Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Новиков, Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $\mathfrak{so}(3, 1)$, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 8, 41–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8300>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:49:24

УДК 517.938.5

Д. В. Новиков

Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $\mathfrak{so}(3, 1)$

Изучается интегрируемый случай Соколова на $\mathfrak{so}(3, 1)^*$. Это гамильтонова система с двумя степенями свободы, где гамильтониан и дополнительный интеграл являются однородными многочленами степеней 2 и 4 соответственно. Данная система интересна тем, что, как оказывается, связанные совместные поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла являются некомпактными поверхностями. Найдены критические точки отображения момента, их индексы, построена бифуркационная диаграмма, найдена топология некомпактных слоев, т.е. описаны замыкания решений в системе Соколова для случая $\mathfrak{so}(3, 1)$.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: интегрируемые гамильтоновы системы, полнота векторных полей, бифуркационная диаграмма, отображение момента, некомпактные особенности.

DOI: 10.4213/sm8300

§ 1. Введение

Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная алгебра Ли с базисом $e_1, \dots, e_n$, а $\mathfrak{g}^*$ – соответствующая коалгебра с дуальным базисом $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$, т.е. $\epsilon^i(e_j) = \delta_j^i$. Пусть $x_1, \dots, x_n$ – аффинные координаты на $\mathfrak{g}^*$, соответствующие базису $e_1, \dots, e_n$, а c_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$: $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скобка Пуассона–Ли на пространстве $\mathfrak{g}^*$ задается следующей формулой:

$$\{f, g\}(x) = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

где f и g – гладкие функции на $\mathfrak{g}^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Уравнения

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\},$$

задающие динамическую систему на $\mathfrak{g}^*$, где H – гладкая функция (гамильтониан) на $\mathfrak{g}^*$, называются *уравнениями Эйлера на коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$* .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00119).

Они часто встречаются в механике и физике. Например, различные задачи о движении твердого тела задаются уравнениями Эйлера на коалгебре Ли $e(3)^*$. Соответствующее векторное поле называется *косым градиентом* и обозначается $\text{sgrad } H$.

Рассмотрим следующее семейство скобок Пуассона–Ли на пространстве $\mathbb{R}^6$:

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, R_j\} = \varepsilon_{ijk} R_k, \quad \{R_i, R_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} S_k,$$

где S_i и R_i – компоненты трехмерных векторов S и R , ε_{ijk} – знак перестановки $(123) \rightarrow (ijk)$, а $\varkappa$ – произвольное действительное число. При $\varkappa > 0$ ($\varkappa = 1$) получаем, что скобка соответствует алгебре Ли $\text{so}(4)$, при $\varkappa = 0$ – алгебре Ли $e(3)$, а при $\varkappa < 0$ ($\varkappa = -1$) – алгебре Ли $\text{so}(3, 1)$. Функции Казимира –

$$f_1 = \varkappa S^2 + R^2, \quad f_2 = \langle S, R \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Классические интегрируемые случаи на этом семействе алгебр Ли включают случаи Эйлера

$$H = \langle AS, S \rangle, \quad K = \langle S, S \rangle,$$

Лагранжа

$$H = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + \beta S_3^2) + \alpha R_3, \quad K = S_3$$

и Ковалевской

$$H = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + 2S_3^2) + \alpha R_1, \\ K = \left(\frac{S_1^2 - S_2^2}{2} - \alpha R_1 \right)^2 + \varkappa \alpha^2 \left(\frac{S_1^2 - S_2^2}{2} - \alpha R_1 \right) + (S_1 S_2 - \alpha R_2)^2.$$

Здесь A – постоянная симметричная матрица, α, β – произвольные действительные параметры.

Рассмотрим гамильтонианы вида

$$H = \langle AS, S \rangle + \langle b, S \times R \rangle,$$

где A – постоянная симметричная матрица, $b \neq 0$ – постоянный вектор, $\times$ – векторное произведение. Подобные гамильтонианы могут представлять интерес, например, в рамках модели Пуанкаре–Жуковского, описывающей движение твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной вихревой жидкостью (см. работу А. Пуанкаре [1]). Другие возможные приложения квадратичных гамильтонианов обсуждаются в книге А. В. Борисова и И. С. Мамаева [2].

