Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Сказка, О влиянии непрерывного спектра на эффект параметрического резонанса. Случай ограниченных операторов, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 5, 77–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8298>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 18:14:05

УДК 517.928

В. В. Сказка

О влиянии непрерывного спектра на эффект параметрического резонанса. Случай ограниченных операторов

В гильбертовом пространстве H рассматривается дифференциальное уравнение $u'' = -A^2u + \varepsilon B(t)u$ типа уравнения Матье. Ограниченный самосопряженный оператор A имеет только абсолютно непрерывный спектр, $B(t)$ – почти периодическая операторнозначная функция. Найдены достаточные условия, при которых задача Коши для рассматриваемого уравнения устойчива при малых ε и, значит, у этого уравнения отсутствует эффект параметрического резонанса.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: параметрический резонанс, непрерывный спектр, устойчивость.

DOI: 10.4213/sm8298

§ 1. Введение

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -A^2u + \varepsilon B(t)u. \quad (1.1)$$

Для уравнения (1.1) задаются начальные данные

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1. \quad (1.2)$$

Будем предполагать, что A – самосопряженный ограниченный оператор, а $B(t)$ – почти периодическая по t операторнозначная функция.

Наиболее простым уравнением интересующего нас типа является уравнение Матье. В этом случае $H = R^1$, A – оператор умножения на константу, а $B(t)$ – умножение на $\cos(\omega t)$. Для конечномерного пространства H и 2π -периодической функции $B(t)$ подробно изучен эффект так называемого параметрического резонанса, заключающегося в том, что при любых малых $\varepsilon \neq 0$ решение уравнения (1.1) неустойчиво; более того, амплитуда решения экспоненциально возрастает (см., например, [1], [2]). В случае бесконечномерного

Работа выполнена при поддержке Президиума РАН (программа фундаментальных исследований № 15) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарные интеграционные проекты № 30 и № 130).

гильбертова пространства эффект параметрического резонанса, а также метод усреднения Крылова–Боголюбова (как один из способов рассмотрения этого эффекта) изучались в [3], [4]. Можно также отметить работы [5], [6], где, по-видимому, впервые изучались вопросы устойчивости гамильтоновых уравнений с неограниченным гамильтонианом. В частности, в [5], [6] изучалось уравнение (1.1) для случая, когда оператор A имеет вполне непрерывную резольвенту.

Мы будем исследовать ситуацию, когда пространство H бесконечномерно и спектр оператора A абсолютно непрерывный (определение абсолютно непрерывного, точечного и сингулярного спектра см., например, в [7]).

Основная проблема, которая нас интересует, – это определение достаточных условий на A и B , при которых задача (1.1), (1.2) является устойчивой при малых ε .

То, что и при этом может быть эффект параметрического резонанса, видно на примере следующей задачи в пространстве $L_2(1, 2)$:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -x^2 u + \varepsilon \cos(\omega t) u, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1.$$

В этой задаче эффект параметрического резонанса возникает при любых $\omega \in (2, 4)$.

Отметим одно свойство, отличающее поведение решений задачи (1.1), (1.2) в случае, когда у оператора A спектр абсолютно непрерывный, от случая, когда спектр точечный, при условии, что нуль принадлежит резольвентному множеству оператора A . Если спектр абсолютно непрерывный, то при $\varepsilon = 0$ все решения задачи (1.1), (1.2) являются “слабо убывающими”. То есть если $u(t)$ – решение задачи (1.1), (1.2), то для любого $\varphi \in H$ справедливо $(u(t), \varphi) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Это следует из представления решения через спектральную функцию E_λ оператора A :

$$(u(t), \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda t) d(E_\lambda u_0, \varphi) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} d(E_\lambda u_1, \varphi),$$

и теоремы Римана.

Этим свойством, очевидно, не обладает задача с точечным спектром. А также это свойство не выполнено, если у оператора A имеется сингулярная компонента спектра. В то же время во всех случаях имеется неубывающая оценка $\|u(t)\|_H \leq C(\|u_0\|_H + \|u_1\|_H)$, где C не зависит от $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, можно сказать, что целью настоящей работы является поиск классов малых возмущений, при которых “асимптотически слабо устойчивая” задача остается устойчивой.

Будем также предполагать, что существуют гильбертово пространство H_1 , плотно вложенное в H , и константа K_{H-H_1} такие, что для любых $u \in H_1$ справедливо неравенство $\|u\|_H \leq K_{H-H_1} \|u\|_{H_1}$. Введение нового гильбертова пространства H_1 мотивируется тем, что сформулированное ниже условие A_0 не имеет места при $H_1 = H$. На практике вложение $H_1 \subset H$ является вполне непрерывным, но это не важно, лишь бы выполнялось условие A_0 .

Относительно операторов, входящих в (1.1), будем предполагать следующее. Спектр оператора A таков, что

$$\mathrm{Sp}(A) \subset [\delta, \Delta], \quad \delta > 0, \quad \Delta < \infty. \quad (1.3)$$

Операторнозначная функция $B(t)$ является почти периодической. Ряд Фурье этой функции имеет вид

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n t} B_n. \quad (1.4)$$

Относительно коэффициентов c_n и операторов B_n мы будем считать следующее: $B_n H \subset H_1$ и существуют константы K_c и K_b такие, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < K_c, \quad \|B_n \varphi\|_{H_1} < K_b \|\varphi\|_H. \quad (1.5)$$

Несмотря на то, что качественно поведение решения задачи (1.1), (1.2) при $t \rightarrow +\infty$ и при $t \rightarrow -\infty$ одинаковое, мы будем считать, что $t \rightarrow +\infty$. Это связано с техникой доказательства.

§ 2. Основная теорема об устойчивости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{B}$ – гильбертово пространство. Обозначим через $G\mathfrak{B}$ пространство всех голоморфных при $\mathrm{Re} z > 0$ функций $\varphi(z)$ со значениями в пространстве $\mathfrak{B}$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} = \sup_{x>0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi(x+iy)\|_{\mathfrak{B}}^2 dy \right)^{1/2}. \quad (2.1)$$

Отметим, что определение голоморфных функций со значениями в гильбертовом пространстве можно давать по-разному. Самое слабое определение следующее. Голоморфной в области $D \subset C$ называется функция $\varphi(z)$ со значениями в $\mathfrak{B}$ такая, что функция $(\varphi(z), \psi)$ голоморфна в обычном смысле для любого $\psi \in \mathfrak{B}$. См., например, [8], [9]. Там же показано, что и при таком “слабом” понимании аналитичности эти функции будут удовлетворять условиям Коши–Римана, т.е. $\varphi'_{\bar{z}} = 0$, и будет справедлива интегральная формула Коши представления аналитических функций, а сами эти функции разлагаются в ряды Тейлора. То есть любое разумное определение аналитических функций на самом деле описывает один и тот же объект.

ЛЕММА 1. *Пространство $G\mathfrak{B}$ полно. Все его элементы – ограниченные функции по норме пространства $\mathfrak{B}$ в любой полосе $\mathrm{Re} z \in (\lambda, \mu)$ при $\lambda > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вообще говоря, если бы не было условия аналитичности функций, то первое утверждение леммы было бы тривиально. Так что основное здесь – это утверждение о том, что предельный переход не приводит к потере аналитичности.

Автору, к сожалению, не удалось найти в литературе доказательства именно этого утверждения. Но оно является следствием интегрального представления типа интеграла Коши, приведенного в [10; теорема II]. Если проанализировать доказательство этой теоремы, то нетрудно увидеть, что оно дословно может быть перенесено на наш случай. Нужно только заменить значки модулей на значки норм, а также соответствующим образом понимать интегралы и т.д. При этом надо будет пользоваться интегральной формулой Коши, которая, как отмечалось выше, справедлива.

