_0 = (0, 0, \text{Id})$.

Таким образом, получаем следующую левоинвариантную субриманову задачу оптимального управления на группе $G = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3)$:

$$\dot{Q} = u_1 X_1(Q) + u_2 X_2(Q) + u_3 X_3(Q), \quad (2.5)$$

$$Q = (x, y, R) \in G = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3), \quad (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3, \quad (2.6)$$

$$Q(0) = Q_0 = (0, 0, \text{Id}), \quad Q(t_1) = Q_1 = (x_1, y_1, R_1), \quad (2.7)$$

$$l(Q) = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} dt \rightarrow \min. \quad (2.8)$$

Значение минимизирующего функционала длины (2.8) не зависит от параметризации кривой $Q(t)$, поэтому можно считать, что она имеет постоянную скорость, т.е. $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \equiv \text{const}$. Более того, из (2.5) и (2.2) видно, что если управление $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, переводит сферу из состояния Q_0 в Q_1 за время t_1 , то управление $u'(t) = ku(kt)$, где k – некоторое положительное число, переводит Q_0 в Q_1 за время t_1/k . При этом $Q(t)$ переходит в $Q(kt)$. Это позволяет, не ограничивая общность, считать, что $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \equiv 1$.

Так как таблица умножения в алгебре Ли $L = \text{span}\{e_1, e_2, V_1, V_2, V_3\}$ имеет вид

$$\text{ad } e_i = 0, \quad [V_1, V_2] = V_3, \quad [V_2, V_3] = V_1, \quad [V_3, V_1] = V_2,$$

то для векторных полей X_1, X_2, X_3 имеем

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = -V_1, \quad [X_2, X_3] = -V_2.$$

Тогда видно, что $\text{span}\{X_1, X_2, X_3, [X_1, X_3], [X_2, X_3]\} = L$, и из теоремы Раппельс-Чжоу [13] следует, что система является вполне управляемой, т.е. две любые точки Q_0, Q_1 можно соединить допустимой кривой. Существование оптимальных траекторий в задаче (2.5)–(2.8) следует из теоремы Филиппова [13].

§ 3. Экстремальные траектории

Для отыскания оптимальных траекторий в задаче (2.5)–(2.7), (2.2) применим принцип максимума Понтрягина (ПМП) в инвариантной формулировке [13]. Гамильтониан принципа максимума есть семейство функций на кокасательном расслоении T^*G

$$h_u^\nu = \langle \lambda, u_1 X_1(Q) + u_2 X_2(Q) + u_3 X_3(Q) \rangle + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2),$$

$$\lambda \in T_Q^*G, \quad u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Введем следующие базисные гамильтонианы:

$$h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(Q) \rangle, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$h_4(\lambda) = -\langle \lambda, V_1(Q) \rangle, \quad h_5(\lambda) = -\langle \lambda, V_2(Q) \rangle.$$

Поскольку базисные гамильтонианы – это линейные на каждом слое функции, то их можно рассматривать как координаты в кокасательном пространстве. Размерность кокасательного пространства равняется пяти, а потому, кроме трех гамильтонианов h_i , $i = 1, 2, 3$, порожденных векторными полями X_i , необходимо ввести еще два базисных гамильтониана h_4 и h_5 , порожденных парой независимых векторных полей V_1 и V_2 .

Гамильтониан ПМП примет вид

$$h_u^\nu = u_1 h_1 + u_2 h_2 + u_3 h_3 + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2). \quad (3.1)$$

ТЕОРЕМА 1 (принцип максимума Понтрягина). Пусть $\tilde{u}(t)$ и $\tilde{Q}(t)$, $t \in [0, t_1]$, являются оптимальным управлением и соответствующей оптимальной траекторией в задаче (2.5)–(2.7), (2.2). Тогда существуют нетривиальная липшицева кривая $\lambda_t \in T_{\tilde{Q}(t)}^*G$ и число $\nu \in \mathbb{R}$ такие, что

$$(\nu, \lambda_t) \neq 0,$$

для которых выполняются следующие условия:

$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{\tilde{u}(t)}^\nu(\lambda_t) = \tilde{u}_1(t) \vec{h}_1(\lambda_t) + \tilde{u}_2(t) \vec{h}_2(\lambda_t) + \tilde{u}_3(t) \vec{h}_3(\lambda_t), \quad (3.2)$$

$$h_{\tilde{u}(t)}^\nu = \max_{u \in \mathbb{R}^3} h_u^\nu(\lambda_t) \quad \text{для почти всех } t \in [0, t_1], \quad (3.3)$$

$$\nu \leq 0,$$

где $\vec{h}_{\tilde{u}(t)}^\nu$ – гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении T^*G , соответствующее гамильтониану $h_{\tilde{u}(t)}^\nu$.

Кривая λ_t называется экстремалью, а ее проекция на базу $Q(t) = \pi(\lambda(t))$ – экстремальной траекторией. В координатах h_i гамильтонова система (3.2) запишется в виде

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= u_1 X_1(Q) + u_2 X_2(Q) + u_3 X_3(Q), \\ \dot{h}_1 &= -u_2 h_3 - u_3 h_4, \\ \dot{h}_2 &= u_1 h_3 - u_3 h_5, \\ \dot{h}_3 &= u_1 h_4 + u_2 h_5, \\ \dot{h}_4 &= -u_1 h_3 + u_3 h_5, \\ \dot{h}_5 &= -u_2 h_3 - u_3 h_4.\end{aligned}\tag{3.4}$$

В дальнейших вычислениях будет использоваться изоморфизм между $\mathbb{R}^3$ и алгеброй Ли $\mathfrak{so}(3)$. А именно, каждому вектору $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ можно поставить в соответствие матрицу $\tilde{A} \in \mathfrak{so}(3)$ по следующему правилу:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот изоморфизм обладает следующими свойствами [3].

1. Пусть $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathfrak{so}(3)$ соответствуют $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ (в этом случае будем писать $\tilde{A} \cong \vec{A}, \tilde{B} \cong \vec{B}$). Обозначим через $[\tilde{A}, \tilde{B}]$ и $\vec{A} \times \vec{B}$ коммутатор матриц и векторное произведение в $\mathbb{R}^3$ соответственно. Тогда

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] \cong \vec{A} \times \vec{B}.\tag{3.5}$$

2. Пусть $R \in \text{SO}(3)$. Тогда

$$R\tilde{A}R^{-1} \cong R\vec{A}.\tag{3.6}$$

3.1. Анормальные экстремальные траектории. Рассмотрим случай $\nu = 0$. Гамильтониан (3.1) в этом случае имеет вид

$$h_u^0 = u_1 h_1 + u_2 h_2 + u_3 h_3$$

и достигает максимума по u_i , когда $h_i \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$. Тогда вертикальная подсистема гамильтоновой системы (3.4) (т.е. ограничение (3.4) на слой T^*G) примет вид

$$\begin{aligned}0 &= -u_3 h_4, \\ 0 &= -u_3 h_5, \\ 0 &= u_1 h_4 + u_2 h_5, \\ \dot{h}_4 &= u_3 h_5, \\ \dot{h}_5 &= -u_3 h_4.\end{aligned}$$

Поскольку все h_i не могут в анормальном случае обращаться в нуль, получаем, что $u_3 \equiv 0$. Следовательно, $h_4 = \text{const}$, $h_5 = \text{const}$, а значит, и $u_1 = \text{const}$, $u_2 = \text{const}$.

Подставляя управления в (2.1) и учитывая, что $(u_1, u_2, u_3) = (-\Omega_2, \Omega_1, \Omega_3)$, получим параметризацию аномальных траекторий

$$x = -\Omega_2 t, \quad y = \Omega_1 t, \quad R = e^{\tilde{\Omega} t}, \quad (3.7)$$

где $\tilde{\Omega}$ – кососимметрическая матрица, соответствующая вектору угловой скорости $\vec{\Omega}$ с компонентой $\Omega_3 = 0$:

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_2 \\ 0 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в аномальном случае вектор угловой скорости является постоянным горизонтальным вектором и сфера равномерно катится по прямой без прокручивания.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) Все аномальные экстремальные траектории постоянной скорости имеют вид (3.7).

2) Любая аномальная экстремальная траектория $Q(t)$, $t \in [0, t_1]$, оптимальна для любого $t_1 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) доказан перед формулировкой данного утверждения.

2) Пусть $Q(t)$, $t \in [0, t_1]$, – аномальная экстремальная траектория и $t_1 > 0$. Докажем оптимальность $Q(t)$.

В силу п. 1) аномальные кривые постоянной скорости удовлетворяют условиям

$$u_1 = \dot{x} = \text{const}, \quad u_2 = \dot{y} = \text{const}, \quad u_3 \equiv 0.$$

На таких кривых достигается минимум функционалов

$$J_1 = \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) dt, \quad J_2 = \int_0^{t_1} u_3^2 dt,$$

а потому и функционала

$$J[u] = \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) dt = J_1 + J_2.$$

Предложение доказано.

3.2. Нормальные траектории. Рассмотрим теперь случай $\nu = -1$. Гамильтониан (3.1) равен

$$h_u = u_1 h_1 + u_2 h_2 + u_3 h_3 - \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$$

и достигает максимума по u при $u_i = h_i$, $i = 1, 2, 3$, при этом максимизированный гамильтониан равен

$$H = \max_{u \in \mathbb{R}^3} h_u = \frac{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}{2} = \text{const}.$$

Вертикальная подсистема гамильтоновой системы (3.4) для нормальных экстремалей имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{h}_1 &= -h_3(h_2 + h_4), \\ \dot{h}_2 &= h_3(h_1 - h_5), \\ \dot{h}_3 &= h_1h_4 + h_2h_5, \\ \dot{h}_4 &= -h_3(h_1 - h_5), \\ \dot{h}_5 &= -h_3(h_2 + h_4).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Эта система имеет два очевидных первых интеграла $\omega_1 = -(h_2 + h_4)$, $\omega_2 = h_1 - h_5$. Следовательно, решение этой системы можно свести к решению системы третьего порядка. Используя то, что $(u_1, u_2, u_3) = (-\Omega_2, \Omega_1, \Omega_3)$, перепишем гамильтонову систему принципа максимума (3.4) в следующем виде:

$$\dot{x} = -\Omega_2, \tag{3.9}$$

$$\dot{y} = \Omega_1, \tag{3.10}$$

$$\dot{R} = R\tilde{\Omega}, \tag{3.11}$$

$$\dot{\Omega}_1 = \omega_2\Omega_3, \tag{3.12}$$

$$\dot{\Omega}_2 = -\omega_1\Omega_3, \tag{3.13}$$

$$\dot{\Omega}_3 = \omega_1\Omega_2 - \omega_2\Omega_1, \tag{3.14}$$

$$\dot{\omega}_1 = 0, \quad \dot{\omega}_2 = 0.$$

Согласно (3.5) систему (3.12)–(3.14) можно кратко записать одним из двух эквивалентных способов:

$$\dot{\vec{\Omega}} = \vec{\omega} \times \vec{\Omega} \iff \dot{\vec{\Omega}} = [\tilde{\omega}, \vec{\Omega}], \tag{3.15}$$

где $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, 0)$ – постоянный горизонтальный вектор, а $\tilde{\omega}$ – соответствующая кососимметрическая матрица. Уравнения (3.15) показывают, что вектор угловой скорости $\vec{\Omega}$ вращается равномерно вокруг некоторого постоянного горизонтального вектора $\vec{\omega}$ в подвижном репере.

Модуль угловой скорости сферы равен

$$|\vec{\Omega}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 u_i^2} = \sqrt{2H} = \text{const.}$$

Следовательно, решениями (3.15) являются окружности на сфере радиуса $\sqrt{2H}$, лежащие в плоскостях, перпендикулярных вектору $\vec{\omega}$ (рис. 1). Поскольку различным значениям H соответствует одна экстремальная траектория, но с разной параметризацией, не ограничивая общность, мы можем принять $H = 1/2$.