Новые интегрируемые случаи уравнений Эйлера с квадратичным гамильтонианом и интегралом четвертой степени на этом семействе алгебр Ли были найдены А. В. Борисовым, И. С. Мамаевым и В. В. Соколовым в работах [3]–[5]. Случай Соколова –

$$H_1 = -\frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 + \alpha S_2^2 + S_1 R_2 - S_2 R_1, \\ K_1 = Q_3(\varkappa S^2 - R^2) - \alpha Q_1^2 + \frac{\varkappa}{\alpha} Q_2^2 + \left(\frac{\varkappa}{\alpha} - \alpha \right) Q_3^2, \quad \text{где } Q = S \times R.$$

Можно считать, что $\varkappa$ равно 1, -1 или 0. Действительно, замена

$$R' = \frac{R}{\sqrt{|\varkappa|}}, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{\sqrt{|\varkappa|}}$$

при $\varkappa \neq 0$ приводит нас к этому случаю.

Как известно (см., например, книгу В. В. Трофимова и А. Т. Фоменко [6]), ограничение скобки Пуассона–Ли на орбиты общего положения коприсоединенного представления соответствующей группы Ли задает гамильтонову систему на $M_{c,g}^4 = \{(S, R) \mid f_1(S, R) = c, f_2(S, R) = g\}$, $c \neq 0$. В нашем случае можно считать, что $c = \pm 1$. Действительно, замена $S = \sqrt{|c|}S'$, $R = \sqrt{|c|}R'$ приводит нас к этому случаю, при этом векторное поле $\text{sgrad } H$ просто умножается на $\sqrt{|c|}^3$. Здесь существенно, что гамильтониан является однородным. Поэтому в этой работе мы считаем, что $c = 1$.

Кроме того, следуя работе А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [7], без ограничения общности можно полагать, что $g \geq 0$, поскольку при замене

$$(S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3) \rightarrow (-S_1, S_2, S_3, R_1, -R_2, -R_3)$$

f_1 , H , K сохраняются, f_2 меняет знак.

Далее можно считать, что $\alpha > 0$, так как замена $S_1 \rightarrow -S_1$, $R_1 \rightarrow -R_1$, $\alpha \rightarrow -\alpha$ приводит нас к этому случаю.

Как и в работе А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [7], при $\varkappa < 0$ можно исследовать только случай $\alpha \geq \sqrt{-\varkappa}$, так как при замене $S_1 \leftrightarrow S_2$, $R_1 \leftrightarrow R_2$, $\alpha \rightarrow \frac{\varkappa}{\alpha}$ инварианты f_1 , f_2 сохраняются, а гамильтониан и дополнительный интеграл меняют знак (что не влияет на топологию).

Под изучением системы мы понимаем исследование слоения Лиувилля, слоями которого являются связные компоненты поверхностей уровня гамильтониана и дополнительного интеграла. Лиувиллево слоение интегрируемой системы Соколова на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$ описано в работе А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [7], а также в работах Г. Хагигатдуста [8] и [9]. Слоение Лиувилля на алгебре $\mathfrak{e}(3)$ изучается в работе автора [10]. В настоящей работе мы будем изучать строение интегрируемого случая Соколова на оставшейся алгебре Ли $\mathfrak{so}(3, 1)$. Начало изучения данного случая было положено работой автора [11], где была найдена топология изоэнергетической поверхности уровня, а также дипломной работой автора [12], где было найдено множество критических точек отображения момента.

В этой работе мы исследуем слоение Лиувилля. Оказывается, что в исследуемом случае поле косо́го градиента гамильтониана неполно, что делает невозможным применение теоремы Лиувилля. Несмотря на это, нам удалось получить описание топологии совместной поверхности уровня гамильтониана и дополнительного интеграла (см. § 8).

