Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, Диссипативный оператор Шрёдингера без сингулярного непрерывного спектра, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 6, 137–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm830>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:38:24

УДК 517.9

С. А. Степин

Диссипативный оператор Шрёдингера без сингулярного непрерывного спектра

В работе средствами теории рассеяния изучается спектральная структура диссипативного оператора Шрёдингера на полуоси с комплексным потенциалом, обладающим конечным первым моментом. В предположении отсутствия спектральных особенностей установлена абсолютная непрерывность (в смысле функциональной модели) непрерывной компоненты спектра, доказано существование ограниченных волновых операторов и с их помощью построено спектральное представление операторов рассматриваемого класса.

Библиография: 18 названий.

В спектральной теории дифференциальных операторов особое место занимает исследование оператора Шрёдингера с комплексным потенциалом. Такие потенциалы возникают в ряде задач, моделирующих процессы с диссипацией энергии. Вообще, появление несамосопряженных операторов характерно при описании незамкнутых физических систем.

Определенная трудность в изучении несамосопряженных дифференциальных операторов и, в частности, оператора Шрёдингера с комплексным потенциалом связана с отсутствием априорной информации о поведении резольвенты вблизи точек спектра, а также и сложной структурой самого спектра. При этом в методах и результатах наблюдается существенное отличие от самосопряженного случая.

Начало исследованиям, относящимся к спектральной теории несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, положено известной работой М. В. Келдыша [1]. Первые результаты по спектральному анализу оператора Шрёдингера $-d^2/dx^2 + V(x)$ с комплексным потенциалом в случае полуоси были получены в работах [2] и [3] (см. также [4]), где найдены условия конечности множества собственных значений и построено разложение по собственным функциям непрерывного и точечного спектра в предположении, что потенциал $V(x)$ удовлетворяет требованию

$$\int_0^\infty |V(x)|(1+x^2) dx < \infty.$$

Как оказалось, в этих вопросах играют важную роль (и представляют определенную трудность) спектральные особенности – точки непрерывного спектра $\lambda = k^2 \geq 0$, для которых решение (функция Йоста) $e(x, k)$ уравнения Шрёдингера

Работа выполнена в рамках Программы поддержки молодых ученых и ведущих научных школ РФ (гранты № № МД-251.2003.01 и НШ-680.2003.1).

с асимптотикой e^{ikx} на бесконечности (см. [5]) удовлетворяет граничному условию в нуле. Спектральные особенности характеризуются тем, что в окрестности таких точек резольвента соответствующего оператора растет быстрее, чем резольвента самосопряженного оператора Шрёдингера, обратно пропорциональная расстоянию до спектра.

Основным инструментом в этих исследованиях в той или иной форме служили метод контурного интегрирования резольвенты и техника операторов преобразования. Соответствующее спектральное разложение получается в результате преобразования интеграла от разности предельных значений резольвенты на непрерывном спектре, заполняющем полуось $\mathbb{R}_+$. Таким образом, явно вычисляется спектральная функция. В тех случаях, когда указанное выше условие на $V(x)$ не выполнено, спектральная функция может оказаться обобщенной (см. [6]).

Другой подход к задаче построения спектрального разложения несамосопряженных операторов, разработанный в [7] и [8], основан на использовании аппарата теории рассеяния. В работе [7] такой подход применялся к исследованию спектральных свойств оператора Шрёдингера с комплексным потенциалом, удовлетворяющим условию

$$\int_0^\infty x|V(x)|dx < 1.$$

Еще одним средством спектрального анализа несамосопряженных (диссипативных) операторов служит функциональная модель Сёкефальви-Надя и Фояша (см. [9]).

В настоящей работе изучается спектральная структура диссипативного оператора Шрёдингера с мнимым потенциалом. При условии

$$\int_0^\infty x|V(x)|dx < \infty \quad (*)$$

и в предположении, что нет спектральных особенностей, будут построены волновые операторы и с их помощью найдено спектральное представление рассматриваемого оператора, что дает ответ на вопрос Ф. А. Березина (см. §1). При этом наряду с резольventой рассматривается характеристическая функция оператора Шрёдингера и используется запись волновых операторов в представлении его функциональной модели.

Оператор рассматриваемого типа возникает в сингулярной теории возмущений при описании перехода от дискретного спектра к непрерывному. Так, на примере уравнения

$$i\varepsilon y'' + Q(x)y = \lambda y,$$

где λ – спектральный параметр, $Q(x)$ – вещественнозначная функция, проявляются характерные для несамосопряженного случая особенности асимптотического ($\varepsilon \downarrow 0$) распределения собственных значений. В [10] разработана техника, позволяющая получать локализационные формулы для спектра такой задачи для малых $\varepsilon > 0$ типа правила квантования Бора–Зоммерфельда, и в случае уравнения Эйри найдены асимптотические формулы для собственных значений.

В настоящей статье основное внимание уделяется исследованию оператора Шрёдингера в инвариантном подпространстве, отвечающем непрерывному спектру.

При условии, что спектральных особенностей нет, установлена абсолютная непрерывность (в смысле функциональной модели) непрерывной компоненты спектра операторов рассматриваемого класса.

§ 1. Формулировка основных результатов

В пространстве $\mathcal{H} = L^2(0, \infty)$ рассматривается оператор

$$L: y \mapsto -y'' + V(x)y$$

с областью определения $\{y \in \mathcal{H} : y' \text{ абсолютно непрерывна, } y'' \in \mathcal{H}, y(0) = 0\}$, где $V(x)$ – измеримая ограниченная комплекснозначная функция. В случае $V(x) \equiv 0$ соответствующий оператор обозначим L_0 . Следующая теорема представляет собой усиление результата работы [8].

ТЕОРЕМА 1. *Если $\operatorname{Im} V(x) \geq 0$ и для некоторого $\alpha > \frac{5}{2}$ сходится интеграл $\int_0^\infty x(\ln x)^\alpha |V(x)|^2 dx$, то на $\mathcal{H}$ существует ограниченный прямой волновой оператор*

$$\Omega = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} \exp(itL) \exp(-itL_0).$$

Оператор Ω сплетает L и L_0 : $L\Omega = \Omega L_0$.

При построении обратного волнового оператора нас будет интересовать случай, когда $\operatorname{Re} V(x) \equiv 0$. Это ограничение вводится для простоты изложения. Большинство из приведенных ниже результатов переносится на общий случай, что, однако, требует некоторого видоизменения конструкции. Этому будет посвящена отдельная публикация.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть вполне несамосопряженный оператор L с потенциалом $V(x) = iQ(x)$, $Q(x) \geq 0$, удовлетворяющим условию (*), не имеет спектральных особенностей (т.е. решения Йоста не обращаются в нуль при $x = 0$). Тогда существует прямой волновой оператор, причем $\Omega\mathcal{H}$ совпадает с подпространством непрерывного спектра $\mathcal{H}_c$ оператора L . На подпространстве $\mathcal{H}_c$ существует ограниченный волновой оператор*

$$\tilde{\Omega} = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} \exp(itL_0) \exp(-itL)$$

и справедливо соотношение $\Omega L_0 \tilde{\Omega} = L|_{\mathcal{H}_c}$. Оператор $\tilde{\Omega}$ представляет собой левый обратный к Ω и правый обратный к нему на подпространстве $\mathcal{H}_c$.