Обозначим $\omega = |\vec{\omega}|$, $\vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}(0) = (\Omega_1^0, \Omega_2^0, \Omega_3^0)$. Тогда если $\vec{\Omega}_0 = \lambda \vec{\omega}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ или $\omega = 0$, то получаем, что $\vec{\Omega} = 0$, и, следовательно, $\vec{\Omega}$ – постоянный вектор. Уравнения для экстремальных траекторий в этом случае

Рис. 1. Общее решение системы (3.15)

будут иметь такой же вид, как (3.7), с той лишь разницей, что Ω_3 не обязательно равно нулю, и, значит, сфера катится по прямым с прокручиванием или без. Поэтому аномальные экстремальные траектории являются нормальными, т.е. не являются строго аномальными.

Проинтегрируем уравнения (3.15) при $\omega \neq 0$. Получим

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \cos \omega t}{\omega^2} & \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) & \frac{\omega_2}{\omega} \sin \omega t \\ \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) & \frac{\omega_2^2 + \omega_1^2 \cos \omega t}{\omega^2} & -\frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t \\ -\frac{\omega_2}{\omega} \sin \omega t & \frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1^0 \\ \Omega_2^0 \\ \Omega_3^0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Используя уравнения (3.16), проинтегрируем уравнения (2.1) для x и y :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Omega_3^0 \omega_1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) + \frac{(\Omega_1^0 \omega_2 - \Omega_2^0 \omega_1) \omega_1}{\omega^3} \sin \omega t - \frac{\omega_2 (\Omega_2^0 \omega_2 + \Omega_1^0 \omega_1)}{\omega^2} t, \\ y &= \frac{\Omega_3^0 \omega_2}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) + \frac{(\Omega_1^0 \omega_2 - \Omega_2^0 \omega_1) \omega_2}{\omega^3} \sin \omega t + \frac{\omega_1 (\Omega_2^0 \omega_2 + \Omega_1^0 \omega_1)}{\omega^2} t. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Получим теперь выражение для матрицы R . Для этого рассмотрим уравнение (3.15). Его решением, как легко проверяется, является выражение

$$\tilde{\Omega}(t) = e^{t\tilde{\omega}} \tilde{\Omega}_0 e^{-t\tilde{\omega}}.$$

Подставляя $\tilde{\Omega}$ в (2.1), получим

$$\dot{R}(t) = R(t) e^{t\tilde{\omega}} \tilde{\Omega}_0 e^{-t\tilde{\omega}}.$$

Сделаем замену

$$Z(t) = R(t) e^{t\tilde{\omega}}.$$

Дифференцируя $Z(t)$ по t , получим

$$\dot{Z}(t) = \dot{R}(t)e^{t\tilde{\omega}} + R(t)e^{t\tilde{\omega}}\tilde{\omega} = R(t)e^{t\tilde{\omega}}\tilde{\Omega}_0 e^{-t\tilde{\omega}} e^{t\tilde{\omega}} + R(t)e^{t\tilde{\omega}}\tilde{\omega} = R(t)e^{t\tilde{\omega}}(\tilde{\Omega}_0 + \tilde{\omega}).$$

В итоге имеем дифференциальное уравнение

$$\dot{Z}(t) = Z(t)(\tilde{\omega} + \tilde{\Omega}_0).$$

Его решением, как известно, является матричная экспонента

$$Z(t) = Z(0)e^{t(\tilde{\omega} + \tilde{\Omega}_0)}.$$

Подставляя исходные переменные и учитывая, что $Z(0) = \text{Id}$, получим выражение для матрицы R

$$R(t) = e^{t(\tilde{\omega} + \tilde{\Omega}_0)} e^{-t\tilde{\omega}}, \quad (3.18)$$

которое показывает, что движение сферы состоит из композиции двух равномерных вращений: вокруг вектора $\vec{\omega}$ и вокруг $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$.

Следовательно, доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\omega \neq 0$ и $\vec{\Omega} \neq \lambda \vec{\omega}$, то параметризованные длиной дуги нормальные экстремальные траектории описываются уравнениями

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Omega_3^0 \omega_1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) + \frac{(\Omega_1^0 \omega_2 - \Omega_2^0 \omega_1) \omega_1}{\omega^3} \sin \omega t - \frac{\omega_2 (\Omega_2^0 \omega_2 + \Omega_1^0 \omega_1)}{\omega^2} t, \\ y &= \frac{\Omega_3^0 \omega_2}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) + \frac{(\Omega_1^0 \omega_2 - \Omega_2^0 \omega_1) \omega_2}{\omega^3} \sin \omega t + \frac{\omega_1 (\Omega_2^0 \omega_2 + \Omega_1^0 \omega_1)}{\omega^2} t, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$R(t) = e^{t(\tilde{\omega} + \tilde{\Omega}_0)} e^{-t\tilde{\omega}}. \quad (3.20)$$

В оставшихся случаях нормальные экстремальные траектории описываются уравнениями

$$x = -\Omega_2 t, \quad y = \Omega_1 t, \quad R = e^{\tilde{\Omega} t}, \quad (3.21)$$

где $\tilde{\Omega}$ – кососимметрическая матрица, соответствующая произвольному единичному вектору $\vec{\Omega}$.

В работе [12] была также получена параметризация нормальных экстремальных траекторий, которая выводится из уравнений (3.19) и (3.20) как частный случай при $\Omega_3^0 = 0$.

3.3. Вращения как симметрии гамильтоновой системы. Для упрощения дальнейших выкладок покажем, что, используя вращения в плоскости (x, y) , вектор $\vec{\omega}$ можно выбрать равным $(\omega, 0, 0)$. В этом случае громоздкие уравнения нормальных геодезических (3.19) преобразуются к простому виду

$$x = -\omega^{-1}(\Omega_2^0 \sin \omega t + \Omega_3^0 \cos \omega t - \Omega_3^0), \quad y = \Omega_1^0 t. \quad (3.22)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Вращение в пространстве $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ вокруг оси $O\Omega_3$ порождает однопараметрическую группу симметрий $\{\Phi^\beta, \beta \in S^1\}$ всей системы (3.9)–(3.14), которая определяется следующим образом:

$$\Phi^\beta: \{\tilde{\Omega}_s, \tilde{\omega}_s, Q_s : s \in [0, t]\} \mapsto \{\tilde{\Omega}_s^\beta, \tilde{\omega}_s^\beta, Q_s^\beta : s \in [0, t]\},$$

$$\tilde{\Omega}_s^\beta = e^{\beta A_3} \tilde{\Omega}_s e^{-\beta A_3}, \quad \tilde{\omega}_s^\beta = e^{\beta A_3} \tilde{\omega}_s e^{-\beta A_3}, \quad (3.23)$$

$$\begin{pmatrix} x_s^\beta \\ y_s^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

$$R_s^\beta = e^{\beta A_3} R_s e^{-\beta A_3}. \quad (3.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем инвариантность уравнений (3.12)–(3.14) относительно однопараметрической группы Φ^β :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\Omega}}_s^\beta = [\tilde{\omega}_s^\beta, \tilde{\Omega}_s^\beta] &\iff e^{\beta A_3} \dot{\tilde{\Omega}}_s e^{-\beta A_3} \\ &= e^{\beta A_3} \tilde{\omega}_s e^{-\beta A_3} e^{\beta A_3} \tilde{\Omega}_s e^{-\beta A_3} - e^{\beta A_3} \tilde{\Omega}_s e^{-\beta A_3} e^{\beta A_3} \tilde{\omega}_s e^{-\beta A_3} \\ &\iff e^{\beta A_3} \dot{\tilde{\Omega}}_s e^{-\beta A_3} = e^{\beta A_3} (\tilde{\omega}_s \tilde{\Omega}_s - \tilde{\Omega}_s \tilde{\omega}_s) e^{-\beta A_3} \\ &\iff \dot{\tilde{\Omega}}_s = [\tilde{\omega}_s, \tilde{\Omega}_s]. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется и инвариантность уравнений (3.11):

$$\begin{aligned} \dot{R}_s^\beta = R_s^\beta \tilde{\Omega}_s^\beta &\iff e^{\beta A_3} \dot{R}_s e^{-\beta A_3} = e^{\beta A_3} R_s e^{-\beta A_3} e^{\beta A_3} \tilde{\Omega}_s e^{-\beta A_3} \\ &\iff e^{\beta A_3} \dot{R}_s e^{-\beta A_3} = e^{\beta A_3} (R_s \tilde{\Omega}_s) e^{-\beta A_3} \iff \dot{R}_s = R_s \tilde{\Omega}_s. \end{aligned}$$

В случае уравнений (3.9), (3.10) воспользуемся равенством (3.6). Из (3.23) следует

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_s^\beta = e^{\beta A_3} \tilde{\Omega}_s e^{-\beta A_3} &\iff \vec{\tilde{\Omega}}_s^\beta = e^{\beta A_3} \vec{\tilde{\Omega}}_s \\ &\iff \begin{pmatrix} \Omega_{1s}^\beta \\ \Omega_{2s}^\beta \\ \Omega_{3s}^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{1s} \\ \Omega_{2s} \\ \Omega_{3s} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подставим выражения для $\Omega_{1s}^\beta, \Omega_{2s}^\beta$ в (3.9), (3.10):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_s^\beta \\ \dot{y}_s^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega_{2s}^\beta \\ \Omega_{1s}^\beta \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{y}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Omega_{2s} \\ \Omega_{1s} \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{y}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega_{2s} \\ \Omega_{1s} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Как видно из формул (3.23), векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\Omega}$ под действием симметрии Φ^β поворачиваются на угол β в горизонтальной плоскости. Очевидно, что существует такое значение β , что горизонтальный вектор $\vec{\omega}$ можно привести к виду $\vec{\omega}^\beta = (\omega, 0, 0)$. В этом случае мы придем к уравнениям (3.22), которые показывают, что сфера катится по дуге синусоиды, ось которой перпендикулярна вектору $\vec{\omega}$.

Рис. 2. Проекция экстремальных траекторий на плоскость (x, y)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Оптимальность нормальных экстремальных траекторий (3.19), (3.20) сохраняется при симметрии Φ^β , задаваемой системой (3.23)–(3.25).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим семейство Γ всех нормальных геодезических, соединяющих Q_0 и Q_1 . Под действием симметрии Φ^β точка Q_0 остается неподвижной, а точка Q_1 переходит в точку $Q_1^\beta = \Phi^\beta(Q_1)$. Следовательно, Φ^β – биективное отображение из семейства Γ в семейство Γ^β всех нормальных геодезических, соединяющих точки Q_0 и Q_1^β . Симметрия Φ^β оставляет инвариантным функционал длины (2.8), поэтому если γ_t – кратчайшая траектория семейства Γ , то $\gamma_t^\beta = \Phi^\beta(\gamma_t)$ будет кратчайшей траекторией семейства Γ^β . Предложение доказано.

Благодаря предложению 4 в дальнейшем мы можем ограничиться изучением оптимальности траекторий, для которых $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)$.

В конце пункта резюмируем полученные результаты и приведем описание всех экстремальных траекторий (рис. 2). Номером 1 на рис. 2 обозначен наиболее общий случай, когда сфера катится по синусоиде. При таком движении согласно предложению 2 $\vec{\omega} \neq 0$, $\vec{\Omega} \neq \lambda\vec{\omega}$ и траектория описывается уравнениями (3.19), (3.20). Если $\vec{\Omega} \perp \vec{\omega}$, то синусоида вырождается в отрезок, проходящий через точку $(0, 0)$ (случай 2). При $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)$ условие $\vec{\Omega} \perp \vec{\omega}$ означает, что $\Omega_1^0 \equiv 0$.