Как известно, основы теории топологической классификации были заложены А. Т. Фоменко в работах [13]–[15] и других. Указанный новый подход в изучении интегрируемых систем, предложенный А. Т. Фоменко, был затем продолжен А. Т. Фоменко и Х. Цишангом, см., например, работу А. Т. Фоменко

и Х. Цишанга [16]. Ими был открыт топологический инвариант интегрируемых систем (именуемый инвариантом Фоменко–Цишанга). Это граф с числовыми метками, являющийся полным инвариантом таких систем: две системы лиувиллево эквивалентны, если и только если графы Фоменко–Цишанга совпадают. Далее школа А. Т. Фоменко разработала методы вычисления меченых молекул, см., например, работу А. В. Болсинова, П. Рихтера и А. Т. Фоменко [17]. Из последних работ, посвященных данной тематике, отметим работы А. Т. Фоменко и А. Ю. Коняева [18], а также Е. А. Кудрявцевой и А. Т. Фоменко [19]. Бифуркационные диаграммы многих важных интегрируемых систем были вычислены М. П. Харламовым в книге [20]. В серии работ А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко [21], А. А. Ошемкова [22], П. Е. Рябова [23] и других были найдены классифицирующие инварианты для многих конкретных физических и механических интегрируемых систем. Результаты теории топологической классификации, полученные школой А. Т. Фоменко, подробно изложены А. В. Болсиновым и А. Т. Фоменко в книге [24].

Сама общая задача определить и классифицировать некомпактные перестройки (по аналогии с компактной классификацией), в рамках которой в настоящей статье проводится исследование случая Соколова, поставлена А. Т. Фоменко.

Автор выражает глубокую благодарность А. Т. Фоменко, А. А. Ошемкову за постановку задачи, постоянное внимание и помощь. Особенную благодарность автор хотел бы выразить М. П. Харламову, без которого данная работа не была бы написана.

§ 2. Бифуркационные значения

Дадим ряд нужных применительно к нашей ситуации определений. Мы следуем изложению из книги М. П. Харламова [20].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $F: X \rightarrow Y$ – дифференцируемое отображение многообразий. Отображение называется *локально тривиальным над точкой* $y_0 \in Y$, если существует такая окрестность U точки y_0 в Y , что $F^{-1}(U)$ диффеоморфно $F^{-1}(y_0) \times U$, и этот диффеоморфизм φ замыкает диаграмму (p_2 – проекция на второй сомножитель)

$$\begin{array}{ccc} F^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & F^{-1}(y_0) \times U \\ \downarrow F & \nearrow p_2 & \\ U & & \end{array}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Бифуркационным множеством, или бифуркационной диаграммой*, Σ отображения F называется множество бифуркационных значений, т.е. тех точек $y \in Y$, над которыми F не является локально тривиальным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Точка $x \in X$ называется *критической* для отображения F , если ранг дифференциала отображения F в точке x не максимален. *Критическими значениями* называют образы критических точек при отображении F .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Критические значения принадлежат бифуркационной диаграмме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если точка $x \in X$ – критическая для отображения F , то по определению ранг дифференциала отображения F в точке x не максимален. С другой стороны, если отображение F локально тривиально над точкой $y = F(x)$, то F равно $p_2 \circ \varphi$ в некой окрестности точки x . Но $p_2 \circ \varphi$ – отображение постоянного ранга, равного размерности Y . В критической же точке x ранг F меньше, чем размерность Y .

Мы будем искать бифуркационную диаграмму для отображения момента $H \times K: M_{1,g}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k)$ и для заданного гамильтонианом $H: M_{1,g}^4 \rightarrow \mathbb{R}(h)$ отображения.

§ 3. Бифуркационные значения гамильтониана

Бифуркационные значения гамильтониана – значения, являющиеся бифуркационными для отображения $H: M_{1,g}^4 \rightarrow \mathbb{R}(h)$. Критическими точками гамильтониана являются те точки, где косоу градиент гамильтониана равен нулю.