Таким образом, в рассматриваемой ситуации получен ответ на вопрос, поставленный Ф. А. Березиным (см. [8]), а именно показано, что посредством прямого и обратного волновых операторов Ω и $\tilde{\Omega}$ осуществляется подобие оператора L_0 и части L_c оператора L , действующей в подпространстве непрерывного спектра $\mathcal{H}_c$. В терминах граничного поведения резольвенты $R(\lambda) = (L - \lambda I)^{-1}$ это подпространство допускает следующее описание: $\mathcal{H}_c$ представляет собой замыкание множества элементов $\varphi \in \mathcal{H}$, для которых вектор-функция $\sqrt{Q} R(\lambda)\varphi$ аналитична в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda > 0\}$ и

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{\mathbb{R}} \|\sqrt{Q} R(\omega + i\varepsilon)\varphi\|^2 d\omega < \infty.$$

В самосопряженном случае подобное условие возникает при построении теории рассеяния для относительно гладких по Като возмущений (см. [11]). В связи с формулировкой теоремы 2 отметим, что оператор L вполне несамосопряженный, если существует интервал, на котором $Q(x) \neq 0$.

В качестве приложения изучена связь построенных в теоремах 1 и 2 нестационарных волновых операторов со стационарными операторами преобразования из работы [8]. Указанные операторы преобразования (ввиду теорем разложения из [3] и [4]) также устанавливают подобие L_c и L_0 , однако при условиях, более ограничительных по сравнению с (*).

§ 2. Оценки решений уравнения Шрёдингера

Для $k \in \mathbb{C}_+$ обозначим через $s(x, k)$, $x \in \mathbb{R}_+$, решение уравнения

$$-y'' + V(x)y = k^2 y, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям $s(0, k) = 0$, $s'_x(0, k) = 1$. *Решением* (или *функцией*) *Йоста* уравнения (1) называется решение $e(x, k)$, которое имеет асимптотическое поведение $e(x, k) \sim e^{ikx}$ при $x \rightarrow +\infty$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (ср. [3]). *Если $\int_0^\infty x|V(x)| dx < \infty$ и $\tau := \operatorname{Im} k \geq 0$, $k \neq 0$, то у уравнения (1) существует решение Йоста и при всех $x \geq 0$ выполняются оценки*

$$|s(x, k)| \leq 2x \exp\left(2 \int_0^x \xi |V(\xi)| d\xi\right) e^{\tau x}, \quad (2)$$

$$|e(x, k)| \leq \exp\left(5 \int_x^\infty \xi |V(\xi)| d\xi\right) e^{-\tau x}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Воспользуемся тем, что искомое решение $s(x, k)$ при $\tau \geq 0$, $k \neq 0$, удовлетворяет интегральному уравнению

$$s(x, k) = \frac{\sin kx}{k} + \int_0^x \frac{\sin k(x-\xi)}{k} V(\xi) s(\xi, k) d\xi.$$

Поскольку $|\sin kx| \leq 2|k|xe^{\tau x}$ для $x \geq 0$, то

$$\begin{aligned} |s(x, k)| &\leq 2xe^{\tau x} + 2 \int_0^x (x-\xi) e^{\tau(x-\xi)} |V(\xi)| |s(\xi, k)| d\xi \\ &\leq 2xe^{\tau x} + 2xe^{\tau x} \int_0^x e^{-\tau\xi} |V(\xi)| |s(\xi, k)| d\xi. \end{aligned}$$

Как следствие этого для функции $\varphi(x, k) = e^{-\tau x} |s(x, k)| / (2x)$ согласно лемме Гронуолла имеем

$$\varphi(x, k) \leq 1 + 2 \int_0^x \xi |V(\xi)| \varphi(\xi, k) d\xi \leq \exp\left(2 \int_0^x \xi |V(\xi)| d\xi\right)$$

и, таким образом, для всех $x \geq 0$ справедливо неравенство (2).

2) Для $k \neq 0$, $\tau \geq 0$ положим $\varepsilon^{(0)}(x, k) = 1$,

$$\varepsilon^{(n+1)}(x, k) = \int_x^\infty \frac{e^{2ik(\xi-x)} - 1}{2ik} V(\xi) \varepsilon^{(n)}(\xi, k) d\xi$$

и установим индукцией по n оценку

$$|\varepsilon^{(n)}(x, k)| \leq \frac{5^n}{n!} \left(\int_x^\infty \xi |V(\xi)| d\xi \right)^n. \quad (4)$$

Отсюда будет следовать, что ряд $e(x, k) = e^{ikx} \sum_{n=0}^\infty \varepsilon^{(n)}(x, k)$ сходится, представляет решение интегрального уравнения

$$e(x, k) = e^{ikx} - \int_x^\infty \frac{\sin k(x-\xi)}{k} V(\xi) e(\xi, k) d\xi$$

и, стало быть, является искомой функцией Йоста для (1).

Заметим, что $|e^{2ik(\xi-x)} - 1| \leq 6|k|\xi$ при $\xi \in [x, x + 1/(2|k|)]$. Используя это неравенство и предположение индукции (4), будем иметь

$$\begin{aligned} & \left| \int_x^{x+1/(2|k|)} \frac{e^{2ik(\xi-x)} - 1}{2ik} V(\xi) \varepsilon^{(n)}(\xi, k) d\xi \right| \\ & \leq 3 \frac{5^n}{n!} \int_x^{x+1/(2|k|)} \xi |V(\xi)| \left(\int_\xi^\infty \eta |V(\eta)| d\eta \right)^n d\xi \\ & \leq 3 \frac{5^n}{(n+1)!} \left(\int_x^\infty \xi |V(\xi)| d\xi \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $|e^{2ik(\xi-x)} - 1| \leq 4|k|\xi$ для $\xi \in [x + 1/(2|k|), \infty)$, аналогично предыдущему получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x+1/(2|k|)}^\infty \frac{e^{2ik(\xi-x)} - 1}{2ik} V(\xi) \varepsilon^{(n)}(\xi, k) d\xi \right| \\ & \leq 2 \frac{5^n}{n!} \int_{x+1/(2|k|)}^\infty \xi |V(\xi)| \left(\int_\xi^\infty \eta |V(\eta)| d\eta \right)^n d\xi \\ & \leq 2 \frac{5^n}{(n+1)!} \left(\int_x^\infty \xi |V(\xi)| d\xi \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что для $\varepsilon^{(n+1)}(x, k)$ выполнена оценка вида (4) и, тем самым, установлена справедливость неравенства (3) при всех $x \geq 0$.

§3. Спектр и резольвента оператора L

Введем обозначение $e(k) := e(0, k)$. Равенство $e(k) = 0$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\lambda = k^2$, $\text{Im } k > 0$, было собственным значением оператора L . Вещественным нулям функции $e(k)$ на плоскости λ соответствуют *спектральные особенности* оператора L (см., например, [12]). Отметим, что функция $e(k)$ аналитична и согласно утверждению 1 ограничена в $\mathbb{C}_+$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 (см. [3]). При условии $\int_0^\infty |V(x)| dx < \infty$ спектр оператора L состоит из непрерывной и дискретной компонент

$$\sigma_c(L) = \mathbb{R}_+, \quad \sigma_d(L) = \{k^2 : e(k) = 0, k \in \mathbb{C}_+\}.$$

Множество собственных значений оператора L ограничено, не более чем счетно, а его предельные точки могут находиться лишь на полуоси $\mathbb{R}_+$. Оператор L не имеет положительных собственных значений.