При $\omega = 0$ экстремальная траектория описывается уравнениями (3.21). Ее проекцией на плоскость будет прямая, выходящая из начала координат (случай 3) или точка (сфера стоит на месте и крутится).

3.4. Представление ориентации сферы с помощью кватерниона единичной длины. В дальнейших вычислениях вместо матрицы поворота R удобнее использовать соответствующий ей кватернион q . В этом пункте мы перепишем уравнения (3.20) в кватернионном виде.

Пусть $\mathbb{H} = \{q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 : q_0, \dots, q_3 \in \mathbb{R}\}$ – алгебра кватернионов. Длина $q \in \mathbb{H}$ определяется по формуле $|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$. Кватернион $\bar{q} = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3$ называется сопряженным к q . Элемент, обратный к q , задается следующей формулой:

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}.$$

Рассмотрим единичную сферу $S^3 = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ и пространство мнимых кватернионов $I = \{q \in \mathbb{H} : q_0 = 0\}$, которое естественно отождествляется с евклидовым пространством $\mathbb{R}^3$. Любой кватернион $q \in S^3$ задает поворот вектора $a \in I$ с помощью оператора R_q :

$$R_q : a \mapsto qaq^{-1} \in I.$$

Каждому оператору поворота R_q соответствуют два различных кватерниона q и $-q$, и поэтому отображение $p : q \mapsto R_q$ задает двулистное накрытие S^3 над $SO(3)$. Отображение накрытия является гомоморфизмом [15].

Матрице поворота R вокруг произвольного ненулевого вектора $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, на угол β соответствует единичный кватернион

$$q = \cos \frac{\beta}{2} + \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{|\vec{a}|} \sin \frac{\beta}{2}. \quad (3.26)$$

В частности, матрицам $e^{t(\vec{\omega} + \vec{\Omega}_0)}$ и $e^{-t\vec{\omega}}$, входящим в (3.20), с учетом $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)$ соответствуют кватернионы

$$\cos \frac{|\vec{\omega} + \vec{\Omega}_0|t}{2} + \frac{(\omega + \Omega_1^0)i + \Omega_2^0j + \Omega_3^0k}{|\vec{\omega} + \vec{\Omega}_0|} \sin \frac{|\vec{\omega} + \vec{\Omega}_0|t}{2},$$

$$\cos \frac{\omega t}{2} - i \sin \frac{\omega t}{2}.$$

Подставляя полученные выражения в (3.20), получим закон изменения компонент кватерниона q , соответствующего матрице R :

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|t}{2} \cos \frac{\omega t}{2} + \frac{\Omega_1^0 + \omega}{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|} \sin \frac{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|t}{2} \sin \frac{\omega t}{2}, \\ q_1 &= \frac{\Omega_1^0 + \omega}{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|} \cos \frac{t\omega}{2} \sin \frac{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|t}{2} - \cos \frac{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|t}{2} \sin \frac{\omega t}{2}, \\ q_2 &= \frac{1}{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|} \left(\Omega_2^0 \cos \frac{\omega t}{2} - \Omega_3^0 \sin \frac{\omega t}{2} \right) \sin \frac{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|t}{2}, \\ q_3 &= \frac{1}{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|} \left(\Omega_3^0 \cos \frac{\omega t}{2} + \Omega_2^0 \sin \frac{\omega t}{2} \right) \sin \frac{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|t}{2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Из двух кватернионов $\pm q$, соответствующих матрице R , здесь приведен кватернион с начальными условиями $q(0) = 1$.

§ 4. Симметрии экспоненциального отображения

Симметрией отображения $f: M \rightarrow N$ называется пара таких отображений $g: M \rightarrow M$ и $g': N \rightarrow N$, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ M & \xrightarrow{f} & N. \end{array}$$

В дальнейшем пару отображений g и g' будем обозначать одной и той же записью g .

Экспоненциальным отображением называется отображение $\text{Exp}(\lambda, t)$, которое переводит ковектор из кокасательного пространства $\lambda \in \{\lambda \in T_{Q_0}^*G : H(\lambda) = 1/2\}$ и момент времени $t \in \mathbb{R}_+$ в конец соответствующей нормальной экстремальной траектории. В изучаемой задаче это отображение

$$\text{Exp}: S^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3),$$

или

$$\text{Exp}: (\vec{\Omega}, \vec{\omega}, t) \mapsto (x, y, R),$$

которое задается уравнениями вида (3.7), если проекция траектории на плоскость (x, y) является прямой, и (3.22), (3.20), если проекция является синусоидой.

В этом параграфе мы рассматриваем симметрии экспоненциального отображения и гамильтоновой системы (3.9)–(3.14), сохраняющие условие $|\vec{\Omega}| = \text{const}$. Как было показано ранее, гамильтонова система имеет одну непрерывную симметрию Φ^β . Далее мы покажем, что экспоненциальное отображение имеет также семь дискретных симметрий ε^i , $i = 1, \dots, 7$. Для сокращения записи в дальнейшем будем использовать обозначение $N = S^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$.

4.1. Дискретные симметрии в прообразе экспоненциального отображения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Уравнения (3.12)–(3.14) обладают следующими симметриями:

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: (\Omega_1(s), \Omega_2(s), \Omega_3(s)) &\mapsto (\Omega_1(t-s), -\Omega_2(t-s), \Omega_3(t-s)), \\ \varepsilon^2: (\Omega_1(s), \Omega_2(s), \Omega_3(s)) &\mapsto (\Omega_1(t-s), \Omega_2(t-s), -\Omega_3(t-s)), \\ \varepsilon^3: (\Omega_1(s), \Omega_2(s), \Omega_3(s)) &\mapsto (\Omega_1(s), -\Omega_2(s), -\Omega_3(s)), \\ \varepsilon^4: (\Omega_1(s), \Omega_2(s), \Omega_3(s)) &\mapsto (-\Omega_1(s), \Omega_2(s), \Omega_3(s)), \\ \varepsilon^5: (\Omega_1(s), \Omega_2(s), \Omega_3(s)) &\mapsto (-\Omega_1(t-s), -\Omega_2(t-s), \Omega_3(t-s)), \\ \varepsilon^6: (\Omega_1(s), \Omega_2(s), \Omega_3(s)) &\mapsto (-\Omega_1(t-s), \Omega_2(t-s), -\Omega_3(t-s)), \\ \varepsilon^7: (\Omega_1(s), \Omega_2(s), \Omega_3(s)) &\mapsto (-\Omega_1(s), -\Omega_2(s), -\Omega_3(s)), \end{aligned} \tag{4.1}$$

а $\vec{\omega}^i = \vec{\omega}$.

Для доказательства нужно лишь подставить (4.1) в (3.12)–(3.14).

Преобразования (4.1) можно также записать в матричном виде

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^1: \tilde{\Omega}_s &\mapsto -I_2 \tilde{\Omega}_{t-s} I_2, \\
 \varepsilon^2: \tilde{\Omega}_s &\mapsto -I_3 \tilde{\Omega}_{t-s} I_3, \\
 \varepsilon^3: \tilde{\Omega}_s &\mapsto I_1 \tilde{\Omega}_s I_1, \\
 \varepsilon^4: \tilde{\Omega}_s &\mapsto -I_1 \tilde{\Omega}_s I_1, \\
 \varepsilon^5: \tilde{\Omega}_s &\mapsto I_3 \tilde{\Omega}_{t-s} I_3, \\
 \varepsilon^6: \tilde{\Omega}_s &\mapsto I_2 \tilde{\Omega}_{t-s} I_2, \\
 \varepsilon^7: \tilde{\Omega}_s &\mapsto -\tilde{\Omega}_s,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = e^{\pi A_1} \cong i, & I_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = e^{\pi A_2} \cong j, \\
 I_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{\pi A_3} \cong k.
 \end{aligned}$$

Дискретные симметрии коммутируют и образуют группу со следующей таблицей умножения:

	ε^1	ε^2	ε^3	ε^4	ε^5	ε^6	ε^7
ε^1	Id	ε^3	ε^2	ε^5	ε^4	ε^7	ε^6
ε^2		Id	ε^1	ε^6	ε^7	ε^4	ε^5
ε^3			Id	ε^7	ε^6	ε^5	ε^4
ε^4				Id	ε^1	ε^2	ε^3
ε^5					Id	ε^3	ε^2
ε^6						Id	ε^1
ε^7							Id

Группа $\{\text{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ есть группа симметрий параллелепипеда.

Действие симметрий ε^i изображено на рис. 3. Как видно из формул (4.1), симметрии ε^1 – ε^3 сохраняют орбиты системы (3.12)–(3.14) (рис. 3, (a)). Симметрия ε^4 – это отражение относительно плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно вектору $\vec{\omega}$ (рис. 3, (b)), а остальные симметрии являются их композициями (рис. 3, (c)).

Рис. 3. Действие дискретных симметрий в прообразе экспоненциального отображения: (а) действие симметрий $\varepsilon^1-\varepsilon^3$; (б) действие симметрии ε^4 ; (с) действие симметрий $\varepsilon^4-\varepsilon^7$

4.2. Дискретные симметрии в образе экспоненциального отображения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Дискретные преобразования ε^i порождают следующие симметрии экстремальных траекторий:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^1: & \begin{cases} x_s^1 = x_{t-s} - x_t, \\ y_s^1 = y_t - y_{t-s}, \\ R_s^1 = I_2(R_t)^{-1} R_{t-s} I_2, \end{cases} & \varepsilon^2: & \begin{cases} x_s^2 = x_t - x_{t-s}, \\ y_s^2 = y_t - y_{t-s}, \\ R_s^2 = I_3(R_t)^{-1} R_{t-s} I_3, \end{cases} \\
 \varepsilon^3: & \begin{cases} x_s^3 = -x_s, \\ y_s^3 = y_s, \\ R_s^3 = I_1 R_s I_1, \end{cases} & \varepsilon^4: & \begin{cases} x_s^4 = x_s, \\ y_s^4 = -y_s, \\ R_s^4 = I_1 e^{s(\tilde{\omega} - \tilde{\Omega}_0)} e^{-s\tilde{\omega}} I_1, \end{cases} \\
 \varepsilon^5: & \begin{cases} x_s^5 = x_{t-s} - x_t, \\ y_s^5 = y_{t-s} - y_t, \\ R_s^5 = I_3 e^{t\tilde{\omega}} e^{-t(\tilde{\omega} - \tilde{\Omega}_0)} \\ \quad \times e^{(t-s)(\tilde{\omega} - \tilde{\Omega}_0)} \\ \quad \times e^{-(t-s)\tilde{\omega}} I_3, \end{cases} & \varepsilon^6: & \begin{cases} x_s^6 = x_t - x_{t-s}, \\ y_s^6 = y_{t-s} - y_t, \\ R_s^6 = I_2 e^{t\tilde{\omega}} e^{-t(\tilde{\omega} - \tilde{\Omega}_0)} \\ \quad \times e^{(t-s)(\tilde{\omega} - \tilde{\Omega}_0)} \\ \quad \times e^{-(t-s)\tilde{\omega}} I_2, \end{cases} \\
 \varepsilon^7: & \begin{cases} x_s^7 = -x_s, \\ y_s^7 = -y_s, \\ R_s^7 = e^{s(\tilde{\omega} - \tilde{\Omega}_0)} e^{-s\tilde{\omega}}. \end{cases} & &
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку доказательство проводится по одной и той же схеме, докажем утверждение только для симметрии ε^1 .