Выпишем явно поле $\text{sgrad } H$:

$$\begin{aligned} \{S_1, H\} &= 2\alpha S_2 S_3 + S_1 R_3 - R_1 S_3, & \{R_1, H\} &= 2\alpha S_2 R_3 + \varkappa S_1 S_3 - R_1 R_3, \\ \{S_2, H\} &= \frac{2\varkappa}{\alpha} S_1 S_3 + S_2 R_3 - R_2 S_3, & \{R_2, H\} &= \frac{2\varkappa}{\alpha} S_1 R_3 + \varkappa S_2 S_3 - R_2 R_3, \\ \{S_3, H\} &= -2\left(\alpha + \frac{\varkappa}{\alpha}\right) S_1 S_2, & \{R_3, H\} &= -2\left(\alpha R_1 S_2 + \frac{\varkappa}{\alpha} S_1 R_2\right) + R_1^2 \\ & & & + R_2^2 - \varkappa S_1^2 - \varkappa S_2^2. \end{aligned}$$

Можно убедиться, что при $\varkappa = 1$ (случай $\mathfrak{so}(4)^*$) мы получим в точности формулы (5) из работы А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [7].

Приравняв к нулю $\text{sgrad } H$, получаем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для произвольного $\varkappa \neq -\alpha^2$ критические точки гамильтониана образуют следующие двупараметрические семейства. При этом $\text{sgrad } K$ в этих точках тоже равен нулю.

- 1) $(0, 0, S_3, 0, 0, R_3)$;
- 2) $(0, S_2, 0, R_1, R_2, 0)$, где $R_1^2 + R_2^2 - \varkappa S_2^2 - 2\alpha R_1 S_2 = 0$;
- 3) $(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, \pm\sqrt{\varkappa} S_2, \pm\sqrt{\varkappa} S_3)$ при $\varkappa \geq 0$;
- 4) $(S_1, 0, 0, R_1, R_2, 0)$, где $R_1^2 + R_2^2 - \varkappa S_1^2 - \frac{2\varkappa}{\alpha} R_2 S_1 = 0$;
- 5) $(S_1, 0, S_3, \pm\sqrt{\varkappa} S_1, \frac{2\varkappa}{\alpha} S_1, \pm\sqrt{\varkappa} S_3)$ при $\varkappa \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждение 1 – это обобщение предложения 1 из статьи А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [7].

Мы изучаем систему на $M_{1,g}^4$, поэтому надо добавить еще условия $f_1 = 1$, $f_2 = g$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для любого $\varkappa < 0$ критические точки гамильтониана, ограниченного на $M_{1,g}^4$, перечислены ниже.

1) При всех $g \in \mathbb{R}$ имеются четыре точки вида

$$(0, 0, S_3, 0, 0, R_3), \quad \text{где } \varkappa S_3^2 + R_3^2 = 1, \quad S_3 R_3 = g,$$

при этом $h = k = 0$.

2) При всех $g \in \mathbb{R}$ имеются две точки вида

$$\left(0, S_2, 0, \frac{1}{2\alpha S_2} - \frac{\varkappa}{\alpha} S_2, \frac{g}{S_2}, 0\right), \quad \text{где } S_2^2 = \frac{1}{2\varkappa} + \sqrt{\frac{\alpha^2(1 - 4\varkappa g^2)}{4\varkappa^2(\alpha^2 + \varkappa)}},$$

при этом

$$h = \frac{\alpha - \sqrt{(\varkappa + \alpha^2)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}, \quad k = \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}.$$

Известно, что в некомпактном случае помимо критических бифуркационных значений могут быть не критические (см. пример в работе [10]). Но в нашем случае выполнено

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Бифуркационные значения гамильтониана случая Соколова на $\mathfrak{so}(3, 1)$ (при $\varkappa < 0$) заполняют следующие кривые на плоскости (g, h) :

1) $h = 0, g \in \mathbb{R}$,

2) $h = (\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)})/(2\varkappa), g \in \mathbb{R}$,

причем эти точки являются критическими значениями гамильтониана.

§ 4. Топология изоэнергетической поверхности

Приводим результат из статьи [11].

Обозначим через D_k^2 открытый двумерный диск с k дырками.

ТЕОРЕМА 1. *Изоэнергетическая поверхность $Q_{g,h}^3$ для гамильтониана случая Соколова на $\mathfrak{so}(3, 1)$ ($\varkappa < 0$),*

$$h \neq 0, \quad h \neq \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa},$$

диффеоморфна $D_3^2 \times \mathbb{R}$.