Все числа $\lambda = k^2$, $\text{Im } k > 0$, $e(k) \neq 0$, принадлежат резольвентному множеству оператора L . Резольвента $R(\lambda) = (L - \lambda I)^{-1}$ есть интегральный оператор с ядром

$$R(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{e(k)} \begin{cases} e(x, k)s(\xi, k), & 0 < \xi \leq x; \\ s(x, k)e(\xi, k), & x \leq \xi < \infty. \end{cases}$$

Обозначим через A и B операторы умножения на функции $a(x)$ и $b(x)$ такие, что

$$\langle a \rangle = \left(\int_0^\infty x |a(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty, \quad \langle b \rangle = \left(\int_0^\infty x |b(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\int_0^\infty x |V(x)| dx < \infty$, то для $k \in \mathbb{C}_+$, $e(k) \neq 0$, справедлива оценка

$$\|e(k)AR(k^2)B\| \leq 4\langle a \rangle \langle b \rangle \exp\left(7 \int_0^\infty x |V(x)| dx\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\begin{aligned} C(k)f(x) &= a(x)e(x, k) \int_0^x s(\xi, k)b(\xi)f(\xi) d\xi, \\ D(z)f(x) &= a(x)s(x, k) \int_x^\infty e(\xi, k)b(\xi)f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Согласно оценкам (2), (3) имеем

$$\begin{aligned} \|C(k)f\|^2 &\leq K \int_0^\infty |a(x)|^2 e^{-2\tau x} \left(\int_0^x \xi e^{\tau \xi} |b(\xi)| |f(\xi)| d\xi \right)^2 dx \\ &\leq K \int_0^\infty |a(x)|^2 e^{-2\tau x} \left(\int_0^x \xi^2 e^{2\tau \xi} |b(\xi)|^2 d\xi \right) \left(\int_0^x |f(\xi)|^2 d\xi \right) dx \\ &\leq K \int_0^\infty x |a(x)|^2 \left(\int_0^x \xi |b(\xi)|^2 d\xi \right) \left(\int_0^x |f(\xi)|^2 d\xi \right) dx \\ &\leq K \langle a \rangle^2 \langle b \rangle^2 \|f\|^2, \end{aligned}$$

где $K = 4 \exp\left(14 \int_0^\infty x|V(x)| dx\right)$. Аналогично

$$\begin{aligned} \|D(k)f\|^2 &\leq K \int_0^\infty |a(x)|^2 x^2 e^{2\tau x} \left(\int_x^\infty e^{-\tau\xi} |b(\xi)| |f(\xi)| d\xi \right)^2 dx \\ &\leq K \int_0^\infty x |a(x)|^2 \left(\int_x^\infty \xi |b(\xi)|^2 d\xi \right) \left(\int_x^\infty |f(\xi)|^2 d\xi \right) dx \\ &\leq K \langle a \rangle^2 \langle b \rangle^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\|e(k)AR(k^2)B\| \leq \|C(k)\| + \|D(k)\| \leq 4\langle a \rangle \langle b \rangle \exp\left(7 \int_0^\infty x|V(x)| dx\right).$$

СЛЕДСТВИЕ. Оператор-функция $e(k)AR(k^2)B$ аналитична в $\mathbb{C}_+$.

Резольвента $R(k^2)$ мероморфна в $\mathbb{C}_+$, причем ее полюсы расположены в нулях $e(k)$ (утверждение 2). Оператор-функция $e(k)AR(k^2)B$ аналитична и согласно доказанному ограничена в проколотой окрестности каждого нуля $e(k)$, а следовательно, имеет там устранимую особенность.

§ 4. Прямой волновой оператор

Введем в рассмотрение унитарную группу $U_0(t) = \exp(itL_0)$ и однопараметрическое семейство операторов

$$U(t) = \exp(itL) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{it}{n} L \right)^{-n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Поскольку L – диссипативный оператор, соответствующая полугруппа $U(t)$, $t \geq 0$, сжимающая, и для доказательства существования волнового оператора Ω применим метод Кука (ср. [8]). При этом достаточно указать множество, плотное в $L^2(0, \infty)$, для элементов которого выполнено условие

$$\int_0^\infty \|V \exp(-itL_0)\varphi\| dt < \infty. \quad (5)$$

Обозначим через Φ стандартное синус-преобразование Фурье и заметим, что линейные комбинации функций $\varphi_s(x) = \Phi^{-1}(\varkappa e^{-\varkappa^2} \cos \varkappa s)(x)$, $s \in \mathbb{R}$, плотны в $L^2(0, \infty)$. Ввиду того что Φ реализует переход в спектральное представление оператора L_0 , имеем

$$\begin{aligned} \exp(-itL_0)\varphi_s(x) &= \Phi^{-1}(e^{-it\varkappa^2} \varkappa e^{-\varkappa^2} \cos \varkappa s) \\ &= \frac{(1+it)^{-3/2}}{i\pi} \left((x+s) \exp\left(-\frac{(x+s)^2}{4(1+it)}\right) + (x-s) \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4(1+it)}\right) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, для проверки условия Кука (5) достаточно установить сходимость интегралов

$$\int_0^\infty (1+t^2)^{-3/4} \left(\int_0^\infty |V(x)|^2 (x+s)^2 \exp\left(-\frac{(x+s)^2}{2(1+t^2)}\right) dx \right)^{1/2} dt. \quad (6)$$

Зафиксировав произвольное $\varepsilon \in (0, \alpha - \frac{5}{2})$, положим $\beta = \frac{1}{2} + \varepsilon$ и найдем $N > 0$ такое, что при $x \geq N$

$$(x+s) \exp\left(-\frac{1}{3}(\ln(x+s))^{2\beta}\right) \leq 1.$$

Далее, выберем $T > 0$ так, чтобы $T(\ln T)^\beta > \max\{M, N\}$, где $M = |s| + \max\{e^\alpha, e^\beta\}$, и для $t > T$

$$\frac{1}{2(1+t^2)} \frac{(t(\ln t)^\beta + s)^2}{(\ln(t(\ln t)^\beta + s))^{2\beta}} > \frac{1}{3}.$$

Первое слагаемое в правой части неравенства

$$\begin{aligned} & \left(\int_M^\infty |V(x)|^2 (x+s)^2 \exp\left(-\frac{(x+s)^2}{2(1+t^2)}\right) dx \right)^{1/2} \\ & \leq \left(\int_M^{t(\ln t)^\beta} |V(x)|^2 (x+s)^2 dx \right)^{1/2} \\ & \quad + \left(\int_{t(\ln t)^\beta}^\infty |V(x)|^2 (x+s)^2 \exp\left(-\frac{(x+s)^2}{2(1+t^2)}\right) dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

допускает оценку

$$\begin{aligned} & \left(\int_M^{t(\ln t)^\beta} |V(x)|^2 (x+s)^2 dx \right)^{1/2} \leq 2 \left(\int_M^{t(\ln t)^\beta} x^2 |V(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ & \leq 2 \left(\frac{t(\ln t)^\beta}{(\ln(t(\ln t)^\beta))^\alpha} \right)^{1/2} \left(\int_M^\infty x(\ln x)^\alpha |V(x)|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\int_T^\infty (1+t^2)^{-3/4} \left(\int_M^{t(\ln t)^\beta} |V(x)|^2 (x+s)^2 dx \right)^{1/2} dt < \infty,$$