Из уравнений (3.9), (3.10) следует

$$\dot{x}_s^1 = \frac{d}{ds}(x_{t-s} - x_t) = -\dot{x}_{t-s} = \Omega_2(t-s) = -\Omega_2^1(s), \tag{4.4}$$

$$\dot{y}_s^1 = \frac{d}{ds}(y_t - y_{t-s}) = \dot{y}_{t-s} = \Omega_1(t-s) = \Omega_1^1(s). \tag{4.5}$$

Проверим теперь инвариантность уравнения (3.11) относительно ε^1 :

$$\begin{aligned}\dot{R}_s^1 &= \frac{d}{ds}(I_2(R_t)^{-1}R_{t-s}I_2) = -I_2(R_t)^{-1}\dot{R}_{t-s}I_2 = -I_2(R_t)^{-1}R_{t-s}\Omega_{t-s}I_2 \\ &= I_2(R_t)^{-1}R_{t-s}I_2(-I_2\Omega_{t-s}I_2) = R_s^1\Omega_s^1.\end{aligned}$$

Предложение доказано.

Симметрия ε^2 есть отражение дуги синусоиды относительно центра хорды, соединяющей начало и конец траектории. Симметрии ε^3 , ε^4 являются отражениями дуги относительно координатных осей OY и OX соответственно. Все остальные симметрии являются композициями указанных отражений (рис. 4).

Рис. 4. Действие симметрий ε^1 – ε^7 на проекции экстремальных траекторий на горизонтальную плоскость

Явные выражения для R_s^i через R_s получены только для первых ε^1 – ε^3 . Поэтому в дальнейшем мы ограничимся изучением лишь этих трех отражений.

4.3. Симметрии экспоненциального отображения. Вращение

$$\Phi^\beta: \lambda_t \mapsto \lambda_t^\beta$$

(см. (3.23)–(3.25)) является симметрией гамильтоновой системы, поэтому ее действие в T^*G естественно распадается в прямую сумму действий в N и G :

$$\begin{aligned}\Phi^\beta: N &\rightarrow N, & (\lambda, t) &\mapsto (\lambda^\beta, t), \\ \lambda &= (\vec{\Omega}, \vec{\omega}), & \lambda^\beta &= (\vec{\Omega}^\beta, \vec{\omega}^\beta), & \vec{\Omega}^\beta &= e^{\beta A_3} \vec{\Omega}, & \vec{\omega}^\beta &= e^{\beta A_3} \vec{\omega},\end{aligned}$$

где $\lambda = \lambda_t|_{t=0}$, и

$$\begin{aligned}\Phi^\beta: G &\rightarrow G, & Q &\mapsto Q^\beta, \\ Q &= (x, y, R), & Q^\beta &= (x^\beta, y^\beta, R^\beta), \\ \begin{pmatrix} x^\beta \\ y^\beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, & R^\beta &= e^{\beta A_3} R e^{-\beta A_3}.\end{aligned}$$

Действие отражений ε^i , $i = 1, 2, 3$, в N определяется ограничением их действия на вертикальные составляющие экстремалей в начальный момент времени $s = 0$:

$$\begin{aligned}\varepsilon^1: (\tilde{\Omega}_0, \tilde{\omega}, t) &\mapsto (\tilde{\Omega}_0^1, \tilde{\omega}^1, t) = (-I_2 \tilde{\Omega}_t I_2, \tilde{\omega}, t), \\ \varepsilon^2: (\tilde{\Omega}_0, \tilde{\omega}, t) &\mapsto (\tilde{\Omega}_0^2, \tilde{\omega}^2, t) = (-I_3 \tilde{\Omega}_t I_3, \tilde{\omega}, t), \\ \varepsilon^3: (\tilde{\Omega}_0, \tilde{\omega}, t) &\mapsto (\tilde{\Omega}_0^3, \tilde{\omega}^3, t) = (I_1 \tilde{\Omega}_0 I_1, \tilde{\omega}, t).\end{aligned}$$

Действие отражений ε^i в G определяется их действием на экстремальные траектории в конечный момент времени $s = t$:

$$\begin{aligned}\varepsilon^1: (x_t, y_t, R_t) &\mapsto (x_t^1, y_t^1, R_t^1) = (-x_t, y_t, I_2(R_t)^{-1} I_2), \\ \varepsilon^2: (x_t, y_t, R_t) &\mapsto (x_t^2, y_t^2, R_t^2) = (x_t, y_t, I_3(R_t)^{-1} I_3), \\ \varepsilon^3: (x_t, y_t, R_t) &\mapsto (x_t^3, y_t^3, R_t^3) = (-x_t, y_t, I_1 R_t I_1).\end{aligned}$$

Получаем, что определено действие вращений и отражений в прообразе экспоненциального отображения

$$\begin{aligned}\Phi^\beta, \varepsilon^i: N &\rightarrow N, & (\lambda, t) &\mapsto (\lambda^\beta, t), (\lambda^i, t), \\ \Phi^\beta, \varepsilon^i: G &\rightarrow G, & Q_t &\mapsto Q_t^\beta, Q_t^i.\end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Отображения Φ^β и ε^i являются симметриями экспоненциального отображения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из определений действий Φ^β , ε^i в N , G и уравнений (3.7), (3.22), (3.20).

§ 5. Точки и время Максвелла

Точкой Максвелла называется точка Q , в которую одновременно приходят две различные экстремальные траектории с одинаковым значением времени и функционала (рис. 5). Хорошо известно, что в аналитической субримановой задаче после такой точки нормальная экстремальная траектория не может быть оптимальной [11]. Момент времени, в который экстремальная точка попадает в точку Максвелла, называется временем Максвелла $t_{\max}$.

Рис. 5. Точка Максвелла

Следующее предложение отвечает на вопрос, когда в рассматриваемой задаче две экстремальные траектории различны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. 1. Пусть Q_s, Q'_s – две экстремальные траектории такие, что $\Omega_3 \neq 0$ и $\Omega'_3 \neq 0$. Они совпадают тогда и только тогда, когда $(\vec{\omega}, \vec{\Omega}_0) = (\vec{\omega}', \vec{\Omega}'_0)$.

2. Пусть Q_s, Q'_s – две аномальные экстремальные траектории. Они совпадают тогда и только тогда, когда $\vec{\Omega}'_0 = \vec{\Omega}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем следующую цепочку эквивалентных утверждений:

$$Q_s \equiv Q'_s \iff x_s \equiv x'_s, y_s \equiv y'_s, R_s \equiv R'_s \iff \vec{\Omega}_s \equiv \vec{\Omega}'_s. \quad (5.1)$$

Пусть $\Omega_3(s) \neq \Omega_3(0)$ при некотором $s > 0$, т.е. траектория не является аномальной. Тогда имеем два случая.

1. $\vec{\omega} = 0$. Тогда из (3.15) следует, что $\dot{\vec{\Omega}} = 0$. Значит, $\vec{\Omega} = \text{const}$ и в силу последнего утверждения цепочки (5.1) $\vec{\Omega}' = \text{const}$. Следовательно, $\vec{\omega}' = 0$.
2. $\vec{\omega} \neq 0$. В этом случае мы получаем, что вектор $\vec{\Omega}_s$ равномерно вращается вокруг $\vec{\omega}$ со скоростью ω . Но так как должно выполняться $\vec{\Omega}_s \equiv \vec{\Omega}'_s$, то получаем, что и $\vec{\Omega}'_s$ должен вращаться вокруг $\vec{\omega}$ с той же угловой скоростью в том же направлении. Поэтому $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$, и первая часть утверждения доказана.

Пусть $\vec{\Omega}_s \equiv \vec{\Omega}_0$ – постоянный горизонтальный вектор, т.е. экстремальная траектория является аномальной. Тогда $\vec{\omega} = \lambda \vec{\Omega}$ для произвольного λ , но, как следует из формул (3.7), траектория не зависит от ω . Поэтому последнее утверждение цепочки (5.1) является достаточным и равносильно $\vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}'_0$. Предложение доказано.

В дальнейшем будем считать, что $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in S^3$, $q(0) = 1$, – кватернион, соответствующий матрице ориентации R , а χ – угол между хордой, соединяющей $(0, 0)$ и (x, y) , определяемый из следующих равенств при $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$x = \rho \cos \chi, \quad y = \rho \sin \chi, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

5.1. Неподвижные точки в образе экспоненциального отображения и время Максвелла при качении по прямой. Согласно утверждению 1, если при качении вдоль прямой вектор угловой скорости горизонтален, то такая траектория оптимальна и на ней точек Максвелла нет. Если же вектор угловой скорости не горизонтален, то справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Если сфера катится по прямой так, что $\vec{\Omega}$ не горизонтален, то $t = 2\pi$ является временем Максвелла. Если сфера крутится на месте, то $t = \pi$ является временем Максвелла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q_t – траектория, описываемая уравнениями (3.21) с $\Omega'_3 \neq 0$. Если $\Omega_1^0 = 0$ и $\Omega_2^0 = 0$, то сфера стоит на месте и крутится, в противном случае она катится по прямой.

Рассмотрим траекторию Q'_t , для которой $\vec{\omega}' = 0$, $\Omega_1'^0 = \Omega_1^0$, $\Omega_2'^0 = \Omega_2^0$, $\Omega_3'^0 = -\Omega_3^0$. Чтобы момент времени t был временем Максвелла, должно выполняться $Q'_t = Q_t$. Как следует из (3.21), проекция Q'_t на плоскость (x, y) будет

совпадать с проекцией Q_t , т.е. $x_t = x'_t$ и $y_t = y'_t$ для любого t . Следовательно, доказательство сводится к проверке уравнений $q(2\pi) = \pm q'(2\pi)$ в первом случае и $q(\pi) = \pm q'(\pi)$ во втором, где q и q' – кватернионы, соответствующие матрицам $e^{\tilde{\Omega}_0 t}$ и $e^{\tilde{\Omega}'_0 t}$,

$$q(t) = \cos \frac{t}{2} + (\Omega_1^0 i + \Omega_2^0 j + \Omega_3^0 k) \sin \frac{t}{2}, \quad q'(t) = \cos \frac{t}{2} + (\Omega_1^0 i + \Omega_2^0 j - \Omega_3^0 k) \sin \frac{t}{2}.$$

Предложение доказано.

5.2. Неподвижные точки в образе экспоненциального отображения при качении по синусоиде. В дальнейшем будем полагать, что сфера катится по синусоиде, т.е. выполняются условия $\vec{\omega} \neq 0$ и $\vec{\Omega}_0 \neq \lambda \vec{\omega}$. Тогда экспоненциальное отображение задается уравнениями (3.22), (3.27). В дальнейшем будет использоваться следующая

ЛЕММА 1 (см. [4]). Пусть $q \in S^3 \subset \mathbb{H}$. Тогда

1. $q^2 = 1 \iff q = \pm 1 \iff \text{Im } q = 0$;
2. $q^2 = -1 \iff \text{Re } q = 0$.