§ 5. Бифуркационная диаграмма отображения момента

Рассмотрим теперь отображение момента для случая Соколова

$$H \times K: \{(S, R) \mid f_1(S, R) = 1, f_2(S, R) = g\} \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k),$$

заданное формулой $(H \times K)(S, R) = (H(S, R), K(S, R))$. Точка (S, R) будет критической тогда и только тогда, когда $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ будут линейно независимыми. Удобно перейти от переменных S и R к переменным S и Q . Аналогично тому, как это сделано в работе А. А. Ошемкова и Г. Хагигатдуста [7], можно показать, что при $S \neq 0$ это будет диффеоморфизм $M_{1,g}^4$ на свой образ. Поэтому бифуркационную диаграмму можно искать в переменных (S, Q) . При этом скобка переписывается следующим образом:

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, Q_j\} = \varepsilon_{ijk} Q_k, \quad \{Q_i, Q_j\} = q \varepsilon_{ijk} S_k,$$

где $q = \varkappa S^2 - R^2 = 2\varkappa S^2 - 1$.

Мы также будем использовать следующее полезное тождество:

$$Q^2 = S^2 R^2 - g^2 = \frac{1 - q^2}{4\kappa} - g^2, \quad \kappa \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 2. *Рассмотрим $M_{1,g}^4$, $g \in \mathbb{R}$. Тогда при $\kappa < 0$ критические значения отображения момента состоят из следующих кусков:*

1) *кусок параболы*

$$k = \frac{\kappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2, \quad h \geq \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \kappa)(1 - 4\kappa g^2)}}{2\kappa},$$

при этом в прообразе получаются две критические окружности $(0, S_2, 0, Q_1, 0, Q_3)$;

2) *парабола*

$$k = -\alpha h^2 - h - \frac{\kappa g^2}{\alpha}, \quad h \in \mathbb{R},$$

при этом в прообразе две критические прямые $(S_1, 0, 0, 0, Q_2, Q_3)$;

3) *отрезок*

$$k = \frac{1 - 4\kappa g^2}{4\alpha}, \quad -\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \kappa)(1 - 4\kappa g^2)}}{2\kappa},$$

при этом в прообразе будут две критические окружности $(S_1, S_2, S_3, 0, Q_2, \frac{q}{2\alpha})$;

4) *изолированная особая точка $h = k = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $2\alpha Q_3 - q$ через A , $q + \frac{2\kappa Q_3}{\alpha}$ через B . Выпишем координаты $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$:

$$\begin{aligned} \text{sgrad } H = & \left(2\alpha S_2 S_3 - Q_2, \frac{2\kappa}{\alpha} S_1 S_3 + Q_1, -2\left(\frac{\kappa}{\alpha} + \alpha\right) S_1 S_2, S_2 A, \right. \\ & \left. S_1 B, -2\left(\frac{\kappa}{\alpha} S_1 Q_2 + \alpha S_2 Q_1\right) \right), \end{aligned}$$

$$\{S_1, K\} = Q_2 A, \quad \{S_2, K\} = Q_1 B, \quad \{S_3, K\} = -2\left(\frac{\kappa}{\alpha} + \alpha\right) Q_1 Q_2,$$

$$\{Q_1, K\} = \left[2\frac{\kappa}{\alpha} (S_2 Q_3 - S_3 Q_2) + q S_2 \right] A,$$

$$\{Q_2, K\} = [2\alpha (S_3 Q_1 - S_1 Q_3) + q S_1] B,$$

$$\{Q_3, K\} = 4\kappa Q_3 (S_1 Q_2 - S_2 Q_1) - 2q \left(\alpha S_2 Q_1 + \frac{\kappa}{\alpha} S_1 Q_2 \right).$$

Сначала мы перечислим случаи линейной зависимости $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ при $\kappa < 0$, когда соответствующие куски бифуркационной диаграммы отображения момента являются частями кривых порядка не выше 2, причем то, что в этих случаях косые градиенты линейно зависимы, будет проверено непосредственно. Затем покажем, что все возможности, когда косые градиенты линейно зависимы, сводятся к этим случаям или же приводят к точке $(0, 0)$.