Итак, следуя выкладкам из [10; теорема II], можно прийти к следующему интегральному представлению для функций $\varphi \in G\mathfrak{B}$. Пусть $\lambda > 0$. Если $\operatorname{Re} z \in (\lambda, \mu)$, то справедливо

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\mu + iy)}{\mu + iy - z} dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda + iy)}{\lambda + iy - z} dy. \quad (2.2)$$

Из (2.2), очевидно, следует ограниченность $\|\varphi(z)\|_{\mathfrak{B}}$, если $\operatorname{Re} z \in (\lambda', \mu')$, где $\lambda < \lambda' < \mu' < \mu$.

Докажем теперь первую часть леммы 1. Если $G\mathfrak{B}$ не полное пространство, то его можно расширить до полного пространства $\overline{G\mathfrak{B}}$. Если $\overline{G\mathfrak{B}} \neq G\mathfrak{B}$ и $\widehat{\varphi} \in \overline{G\mathfrak{B}} \setminus G\mathfrak{B}$, то $\widehat{\varphi}(z)$ – не голоморфная в правой полуплоскости функция и существует последовательность функций $\varphi_n \in G\mathfrak{B}$ таких, что

$$\|\varphi_n - \widehat{\varphi}\|_{\mathfrak{B}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Подставим в (2.2) вместо φ функцию φ_n и перейдем к пределу. Очевидно, что при фиксированном z при $\operatorname{Re} z \in (\lambda, \mu)$ можно перейти к пределу под знаками интегралов. Таким образом, получаем

$$\widehat{\varphi}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{\varphi}(\mu + iy)}{\mu + iy - z} dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{\varphi}(\lambda + iy)}{\lambda + iy - z} dy.$$

Из последнего равенства следует, что $\widehat{\varphi}$ – аналитическая функция в полосе $0 < \lambda < \operatorname{Re} z < \mu$, и, значит, в силу произвольности λ, μ аналитическая при $\operatorname{Re} z > 0$. Тем самым, $\overline{G\mathfrak{B}} = G\mathfrak{B}$.

Далее введем следующее обозначение:

$$R_A(z) = (A^2 + z^2 E)^{-1}, \quad (2.3)$$

где E – единичный оператор.

Будем предполагать, что операторы A и B_n удовлетворяют следующим условиям.

Условие AB_0 . (i) Пусть $\varphi_0 = \operatorname{const} \in H$, $z = x + iy$. Тогда существует константа K_{AB}^0 , не зависящая от n , φ_0 и $x > 0$, такая, что

$$\int_{-\Delta-1}^{\Delta+1} \|B_n R_A(z) \varphi_0\|_{H_1}^2 dy \leq K_{AB}^0 \|\varphi_0\|_H^2.$$

(ii) Существует константа K_{AB}^1 такая, что для любого целого n , любой функции $\varphi(z) \in GH_1$ и любого $x > 0$ справедливо неравенство

$$\int_{-\Delta-1}^{\Delta+1} \|B_n R_A(z) \varphi(z)\|_{H_1}^2 dy \leq K_{AB}^1 \int_{-\Delta-1}^{\Delta+1} \|\varphi(z)\|_{H_1}^2 dy.$$

Условие A_0 . Существует константа K_A^0 такая, что для любой функции $\varphi(z) \in GH_1$, $z = x + iy$, и любого $x > 0$ справедливо

$$\left\| \int_{-\Delta-1}^{\Delta+1} e^{zt} R_A(z) \varphi(z) dy \right\|_H^2 \leq K_A^0 \int_{-\Delta-1}^{\Delta+1} e^{2xt} \|\varphi(z)\|_{H_1}^2 dy.$$

Отметим, что для выполнения условия A_0 необходимо, чтобы спектр был абсолютно непрерывным.

Имеет место следующая

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия $AB_0, A_0, z = x + iy$. Тогда справедливы следующие утверждения.

I. Если $\varphi_0 = \text{const} \in H$, то $z^k B_n R_A(z) \varphi_0 \in GH_1$ при $k = 0, 1$. Причем существует константа K_{AB} , не зависящая от n , φ_0 и такая, что

$$\|z^k B_n R_A(z) \varphi_0\|_{H_1}^2 < K_{AB} \|\varphi_0\|_H^2.$$

II. Для любого n и любого $\varphi \in GH_1$ справедливо $B_n R_A(z) \varphi(z) \in GH_1$, причем существует константа K_{AB} такая, что для любого целого n , любой функции $\varphi(z) \in GH_1$ и любого $x > 0$ выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|B_n R_A(z) \varphi(z)\|_{H_1}^2 dy \leq K_{AB} \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi(z)\|_{H_1}^2 dy.$$

III. Существует константа K_A такая, что для любой функции $\varphi(z) \in GH_1$ и любого $x > 0$ справедливо

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{zt} R_A(z) \varphi(z) dy \right\|_H^2 \leq K_A \int_{-\infty}^{\infty} e^{2xt} \|\varphi(z)\|_{H_1}^2 dy.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала отметим следующее. Пусть $\varphi(z)$ – аналитическая в правой полуплоскости функция со значениями в H . Тогда $B_n R_A(z) \varphi(z)$ – аналитическая функция в правой полуплоскости со значениями в H_1 . Действительно, так как A – самосопряженный оператор в пространстве H , то для любого z_0 такого, что $\text{Re } z_0 > 0$, существует такое $\delta > 0$, что в круге $|z - z_0| < \delta$ функция $R_A(z) \varphi(z)$ разлагается в ряд Тейлора по степеням $z - z_0$, сходящийся в пространстве H . Из (1.5) следует, что функция $B_n R_A(z) \varphi(z)$ разлагается в этой же окрестности в ряд Тейлора, сходящийся в пространстве H_1 . Таким образом, рассматриваемые в утверждениях I, II леммы функции являются аналитическими в правой полуплоскости. И нам осталось только получить соответствующие оценки.

Докажем утверждение I. Пусть $\varphi_0 \in H$. Тогда из (1.3) следует существование такой константы C_A^Δ , что при $|z| > \Delta + 1$, $z = x + iy$, выполняется следующее неравенство:

$$\|R_A(z) \varphi_0\|_H \leq C_A^\Delta \frac{1}{|z|^2} \|\varphi_0\|_H. \quad (2.4)$$

Если $x > \Delta + 1$, то из (2.4) и (1.5) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|z B_n R_A(z) \varphi_0\|_{H_1}^2 dy \leq (C_A^\Delta K_b)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|z|^2} dy \cdot \|\varphi_0\|_H^2 \leq \frac{(C_A^\Delta K_b)^2 \pi}{\Delta + 1} \|\varphi_0\|_H^2. \quad (2.5)$$

Если же $x < D = \Delta + 1$, то с учетом (1.5), (2.4) и свойства AB_0 , (i) справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \|z B_n R_A(z) \varphi_0\|_{H_1}^2 dy \\ &= \int_{-\Delta-1}^{\Delta+1} \|z B_n R_A(z) \varphi_0\|_{H_1}^2 dy + \int_{R \setminus (-\Delta-1, \Delta+1)} \|z B_n R_A(z) \varphi_0\|_{H_1}^2 dy \\ &\leq (2D)^2 \int_{-\Delta-1}^{\Delta+1} \|B_n R_A(z) \varphi_0\|_{H_1}^2 dy + K_b^2 \int_{R \setminus (-\Delta-1, \Delta+1)} \|z R_A(z) \varphi_0\|_H^2 dy \\ &\leq (2D)^2 \int_{-\Delta-1}^{\Delta+1} \|B_n R_A(z) \varphi_0\|_{H_1}^2 dy + (C_A^\Delta K_b)^2 \int_{R \setminus (-\Delta-1, \Delta+1)} \frac{1}{|z|^2} dy \cdot \|\varphi_0\|_H^2 \\ &\leq \left[(2D)^2 K_{AB}^0 + \frac{2(C_A^\Delta K_b)^2}{\Delta + 1} \right] \|\varphi_0\|_H^2. \end{aligned}$$

Последнее неравенство вместе с (2.5) влечет за собой утверждение I леммы 2 для $k = 1$. Для $k = 0$ доказательство аналогичное.