так как

$$(1+t^2)^{-3/4} \left(\frac{t(\ln t)^\beta}{(\ln(t(\ln t)^\beta))^\alpha} \right)^{1/2} \sim \frac{1}{t(\ln t)^\gamma},$$

где $\gamma = (\alpha - \beta)/2 > 1$. Далее рассмотрим интеграл

$$\int_{t(\ln t)^\beta}^\infty |V(x)|^2 (x+s)^2 \exp\left(-\frac{(x+s)^2}{2(1+t^2)}\right) dx.$$

Поскольку

$$\frac{(x+s)^2}{(\ln(x+s))^{2\beta}} \geq \frac{(t(\ln t)^\beta + s)^2}{(\ln(t(\ln t)^\beta + s))^{2\beta}}$$

для $x \geq t(\ln t)^\beta$ и $t \geq T$, то согласно выбору T будем иметь

$$\exp\left(-\frac{(x+s)^2}{2(1+t^2)}\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{3}(\ln(x+s))^{2\beta}\right) \leq \frac{1}{x+s}.$$

Таким образом,

$$\int_{t(\ln t)^\beta}^{\infty} |V(x)|^2 (x+s)^2 \exp\left(-\frac{(x+s)^2}{2(1+t^2)}\right) dx \leq \int_M^{\infty} (x+s) |V(x)|^2 dx$$

и, следовательно, интеграл (6) сходится.

§ 5. Дискретный спектр и спектральные особенности

Ниже показано, что точки накопления собственных значений оператора L являются его спектральными особенностями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *При условии (*) аналитическая в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функция $e(k)$ непрерывна вплоть до вещественной оси.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. [13]). Если $\int_0^{\infty} |V(x)| dx < \infty$, то функция $e(k)$ аналитична в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ и продолжается по непрерывности на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (см. [3]). Покажем, что при условии $\int_0^{\infty} x|V(x)| dx < \infty$ функция $e(k)$ имеет предел при $k \rightarrow 0$, $\text{Im } k > 0$. Положим

$$\varepsilon^{(n)}(x, 0) = \int_x^{\infty} (\xi - x) V(\xi) \varepsilon^{(n-1)}(\xi, 0) d\xi, \quad \varepsilon^{(0)}(x, 0) = 1,$$

и установим (индукцией по n) равномерную для $x \geq 0$ сходимость $\varepsilon^{(n)}(x, k) \rightarrow \varepsilon^{(n)}(x, 0)$ при $k \rightarrow 0$, $\text{Im } k > 0$. Имеем неравенство

$$\begin{aligned} |\varepsilon^{(n+1)}(x, k) - \varepsilon^{(n+1)}(x, 0)| &\leq \max_{x \geq 0} |\varepsilon^{(n)}(x, k) - \varepsilon^{(n)}(x, 0)| \int_0^{\infty} x|V(x)| dx \\ &+ \int_x^{x+1/(2|k|)} \left| \frac{e^{2ik(\xi-x)} - 1}{2ik} - (\xi - x) \right| |V(\xi)| |\varepsilon^{(n)}(\xi, k)| d\xi \\ &+ \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \left(\int_{1/(2|k|)}^{\infty} x|V(x)| dx \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\left| \frac{e^{2ik(\xi-x)} - 1}{2ik} - (\xi - x) \right| \leq 4|k|(\xi - x)^2, \quad \xi \in \left[x, x + \frac{1}{2|k|} \right],$$

получаем

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+1/(2|k|)} \left| \frac{e^{2ik(\xi-x)} - 1}{2ik} - (\xi - x) \right| |V(\xi)| |\varepsilon^{(n)}(\xi, k)| d\xi \\ & \leq 4|k| \frac{5^n}{n!} \left(\int_0^\infty x|V(x)| dx \right)^n \int_x^{x+1/(2|k|)} (\xi - x)^2 |V(\xi)| d\xi \\ & \leq 4 \frac{5^n}{n!} \left(\int_0^\infty x|V(x)| dx \right)^n \left(2\sqrt{|k|} \int_0^\infty x|V(x)| dx + \frac{1}{2} \int_{1/\sqrt{|k|}}^\infty x|V(x)| dx \right). \end{aligned}$$

В силу оценки (4) ряд $e(x, k) = e^{ikx} \sum_{n=0}^\infty \varepsilon^{(n)}(x, k)$ сходится равномерно по $k \in \mathbb{C}_+$ и, следовательно,

$$\lim_{\mathbb{C}_+ \ni k \rightarrow 0} e(x, k) = \sum_{n=0}^\infty \varepsilon^{(n)}(x, 0).$$

В частности, $e(k) \rightarrow \sum_{n=0}^\infty \varepsilon^{(n)}(0, 0)$, когда $k \rightarrow 0$, $\operatorname{Im} k > 0$. При этом функция $e(s) := e(s + i0)$, $s \in \mathbb{R}$, непрерывна и $\lim_{s \rightarrow 0} e(s) = \lim_{\tau \downarrow 0} e(i\tau)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если у оператора L нет спектральных особенностей, то дискретный спектр $\sigma_d(L)$ конечен.

Согласно утверждению 2 точка $\lambda = k^2$ принадлежит $\sigma_d(L)$ в том и только том случае, если $e(k) = 0$, $k \in \mathbb{C}_+$. В силу утверждения 3 множество нулей $e(k)$ замкнуто, причем вещественные нули отвечают спектральным особенностям L . Таким образом, у оператора без спектральных особенностей множество собственных значений конечно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из доказательства утверждения 1, для $s \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$|e(s) - 1| \leq \exp\left(5 \int_0^\infty x|V(x)| dx\right) - 1,$$

откуда следует, что $e(s) \neq 0$, если интеграл $\int_0^\infty x|V(x)| dx$ достаточно мал.

§6. Характеристическая функция оператора L

Как отмечалось во введении, эффективными инструментами спектрального анализа диссипативных операторов служат характеристическая функция¹ и функциональная модель.

Всюду в дальнейшем мы будем заниматься рассмотрением диссипативного оператора Шрёдингера L с ограниченным потенциалом вида $V(x) = iQ(x)$, где $Q(x) \geq 0$. При этом $\operatorname{Re} L = L_0$ и $Q = \operatorname{Im} L \geq 0$. Характеристическая функция оператора L задается формулой

$$S(\lambda) = I + 2i\sqrt{Q}(L^* - \lambda I)^{-1}\sqrt{Q}$$

¹К этому направлению относится ряд публикаций в физической литературе, ссылки на которые можно найти в работе [14].