1) Если $S_1 = S_3 = 0$, то $Q_2 = S_3 R_1 - S_1 R_3 = 0$. При этом матрица, составленная из косых градиентов, приобретает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & Q_1 & 0 & S_2 A & 0 & -2\alpha S_2 Q_1 \\ 0 & Q_1 B & 0 & S_2 AB & 0 & -2\alpha S_2 Q_1 B \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ в этом случае линейно зависимы, так как они просто пропорциональны с коэффициентом пропорциональности, равным B .

Легко проверить, что зависимость h и k на данном куске бифуркационной диаграммы выражается следующим образом:

$$k = \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2. \quad (1)$$

Найдем теперь критические точки и область изменения h . Рассмотрим следующую систему, задающую критические точки:

$$\begin{cases} S_2 R_2 = g, \\ \alpha S_2^2 - S_2 R_1 = h, \\ \varkappa S_2^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Она имеет решение при фиксированном S_2 в том и только том случае, когда

$$\frac{g^2}{S_2^2} + \frac{(h - \alpha S_2^2)^2}{S_2^2} \leq 1 - \varkappa S_2^2. \quad (3)$$

В случае строгого неравенства имеем две точки в прообразе при проекции критических точек на (3) и одну точку в случае равенства.

Обозначим S_2^2 через y . Тогда неравенство (3) переписется следующим образом:

$$(\alpha^2 + \varkappa)y^2 - (2\alpha h + 1)y + g^2 + h^2 \leq 0. \quad (4)$$

Неравенство (4) имеет неотрицательные решения тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D = (2\alpha h + 1)^2 - 4(\alpha^2 + \varkappa)(g^2 + h^2) \geq 0, \\ 2\alpha h + 1 \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь мы учли, что $\alpha^2 + \varkappa > 0$.

Из системы неравенств (5) следует, что область изменения h при $\varkappa < 0$ имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} h \geq \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}, \\ h \leq \frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}, \\ h \geq -\frac{1}{2\alpha}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Но

$$\frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa} < -\frac{1}{2\alpha}$$

при $\alpha^2 + \varkappa > 0$, поэтому система (6) равносильна неравенству

$$h \geq \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}.$$

Получаем две критические окружности.

2) Если $S_2 = S_3 = 0$, то $Q_1 = S_2 R_3 - S_3 R_2 = 0$. Матрица косых градиентов переписывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -Q_2 & 0 & 0 & 0 & S_1 B & -2\frac{\varkappa}{\alpha} S_1 Q_2 \\ Q_2 A & 0 & 0 & 0 & -S_1 B A & 2\frac{\varkappa}{\alpha} S_1 Q_2 A \end{pmatrix}.$$

При этом k на этом куске бифуркационной диаграммы выражается через h следующим образом:

$$k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa}{\alpha} g^2. \quad (7)$$

Аналогично первому пункту получаем следующую систему:

$$\begin{cases} S_1 R_1 = g, \\ -\frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 + S_1 R_2 = h, \\ \varkappa S_1^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1. \end{cases} \quad (8)$$

Она имеет решение при фиксированном S_1 тогда и только тогда, когда

$$\frac{g^2}{S_1^2} + \frac{(h + \frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2)^2}{S_1^2} \leq 1 - \varkappa S_1^2. \quad (9)$$

Обозначим S_1^2 через x . Нужно, чтобы следующее неравенство имело неотрицательные решения:

$$-\varkappa \frac{\alpha^2 + \varkappa}{\alpha^2} x^2 + \left(1 - \frac{2\varkappa h}{\alpha}\right) x - (g^2 + h^2) \geq 0. \quad (10)$$

При $\varkappa < 0$ дискриминант соответствующего уравнения положителен, поэтому неравенство (10) имеет решение при любом $h \in \mathbb{R}$.

Это значит, что мы имеем две критические прямые.

3) Если $Q_1 = 0$, $A = 2\alpha Q_3 - q = 0$, то $\text{sgrad } K = 0$ и

$$k = \frac{1}{4\alpha} (1 - 4\varkappa g^2).$$

Ниже (см. доказательство теоремы 3) будет показано, что критические точки образуют при этом две критические окружности.