Докажем утверждение II. С учетом AB_0 , (ii) и (1.5) справедлива следующая цепочка неравенств, из которой и будет следовать это утверждение:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \|B_n R_A(z) \varphi(z)\|_{H_1}^2 dy \\ &= \int_{(-\Delta-1, \Delta+1)} \|B_n R_A(z) \varphi(z)\|_{H_1}^2 dy + \int_{R \setminus (-\Delta-1, \Delta+1)} \|B_n R_A(z) \varphi(z)\|_{H_1}^2 dy \\ &\leq K_{AB}^0 \int_{-\Delta-1}^{\Delta+1} \|\varphi(z)\|_{H_1}^2 dy + K_b^2 \int_{R \setminus (-\Delta-1, \Delta+1)} \|R_A(z) \varphi(z)\|_H^2 dy \\ &\leq K_{AB}^0 \int_{-\Delta-1}^{\Delta+1} \|\varphi(z)\|_{H_1}^2 dy + \frac{(C_A^\Delta K_b)^2}{\Delta^4} \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi(z)\|_H^2 dy \\ &\leq \left[K_{AB}^0 + \frac{(C_A^\Delta K_b)^2}{\Delta^4} K_{H-H_1}^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi(z)\|_{H_1}^2 dy. \end{aligned}$$

Нам осталось доказать утверждение III. Из условия A_0 и (2.4) вытекает следующая цепочка неравенств, которая и доказывает утверждение III леммы 2:

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{zt} R_A(z) \varphi(z) dy \right\|_H^2 \\ &\leq 2 \left(\left\| \int_{-\Delta-1}^{\Delta+1} e^{zt} R_A(z) \varphi(z) dy \right\|_H^2 + \left\| \int_{R \setminus (-\Delta-1, \Delta+1)} e^{zt} R_A(z) \varphi(z) dy \right\|_H^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2 \left(K_A^0 \int_{-\Delta-1}^{\Delta+1} e^{2xt} \|\varphi(z)\|_{H_1}^2 dy + \frac{(C_A^\Delta)^2}{(\Delta+1)^3} \int_{R \setminus (-\Delta-1, \Delta+1)} e^{2xt} \|\varphi(z)\|_H^2 dy \right) \\ &\leq \left[2K_A^0 + 2 \frac{(C_A^\Delta)^2}{(\Delta+1)^3} K_{H-H_1}^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} e^{2xt} \|\varphi(z)\|_{H_1}^2 dy. \end{aligned}$$

Таким образом, лемма 2 доказана.

Нам понадобится техническая лемма, связанная с преобразованием Лапласа.

Введем следующие обозначения: пусть $f(t)$ – функция, принадлежащая пространству непрерывных по t функций со значениями в H , которое мы обозначим $CH = C([0, \infty), H)$, причем $\|f(t)\|_H \leq K \exp(Lt)$. Тогда образы функций, получаемых при преобразовании Лапласа, будем обозначать теми же буквами, что и сами функции, только с “крышкой”, или, если надо будет применять преобразование Лапласа к большому выражению, “заключать это выражение в уголки”:

$$\widehat{f}(p) \equiv \langle f \rangle(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

Определим в пространстве CH следующие операторы:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}f &= \int_0^t A^{-1} \sin(A(t-\tau)) f(\tau) d\tau, & \mathfrak{S}\varphi &= A^{-1} \sin(A(t))\varphi, \\ \mathfrak{M}f &= \int_0^t A^{-1} \sin(A(t-\tau)) B(\tau) f(\tau) d\tau, & \mathfrak{C}\varphi &= \cos(A(t))\varphi. \end{aligned} \quad (2.6)$$

ЛЕММА 3. Пусть $\|f(t)\|_H \leq K \exp(Lt)$, $\varphi \equiv \text{const}$, $\mu \in R$ – вещественное число. Тогда

$$\begin{aligned} \langle e^{i\mu t} \mathfrak{S}\varphi \rangle(p) &= (A^2 + (p - i\mu)^2 E)^{-1} \varphi, \\ \langle e^{i\mu t} \mathfrak{C}\varphi \rangle(p) &= (p - i\mu)(A^2 + (p - i\mu)^2 E)^{-1} \varphi, \\ \langle e^{i\mu t} \mathfrak{A}f \rangle(p) &= (A^2 + (p - i\mu)^2 E)^{-1} \widehat{f}(p - i\mu). \end{aligned} \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu = 0$. Из спектрального представления для функций от самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве следует

$$(A^{-1} \sin(At)\varphi, \psi) = \int_\delta^\Delta \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} d(E_\lambda \varphi, \psi),$$

где E_λ – спектральная функция оператора A , $\psi \in H$ произвольное. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty e^{-pt} A^{-1} \sin(At) dt \varphi, \psi \right) &= \int_0^\infty e^{-pt} \int_\delta^\Delta \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} d(E_\lambda \varphi, \psi) dt \\ &= \int_\delta^\Delta \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} dt d(E_\lambda \varphi, \psi) = \int_\delta^\Delta \frac{1}{\lambda^2 + p^2} d(E_\lambda \varphi, \psi) \\ &= ((A^2 + p^2 E)^{-1} \varphi, \psi), \end{aligned}$$

что и доказывает первое равенство в лемме 3 при $\mu = 0$. Очевидно, что

$$\int_0^\infty e^{i\mu t} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(p-i\mu)t} f(t) dt = \widehat{f}(p - i\mu).$$

Последнее завершает доказательство первого равенства в лемме 3.

Второе равенство получается абсолютно аналогично. Для доказательства третьего равенства нужно еще учесть, что свертка при преобразовании Лапласа переводится в произведение преобразований Лапласа; подробных выкладок мы не приводим.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. Пусть операторы A, B удовлетворяют условиям (1.3)–(1.5), а также условиям AB_0 и A_0 . Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при любых комплексных ε , удовлетворяющих неравенству $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, нулевое решение задачи (1.1), (1.2) устойчиво в пространстве H . То есть существует такая константа K , что если $u(t)$ – решение (1.1), (1.2), то

$$\|u(t)\|_H \leq K(\|u_0\|_H + \|u_1\|_H).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что уравнение (1.1) с начальными данными (1.2) эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} u(t) &= \cos(At)u_0 + A^{-1} \sin(At)u_1 + \varepsilon \int_0^t A^{-1} \sin(A(t-\tau))B(\tau)u(\tau) d\tau \\ &\equiv \mathfrak{C}u_0 + \mathfrak{S}u_1 + \varepsilon \mathfrak{M}u, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где операторы $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{M}$ определены в (2.6).

Заметим, что

$$\|\mathfrak{M}u\|_{C([0,T],H)} \leq LT\|u\|_{C([0,T],H)}, \quad (2.9)$$

где $L = K_b K_c / \delta$.