и действует в пространстве $E = \text{clos}_{\mathcal{H}} Q\mathcal{H}$. Аналитическая в $\mathbb{C}_+$ оператор-функция $S(\lambda)$ является там сжимающей и для почти всех (п.в.) $\omega \in \mathbb{R}$ имеет граничные значения $S(\omega) := S(\omega + i0)$, понимаемые в смысле сильной сходимости. При $\lambda \notin \sigma_d(L)$ справедливо равенство

$$S^{-1}(\lambda) = I - 2i\sqrt{Q}(L - \lambda I)^{-1}\sqrt{Q}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть выполнено условие (*). Тогда предельные значения $S^{-1}(\lambda)$ на вещественной оси существуют почти всюду и равномерно ограничены, если оператор L не имеет спектральных особенностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 1 для $k \in \mathbb{C}_+$ выполнена оценка

$$\|e(k)\sqrt{Q}R(k^2)\sqrt{Q}\| \leq 4 \exp\left(7 \int_0^\infty xQ(x)dx\right) \int_0^\infty xQ(x)dx,$$

и согласно теореме Фату аналитическая в $\mathbb{C}_+$ оператор-функция $e(k)\sqrt{V}R(k^2)\sqrt{V}$ имеет предельные значения п.в. на $\mathbb{R}$. Поскольку $e(k)$ непрерывна вплоть до вещественной оси (утверждение 3) и $e(s) \neq 0$ для $s \in \mathbb{R}$ (так как оператор L не имеет спектральных особенностей), то и у оператор-функции $S^{-1}(\lambda)$ почти всюду на вещественной оси существуют предельные значения в смысле сильной сходимости. Ввиду того что $e(k) \rightarrow 1$ при $|k| \rightarrow \infty$, эти предельные значения равномерно ограничены.

Дальнейшие рассуждения используют существование *скалярного кратного* характеристической функции $S(\lambda)$, т.е. ограниченной аналитической в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функции $m(\lambda) \neq 0$ такой, что

$$\Sigma(\lambda)S(\lambda) = S(\lambda)\Sigma(\lambda) = m(\lambda)I, \quad (7)$$

где $\Sigma(\lambda)$ – некоторая оператор-функция, аналитическая и ограниченная в $\mathbb{C}_+$. Нигде через $\sqrt{\lambda}$ обозначается ветвь корня с разрезом $\mathbb{R}_+$ и областью значений $\mathbb{C}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если выполнено условие (*), то $m(\lambda) := e(\sqrt{\lambda})$ является скалярным кратным характеристической функции $S(\lambda)$ оператора L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 1 аналитическая функция $e(k)$ ограничена в $\mathbb{C}_+$. В силу предложения 1 оператор-функция $e(k)\sqrt{Q}R(k^2)\sqrt{Q}$ также аналитична и ограничена в $\mathbb{C}_+$. Следовательно, аналитическая в $\mathbb{C}_+$ оператор-функция $\Sigma(\lambda) = m(\lambda)S^{-1}(\lambda)$ ограничена и соотношение (7) справедливо всюду в $\mathbb{C}_+$, в том числе в точках $\lambda \in \sigma_d(L)$, в которые оно продолжается по аналитичности.

Как и всякая аналитическая в $\mathbb{C}_+$ ограниченная функция, скалярное кратное $m(\lambda)$ допускает (см. [15]) каноническую факторизацию Неванлинны–Рисса

$$m(\lambda) = m_1(\lambda) \cdot m_2(\lambda) \cdot m_3(\lambda).$$

Здесь $m_1(\lambda)$ – произведение Бляшке, построенное по набору $\sigma_d(L)$, $m_2(\lambda)$ – сингулярная внутренняя функция вида

$$m_2(\lambda) = e^{ia\lambda} \exp\left(i \int_{\mathbb{R}} \frac{t\lambda - 1}{\lambda + t} d\mu(t)\right),$$

где μ – конечная сингулярная мера и $a \geq 0$, а $m_3(\lambda)$ – ограниченная в верхней полуплоскости внешняя функция, задаваемая формулой

$$m_3(\lambda) = e^{ib} \exp\left(\frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \ln(|m(\omega + i0)|) \frac{\omega\lambda + 1}{\lambda - \omega} \frac{d\omega}{1 + \omega^2}\right), \quad b \in \mathbb{R}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть выполнено условие (*). Если оператор L не имеет спектральных особенностей, то $m_1(\lambda)$ – конечное произведение Бляшке, а $m_2(\lambda) \equiv 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию из утверждения 3 при сделанных предположениях дискретный спектр $\sigma_d(L) \subset \mathbb{C}_+$ конечен и, следовательно, $m_1(\lambda)$ – конечное произведение Бляшке.

Применительно к рассматриваемой ситуации воспользуемся следующими фактами из теории аналитических функций: одновременно с $m(\lambda)$ внешний сомножитель $m_3(\lambda)$ непрерывен вплоть до вещественной оси, а сингулярная внутренняя функция $m_2(\lambda)$ продолжается по непрерывности лишь в те точки вещественной оси, которые не принадлежат носителю меры μ . Поскольку у оператора L нет спектральных особенностей, то $|m_3(\omega + i0)| = |m(\omega + i0)| \neq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Тогда $m_2(\lambda)$ продолжается по непрерывности на $\mathbb{R}$, а следовательно, $\text{supp } \mu = \emptyset$, т.е. сингулярный сомножитель в канонической факторизации $m(\lambda)$ имеет вид $m_2(\lambda) = \exp(ia\lambda)$. Ввиду того что $m(i\tau) \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow \infty$, последнее возможно, лишь если $a = 0$. В противном случае $m_2(i\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, что приводит к противоречию, поскольку в канонической факторизации скалярного кратного $m(\lambda)$ сомножители $m_1(\lambda)$ и $m_3(\lambda)$ – ограниченные функции.

§ 7. Спектральные компоненты оператора L

С помощью интеграла Рисса построим проектор

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda) d\lambda$$

на линейную оболочку $\mathcal{H}_d := P\mathcal{H}$ собственных векторов оператора L параллельно подпространству $\mathcal{H}_c := (I - P)\mathcal{H}$; здесь $\Gamma \subset \mathbb{C}_+$ – положительно ориентированный замкнутый контур, разделяющий компоненты $\sigma_c(L)$ и $\sigma_d(L)$. Оператор L разложим относительно прямой суммы $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \dot{+} \mathcal{H}_d$ в следующем смысле:

$$PD(L) \subset D(L), \quad L\mathcal{H}_c \subset \mathcal{H}_c, \quad L\mathcal{H}_d \subset \mathcal{H}_d,$$

где $D(L)$ ($= D(L_0)$) – область определения L (совпадающая с областью определения L_0). Подпространство $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ называется *приводящим для оператора L* , если последний коммутирует с ортопроектором из $\mathcal{H}$ на $\mathcal{L}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть существует такой интервал $\Delta \subset \mathbb{R}_+$, что $Q(x) > 0$ для $x \in \Delta$. Тогда оператор $L = L_0 + iQ$ вполне несамосопряженный, т.е. L не имеет нетривиальных приводящих подпространств, на которых он индуцирует самосопряженный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [16] оператор $L = L_0 + iQ$ является вполне несамосопряженным на приводящем L подпространстве

$$\mathcal{L} = \text{clos}_{\mathcal{H}} \text{Lin}\{R_0(\lambda)E, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+\}, \quad R_0(\lambda) = (L_0 - \lambda I)^{-1}.$$

Ввиду того что $Q(x) > 0$ на интервале Δ , для произвольной функции $f \in C_0^\infty(\Delta)$ при $t > 0$ и $\varepsilon > 0$ имеем

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\varepsilon - \infty}^{-i\varepsilon + \infty} e^{i\lambda t} R_0(\lambda) f d\lambda = U_0(t)f \in \mathcal{L}.$$

Если $g \perp \mathcal{L}$, то $(U_0(t)f, g) = 0$ для $t > 0$. Будем считать, что $f \neq 0$, и обозначим через φ и ψ синус-преобразования Фурье функций f и $\bar{g}$ соответственно. Заметим, что φ аналитична, а $\varphi\psi$ суммируема на $\mathbb{R}$, причем

$$\int_0^\infty e^{i\omega^2 t} \varphi(\omega) \psi(\omega) d\omega = (U_0(t)f, g) = 0, \quad t > 0.$$

Тогда $\varphi(\omega)\psi(\omega) = 0$ для п.в. $\omega \in \mathbb{R}$. Ввиду аналитичности φ последнее возможно лишь в том случае, когда $\psi(\omega) = 0$ при п.в. $\omega \in \mathbb{R}$ и, следовательно, $\mathcal{L}^\perp = \{0\}$. Тем самым установлено, что $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ и, таким образом, оператор L вполне несамосопряженный.