Найдем неподвижные точки в образе экспоненциального отображения под действием симметрий $\Phi^\beta \circ \varepsilon^i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. 1. Если $(x, y) \neq (0, 0)$, то условие $\Phi^\beta \circ \varepsilon^1(Q) = Q$ равносильно дизъюнкции

$$xq_1 + yq_2 = 0 \quad \text{или} \quad q = \pm(i \cos \chi + j \sin \chi).$$

2. Если $(x, y) = (0, 0)$, то $\Phi^\beta \circ \varepsilon^1(Q) = Q$ выполняется при $\beta = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения действий Φ^β и ε^i (п. 4.3) следует

$$\begin{aligned} e^{\beta A_3} I_2 R^{-1} I_2 e^{-\beta A_3} = R &\iff I_2 e^{-\beta A_3} R^{-1} I_2 e^{-\beta A_3} = R \iff (Re^{\beta A_3} I_2)^2 = \text{Id} \\ &\iff \left(q \left(\cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} k \right) j \right)^2 = \pm 1 \\ &\iff \left(q \left(\cos \frac{\beta}{2} j - \sin \frac{\beta}{2} i \right) \right)^2 = \pm 1. \end{aligned}$$

Из леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} \left(q \left(\cos \frac{\beta}{2} j - \sin \frac{\beta}{2} i \right) \right)^2 = \pm 1 \\ \iff \begin{cases} \text{Re} \left[q \left(\cos \frac{\beta}{2} j - \sin \frac{\beta}{2} i \right) \right] = 0, \\ q \left(\cos \frac{\beta}{2} j - \sin \frac{\beta}{2} i \right) = \pm 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -q_2 \cos \frac{\beta}{2} + q_1 \sin \frac{\beta}{2} = 0, \\ q = \pm \left(\cos \frac{\beta}{2} j - \sin \frac{\beta}{2} i \right). \end{cases} \quad (5.2) \end{aligned}$$

Пусть $(x, y) = (\rho \cos \chi, \rho \sin \chi) \neq (0, 0)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \beta = 2\chi + \pi.$$

Следовательно, получаем, что $\Phi^\beta \circ \varepsilon^1(Q) = Q$ равносильно равенствам

$$\begin{cases} q_1 \cos \chi + q_2 \sin \chi = 0, \\ q = \pm(\sin \chi i + \cos \chi j). \end{cases}$$

Пусть $(x, y) = (0, 0)$, тогда в первый момент времени, когда сфера вернется в начало координат, q_2 будет равно нулю. Действительно, преобразуем (3.22) к виду

$$x(t) = -\frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega t}{2} \left(\Omega_2^0 \cos \frac{\omega t}{2} - \Omega_3^0 \sin \frac{\omega t}{2} \right). \quad (5.3)$$

Функция $x(t)$ обращается в нуль, когда

$$\sin \frac{\omega t}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \Omega_2^0 \cos \frac{\omega t}{2} - \Omega_3^0 \sin \frac{\omega t}{2} = 0,$$

но, как видно из (3.27), когда выполняется второе равенство, q_2 равно нулю.

В этом случае из первого уравнения (5.2)

$$-q_2 \cos \frac{\beta}{2} + q_1 \sin \frac{\beta}{2} = 0$$

следует, что $\beta = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Условие $\Phi^\beta \circ \varepsilon^2(Q) = Q$ равносильно дизъюнкции

$$q_3 = 0 \quad \text{или} \quad q = \pm k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению действия симметрии ε^2 , это отражение переводит конец синусоиды в себя, и поэтому $\beta = 0$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} I_3 R^{-1} I_3 = R & \iff (R I_3)^2 = \text{Id} \iff (qk)^2 = \pm 1 \iff \begin{cases} \text{Re}(qk) = 0, \\ qk = \pm 1 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} q_3 = 0, \\ q = \pm k \end{cases} \end{aligned}$$

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. 1. Если $(x, y) \neq (0, 0)$, то условие $\Phi^\beta \circ \varepsilon^3(Q) = Q$ равносильно дизъюнкции

$$\begin{cases} q_1 x + q_2 y = 0, \\ q_3 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} q_1 y - q_2 x = 0, \\ q_0 = 0. \end{cases}$$

2. Если $(x, y) = (0, 0)$, то $\Phi^\beta \circ \varepsilon^3(Q) = Q$ равносильно дизъюнкции

$$q_3 = 0 \quad \text{или} \quad q_0 = 0,$$

где $\beta = 0$ в первом случае и $\beta = \pi$ во втором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений действия Φ^β , ε^i следует

$$\begin{aligned}
 e^{\beta A_3} I_2 R I_1 e^{-\beta A_3} = R &\iff R I_1 e^{-\beta A_3} = I_1 e^{-\beta A_3} R \\
 &\iff q \left(i \cos \frac{\beta}{2} + j \sin \frac{\beta}{2} \right) = \pm \left(i \cos \frac{\beta}{2} + j \sin \frac{\beta}{2} \right) q \\
 &\iff \begin{cases} \left(q_1 \sin \frac{\beta}{2} - q_2 \cos \frac{\beta}{2} \right) k + q_3 \left(\cos \frac{\beta}{2} j - \sin \frac{\beta}{2} i \right) = 0, \\ q_0 \left(\cos \frac{\beta}{2} i + \sin \frac{\beta}{2} j \right) - q_1 \cos \frac{\beta}{2} - q_2 \sin \frac{\beta}{2} = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} q_1 \sin \frac{\beta}{2} - q_2 \cos \frac{\beta}{2} = 0, \\ q_3 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -q_1 \cos \frac{\beta}{2} - q_2 \sin \frac{\beta}{2} = 0, \\ q_0 = 0. \end{cases} \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

Пусть $(x, y) \neq (0, 0)$. Тогда аналогично доказательству утверждения 10 получаем, что $\beta = 2\chi + \pi$. Подставляя найденное значение в (5.4), приходим к уравнениям, указанным в условии данного утверждения.

Если $(x, y) = (0, 0)$, то $q_2 = 0$. Поэтому (5.4) преобразуется к виду

$$\begin{cases} q_1 \sin \frac{\beta}{2} = 0, \\ q_3 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -q_1 \cos \frac{\beta}{2} = 0, \\ q_0 = 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что в первом случае $\beta = 0$, а во втором $\beta = \pi$. Предложение доказано.

§ 6. Времена Максвелла при качении по синусоиде

Время Максвелла, соответствующее симметрии ε^2 , находится из уравнения $q_3 = 0$, т.е.

$$\frac{1}{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|} \left(\Omega_3^0 \cos \frac{\omega t}{2} + \Omega_2^0 \sin \frac{\omega t}{2} \right) \sin \frac{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}| t}{2} = 0.$$

Поэтому

$$\Omega_3^0 \cos \frac{\omega t}{2} + \Omega_2^0 \sin \frac{\omega t}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \sin \frac{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}| t}{2} = 0.$$

Обозначим угол между проекцией $\vec{\Omega}$ на плоскость $\Omega_2 O \Omega_3$ и осью $O \Omega_2$ через ψ ,

$$\cos \psi(t) = \frac{\Omega_2(t)}{\sqrt{1 - (\Omega_1(t))^2}}, \quad \sin \psi(t) = \frac{\Omega_3(t)}{\sqrt{1 - (\Omega_1(t))^2}}.$$

Экстремальная траектория будет иметь точку Максвелла, соответствующую симметрии $\Phi^\beta \circ \varepsilon^2$, лишь в момент времени, удовлетворяющий второму уравнению. Действительно, первое уравнение выполняется при $t = 2(\pi k - \psi_0)/\omega$. При этом $\psi(t) = \psi_0 + t\omega$. Но из формул (4.1) имеем, что под действием симметрии ε^2 угол ψ_0 перейдет в $\psi_0^2 = -\psi(t) = \psi_0 - 2\pi k = \psi_0$. То есть траектория

перешла сама в себя, и, следовательно, момент времени t не является временем Максвелла.

Второе уравнение задает время Максвелла

$$t_{\max}^2 = \frac{2\pi}{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|},$$

которое обладает следующим свойством. Если мы подставим $t_{\max}^2$ в (3.20), то получим

$$R = e^{(2\pi/|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|)\tilde{\omega}},$$

т.е. это поворот вокруг вектора $\vec{\omega}$ на угол $2\pi/|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|$. Отсюда видно, что если мы зафиксируем $\vec{\omega}$, то все траектории, у которых величины $|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|$ совпадают, в момент времени $t_{\max}^2$ будут иметь одинаковую компоненту R . А таким траекториям соответствуют различные точки $\vec{\Omega}_0$, взятые на одной окружности, являющейся решением (3.15), поскольку при вращении $\vec{\Omega}_0$ вокруг $\vec{\omega}$ угол между ними не меняется.

Найдем решения уравнения $xq_1 + yq_2 = 0$, описывающего неподвижные точки симметрии $\Phi^\beta \circ \varepsilon^1$. Подставляя $x(t)$, $y(t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$, получим

$$\begin{aligned} & \left(\Omega_2^0 \cos \frac{\omega t}{2} - \Omega_3^0 \sin \frac{\omega t}{2} \right) \left(\frac{\Omega_1^0}{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|} \sin \frac{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|t}{2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega t}{2} \left(\frac{\Omega_1^0 + \omega}{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|} \cos \frac{\omega t}{2} \sin \frac{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|t}{2} - \cos \frac{|\vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}|t}{2} \sin \frac{\omega t}{2} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение, соответствующее первому сомножителю,

$$\Omega_2^0 \cos \frac{\omega t}{2} - \Omega_3^0 \sin \frac{\omega t}{2} = 0. \quad (6.1)$$

Первый положительный момент времени, когда выполняется (6.1), описывается выражением

$$t_R = \frac{\pi(2k-1) - 2\psi_0}{\omega},$$

где $k \in \mathbb{Z}$ выбирается так, чтобы время t_R было минимальным для данной траектории. Из (5.3) видно, что при этом $x(t_R) = 0$. Однако найденный момент времени не является временем Максвелла, так как под действием соответствующей симметрии траектория переходит сама в себя.

В самом деле, как и в случае симметрии ε^2 , из формул (4.1) имеем $\psi_0^1 = \pi(2l-1) - \psi(t_R) = \psi_0 + 2\pi(l-k) = \psi_0$, где

$$l = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi_0 \in [0, \pi), \\ 2, & \text{если } \psi_0 \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Из предложения 10 следует, что полученную траекторию нужно повернуть на угол $\beta = \pi + 2\chi$, но так как $x(t_R) = 0$, то $\chi = \pi/2$ и $\beta = 2\pi$, откуда заключаем, что траектория остается неподвижной.

Несмотря на это время t_R играет важную роль в задаче о переориентации, которая будет обсуждаться в следующем параграфе. Фактически это момент первого возвращения сферы в начало координат при качении по отрезку. Чтобы в дальнейшем не заботиться о выборе k в выражении для t_R , удобно ввести новую переменную

$$\psi' = \psi + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

В этом случае t_R равно

$$t_R = \frac{2(\pi - \psi'_0)}{\omega}. \quad (6.2)$$

§ 7. Задача о переориентации сферы

В этом параграфе рассматривается подзадача о возвращении сферы в начало координат с заданной ориентацией. Требуется найти управление, переводящее сферу из начального состояния $Q_0 = (0, 0, \text{Id})$ в конечное $Q_1 = (0, 0, R)$ так, чтобы функционал действия достигал минимума.

7.1. Сужение экспоненциального отображения. Как и ранее, мы рассматриваем случай $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)$. Будем также предполагать, что сфера не крутится на месте. Тогда согласно уравнениям (3.22) сфера может вернуться назад, только если катится по отрезку, т.е. при $\Omega_1 \equiv 0$.

Из уравнений (5.3) следует, что период синусоиды равен $2\pi/\omega$. Поэтому сфера пересечет прямую $x = 0$ сначала в момент времени t_R , а затем в момент $t = 2\pi/\omega$. Несложно убедиться в том, что $t_{\max}^2 < 2\pi/\omega$. Это следует из очевидного неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} < \frac{1}{\omega}. \quad (7.1)$$

Поэтому переориентация может быть оптимальной, только если сфера возвращается в начало координат в момент времени t_R .