Из (2.9) с помощью метода математической индукции нетрудно получить следующие оценки:

$$\|\mathfrak{M}^k \mathfrak{C}u_0\|_{C([0,T],H)} \leq \frac{(LT)^k}{k!} \|u_0\|_H, \quad \|\mathfrak{M}^k \mathfrak{S}u_1\|_{C([0,T],H)} \leq \frac{1}{\delta} \frac{(LT)^k}{k!} \|u_1\|_H. \quad (2.10)$$

Докажем, например, первое из двух неравенств (2.10). Положим в (2.9) $u(t) = \mathfrak{C}u_0 \equiv \cos(At)u_0$. Тогда получим

$$\|\mathfrak{M}u\|_{C([0,T],H)} \leq LT\|\cos(At)u_0\|_{C([0,T],H)} \leq LT\|u_0\|_H,$$

что и дает (2.10) при $k = 1$. Пусть теперь (2.10) выполнено при $k = n$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{M}^{n+1} \mathfrak{C}u_0\|_{C([0,T],H)} &= \left\| \int_0^t A^{-1} \sin(A(t-\tau))B(\tau) \mathfrak{M}^n \mathfrak{C}u_0 d\tau \right\|_{C([0,T],H)} \\ &\leq L \int_0^T \|\mathfrak{M}^n \mathfrak{C}u_0\|_{C([0,t],H)} dt \leq L \int_0^T \frac{(Lt)^n}{n!} \|u_0\|_H dt = \frac{(LT)^{n+1}}{(n+1)!} \|u_0\|_H, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство (2.10).

Таким образом, используя метод последовательных приближений, решение (2.8) можно представить в виде суммы двух рядов, сходящихся при любых ε по норме H :

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathfrak{M}^k \cos(At)u_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathfrak{M}^k A^{-1} \sin(At)u_1. \quad (2.11)$$

При этом из (2.10) следует, что справедлива оценка

$$\|u(t)\|_H \leq \exp(|\varepsilon|Lt) \left(\|u_0\|_H + \frac{\|u_1\|_H}{\delta} \right). \quad (2.12)$$

Поскольку $\|\cos(At)u_0\|_H \leq \|u_0\|_H$ и $\|A^{-1}\sin(At)u_1\|_H \leq \|u_1\|_H/\delta$, слагаемые при $k = 0$ в рядах (2.11) мы можем отбросить как не влияющие на доказательство устойчивости.

Обозначим

$$w_0 = \cos(At)u_0, \quad w_1 = A^{-1}\sin(At)u_1. \quad (2.13)$$

Тогда оставшуюся часть суммы рядов, которую мы обозначим через $v(t)$, можно записать в виде

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (\mathfrak{A}B)^k w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (\mathfrak{A}B)^k w_1 \\ &= \varepsilon \mathfrak{A} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (B\mathfrak{A})^k Bw_0 + \varepsilon \mathfrak{A} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (B\mathfrak{A})^k Bw_1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Из (2.12) следует, что мы можем применить преобразование Лапласа при $\operatorname{Re} p > |\varepsilon|L$ к $v(t)$, а из (2.10) вытекает, что при $\operatorname{Re} p > |\varepsilon|L$ в (2.14) можно применить преобразование Лапласа почленно. В результате с учетом леммы 3 получим

$$\widehat{v}(p) = \varepsilon(A^2 + p^2E)^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \langle (B\mathfrak{A})^k Bw_0 \rangle(p) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \langle (B\mathfrak{A})^k Bw_1 \rangle(p) \right]. \quad (2.15)$$

Обозначим

$$U_j(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \langle (B\mathfrak{A})^k Bw_j \rangle(p), \quad j = 0, 1. \quad (2.16)$$

Нам понадобится следующее техническое утверждение об аналитическом продолжении функций $U_j(p)$ с множества $\{\operatorname{Re} p > |\varepsilon|L\}$ на $\{\operatorname{Re} p > 0\}$. За продолженной функцией мы оставим то же обозначение.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *При выполнении условий теоремы существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ функции, определенные равенством (2.16) при $\operatorname{Re} p > |\varepsilon|L$, аналитически продолжаются до функций $U_j(p) \in GH_1$, причем справедливо следующее неравенство:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|U_j(x + iy)\|_{H_1}^2 dy \leq C \|u_j\|_H^2, \quad j = 0, 1, \quad (2.17)$$

где C не зависит от x , $0 < x < \infty$.

Это утверждение будет доказано позже, чтобы не загромождать доказательство теоремы техническими подробностями.

Пусть ε таково, что выполняется (2.17). Решение уравнения (1.1) при $x > |\varepsilon|L$ можно записать, используя обратное преобразование Лапласа и учитывая (2.13)–(2.16), в следующем виде:

$$u(t) = \cos(At)u_0 + A^{-1} \sin(At)u_1 + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{zt} (A^2 + z^2 E)^{-1} (U_0(z) + U_1(z)) dy, \quad (2.18)$$

где $z = x + iy$.

Из приведенного утверждения следует, что $U_j(z) \in GH_1$. Поэтому функция $e^{zt} (A^2 + z^2 E)^{-1} (U_0(z) + U_1(z))$ аналитична в правой полуплоскости. Из ограниченности оператора A следует, что $\|(A^2 + z^2 E)^{-1}\|_H = O(1/|z|^2)$ при $|z| \rightarrow \infty$. Функции $U_j(z)$ (лемма 1) ограничены по норме H_1 (и, значит, по норме H) в любой полосе $0 < \lambda < \operatorname{Re} z < \mu$. Поэтому интеграл в правой части (2.18) не зависит от $x > 0$.

Очевидно, что $\|\cos(At)u_0\|_H \leq \|u_0\|_H$ и $\|A^{-1} \sin(At)u_1\|_H \leq \|u_1\|_H/\delta$. С другой стороны, из (2.17) и леммы 2, III с учетом обозначения (2.3) вытекает

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{zt} R_A(z) U_j(z) dy \right\|_H^2 &\leq K_A \int_{-\infty}^{\infty} e^{2xt} \|U_j(z)\|_{H_1}^2 dy \\ &\leq K_A C e^{2xt} \|u_j\|_H^2, \quad j = 0, 1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Тогда из (2.19) и (2.18) получаем следующую оценку:

$$\|u(t)\|_H \leq \left(1 + \frac{|\varepsilon|}{2\pi} \sqrt{K_A C} e^{xt}\right) \|u_0\|_H + \left(\frac{1}{\delta} + \frac{|\varepsilon|}{2\pi} \sqrt{K_A C} e^{xt}\right) \|u_1\|_H.$$

Так как в последнем неравенстве все константы не зависят от $x > 0$, то, переходя к пределу при $x \rightarrow 0$, получаем

$$\|u(t)\|_H \leq \left(1 + \frac{|\varepsilon|}{2\pi} \sqrt{K_A C}\right) \|u_0\|_H + \left(\frac{1}{\delta} + \frac{|\varepsilon|}{2\pi} \sqrt{K_A C}\right) \|u_1\|_H.$$

Последнее неравенство и завершает доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. Рассмотрим $\langle (B\mathfrak{A})^k Bw_j \rangle(z)$. В силу того, что преобразование Лапласа переводит свертку функций в произведение, и учитывая структуру операторов $\mathfrak{A}$ и B (ср. лемму 3), имеем

$$\langle (B\mathfrak{A})^k Bw_j \rangle(z) = (\widehat{B\mathfrak{A}})^k \widehat{Bw_j}(z). \quad (2.20)$$

Выражение, стоящее в правой части последнего равенства, может пониматься неоднозначно и поэтому требует некоторого пояснения. Мы его будем понимать следующим образом. Пусть $g(t)$ – функция, преобразование Лапласа которой есть $\hat{g}(z)$. Тогда полагаем $\widehat{B\mathfrak{A}}\hat{g}(z) = \langle B\mathfrak{A}g \rangle(z)$. Правая часть (2.20) получается путем применения этой формулы k раз.

С учетом леммы 3 и (1.4) справедливо: если $\hat{u}(z) \in GH_1$, то

$$\widehat{B\mathfrak{A}}\hat{u}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n B_n (A^2 + (z - i\lambda_n)^2 E)^{-1} \hat{u}(z - i\lambda_n), \quad (2.21)$$

при этом ряд в (2.21) сходится в силу (1.5). Кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\widehat{Bw_0}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - i\lambda_n) B_n (A^2 + E(z - i\lambda_n)^2)^{-1} u_0, \\ \widehat{Bw_1}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n B_n (A^2 + E(z - i\lambda_n)^2)^{-1} u_1,\end{aligned}\tag{2.22}$$

где w_j определены в (2.13).