Абсолютно непрерывное (внешнее) подпространство $\mathcal{N}_e$ вполне несамосопряженного диссипативного оператора L определяется как замыкание в $\mathcal{H}$ множества векторов $\psi \in \mathcal{H}$, для которых вектор-функция $\sqrt{Q} R(\lambda)\psi$ аналитична в $\mathbb{C}_+$ и

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{\mathbb{R}} \|\sqrt{Q} R(\omega + i\varepsilon)\psi\|^2 d\omega < \infty.$$

Сингулярное (внутреннее) подпространство $\mathcal{N}_i$ оператора L состоит из векторов $\psi \in \mathcal{H}$ таких, что

$$((R(\omega + i\varepsilon) - R(\omega - i\varepsilon))\psi, \varphi) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \downarrow 0,$$

для всех $\varphi \in \mathcal{H}$ при п.в. $\omega \in \mathbb{R}$. Согласно [9] в рассматриваемой здесь ситуации имеет место разложение

$$\mathcal{H} = \mathcal{N}_e \dot{+} \mathcal{N}_i, \quad \mathcal{N}_e \subset \mathcal{H}_c, \quad \mathcal{H}_d \subset \mathcal{N}_i,$$

причем в силу предложения 2 проектор на $\mathcal{N}_i$ параллельно $\mathcal{N}_e$ ограничен, если у оператора L нет спектральных особенностей.

В работе автора [17] доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Если в канонической факторизации скалярного кратного $m(\lambda)$ характеристической функции $S(\lambda)$ вполне несамосопряженного оператора L сингулярный сомножитель тривиален, то $\mathcal{N}_i \cap \mathcal{H}_c = \{0\}$.

Комбинируя этот факт с предложением 3 и утверждением 4, для случая, когда выполнено условие (*), получаем

СЛЕДСТВИЕ. Если вполне несамосопряженный оператор $L = L_0 + iQ$ не имеет спектральных особенностей, то $\mathcal{N}_e = \mathcal{H}_c$ и $\mathcal{H}_d = \mathcal{N}_i$.

§ 8. Модельное представление оператора Ω

Ниже приведены необходимые для дальнейшего сведения о функциональной модели (см. [9]) вполне несамосопряженного диссипативного оператора применительно к $L = L_0 + iQ$.

Обозначим через $\mathfrak{L}$ гильбертово факторпространство функций на $\mathbb{R}$ со значениями в $E \oplus E$ и скалярным произведением

$$\left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{g} \end{pmatrix} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} I & S^*(\omega) \\ S(\omega) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\omega) \\ g(\omega) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f}(\omega) \\ \tilde{g}(\omega) \end{pmatrix} \right)_{E \oplus E} d\omega.$$

В $\mathfrak{L}$ рассмотрим подпространство

$$\mathfrak{H} = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathfrak{L} : f + S^*g \in H_-^2(E), Sf + g \in H_+^2(E) \right\},$$

здесь $H_{\pm}^2(E)$ – классы Харди граничных значений на вещественной оси аналитических вектор-функций $h: \mathbb{C}_{\pm} \rightarrow E$, для которых

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{\mathbb{R}} |h(\omega \pm i\varepsilon)|^2 d\omega < \infty.$$

Вполне несамосопряженный оператор L унитарно эквивалентен генератору сжимающей полугруппы

$$Z(t) = \mathcal{P}\mathcal{U}(t)|_{\mathfrak{H}}, \quad t \geq 0,$$

где $\mathcal{U}(t)$ – группа унитарных операторов, действующих в $\mathfrak{L}$ по формуле

$$\mathcal{U}(t) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(\omega) = \exp(i\omega t) \begin{pmatrix} f(\omega) \\ g(\omega) \end{pmatrix},$$

а $\mathcal{P}$ – ортопроектор из $\mathfrak{L}$ на $\mathfrak{H}$. Генератор полугруппы $Z(t)$ называется *функциональной моделью оператора L* . Изометрию, осуществляющую указанную выше унитарную эквивалентность, обозначим через $J: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{H}$. В модельном представлении имеем

$$J\mathcal{N}_e = \text{clos}_{\mathfrak{H}} \left\{ \mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix}, \sqrt{I - S^*S} f \in L^2(\mathbb{R}; E) \right\}.$$

ЛЕММА 1. В предположениях теоремы 1 либо при условии

$$\int_0^\infty x^\alpha Q(x) dx < \infty, \quad \alpha > 0, \quad (8)$$

оператор

$$W: \mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix},$$

записанный в представлении функциональной модели оператора $L = L_0 + iQ$, продолжается по непрерывности с линейала

$$\mathfrak{D} = \mathcal{P} \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathfrak{L} : f + S^*g + Sf + g = 0 \right\}$$

на $\mathfrak{H}$ и это продолжение совпадает с $J\Omega J^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Ввиду того что на своей области определения оператор W представим в виде $s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} JU(t)U_0(-t)J^{-1}$ (см. [17; лемма 1]), достаточно установить плотность в $\mathcal{H}$ множества

$$J^{-1}\mathfrak{D} = \{\psi \in \mathcal{H} : \sqrt{Q} R_0(\lambda)\psi \in \mathbf{H}_{\pm}^2(E)\}.$$

В силу известных (см., например, [7]) равенств

$$\int_{\mathbb{R}} \|\sqrt{Q} R_0(\omega \pm i\varepsilon)\varphi\|^2 d\omega = 2\pi \int_0^\infty e^{-2\varepsilon t} \|\sqrt{Q} U_0(\mp t)\varphi\|^2 dt,$$

где $\varepsilon > 0$, заключаем, что $\varphi \in J^{-1}\mathfrak{D}$, если $\|\sqrt{Q} U_0(t)\varphi\| \in L^2(0, \infty)$. Для функций $\varphi_s(x) = \Phi^{-1}(\omega e^{-\omega^2} \cos \omega s)(x)$ имеем

$$\begin{aligned} \|\sqrt{Q} U_0(t)\varphi_s\| &\leq \left(\left(\int_0^\infty Q(x)(x+s)^2 \exp\left(-\frac{(x+s)^2}{2(1+t^2)}\right) dx \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^\infty Q(x)(x-s)^2 \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{2(1+t^2)}\right) dx \right)^{1/2} \right) (1+t^2)^{-3/4} \end{aligned}$$

(см. доказательство теоремы 1). Оценка

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty Q(x)(x+s)^2 \exp\left(-\frac{(x+s)^2}{2(1+t^2)}\right) dx \\ &\leq 2(1+t^2)^{3/4} \left(\int_0^\infty Q(x)^2 (x+s)^2 \exp\left(-\frac{(x+s)^2}{2(1+t^2)}\right) dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

показывает, что для каждого $s \in \mathbb{R}$ интеграл

$$\int_0^\infty (1+t^2)^{-3/2} \left(\int_0^\infty Q(x)(x+s)^2 \exp\left(-\frac{(x+s)^2}{2(1+t^2)}\right) dx \right) dt \quad (9)$$

сходится, если выполнены условия теоремы 1, и, таким образом, $\|\sqrt{Q} U_0(t)\varphi_s\| \in L^2(0, \infty)$. Остается учесть, что линейные комбинации функций φ_s плотны в $\mathcal{H}$.