Поскольку время возвращения фиксировано, прообраз суженного экспоненциального отображения является полуцилиндром $\mathbb{R}_+ \times S^1$, заданным величинами (ω, ψ'_0) . Кватернион ориентации $q(t_R)$, как следует из уравнений (3.27), будет иметь вид

$$\begin{aligned} q_0 &= -\cos\left(\frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega}(\pi - \psi'_0)\right) \cos \psi'_0 \\ &\quad + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \sin\left(\frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega}(\pi - \psi'_0)\right) \sin \psi'_0, \\ q_1 &= -\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \sin\left(\frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega}(\pi - \psi'_0)\right) \cos \psi'_0 \\ &\quad - \cos\left(\frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega}(\pi - \psi'_0)\right) \sin \psi'_0, \\ q_2 &= 0, \\ q_3 &= \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \sin\left(\frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega}(\pi - \psi'_0)\right) \sin(\pi + \psi - \psi'_0). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Эти формулы задают координатное представление экспоненциального отображения, суженного на $\mathbb{R}_+ \times S^1$, образом которого является поверхность, заданная уравнениями $x = 0$, $y = 0$, $q_2 = 0$, $|q| = 1$. Следовательно, экспоненциальное отображение сведено к отображению

$$\begin{aligned} \text{Exp}' : \mathbb{R}_+ \times S^1 &\rightarrow S^2, \\ \text{Exp}'(\omega, \psi'_0) &= q(t_R). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Далее исключим из полученного полуцилиндра области, которым соответствуют заведомо не оптимальные траектории. Поскольку в момент t_R сфера возвращается в начало координат, чтобы траектория была оптимальной, необходимо выполнение условия

$$t_R \leq t_{\max}^2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. 1) Пусть $\psi'_0 \neq 0$. Введем величину

$$\underline{\omega} = \frac{\pi - \psi'_0}{\sqrt{\psi'_0(2\pi - \psi'_0)}}.$$

Следующие утверждения эквивалентны:

- $t_R < t_{\max}^2 \iff \omega > \underline{\omega}$;
- $t_R = t_{\max}^2 \iff \omega = \underline{\omega}$;
- $t_R > t_{\max}^2 \iff \omega < \underline{\omega}$.

2) Пусть $\psi'_0 = 0$. Тогда $t_R > t_{\max}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 2) следует из неравенства (7.1). Доказательство утверждения 1) основывается на сравнении величин

$$\frac{2(\pi - \psi'_0)}{\omega} \quad \text{и} \quad \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \omega^2}},$$

что сводится к решению квадратичных неравенств типа

$$\omega^2 \left(\frac{\psi'_0(2\pi - \psi'_0)}{(\pi - \psi'_0)^2} \right) - 1 > 0.$$

Учитывая, что длина вектора не может быть отрицательной, мы получим искомые неравенства. Предложение доказано.

При $\psi'_0 \neq 0$ согласно предложению 13 траектория может быть оптимальной, только если

$$\omega \geq \frac{\pi - \psi'_0}{\sqrt{\psi'_0(2\pi - \psi'_0)}}, \quad (7.4)$$

а при $\psi'_0 = 0$ неравенство $t_R \leq t_{\max}^2$ не может выполняться ни при каком $\vec{\omega}$.

Отображение $(w, \psi_0) \mapsto (w', \psi'_0)$ задает двулистное накрытие

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \times (0, \pi), \\ \begin{cases} \psi'_0 = \psi_0 + \frac{\pi}{2} \mod \pi, \\ \omega' = \omega, \end{cases} \end{aligned}$$

поскольку очевидно, что ограничения этого отображения на каждый лист

$$\left\{ (\omega, \psi_0) : \omega \in \mathbb{R}_+, \psi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right\},$$

$$\left\{ (\omega, \psi_0) : \omega \in \mathbb{R}_+, \psi_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \right\}$$

являются диффеоморфизмами

$$\text{mod}_+ : \begin{cases} \psi'_0 = \psi_0 + \frac{\pi}{2}, \\ \omega' = \omega, \end{cases} \quad \text{mod}_- : \begin{cases} \psi'_0 = \psi_0 - \frac{\pi}{2}, \\ \omega' = \omega. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь область D в пространстве (ω, ψ'_0) , которая характеризует экстремальные траектории, для которых неравенство (7.4) строгое,

$$D = \left\{ (\omega, \psi'_0) \in \mathbb{R}^2 : \omega > \frac{\pi - \psi'_0}{\sqrt{\psi'_0(2\pi - \psi'_0)}}, 0 < \psi'_0 < \pi \right\}, \quad (7.5)$$

и области $D_+ = (\text{mod}_+)^{-1}D$, $D_- = (\text{mod}_-)^{-1}D$. Если рассматривать D как внутренность надграфика функции $\omega(\psi'_0)$ (рис. 6), то D_+ и D_- – это сдвиги D на $\pi/2$ влево и вправо соответственно.

Рис. 6. Область D

Основным результатом этого параграфа является доказательство того, что следующие отображения являются диффеоморфизмами:

$$\text{Exp}' : D_+ \rightarrow Q'_+, \quad \text{Exp}' : D_- \rightarrow Q'_-,$$

где $Q'_\pm$ – четверти сферы S^2 , у которых $q_1 > 0$ и $q_3 > 0$ или $q_3 < 0$ соответственно.

Далее часто будет использоваться следующая

ТЕОРЕМА 2 (см. [8]). Пусть $F : X \rightarrow Y$ – дифференцируемое отображение между многообразиями X и Y . Если

- 1) отображение F невырожденное, т.е. его якобиан не обращается в нуль,

- 2) F собственное, т.е. прообразом компакта является компакт,
- 3) X, Y связны,
- 4) Y односвязно,

то F – диффеоморфизм.

Введем вспомогательную замену переменных $\alpha = \alpha(\omega, \psi'_0)$, $\theta = \theta(\omega, \psi'_0)$ с помощью выражений

$$\alpha = \arccos \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 1}}, \quad \theta = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega}(\pi - \psi'_0). \quad (7.6)$$

Пусть

$$\Pi = \left\{ (\alpha, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \theta < \pi \right\}$$

и f – отображение, задаваемое уравнениями (7.6).

ЛЕММА 2. *Отображение $f: D \rightarrow \Pi$ является диффеоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему 2. Связность D и односвязность Π очевидны. Покажем, что $f(D) \subset \Pi$. В силу того, что

$$\frac{d\alpha}{d\omega} = -\frac{1}{\omega^2 + 1} < 0,$$

функция $\alpha(\omega)$ является убывающей и ее точная верхняя и нижняя грани должны достигаться на границе множества D , т.е. при $\omega = (\pi - \psi'_0)/\sqrt{\psi'_0(2\pi - \psi'_0)}$ и $\omega \rightarrow +\infty$ соответственно. Имеем

$$\begin{aligned} \inf_D \alpha(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \alpha(\omega) = 0, \\ \sup_D \alpha(\omega) &= \sup_{\psi'_0 \in (0, \pi/2)} \arccos \left(\frac{\pi - \psi'_0}{\pi} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Так как функция $\alpha(\omega)$ является строго убывающей, то $0 < \alpha(\omega, \psi'_0) < \pi/2$ для всех $(\omega, \psi'_0) \in D$.

В силу того, что

$$\frac{\partial \theta}{\partial \psi'_0} = -\frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega} < 0,$$

при любом фиксированном ω функция $\theta = \theta(\omega, \psi'_0)$ является строго убывающей функцией по ψ'_0 , и, значит, ее точная верхняя и нижние грани достигаются на ∂D . Имеем

$$\begin{aligned} \inf_D \theta &= \inf_{\omega \in D} \theta(\omega, \pi) = 0, \\ \sup_D \theta &= \sup_{\omega \in D} \theta(\omega, 0) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \theta(\omega, 0) = \pi. \end{aligned}$$

Поскольку функция $\theta(\omega, \psi'_0)$ является строго убывающей при $\omega = \text{const}$, получаем, что $0 < \theta(\omega, \psi'_0) < \pi$ для всех $(\omega, \psi'_0) \in D$.

Отображение f невырождено на D , так как

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega} \frac{\partial \theta}{\partial \psi'_0} - \frac{\partial \theta}{\partial \omega} \frac{\partial \alpha}{\partial \psi'_0} = \frac{1}{\omega \sqrt{\omega^2 + 1}} \neq 0.$$

Таким образом, для доказательства леммы остается показать, что отображение f собственное, т.е. прообразом компакта является компакт. Пусть Y – компакт в Π , а $X = f^{-1}(Y)$ – его прообраз в D . Докажем, что X – компакт. Для этого возьмем любую последовательность $\{x_i\} \subset X$ и докажем, что она имеет подпоследовательность, сходящуюся в X . Пусть $\{x_{i_k}\}$ – подпоследовательность, имеющая предел (быть может, бесконечный). Для упрощения записи будем обозначать ее $\{x_i\}$. Из компактности Y следует, что последовательность $\{y_i = f(x_i)\}$ отделена от границы множества Π , поэтому $\varepsilon < \theta_i < \pi - \varepsilon$ и $\varepsilon < \alpha_i < \pi/2 - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

1) Пусть $\lim x_i = \infty$. Тогда $\omega_i \rightarrow \infty$, поэтому $\alpha_i \rightarrow 0$, противоречие.

2) Пусть $\lim x_i = x \in \partial D$. Если $(\psi'_0)_i \rightarrow \pi$, то $\theta_i \rightarrow 0$, противоречие. Если $\omega_i \rightarrow (\pi - (\psi'_0)_i) / \sqrt{(\psi'_0)_i(2\pi - (\psi'_0)_i)}$, то $\theta_i \rightarrow \pi$, противоречие.

Следовательно, отображение f собственное и по теореме 2 является диффеоморфизмом. Лемма доказана.

Поскольку f – диффеоморфизм, мы можем обратить формулы (7.6) и подставить $\omega(\alpha, \theta)$ и $\psi'_0(\alpha, \theta)$ в (7.2):

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos \theta \cos(\theta \cos \alpha) + \cos \alpha \sin \theta \sin(\theta \cos \alpha), \\ q_1 &= \cos \alpha \sin \theta \cos(\theta \cos \alpha) - \cos \theta \sin(\theta \cos \alpha), \\ q_3 &= \pm \sin \alpha \sin \theta. \end{aligned} \quad (7.7)$$

7.2. Диффеоморфизмы, задаваемые экспоненциальным отображением. Существует пара отображений $g_+ : \Pi \rightarrow Q'_+$ и $g_- : \Pi \rightarrow Q'_-$, переводящих открытый прямоугольник Π в две четверти двумерной сферы

$$\begin{aligned} Q'_+ &= \{(q'_0, q'_1, q'_3) \in \mathbb{R}^3 : |q'| = 1, q'_1 > 0, q'_3 > 0\}, \\ Q'_- &= \{(q'_0, q'_1, q'_3) \in \mathbb{R}^3 : |q'| = 1, q'_1 > 0, q'_3 < 0\}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Эти отображения задаются стандартным образом и являются диффеоморфизмами

$$\begin{aligned} q'_0 &= \cos \theta, \\ q'_1 &= \cos \alpha \sin \theta, \\ q'_3 &= \pm \sin \alpha \sin \theta, \end{aligned}$$

где q'_3 берется с плюсом для g_+ и с минусом для g_- .

Рассмотрим следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} q_0 &= q'_0 \cos \left(\frac{q'_1 \arccos q'_0}{\sqrt{1 - q'^2_0}} \right) + q'_1 \sin \left(\frac{q'_1 \arccos q'_0}{\sqrt{1 - q'^2_0}} \right), \\ q_1 &= -q'_0 \sin \left(\frac{q'_1 \arccos q'_0}{\sqrt{1 - q'^2_0}} \right) + q'_1 \cos \left(\frac{q'_1 \arccos q'_0}{\sqrt{1 - q'^2_0}} \right), \\ q_3 &= q'_3. \end{aligned} \quad (7.9)$$

ЛЕММА 3. *Отображение h , задаваемое формулами (7.9), диффеоморфно отображает Q'_+ и Q'_- в себя.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Q'_+ и Q'_- связны и односвязны. Из формул (7.9) видно, что отображение h есть поворот в плоскости $q'_0 O q'_1$, и, следовательно, q'_3 не меняет своего знака. Поэтому прообраз каждой из четвертей лежит в верхней или нижней половине сферы. Значит, чтобы доказать, что $h(Q'_+) \subset Q'_+$ и $h(Q'_-) \subset Q'_-$, нужно лишь показать, что $q_1 > 0$.