Для того чтобы доказать (2.17), достаточно показать существование константы $\overline{K}$, не зависящей от x , $0 < x < \infty$, такой, что для любого n

$$\begin{aligned}\langle (B\mathfrak{A})^n Bw_j \rangle(z) &\in GH_1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \|\langle (B\mathfrak{A})^n Bw_j \rangle(z)\|_{H_1}^2 dy \leq \overline{K}^{n+1} \|u_j\|_H^2, \\ j &= 0, 1,\end{aligned}\tag{2.23}$$

где $z = x + iy$.

Будем доказывать (2.23) по индукции. Докажем существование такой константы $\overline{K}$ при $n = 0$. Для этого рассмотрим $\widehat{Bw_j}(p)$. Для того чтобы показать включение $\widehat{Bw_j}(p) \in GH_1$, достаточно установить, что каждое слагаемое в (2.22) принадлежит этому классу функций и получившиеся ряды сходятся.

Рассмотрим слагаемые в (2.22) по отдельности. Из леммы 2, I следует, что

$$(z - i\lambda_n) B_n (A^2 + (z - i\lambda_n)^2)^{-1} u_0, \quad B_n (A^2 + (z - i\lambda_n)^2)^{-1} u_1 \in GH_1,$$

причем при $0 < x < \infty$ справедливо

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \|(z - i\lambda_n) B_n (A^2 + E(z - i\lambda_n)^2)^{-1} u_0\|_{H_1}^2 dy \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \|z B_n (A^2 + Ez^2)^{-1} u_0\|_{H_1}^2 dy \leq K_{AB} \|u_0\|_H^2, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \|B_n (A^2 + E(z - i\lambda_n)^2)^{-1} u_1\|_{H_1}^2 dy \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \|B_n (A^2 + Ez^2)^{-1} u_1\|_{H_1}^2 dy \leq K_{AB} \|u_1\|_H^2.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Из (2.24) и (1.4) следует, что ряды (2.22) сходятся по норме $\|\cdot\|_{H_1}$ и, значит (лемма 1), представляют собой голоморфные при $\operatorname{Re} z > 0$ функции, принадлежащие пространству GH_1 . Таким образом, получаем

$$\widehat{Bw_j}(x + iy) \in GH_1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \|\widehat{Bw_j}(x + iy)\|_{H_1}^2 dy \leq K_{AB} K_c^2 \|u_j\|_H^2, \quad j = 0, 1.\tag{2.25}$$

А это и есть утверждение (2.23) при $n = 0$.

Для завершения доказательства нам осталось проверить следующее утверждение. Пусть $\varphi(z) \in GH_1$. Тогда $\widehat{B\mathfrak{A}}\varphi(z) \in GH_1$ и справедливо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\widehat{B\mathfrak{A}}\varphi(x + iy)\|_{H_1}^2 dy \leq K' \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi(x + iy)\|_{H_1}^2 dy,\tag{2.26}$$

где константа K' не зависит от x .

Пусть $\varphi(z) \in GH_1$. Тогда согласно (2.21)

$$\widehat{B\mathfrak{A}}\varphi(x+iy) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n B_n (A^2 + (x+iy-i\lambda_n)^2 E)^{-1} \varphi(x+iy-i\lambda_n). \quad (2.27)$$

Из леммы 2, II следует

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \|B_n (A^2 + (x+iy-i\lambda_n)^2 E)^{-1} \varphi(x+iy-i\lambda_n)\|_{H_1}^2 dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \|B_n (A^2 + (x+iy)^2 E)^{-1} \varphi(x+iy)\|_{H_1}^2 dy \\ &\leq K_{AB} \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi(x+iy)\|_{H_1}^2 dy. \end{aligned}$$

Пусть $\varphi(z) \in GH_1$. Рассмотрим ряд (2.27). Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|\widehat{B\mathfrak{A}}\varphi(z)\|_{H_1}^2 dy \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|B_n (A^2 + (z-i\lambda_n)^2 E)^{-1} \varphi(z-i\lambda_n)\|_{H_1}^2 dy \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| (K_{AB})^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi(x+iy)\|_{H_1}^2 dy \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Из этой цепочки неравенств и (1.5) следует, что выполняется неравенство (2.26), при этом $K' = K_{AB} K_c^2$. В свою очередь, из (2.26) следует (2.23) для любого n при $\bar{K} = K_{AB} K_c^2$. А далее из (2.23) следует справедливость утверждения при $\varepsilon_0 = 1/\sqrt{\bar{K}}$.

Таким образом, утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно заметить, что на самом деле при доказательстве теоремы мы пользовались не условиями AB_0 и A_0 , а их следствиями – заключениями леммы 2. В принципе их можно было бы принять за условия изначально. Более того, при этом можно было бы отказаться от ограниченности оператора A , поскольку условием $\Delta < \infty$ мы пользовались только при доказательстве леммы 2. Но теоремы для случая неограниченных операторов и соответствующие примеры мы рассмотрим в отдельной статье.

§ 3. Пример

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u(s, t)}{dt^2} &= -s^2 u + \varepsilon \int_1^2 K(\xi, s, t) u(\xi, t) d\xi, \\ u|_{t=0} &= u_0(s), \quad u'_t|_{t=0} = u_1(s), \end{aligned} \quad (3.1)$$

в пространстве $H = L_2(1, 2)$. В качестве H_1 выберем следующее пространство:

$$H_1 = W_2^2(1, 2) \cap \dot{W}_2^1(1, 2).$$

Здесь $K(\xi, s, t) = \sum_{n>0} c_n K_n(\xi, s) e^{i\lambda_n t}$ – почти периодическая по t функция. Предполагается, что $K_n(\xi, s) \in C^3([1, 2] \times [1/2, 5/2])$, причем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < C, \quad \|K_n\|_{C^3} \leq C, \\ K_n(1, s) \equiv 0, \quad K_n(2, s) \equiv 0, \quad K_n(\xi, 1) \equiv 0, \quad K_n(\xi, 2) \equiv 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где C – некоторая абсолютная константа.

Мы будем доказывать, что выполнены утверждения I–III леммы 2. Как отмечалось выше в замечании, в этом случае наша теорема верна.

Оператор A – оператор умножения на независимую переменную s , соответственно $(A^2 + z^2 E)^{-1}$ – оператор умножения на функцию $(s^2 + z^2)^{-1}$, $z = x + iy$.

Помимо этого условимся о следующем упрощении. Будем отождествлять обозначения функций, действующих в пространстве GH или GH_1 , с функциями двух переменных; т.е. обозначать одними и теми же буквами функции $\varphi(z) \in GH$ (GH_1) и функции двух переменных $\varphi(s, z)$ такие, что для любой функции $\psi \in H$ и любого комплексного z , $\operatorname{Re} z > 0$, функция $\varphi(s, z)$ принадлежит $L_2(1, 2)$ и справедливо равенство

$$(\varphi(z), \psi) = \int_1^2 \varphi(s, z) \psi(s) ds.$$

С учетом сделанных замечаний нужные нам для исследования комбинации операторов, упомянутые в утверждениях I, II леммы 2, имеют следующее представление для $\varphi_j \in H$, $\varphi(\xi, z) \in GH_1$:

$$z^j B_n(A^2 + z^2 E)^{-1} \varphi_j = z^j \int_1^2 \frac{K_n(\xi, s) \varphi_j(\xi)}{\xi^2 + z^2} d\xi \equiv F_j(s, z), \quad j = 0, 1, \quad (3.3)$$

$$B_n(A^2 + z^2 E)^{-1} \varphi(z) \equiv \int_1^2 \frac{K_n(\xi, s) \varphi(\xi, z)}{\xi^2 + z^2} d\xi \equiv G(s, z). \quad (3.4)$$

Рассмотрим функцию F_j из (3.3) при $j = 1$. Случай $j = 0$ рассматривается аналогично. Пусть $\varphi_0 \in L_2(1, 2)$. Из равенств (3.2) следует

$$F_1(1, z) \equiv F_1(2, z) \equiv 0. \quad (3.5)$$

Покажем, что выполняется неравенство

$$\sup_{x>0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_1^2 \left| \frac{\partial^k F_1(s, x + iy)}{\partial s^k} \right|^2 ds dy \leq \tilde{C} \int_1^2 |\varphi_1(s)|^2 ds, \quad k = 0, 1, 2, \quad (3.6)$$

что и завершит доказательство утверждения I леммы 2.