2) Покажем теперь, что при условии (8), в котором (не ограничивая общности) будем считать $\alpha < 2$, интеграл (9) также сходится. Зафиксируем $\varepsilon \in (0, \alpha/(2-\alpha))$ и выберем $T \geq 1 + |s|$ так, чтобы при $t \geq T$ выполнялись неравенства

$$(t^{1+\varepsilon} + s)^2 \exp\left(-\frac{(t^{1+\varepsilon} + s)^2}{4t^2}\right) \leq 1 \leq \frac{(t^{1+\varepsilon} + s)^2}{4t^2}.$$

При $x \geq t^{1+\varepsilon}$ и $t \geq T$ имеем

$$(x + s)^2 \exp\left(-\frac{(x + s)^2}{2(1 + t^2)}\right) \leq (t^{1+\varepsilon} + s)^2 \exp\left(-\frac{(t^{1+\varepsilon} + s)^2}{4t^2}\right) \leq 1$$

и, следовательно,

$$\int_T^\infty (1 + t^2)^{-3/2} \left(\int_{t^{1+\varepsilon}}^\infty Q(x)(x + s)^2 \exp\left(-\frac{(x + s)^2}{2(1 + t^2)}\right) dx \right) dt < \infty.$$

Далее, справедливы оценки

$$\begin{aligned} \int_0^{|s|} Q(x)(x + s)^2 \exp\left(-\frac{(x + s)^2}{2(1 + t^2)}\right) dx &\leq \int_0^{|s|} Q(x)(x + s)^2 dx, \\ \int_{|s|}^{t^{1+\varepsilon}} Q(x)(x + s)^2 \exp\left(-\frac{(x + s)^2}{2(1 + t^2)}\right) dx &\leq 4t^\beta \int_0^\infty x^\alpha Q(x) dx, \end{aligned}$$

где $\beta = (1 + \varepsilon)(2 - \alpha) < 2$ и, стало быть,

$$\int_0^\infty (1 + t^2)^{-3/2} \left(\int_0^{t^{1+\varepsilon}} Q(x)(x + s)^2 \exp\left(-\frac{(x + s)^2}{2(1 + t^2)}\right) dx \right) dt < \infty.$$

Сказанное позволяет в рассматриваемой ситуации определить прямой волновой оператор $\Omega = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} U(t)U_0(-t)$ как продолжение оператора $J^{-1}WJ$ с множества $J^{-1}\mathfrak{D}$ на все $\mathcal{H}$. Учитывая, что $\text{Ran } W \subset J\mathcal{N}_e$, получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Имеет место включение $\Omega\mathcal{H} \subset \mathcal{N}_e$.*

§9. Обратный волновой оператор

ЛЕММА 2. *Пусть выполнено условие (*) и оператор $L = L_0 + iQ$ не имеет спектральных особенностей. Тогда на подпространстве $\mathcal{N}_e$ корректно определен ограниченный оператор*

$$\tilde{\Omega} = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} U_0(t)U(-t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 1 аналитическая в $\mathbb{C}_+$ оператор-функция $(I + S(\lambda))^{-1} = \frac{1}{2}(I - i\sqrt{Q}R_0(\lambda)\sqrt{Q})$ ограничена и, следовательно, почти всюду на вещественной оси она имеет предельные значения в смысле сильной сходимости. Это позволяет определить (в представлении функциональной модели) оператор

$$\widetilde{W}: \mathcal{D} \begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{D} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

где $g = -(I + S^*)^{-1}(I + S)f$ и $\sqrt{T - S^*S}f \in L^2(\mathbb{R}; E)$. На своей области определения оператор $\widetilde{W}$ представим в виде $s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} JU_0(t)U(-t)J^{-1}$ (см. [17; лемма 2]).

В силу предложения 2 предельные значения $S^{-1}(\omega)$ существуют почти всюду на вещественной оси и равномерно ограничены. Как следствие этого (см. [16]) группа $U(t)$ равномерно ограничена на абсолютно непрерывном подпространстве $\mathcal{N}_e$. Таким образом, оператор $J^{-1}\widetilde{W}J$ ограничен и может быть продолжен по непрерывности на $\mathcal{N}_e$, что позволяет корректно определить обратный волновой оператор

$$\widetilde{\Omega}\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} U_0(t)U(-t)\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{N}_e.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из определений W и $\widetilde{W}$, построенный оператор $\widetilde{\Omega}$ является левым обратным к прямому волновому оператору Ω и, одновременно, правым обратным на подпространстве $\mathcal{N}_e$.

В случае, когда оператор L не имеет спектральных особенностей, из результатов работ [3] и [4] следует, что при дополнительном условии $(1 + x^2)V(x) \in L^1(0, \infty)$ преобразование

$$\Psi f(\kappa) = \int_0^\infty f(x)\psi(x, \kappa) dx,$$

где $\psi(x, \kappa) = \kappa s(x, \kappa)$, отображает $L^2(0, \infty)$ на себя и $\Psi\mathcal{H}_d = 0$. В [8] показано, что оператор $\Phi^{-1}\Psi\Omega$ унитарно эквивалентен оператору умножения на функцию

$$A(\kappa) = 1 + \int_0^\infty e^{i\kappa x} s(x, \kappa)V(x) dx,$$

причем указанная эквивалентность осуществляется оператором Φ :

$$\Psi\Omega\Phi^{-1} = A(\kappa)I.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. При условии (*) для всех $\kappa \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $A(\kappa) = e(\kappa)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что решение $s(x, \kappa)$, $\kappa \neq 0$, может быть представлено в виде

$$s(x, \kappa) = \frac{1}{2i\kappa} (e(-\kappa)e(x, \kappa) - e(\kappa)e(x, -\kappa)),$$

где $e(x, \kappa) \sim e^{i\kappa x}$ при $x \rightarrow +\infty$. Далее, согласно утверждениям 1 и 3 функция $e(\kappa)$ ограничена на $\mathbb{R}$ и, следовательно,

$$s(x, \kappa) = \frac{1}{2i\kappa} (e^{i\kappa x} (e(-\kappa) + o(1)) - e^{-i\kappa x} (e(\kappa) + o(1))),$$

когда $x \rightarrow +\infty$. С другой стороны, решение $s(x, \kappa)$, $\kappa \neq 0$, удовлетворяет интегральному уравнению

$$s(x, \kappa) = \frac{\sin \kappa x}{\kappa} + \int_0^x \frac{\sin \kappa(x - \xi)}{\kappa} V(\xi) s(\xi, \kappa) d\xi$$

(см. доказательство утверждения 1) и, следовательно,

$$s(x, \kappa) = \frac{1}{2i\kappa} \left(e^{i\kappa x} \left(1 + \int_0^x e^{-i\kappa \xi} V(\xi) s(\xi, \kappa) d\xi \right) - e^{-i\kappa x} \left(1 + \int_0^x e^{i\kappa \xi} V(\xi) s(\xi, \kappa) d\xi \right) \right).$$

При условии (*) интеграл $\int_0^\infty e^{i\kappa \xi} V(\xi) s(\xi, \kappa) d\xi$ в силу оценки (2) сходится и

$$e(\kappa) = 1 + \int_0^\infty e^{i\kappa x} s(x, \kappa) V(x) dx = A(\kappa).$$

В точку $\kappa = 0$ доказанное равенство продолжается по непрерывности.