В самом деле, обозначим $\cos \alpha = k$. Тогда из формул (7.7) следует, что

$$\begin{aligned} q_1(k, \theta) &= k \sin \theta \cos(\theta k) - \cos \theta \sin(\theta k) \\ &= \frac{1}{2} (k \sin(\theta + \theta k) + k \sin(\theta - \theta k) - \sin(\theta k + \theta) + \sin(\theta - \theta k)) \\ &= \frac{1}{2} ((1 + k) \sin(\theta(1 - k)) - (1 - k) \sin(\theta(1 + k))). \end{aligned}$$

Продифференцируем полученную функцию по θ :

$$\frac{\partial q_1}{\partial \theta} = \frac{1 - k^2}{2} (\cos(\theta(1 - k)) - \cos(\theta(1 + k))) = (1 - k^2) \sin \theta \sin \theta k.$$

Таким образом, $\frac{\partial q_1}{\partial \theta} > 0$ на Π и $q_1(\alpha, \theta)$ имеет точную нижнюю грань лишь на $\partial \Pi$ при $\theta = 0$. Из формул (7.7) следует, что $q_1(\alpha, 0) = 0$, и поэтому $q_1(\alpha, \theta) > 0$ на Π . Следовательно, $h(Q'_+) \subset Q'_+$.

Якобиан отображения h равен

$$J_h = \frac{(1 - q_0'^2 - q_1'^2)(\sqrt{1 - q_0'^2} - q_0' \arccos q_0')}{(1 - q_0'^2)^{3/2}}.$$

Он обращается в нуль, когда

$$1 - q_0'^2 - q_1'^2 = 0, \quad \text{что равносильно } q_3' = 0,$$

или

$$\sqrt{1 - q_0'^2} - q_0' \arccos q_0' = 0.$$

Множество $\{(q'_0, q'_1, q'_3) \in \mathbb{R}^3 : q'_3 = 0\}$ не пересекает ни Q'_+ , ни Q'_- . Рассмотрим функцию $s(q'_0) = \sqrt{1 - q_0'^2} - q_0' \arccos q_0'$. Ее производная равна

$$\frac{ds}{dq'_0} = -\arccos q'_0.$$

Таким образом, функция достигает экстремума в точках $q_s = \{q' : q'_0 = \pm 1\}$ и $\max s(q'_0) = s(-1) = \pi$, $\min s(q'_0) = s(1) = 0$. Но $q_s \notin Q'_+$ и $q_s \notin Q'_-$, а потому $s(q'_0) \neq 0$ для любого $q' \in Q'_+$ или $q' \in Q'_-$. Следовательно, отображение h невырождено.

Докажем, что отображение $h: Q'_+ \rightarrow Q'_+$ собственное. Доказательство того, что $h: Q'_- \rightarrow Q'_-$ тоже собственное, проводится аналогично.

Пусть $Y \subset Q_+$ – компакт. Докажем, что $X = h^{-1}(Y)$ тоже компакт. Как и в доказательстве леммы 2, возьмем любую последовательность $\{x_i\} \in X$ и выберем подпоследовательность $\{x_{i_k}\}$, имеющую предел. Для упрощения записи будем ее обозначать $\{x_i\}$. Из компактности Y следует, что $(q_1)_i > \varepsilon$ и $(q_3)_i > \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Пусть $\lim x_i \in \partial Q'_+$. Если $(q'_1)_i \rightarrow 0$, то $(q_1)_i \rightarrow 0$, противоречие. Если $(q'_3)_i \rightarrow 0$, то $(q_3)_i \rightarrow 0$, противоречие. Следовательно, h – собственное отображение, и по теореме 2 оно является диффеоморфизмом Q'_+ на себя. Из аналогичных рассуждений следует, что $h: Q'_- \rightarrow Q'_-$ также диффеоморфизм. Лемма доказана.

В координатах отображения $h \circ g_+$ и $h \circ g_-$ задаются уравнениями (7.7). Поэтому справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. *Суженное экспоненциальное отображение (7.3) задает следующие диффеоморфизмы:*

$$\text{Exp}' : D_+ \rightarrow Q'_+ \quad \text{и} \quad \text{Exp}' : D_- \rightarrow Q'_-.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 2 и 3 вытекает, что следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} D_+ & \xrightarrow{f \circ \text{mod}_+} & \Pi \\ \text{Exp}' \downarrow & & \downarrow g_+ \\ Q'_+ & \xleftarrow{h} & Q'_+ \end{array} \quad \begin{array}{ccc} D_- & \xrightarrow{f \circ \text{mod}_-} & \Pi \\ \text{Exp}' \downarrow & & \downarrow g_- \\ Q'_- & \xleftarrow{h} & Q'_- \end{array}$$

Поскольку $\text{mod}_\pm$, f , $g_\pm$, h – диффеоморфизмы, то и Exp' – диффеоморфизм. Теорема доказана.

Эта теорема показывает, что уравнения (7.2) имеют единственное решение для любой точки $q \in Q'_+$ или $q \in Q'_-$. Действительно, предположим, что для некоторого $q \in Q'_+$ существуют два решения (7.2). Но тогда обе точки принадлежат D_+ , поскольку $D_- \cap D_+ = \emptyset$, а точки из $\partial D_\pm$ отображаются в $\partial Q_\pm$, что следует из определения множества Π и формул (7.7). А это противоречит тому, что Exp' – диффеоморфизм между D_+ и Q_+ .

7.3. Переориентация сферы для произвольного $\vec{\omega}$. Результаты, полученные в предыдущих пунктах, можно объединить в следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $R_1 \in \text{SO}(3)$ – матрица, соответствующая повороту сферы вокруг единичного вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ с $a_1^2 + a_2^2 \neq 1$ и $|a_3| \neq 1$ на некоторый угол. Тогда существуют две экстремальные траектории, переводящие сферу из состояния $Q_0 = (0, 0, \text{Id})$ в $Q_1 = (0, 0, R_1)$, для которых $t_R < t_{\max}^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3 профакторизованное по вращениям экспоненциальное отображение задает два диффеоморфизма $\text{Exp}' : D_+ \rightarrow Q'_+$ и $\text{Exp}' : D_- \rightarrow Q'_-$, где Q'_+ и Q'_- – две четверти сферы, определенные в (7.8).

Из равенств $q'_1 = 0$, $q'_2 = 0$ согласно (3.26) следует, что $a_1 = 0$, $a_2 = 0$. Но поскольку вектор $\vec{a}$ единичный, то $|a_3| = 1$. Аналогично из равенств $q'_3 = 0$, $q'_2 = 0$ следует, что $|a_1| = 1$. Поскольку одной матрице ориентации соответствует пара кватернионов $\pm q$, при $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)$ существует пара экстремальных траекторий, приходящих в точку $Q_1 = (0, 0, R_1)$, если R_1 – матрица поворота вокруг такого единичного вектора $\vec{a} = (a_1, 0, a_3)$, что $a_1 \neq 1$ и $a_3 \neq 1$. Поэтому отображение Exp' является двулистным накрытием.

Рассмотрим теперь случай, когда вектор $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^2$ произволен. Под действием симметрии Φ^β вектор $\vec{\omega}$ повернется на угол β , а кватернион ориентации $q_\pm = \pm(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)$, как легко показать с помощью (3.25), перейдет в кватернион $q_\pm^\beta = \pm(q_0 + (q_1 \cos \beta - q_2 \sin \beta)i + (q_1 \sin \beta + q_2 \cos \beta)j + q_3k)$. Тогда согласно (3.26) вектор $\vec{a}$ при этом повернется на угол β , т.е. q^β есть кватернион вращения, соответствующий матрице поворота вокруг вектора $\vec{a}^\beta = (a_1 \cos \beta - a_2 \sin \beta, a_1 \sin \beta + a_2 \cos \beta, a_3)$ на некоторый угол. Поскольку Φ^β является симметрией экспоненциального отображения, то и в этом случае Exp' есть двулистное накрытие. Теорема доказана.

Предположим, что R_1 есть поворот вокруг единичного вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ с $a_1^2 + a_2^2 \neq 1$ и $|a_3| \neq 1$ на угол φ . Тогда ориентация сферы в момент времени t_1 задается парой кватернионов

$$q_\pm = \pm(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) = \pm\left(\cos \frac{\varphi}{2} + (a_1i + a_2j + a_3k) \sin \frac{\varphi}{2}\right).$$

Чтобы найти сопряженные переменные, которым соответствует искомая оптимальная траектория, подействуем на каждый из кватернионов вращением Φ^β , где β определяется из соотношений

$$\cos \beta = \pm \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}, \quad \sin \beta = \mp \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}.$$

Тогда конечная ориентация будет задаваться кватернионом

$$q_\pm^\beta = \pm q_0 + q_1^\beta i \pm q_3^\beta k, \quad q_1^\beta = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}.$$

Отсюда, в частности, следует, что вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярен вертикальной плоскости, проходящей через вектор $\vec{a}$.

Величины ω и ψ'_0 находятся из уравнений (7.2), т.е.

$$\begin{aligned} & -\cos\left(\frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega}(\pi - \psi'_0)\right) \cos \psi'_0 \\ & + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \sin\left(\frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega}(\pi - \psi'_0)\right) \sin \psi'_0 = \pm q_0, \\ & -\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \sin\left(\frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega}(\pi - \psi'_0)\right) \cos \psi'_0 \\ & - \cos\left(\frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega}(\pi - \psi'_0)\right) \sin \psi'_0 = q_1^\beta, \\ & -\frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \sin\left(\frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega}(\pi - \psi'_0)\right) = |q_3|. \end{aligned} \tag{7.10}$$

В силу теоремы 3 получим пару решений (ω, ψ'_0) , которые задают две экстремальные траектории, удовлетворяющие граничным условиям. Выберем величины (ω, ψ'_0) , которым соответствует более короткая траектория, сравнив времена t_R по формуле (6.2). Далее, величины ψ_0 и $\vec{\omega}$ определяются следующим образом:

$$\psi_0 = \psi'_0 - \text{sign}(q_3) \frac{\pi}{2}, \quad \vec{\omega} = (\omega \cos \beta, \omega \sin \beta, 0),$$

и задают искомое управление и оптимальную траекторию. Итак, если матрица R_1 удовлетворяет условию теоремы 4, то решение задачи оптимальной переориентации сферы сведено к решению уравнений (7.9) в областях D_+ и D_- .

7.4. Индуцированная метрика на $\text{SO}(3)$. Функционал длины (2.4) задает на $\mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3)$ метрику, называемую метрикой Карно–Каратеодори. В этом случае расстоянием между точками $Q_0, Q_1 \in \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3)$ будет точная нижняя грань длин допустимых кривых, соединяющих эти точки.

Обозначим через $S(R_0, R_1)$ множество всех экстремальных кривых, соединяющих $Q_0 = (0, 0, R_0)$ с $Q_1 = (0, 0, R_1)$. Тогда метрика Карно–Каратеодори индуцирует следующую метрику на $\text{SO}(3)$:

$$d(R_0, R_1) = \inf_{Q \in S(R_0, R_1)} l(Q), \quad (7.11)$$

где $l(Q)$ – длина (2.4) кривой $Q(t)$. Опишем некоторые свойства этой метрики: максимально удаленные пары и диаметр (точную верхнюю грань расстояний между парами точек). По своей конструкции данная метрика является левинвариантной. Следовательно, мы можем искать наиболее удаленную точку от $R_0 = \text{Id}$. Эта задача сводится к поиску оптимальной траектории с максимальным значением $t_R = 2(\pi - \psi'_0)/\omega$.