Рассмотрим случай $k = 0$. Пусть $f(t) \in L_2(1, 2)$, $\widehat{f}$ – продолжение f во все $L_2(-\infty, \infty)$ нулем, $x > 0$. Определим функцию $g(y)$:

$$\begin{aligned} g(y) &= (x + iy) \int_1^2 \frac{f(t)}{t^2 + (x + iy)^2} dt \\ &= \frac{1}{i} \left(\int_1^2 \frac{f(t)}{t + y - ix} dt + \int_1^2 \frac{f(t)}{y - t - ix} dt \right) \equiv \frac{g_1 + g_2}{i}. \end{aligned}$$

Здесь через g_i обозначены соответствующие интегралы.

Наша дальнейшая цель – показать, что для любого $x > 0$ справедлива оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|^2 dy \leq C_F \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(t)|^2 dt \equiv C_F \int_1^2 |f(t)|^2 dt, \quad (3.7)$$

где константа C_F не зависит от x и f . Автору не удалось найти в явном виде доказательство неравенства (3.7). Конструкция приведенного ниже рассуждения во многом взята из [10].

Хорошо известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{g}(\tau)|^2 d\tau,$$

где $\widetilde{g}$ – образ $g(y)$ при преобразовании Фурье. Нам достаточно показать, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |g_l(y)|^2 dy &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{g}_l(\tau)|^2 d\tau \\ &\leq C_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\widehat{f}}(\tau)|^2 d\tau = C_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(t)|^2 dt = C_2 \int_1^2 |f(t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Фактически надо доказать второе неравенство в (3.8). Рассмотрим интеграл с g_2 . Сама функция $g_2(y)$ – это свертка функций $\widehat{f}(t)$ и $1/(t - ix)$. Причем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t - ix} dt = \begin{cases} e^{-\omega x}, & \omega > 0, \\ 0, & \omega < 0, \end{cases}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения на бесконечности.

Так как преобразование Фурье от свертки равно произведению преобразований Фурье, получаем

$$\widetilde{g}_2(\tau) = \begin{cases} 2\pi i \widetilde{f}(\tau) e^{-\tau x}, & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

Отсюда и следует (3.8) для $l = 2$. Случай $l = 1$ доказывается совершенно аналогично.

Из неравенства (3.7) вытекает цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(s, z)|^2 dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| (x + iy) \int_1^2 \frac{K_n(\xi, s) \varphi_1(\xi)}{\xi^2 + (x + iy)^2} d\xi \right|^2 dy \\ &\leq C_F \int_1^2 |K_n(\xi, s) \varphi_1(\xi)|^2 d\xi \leq C C_F \int_1^2 |\varphi_1(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

откуда и получается неравенство (3.6) при $k = 0$. Оценка (3.6) при $k = 1, 2$ получается аналогично простым дифференцированием функции $F(s, z)$ по переменной s . Эти неравенства с учетом (3.5) доказывают справедливость утверждения I леммы 2.

Докажем справедливость утверждения II леммы 2. Функция $G(s, x + iy)$ из (3.4) может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} G(s, x + iy) &= \int_1^2 \frac{K_n(\xi, s)\varphi(\xi, x + iy)}{\xi^2 + (x + iy)^2} d\xi = \int_1^2 \frac{K_n(\xi, s)\varphi(\xi, x + iy)}{2\xi(\xi + i(x + iy))} d\xi \\ &+ \int_1^2 \frac{K_n(\xi, s)\varphi(\xi, x + iy)}{2\xi(\xi - i(x + iy))} d\xi \equiv G_1(s, x + iy) + G_2(s, x + iy). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Если $\varphi(\xi, z)$ аналитична по переменной $z = x + iy$, то таковой же будет и функция G . Из равенств (3.2) следует

$$G(1, z) \equiv G(2, z) \equiv 0. \quad (3.10)$$

Достаточно показать, что $G \in H_1$ и выполняется соответствующее неравенство из утверждения II леммы 2.

Когда $y \in \Omega_1 \equiv (-\infty, -5/2) \cup (-1/2, 1/2) \cup (5/2, \infty)$, справедлива следующая оценка для функций G_i :

$$\int_{\Omega_1} \int_1^2 \left| \frac{\partial^k G_i(s, x + iy)}{\partial s^k} \right|^2 ds dy \leq C_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_1^2 |\varphi(\xi, x + iy)|^2 ds dy, \quad k = 0, 1, 2, \quad (3.11)$$

где C_1 не зависит от x, s . Существование такой константы C_1 следует из вида функции G , (3.9) и (3.2). Поэтому достаточно рассмотреть интеграл по множеству $|y| \in [1/2, 5/2]$. Рассмотрим подробно только интеграл от функции G_1 .

То, что существует такая не зависящая от x константа C_2 , что

$$\begin{aligned} &\int_{[-5/2, -1/2]} \int_1^2 \left| \frac{\partial^k G_1(s, x + iy)}{\partial s^k} \right|^2 ds dy \\ &\leq C_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_1^2 |\varphi(\xi, x + iy)|^2 ds dy, \quad k = 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

следует из (3.9) и (3.2). Остается рассмотреть случай $y \in (1/2, 5/2)$.

Через $\check{\varphi}(\xi, z)$ обозначим продолжение по ξ функции $\varphi(\xi, z)$ с интервала $(1, 2)$ на интервал $(1/2, 5/2)$ такое, что

$$\int_{1/2}^{5/2} \sum_{k=0}^2 \left| \frac{\partial^k \check{\varphi}(\xi, x + iy)}{\partial \xi^k} \right|^2 d\xi \leq C_3 \int_1^2 \sum_{k=0}^2 \left| \frac{\partial^k \varphi(\xi, x + iy)}{\partial \xi^k} \right|^2 d\xi, \quad (3.13)$$

где C_3 – некоторая абсолютная константа. Такое продолжение можно осуществить, продолжив при каждом z функцию по переменной ξ линейно, “склеив” значения функции и первой производной.

Нетрудно получить следующее представление:

$$\begin{aligned} G_1(s, x + iy) &\equiv \int_1^2 \frac{K_n(\xi, s) \varphi(\xi, x + iy)}{2\xi(\xi - y + ix)} d\xi = \check{\varphi}(y, x + iy) \int_1^2 \frac{K_n(\xi, s)}{2\xi(\xi - y + ix)} d\xi \\ &\quad + \int_1^2 \frac{K_n(\xi, s)}{2\xi(\xi - y + ix)} \int_y^\xi \frac{\partial \check{\varphi}(t, x + iy)}{\partial t} dt d\xi \\ &\equiv I_1(x, y, s) + I_2(x, y, s). \end{aligned}$$

Рассмотрим $I_1(x, y, z)$. Пусть $k = 0, 1, 2$; тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\int_{1/2}^{5/2} \int_1^2 \left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} I_1(x, y, s) \right|^2 ds dy \\ &= \int_{1/2}^{5/2} |\check{\varphi}(y, x + iy)|^2 \int_1^2 \left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} \int_1^2 \frac{K_n(\xi, s)}{2\xi(\xi - y + ix)} d\xi \right|^2 ds dy. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из (3.2), очевидно, следует, что при $x > 1$

$$\int_1^2 \left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} \int_1^2 \frac{K_n(\xi, s)}{2\xi(\xi - y + ix)} d\xi \right|^2 ds \leq C^2, \quad (3.15)$$

где C – константа из (3.2). При $x \leq 1$ справедливо

$$\begin{aligned} &\int_1^2 \left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} \int_1^2 \frac{K_n(\xi, s)}{2\xi(\xi - y + ix)} d\xi \right|^2 ds \\ &= \int_1^2 \left| \int_1^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial^k K_n(\xi, s)}{\partial s^k} \right) \ln(\xi - y + ix) d\xi \right|^2 ds \leq C_4, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $C_4 > C^2$ не зависит от $(x, y) \in (0, 1) \times (1/2, 5/2)$.