СЛЕДСТВИЕ. Если L не имеет спектральных особенностей, то $A(\kappa)$ не обращается в нуль, причем

$$\Phi^{-1} A(\kappa)^{-1} \Psi \Omega = I.$$

Композиция $\Phi^{-1} A(\kappa)^{-1} \Psi$ задает, таким образом, стационарное представление обратного волнового оператора $\tilde{\Omega}$.

§ 10. Оператор L в подпространстве непрерывного спектра

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Существование прямого волнового оператора

$$\Omega = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} U(t) U_0(-t)$$

и включение $\Omega \mathcal{H} \subset \mathcal{N}_e$ установлены в теореме 1 и в лемме 1. Построенный в лемме 2 оператор

$$\tilde{\Omega} = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} U_0(t) U(-t)$$

служит левым обратным к Ω . Он же является правым обратным к Ω на абсолютно непрерывном подпространстве $\mathcal{N}_e$ оператора L и поэтому $\Omega \mathcal{H} = \mathcal{N}_e$. Совпадение подпространств $\mathcal{N}_e$ и $\mathcal{H}_c$ получено в качестве следствия из утверждения 6.

Как известно из общей теории рассеяния (см. [11]), прямой волновой оператор Ω сплетает L и L_0 :

$$L\Omega = \Omega L_0, \quad \Omega D(L_0) \subset D(L) \cap \mathcal{H}_c.$$

Покажем, что в рассматриваемой ситуации $\Omega D(L_0) = D(L) \cap \mathcal{H}_c$. Для $t > 0$ справедливо соотношение $U_0(t)\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}U(t)$. Выполним предельный переход при $t \downarrow 0$ в равенстве

$$\tilde{\Omega} \frac{U(t) - I}{t} \psi = \frac{U_0(t) - I}{t} \tilde{\Omega} \psi,$$

где $\psi \in D(L) \cap \mathcal{H}_c$. Ввиду того что $L(D(L) \cap \mathcal{H}_c) \subset \mathcal{H}_c$ и оператор $\tilde{\Omega}$ ограничен, предел левой части существует и равен $i\tilde{\Omega}L\psi$. Одновременно существует предел правой части:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{U_0(t) - I}{t} \tilde{\Omega} \psi = iL_0\tilde{\Omega}\psi,$$

причем $\tilde{\Omega}\psi \in D(L_0)$. Таким образом, $\tilde{\Omega}(D(L) \cap \mathcal{H}_c) \subset D(L_0)$, и поскольку Ω левый обратный к $\tilde{\Omega}$, то $D(L) \cap \mathcal{H}_c \subset \Omega D(L_0)$. В результате установлено совпадение $\Omega D(L_0) = D(L) \cap \mathcal{H}_c$. С учетом этого из сплетающего соотношения $L\Omega = \Omega L_0$ следует, что $L\psi = \Omega L_0\tilde{\Omega}\psi$ для произвольного $\psi \in D(L) \cap \mathcal{H}_c$, т.е.

$$L_c = \Omega L_0\tilde{\Omega}.$$

В заключение укажем явно стационарное представление волнового оператора Ω в случае, когда $(1 + x^2)V(x) \in L^1(0, \infty)$. Предварительно заметим, что в отсутствии спектральных особенностей у оператора L отображение $\Psi: \mathcal{H}_c \rightarrow \mathcal{H}$ обратимо (см. [3], [4]) и обратное отображение задается формулой

$$\Psi^{-1}g(\kappa) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g(\kappa)\psi(x, \kappa) \frac{d\kappa}{e(\kappa)e(-\kappa)}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *Прямой волновой оператор Ω совпадает с композицией $\Psi^{-1}A(\kappa)\Phi$.*

Как отмечено в [18], формулы обращения преобразования Ψ , найденные в [3] и [4], позволяют построить стационарные операторы, осуществляющие подобие L_c и L_0 . Налагаемое при этом условие суммируемости $(1 + x^2)V(x)$ более ограничительно по сравнению с (*).

Список литературы

1. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. №1. С. 11–14.
2. Гельфанд И. М. О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов // УМН. 1952. Т. 7. №6. С. 183–184.
3. Наймарк М. А. Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси // Труды ММО. 1954. Т. 3. С. 181–270.
4. Левин Б. Я. Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. 1956. Т. 106. №2. С. 187–190.
5. Березин Ф. А., Шубин М. А. Уравнение Шрёдингера. М.: Изд-во МГУ, 1983.

6. *Марченко В. А.* Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка // Матем. сб. 1960. Т. 52. №2. С. 739–788.
7. *Kato T.* Wave operators and similarity for some nonselfadjoint operators // Math. Ann. 1966. V. 162. P. 258–279.
8. *Станкевич И. В.* О линейном подобию некоторых несамосопряженных операторов самосопряженным и об асимптотике при $t \rightarrow \infty$ решения нестационарного уравнения Шрёдингера // Матем. сб. 1966. Т. 69. №2. С. 161–207.
9. *Павлов Б. С.* Спектральный анализ диссипативного оператора Шрёдингера в терминах функциональной модели // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 65. М.: ВИНТИ, 1991. С. 95–163.
10. *Степин С. А.* Несамосопряженные сингулярные возмущения: модель перехода от дискретного спектра к непрерывному // УМН. 1995. Т. 50. №6. С. 219–220.
11. *Яфаев Д. Р.* Математическая теория рассеяния. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1994.
12. *Schwartz J. T.* Some nonselfadjoint operators // Comm. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 609–639.
13. *Агранович З. С., Марченко В. А.* Обратная задача теории рассеяния. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1960.
14. *Dittes F. M.* The decay of quantum systems with a small number of open channels // Phys. Rep. 2000. V. 339. №4. P. 215–316.
15. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ, 1963.
16. *Набоко С. Н.* Функциональная модель теории возмущений и ее приложения к теории рассеяния // Труды МИАН. 1980. Т. 147. С. 86–114.
17. *Степин С. А.* Волновые операторы для линеаризованного уравнения Больцмана в односкоростной теории переноса // Матем. сб. 2001. Т. 192. №1. С. 139–160.
18. *Лянце В. Э.* Несамосопряженный дифференциальный оператор второго порядка на полуоси // Добавление в книгу: М. А. Наймарк “Линейные дифференциальные операторы”. М.: Наука, 1969. С. 443–498.