Рассмотрим замыкание $\bar{D}$ (см. (7.5)) в пространстве (ω, ψ'_0) . Как следует из теоремы 4, переменным $(\omega, \psi'_0) \in D$ соответствуют все повороты вокруг единичного вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ с $|a_3| \neq 1$ и $a_1^2 + a_2^2 \neq 1$. Переменным же (ω, ψ'_0) из ∂D соответствуют повороты вокруг $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ с $a_3 = 0$. В самом деле, подставим $\omega = (\pi - \psi'_0)/\sqrt{\psi'_0(2\pi - \psi'_0)}$ в (7.2) и получим, что при возвращении в начало координат сфера окажется в состоянии

$$q_0 = \cos \psi'_0, \quad q_1 = \sin \psi'_0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Если в задаче о переориентации конечное состояние сферы есть $R_1 = e^{\theta A_1}$, $\theta \in [0, 2\pi)$, то качение по отрезку является оптимальным, только если $\omega = (\pi - \psi'_0)/\sqrt{\psi'_0(2\pi - \psi'_0)}$ и $\psi'_0 \leq \pi/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кватернион, соответствующий матрице $e^{\theta A_1}$, имеет вид $q = \pm(\cos \theta/2 + i \sin \theta/2)$. То, что $(\omega, \psi'_0) \in \partial D$, очевидно, поскольку при $(\omega, \psi'_0) \in D$ компонента $a_3 \neq 0$ в силу теоремы 4. Затем, как указано в п. 7.3, нужно решить две системы

$$\begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} = \cos \psi'_0, \\ \sin \frac{\theta}{2} = \sin \psi'_0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} = -\cos \psi'_0, \\ \sin \frac{\theta}{2} = \sin \psi'_0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} = \cos(\pi - \psi'_0), \\ \sin \frac{\theta}{2} = \sin(\pi - \psi'_0). \end{cases}$$

Для любого θ каждая из этих систем имеет единственное решение ψ'_0 . Следовательно, мы имеем пару экстремальных траекторий, из которых нужно выбрать одну с меньшим значением t_R . Подставим $\omega = (\pi - \psi'_0)/\sqrt{\psi'_0(2\pi - \psi'_0)}$ в (6.2) и получим на ∂D выражение

$$t_R(\psi'_0) = 2\sqrt{\psi'_0(2\pi - \psi'_0)}. \quad (7.12)$$

Функция $t_R(\psi'_0)$ является возрастающей функцией при $[0, \pi]$, и поэтому оптимальным будет наименьшее из двух значений: либо ψ'_0 , либо $\pi - \psi'_0$. Откуда и следует утверждение предложения. Предложение доказано.

Из условия предложения 14 и возрастания функции t_R следует, что для оптимальной траектории на ∂D время t_R принимает максимальное значение при $\psi'_0 = \pi/2$, $\omega = 1/\sqrt{3}$ и равно $t_R = \pi\sqrt{3}$. Докажем, что $\pi\sqrt{3}$ является максимальным значением для всех оптимальных траекторий.

Во-первых, проверим, что если $|a_3| = 1$, то время разреза $t_{\text{cut}} < \pi\sqrt{3}$. В самом деле, как следует из описания множества $\bar{D}$, его образ не содержит точек с $q_1 = 0$ или $q_2 = 0$. Значит, сфера не может попасть в состояние $e^{\theta A_3}$, двигаясь по отрезку. Следовательно, оптимальным должно быть кручение на месте. Но из предложения 9 следует, что при таком движении $t_{\text{cut}} \leq \pi < \pi\sqrt{3}$.

Теперь рассмотрим случай $|a_3| \neq 1$. Из убывания t_R (см. формулу (6.2)) как по ω , так и по ψ'_0 , а также из того, что максимум времени достигается при $\omega = 1/\sqrt{3}$, следует, что $t_R \leq \pi\sqrt{3}$ при $\omega \geq 1/\sqrt{3}$. Следовательно, остается лишь проверить случай $\omega < 1/\sqrt{3}$, который выделен на рис. 7.

Рис. 7. Область D . В незакрашенной подобласти $t_R \leq \pi\sqrt{3}$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. В задаче о переориентации сферы при $\omega < 1/\sqrt{3}$ время разреза $t_{\text{cut}} < \pi\sqrt{3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 12 множество $q_0 = 0$ содержится во множестве Максвелла. Следовательно, если траектория пересекает это множество в момент времени t , то далее она не оптимальна. Рассмотрим траектории $q(t, \omega)$, выходящие из точки $q = 1$, и докажем, что при $\omega < 1/3$ к моменту

времени $t = \pi\sqrt{3}$ соответствующие траектории пересекут множество $q_0 = 0$, т.е. что $q_0(\pi\sqrt{3}, \omega) < 0$.

Из (3.27) имеем

$$q_0(t, \omega) = \cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{\omega^2 + 1}\right) \cos \frac{\omega t}{2} + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \sin\left(\frac{t}{2}\sqrt{\omega^2 + 1}\right) \sin \frac{\omega t}{2}.$$

Продифференцируем эту функцию по ω и получим в момент времени $t = \pi\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_0}{\partial \omega} \Big|_{t=\pi\sqrt{3}} = & -\frac{1}{2(1+\omega^2)^{3/2}} \sin \frac{\omega\pi\sqrt{3}}{2} \left(\pi\sqrt{3}\sqrt{1+\omega^2} \cos\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\sqrt{\omega^2+1}\right) \right. \\ & \left. - 2 \sin\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\sqrt{\omega^2+1}\right) \right). \end{aligned}$$

При $\omega < 1/\sqrt{3}$ имеем

$$\begin{aligned} \sin \frac{\omega\pi\sqrt{3}}{2} & > 0, \\ \pi\sqrt{3}\sqrt{1+\omega^2} \cos\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\sqrt{\omega^2+1}\right) - 2 \sin\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\sqrt{\omega^2+1}\right) \\ & \leq \pi\sqrt{3}\sqrt{1+\omega^2} \cos\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\sqrt{\omega^2+1}\right) < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $q_0(\pi\sqrt{3}, \omega)$ возрастает по ω . А поскольку выполняется равенство $q_0(\pi\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = 0$, то при $\omega < 1/\sqrt{3}$ имеем $q_0(\pi\sqrt{3}, \omega) < 0$. Следовательно, время разреза меньше, чем $\pi\sqrt{3}$. Предложение доказано.

Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА 5. *Для индуцированной метрики (7.11) на $SO(3)$ наиболее удаленными точками являются Id и $e^{\pi(a_1 A_1 + a_2 A_2)}$ с расстоянием между ними $d(\text{Id}, e^{\pi(a_1 A_1 + a_2 A_2)}) = \pi\sqrt{3}$. Состояниям $e^{\pi(a_1 A_1 + a_2 A_2)}$ соответствует сфера, перевернутая на противоположный полюс.*

Для сравнения, наиболее удаленными точками от Id на $SO(3)$ с метрикой, порожденной формой Киллинга, с диаметром, равным π , являются повороты вокруг любого вектора на угол π . Поэтому отношение диаметров этой и индуцированной метрик составляет $\sqrt{3}$.

§ 8. Заключение

В работе исследуется задача об оптимальном качении сферы по плоскости с прокручиванием, но без проскальзывания. Была получена полная параметризация экстремальных траекторий, исследованы симметрии экспоненциального отображения, найдены их неподвижные точки, с использованием которых получены оценки времени разреза.

Также рассмотрена задача о переориентации сферы: найдены конечные состояния сферы, для которых параметры оптимальной траектории однозначно определяются из уравнений (7.10). Описаны некоторые свойства левоинвариантной метрики на группе вращений трехмерного пространства, связанной с этой задачей.

Дальнейшее исследование может быть направлено на решение задачи оптимального управления при произвольном конечном положении сферы Q_1 . Для этого необходимо прежде всего рассмотреть симметрии гамильтоновой системы ε^4 – ε^7 и построить соответствующие симметрии экспоненциального отображения, найти их неподвижные точки и сравнить новые времена Максвелла с теми, что уже были найдены в настоящей работе.

Автор выражает благодарность Ю. Л. Сачкову и А. А. Аграчеву за поставленную задачу и полезные обсуждения в процессе работы.

Список литературы

- [1] J. M. Hammersley, “Oxford commemoration ball”, *Probability, statistics and analysis*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **79**, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1983, 112–142.
- [2] A. M. Arthurs, G. R. Walsh, “On Hammersley’s minimum problem for a rolling sphere”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **99**:3 (1986), 529–534.
- [3] V. Jurdjevic, “The geometry of the plate-ball problem”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **124**:4 (1993), 305–328.
- [4] Ю. Л. Сачков, “Симметрии и страты Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости”, *Матем. сб.*, **201**:7 (2010), 99–120; англ. пер.: Yu. L. Sachkov, “Maxwell strata and symmetries in the problem of optimal rolling of a sphere over a plane”, *Sb. Math.*, **201**:7 (2010), 1029–1051.
- [5] А. П. Маштаков, Ю. Л. Сачков, “Экстремальные траектории и асимптотика времени Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости”, *Матем. сб.*, **202**:9 (2011), 97–120; англ. пер.: A. P. Mashtakov, Yu. L. Sachkov, “Extremal trajectories and the asymptotics of the Maxwell time in the problem of the optimal rolling of a sphere on a plane”, *Sb. Math.*, **202**:9 (2011), 1347–1371.
- [6] А. П. Маштаков, “Асимптотика экстремальных кривых в задаче о качении шара по плоскости”, *Труды Международной конференции по математической теории управления и механике* (Суздаль, 2009), СМФН, **42**, РУДН, М., 2011, 158–165.
- [7] I. Moiseev, Yu. L. Sachkov, “Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane”, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **16**:2 (2010), 380–399.
- [8] Yu. L. Sachkov, “Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane”, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **16**:4 (2010), 1018–1039.
- [9] А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков, “Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля”, *Матем. сб.*, **202**:11 (2011), 31–54; англ. пер.: A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov, “Extremal trajectories in a nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group”, *Sb. Math.*, **202**:11 (2011), 1593–1615.
- [10] Ю. Л. Сачков, “Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны”, *Матем. сб.*, **194**:9 (2003), 63–90; англ. пер.: Yu. L. Sachkov, “Exponential map in the generalized Dido problem”, *Sb. Math.*, **194**:9 (2003), 1331–1359.
- [11] Ю. Л. Сачков, “Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны”, *Матем. сб.*, **197**:6 (2006), 111–160; англ. пер.: Yu. L. Sachkov, “Complete description of the Maxwell strata in the generalized Dido problem”, *Sb. Math.*, **197**:6 (2006), 901–950.

- [12] С. Попов, *Экстремальные траектории в задаче о качении сферы по плоскости с прокручиванием*, Дипломная работа, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2009.
- [13] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2005.
- [14] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия*, Факториал, М, 1998; англ. пер.: М. М. Postnikov, *Geometry VI. Riemannian geometry*, Encyclopaedia Math. Sci., **91**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [15] В. И. Арнольд, *Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спиноров*, МЦНМО, М., 2002.

Иван Юрьевич Бесчастный
(Ivan Yu. Beschastnyi)

Институт программных систем
им. А. К. Айламазяна РАН,

Ярославская обл., Переславский район, с. Вельково

E-mail: i.beschastnyi@gmail.com

Поступила в редакцию
28.10.2013