Выполняется также следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} &\int_{1/2}^{5/2} |\check{\varphi}(y, x + iy)|^2 dy = \int_{1/2}^{5/2} \left| \int_1^y \frac{\partial \check{\varphi}(\nu, x + iy)}{\partial \nu} d\nu \right|^2 dy \\ &\leq \frac{3}{2} \int_{1/2}^{5/2} \int_1^y \left| \frac{\partial \check{\varphi}(\nu, x + iy)}{\partial \nu} \right|^2 d\nu dy \leq \frac{3}{2} \int_{1/2}^{5/2} \int_{1/2}^{5/2} \sum_{k=0}^2 \left| \frac{\partial^k \check{\varphi}(\nu, x + iy)}{\partial \nu^k} \right|^2 d\nu dy \\ &\leq \frac{3C_3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_1^2 \sum_{k=0}^2 \left| \frac{\partial^k \varphi(\nu, x + iy)}{\partial \nu^k} \right|^2 d\nu dy, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где C_3 – константа из (3.13).

Из (3.14)–(3.17) следует оценка, справедливая для любых $x > 0$,

$$\int_{1/2}^{5/2} \int_1^2 \sum_{k=0}^2 \left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} I_1(x, y, s) \right|^2 ds dy \leq \frac{9C_3C_4}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_1^2 \sum_{k=0}^2 \left| \frac{\partial^k \varphi(\xi, x + iy)}{\partial \xi^k} \right|^2 d\xi dy. \quad (3.18)$$

Рассмотрим теперь $I_2(x, y, s)$. Из теорем вложения нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \left| \int_y^\xi \frac{\partial \check{\varphi}(t, x + iy)}{\partial t} dt \right| &\leq \left| \int_y^\xi \sup_{\tau \in (1/2, 5/2)} \left| \frac{\partial \check{\varphi}(\tau, x + iy)}{\partial \tau} \right| d\tau \right| \\ &\leq C_5 |\xi - y| \left(\int_{1/2}^{5/2} \sum_{k=0}^2 \left| \frac{\partial^k \check{\varphi}(\tau, x + iy)}{\partial \tau^k} \right|^2 d\tau \right)^{1/2} \\ &\leq C_5 \sqrt{C_3} |\xi - y| \left(\int_1^2 \sum_{k=0}^2 \left| \frac{\partial^k \varphi(\tau, x + iy)}{\partial \tau^k} \right|^2 d\tau \right)^{1/2}, \quad (3.19) \end{aligned}$$

где C_5 – некоторая абсолютная постоянная.

С учетом того, что $|(\xi - y)/(\xi - y + ix)| < 1$, из (3.19) и (3.2) получаем

$$\begin{aligned} &\int_{1/2}^{5/2} \int_1^2 \sum_{k=0}^2 \left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} I_2(x, y, s) \right|^2 ds dy \\ &= \int_{1/2}^{5/2} \int_1^2 \sum_{k=0}^2 \left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} \int_1^2 \frac{K_n(\xi, s)}{2\xi(\xi - y + ix)} \int_y^\xi \frac{\partial \check{\varphi}(t, x + iy)}{\partial t} dt d\xi \right|^2 ds dy \\ &\leq C_5^2 C_3 \int_{1/2}^{5/2} \int_1^2 \sum_{k=0}^2 \left(\int_1^2 \left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} K_n(\xi, s) \right|^2 \int_1^2 \sum_{l=0}^2 \left| \frac{\partial^l \varphi(\tau, x + iy)}{\partial \tau^l} \right|^2 d\tau d\xi \right) ds dy \\ &\leq C_6 \int_{-\infty}^\infty \int_1^2 \sum_{k=0}^2 \left| \frac{\partial^k \varphi(\tau, x + iy)}{\partial \tau^k} \right|^2 d\tau dy, \quad (3.20) \end{aligned}$$

где C_6 не зависит от x .

Из неравенств (3.20), (3.18), (3.12) и (3.11) следует, что $G_1 \in H_1$, причем существует не зависящая от x константа K_1 такая, что

$$\int_{-\infty}^\infty \int_1^2 \sum_{k=0}^2 \left| \frac{\partial^k G_1(\tau, x + iy)}{\partial \tau^k} \right|^2 d\tau dy \leq K_1 \int_{-\infty}^\infty \int_1^2 \sum_{k=0}^2 \left| \frac{\partial^k \varphi(\tau, x + iy)}{\partial \tau^k} \right|^2 d\tau dy.$$

Аналогично устанавливается такая же оценка для функции G_2 , что и завершает доказательство утверждения II леммы 2.

Проверим справедливость утверждения III. Пусть $\varphi(z) \in GH_1$ – аналитическая функция со значениями в пространстве H_1 . Как и ранее, она может быть отождествлена с функцией двух переменных $\varphi(s, z)$ (мы оставили за этой функцией то же обозначение), которая является голоморфной по переменной z и принадлежит пространству H_1 по переменной s . Получаем следующее представление:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^\infty e^{(x+iy)t} (A^2 + (x + iy)^2 E)^{-1} \varphi(x + iy) dy \equiv \int_{-\infty}^\infty e^{(x+iy)t} \frac{\varphi(s, x + iy)}{s^2 + (x + iy)^2} dy \\ &= \int_\Omega e^{(x+iy)t} \frac{\varphi(s, x + iy)}{s^2 + (x + iy)^2} dy + \int_{-5/2}^{-1/2} e^{(x+iy)t} \frac{\varphi(s, x + iy)}{2(y - ix)(s - y + ix)} dy \\ &\quad - \int_{-5/2}^{-1/2} e^{(x+iy)t} \frac{\varphi(s, x + iy)}{2(y - ix)(s + y - ix)} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{1/2}^{5/2} e^{(x+iy)t} \frac{\varphi(s, x+iy)}{2(y-ix)(s-y+ix)} dy \\
& - \int_{1/2}^{5/2} e^{(x+iy)t} \frac{\varphi(s, x+iy)}{2(y-ix)(s+y-ix)} dy \equiv \sum_{j=1}^5 J_j(s, x, t). \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Здесь $\Omega = (-\infty, -5/2) \cup (-1/2, 1/2) \cup (5/2, \infty)$, через $J_j(s, x, t)$ обозначены соответствующие интегралы, а нижний индекс отражает позицию интеграла в формуле (3.21).

В интегралах с индексами $j = 1, 2, 5$ не присутствуют особенности, знаменатель строго отделен от нуля, когда $s \in (1, 2)$, поэтому нетрудно убедиться в справедливости следующих неравенств:

$$\int_1^2 |J_j(s, x, t)|^2 ds \leq K_j \int_{-\infty}^{\infty} e^{2xt} \int_1^2 |\varphi(s, x+iy)|^2 ds dy, \quad (3.22)$$

где константы K_j , $j = 1, 2, 5$, не зависят от $x > 0$ и t .

Осталось рассмотреть интегралы J_3, J_4 . Они исследуются одинаково, поэтому мы получим нужную оценку только для интеграла J_4 . Как и ранее, через $\check{\varphi}(s, z)$ обозначим продолжение по s функции $\varphi(s, z)$ с интервала $(1, 2)$ на интервал $(1/2, 5/2)$ такое, что выполняется (3.13). Тогда справедливо представление

$$\begin{aligned}
J_4 &= \int_{1/2}^{5/2} e^{(x+iy)t} \frac{\varphi(s, x+iy)}{2(y-ix)(s-y+ix)} dy = \int_{1/2}^{5/2} e^{(x+iy)t} \frac{\check{\varphi}(y, x+iy)}{2(y-ix)(s-y+ix)} dy \\
& - \int_{1/2}^{5/2} e^{(x+iy)t} \frac{1}{2(y-ix)(s-y+ix)} \int_s^y \frac{\partial \check{\varphi}(\tau, x+iy)}{\partial \tau} d\tau dy \\
& \equiv JG_1(x, s, t) - JG_2(x, s, t). \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Аналогично оценкам (3.20) из (3.19) легко получается

$$\begin{aligned}
& \int_1^2 |JG_2(x, s, t)|^2 ds \\
& \leq C_9 e^{2xt} \int_1^2 \int_{1/2}^{5/2} \left| \frac{(s-y)}{2(y-ix)(s-y+ix)} \right|^2 \int_1^2 \sum_{l=0}^2 \left| \frac{\partial^l \varphi(\tau, x+iy)}{\partial \tau^l} \right|^2 d\tau dy ds \\
& \leq K_{4,2} e^{2xt} \int_{1/2}^{5/2} \int_1^2 \sum_{l=0}^2 \left| \frac{\partial^l \varphi(\tau, x+iy)}{\partial \tau^l} \right|^2 d\tau dy, \quad (3.24)
\end{aligned}$$

где константа $K_{4,2}$ не зависит от x и t .

Рассмотрим JG_1 . Так как $|e^{iyt}/(y-ix)| \leq 2$ при $y \in (1/2, 5/2)$, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}
& \int_{1/2}^{5/2} \left| \frac{e^{iyt} \check{\varphi}(y, x+iy)}{2(y-ix)} \right|^2 dy \leq 2 \int_{1/2}^{5/2} \left| \int_1^y \frac{\partial \check{\varphi}(\tau, x+iy)}{\partial \tau} d\tau \right|^2 dy \\
& \leq C_8 \int_{1/2}^{5/2} \int_1^2 \sum_{l=0}^2 \left| \frac{\partial^l \varphi(\tau, x+iy)}{\partial \tau^l} \right|^2 d\tau dy, \quad (3.25)
\end{aligned}$$

где C_8 не зависит от x .

Положим

$$g(y, x, t) = \begin{cases} \frac{e^{iyt}\tilde{\varphi}(y, x + iy)}{2(y - ix)}, & y \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right], \\ 0, & y \notin \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]. \end{cases}$$

Тогда

$$JG_1(s, x, t) = e^{xt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y, x, t)}{s - y + ix} dy \equiv e^{xt} S(s, x, t), \quad (3.26)$$

где через $S(s, x, t)$ обозначен соответствующий интеграл, представляющий собой свертку по переменной y функций $g(y, x, t)$ и $1/(y + ix)$. Переходя к преобразованиям Фурье по формуле

$$\tilde{r}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\tau} r(y) dy, \quad (3.27)$$

находим

$$\tilde{S}(\tau, x, t) = \tilde{g}(\tau, x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\tau y}}{y + ix} dy,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения на бесконечности и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\tau y}}{y + ix} dy = \begin{cases} 2\pi i e^{-\tau x}, & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

Известно, что $\|\tilde{r}\|_{L_2(-\infty, \infty)} = \|r\|_{L_2(-\infty, \infty)}$, где $r, \tilde{r}$ определены в (3.27). Поэтому с учетом (3.25) получаем

$$\begin{aligned} \int_1^2 |JG_1|^2 ds &= \int_1^2 \left| e^{xt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y, x, t)}{s - y + ix} dy \right|^2 ds \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{xt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y, x, t)}{s - y + ix} dy \right|^2 ds \\ &= e^{2xt} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y, x, t)}{s - y + ix} dy ds \right|^2 d\tau \\ &= (2\pi)^2 e^{2xt} \int_0^{\infty} |\tilde{g}(\tau, x, t) e^{-\tau x}|^2 d\tau \leq (2\pi)^2 e^{2xt} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(\tau, x, t)|^2 d\tau \\ &= (2\pi)^2 e^{2xt} \int_{-\infty}^{\infty} |g(y, x, t)|^2 dy \leq C_9 e^{2xt} \int_{1/2}^{5/2} \int_1^2 \sum_{l=0}^2 \left| \frac{\partial^l \varphi(\tau, x + iy)}{\partial \tau^l} \right|^2 d\tau dy, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где C_9 не зависит от $x > 0$ и t . Теперь из (3.23), (3.24), (3.28) следует, что

$$\int_1^2 |J_4(s, x, t)|^2 ds \leq K_4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{2xt} \int_1^2 \sum_{l=0}^2 \left| \frac{\partial^l \varphi(\tau, x + iy)}{\partial \tau^l} \right|^2 d\tau dy.$$

Оценка для $J_3(s, x, t)$ получается совершенно аналогично, что с учетом (3.21) и (3.22) завершает доказательство утверждения III леммы 2.

Итак, мы показали, что существуют не зависящие от t константы ε_0 и K такие, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ для всех решений задачи (3.1) справедливо неравенство

$$\|u(t)\|_{L_2(1,2)} \leq K(\|u_0\|_{L_2(1,2)} + \|u_1\|_{L_2(1,2)}).$$

Это следует из замечания к теореме и полученных выше оценок.

Список литературы

- [1] Л. Чезари, *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1964, 477 с.; пер. с англ.: L. Cesari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. N.F., **16**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1959, vii+271 pp.
- [2] В. А. Якубович, В. М. Старжинский, *Параметрический резонанс в линейных системах*, Наука, М., 1987, 328 с.
- [3] В. С. Белоносов, В. Н. Доровский, А. С. Белоносов, С. В. Доровский, “Гидродинамика газосодержащих слоистых систем”, *Успехи механики*, **3:2** (2005), 37–70.
- [4] В. С. Белоносов, “Спектральные свойства обобщенных функций и асимптотические методы теории возмущений”, *Матем. сб.*, **203:3** (2012), 3–22; англ. пер.: V. S. Belonov, “The spectral properties of distributions and asymptotic methods in perturbation theory”, *Sb. Math.*, **203:3** (2012), 307–325.
- [5] В. И. Дергузов, “Об устойчивости решений уравнений Гамильтона с неограниченными периодическими операторными коэффициентами”, *Матем. сб.*, **63(105):4** (1964), 591–619.
- [6] В. И. Дергузов, “Достаточные условия устойчивости гамильтоновых уравнений с неограниченными периодическими операторными коэффициентами”, *Матем. сб.*, **64(106):3** (1964), 419–435.
- [7] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972, 740 с.; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren Math. Wiss., **132**, Springer-Verlag, New York, 1966, xix+592 pp.
- [8] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962, 829 с.; пер. с англ.: E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, rev. ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1957, xii+808 pp.
- [9] Л. Шварц, *Анализ*, т. II, Мир, М., 1972, 528 с.; пер. с фр.: L. Schwartz, *Analyse. Deuxième partie: Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Collect. Enseign. Sci., **11**, Hermann, Paris, 1970, 433 pp.
- [10] Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной плоскости*, Наука, М., 1964, 267 с.; пер. с англ.: R. E. A. C. Paley, N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **19**, Amer. Math. Soc., New York, viii+184 pp.

Валерий Всеволодович Сказка
(Valeriy V. Skazka)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
Новосибирский государственный университет
E-mail: skazka@math.nsc.ru

Поступила в редакцию
08.11.2013