4) Если $Q_2 = 0$, $B = q + 2\frac{\varkappa}{\alpha} Q_3 = 0$, то

$$k = -\frac{\alpha}{4\varkappa} (1 - 4\varkappa g^2) > \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}.$$

Это решение не существует при $\varkappa < 0$, так как образ отображения момента на плоскости $R^2(h, k)$ не лежит выше прямой $k = \frac{1-4\varkappa g^2}{4\alpha}$ (это будет показано ниже).

5) Возможен также случай

$$\begin{cases} (2\alpha S_2 S_3 - Q_2)Q_1 = S_1 S_2 A, \\ \left(\frac{2\varkappa}{\alpha} S_1 S_3 + Q_1\right)Q_2 = S_1 S_2 B, \\ Q_1 Q_2 \neq 0. \end{cases}$$

Ниже (см. доказательство теоремы 3) будет показано, что данные точки не принадлежат бифуркационной диаграмме.

6) Теперь докажем, что мы перечислили все нетривиальные случаи, когда косые градиенты H и K линейно зависимы. Остальные (тривиальные) случаи линейной зависимости приводят к точке $(0, 0)$. Обозначим через Δ_{ij} миноры 2×6 матрицы $\begin{pmatrix} \text{sgrad } H \\ \text{sgrad } K \end{pmatrix}$.

Приравняв миноры Δ_{13} и Δ_{23} к нулю, получаем следующее: из $\Delta_{13} = 0$ следует, что

$$Q_2[(2\alpha S_2 S_3 - Q_2)Q_1 - S_1 S_2 A] = 0,$$

а из $\Delta_{23} = 0$ получаем, что

$$Q_1 \left[\left(\frac{2\varkappa}{\alpha} S_1 S_3 + Q_1 \right) Q_2 - S_1 S_2 B \right] = 0.$$

Мы получили следующую альтернативу: либо Q_1 или Q_2 равно 0, либо выполнено 5). Разберемся теперь с тем, что происходит, когда Q_1 или Q_2 равно 0.

I. В случае $Q_1 = 0$, $A \neq 0$ (случай $Q_1 = A = 0$ разобран выше) из $\Delta_{13} = 0$ следует, что $S_1 S_2 Q_2 = 0$. Рассмотрим различные случаи.

1) Когда $S_1 = 0$, $S_3 \neq 0$ (случай $S_1 = S_3 = 0$ разобран выше), ненулевым может быть только минор Δ_{14} ,

$$\Delta_{14} = \begin{vmatrix} 2\alpha S_2 S_3 - Q_2 & S_2 A \\ Q_2 A & \left(\frac{2\varkappa}{\alpha} (S_2 Q_3 - S_3 Q_2) + q \right) S_2 A \end{vmatrix}.$$

В этом случае $Q_3 = -S_2 R_1$, $Q_2 = S_3 R_1$. Можно показать, что он не дает новых критических точек.

2) Когда $S_2 = 0$, $S_3 \neq 0$, $S_1 \neq 0$ (случаи $S_1 = Q_1 = 0$ и $S_2 = S_3 = 0$ разобраны выше), из тождества $S_1 Q_1 + S_2 Q_2 + S_3 Q_3 = 0$ и условия $S_3 \neq 0$ следует, что $Q_3 = 0$. Из равенства нулю минора Δ_{14} следует, что $Q_2 = 0$. Далее, из $\Delta_{25} = 0$ следует, что $B = 0$. Но случай $Q_2 = B = 0$ разобран выше.

3) Если $Q_1 = 0$, то

$$\Delta_{34} = -2 \left(\frac{\varkappa}{\alpha} + \alpha \right) S_1 S_2^2 AB = 0.$$

Но случаи $S_1 = Q_1 = 0$, $S_2 = Q_1 = 0$, $Q_1 = A = 0$ уже разобраны выше.

II. В случае $Q_2 = 0$, $Q_1 \neq 0$, $B \neq 0$ (случаи $Q_1 = Q_2 = 0$ и $Q_2 = B = 0$ разобраны выше) из $\Delta_{23} = 0$ получаем, что $S_1 S_2 = 0$. Последовательно рассмотрим когда это возможно.

1) Пусть $S_2 = 0$, тогда $\Delta_{25} = 2\alpha Q_1(S_1 Q_3 - S_3 Q_1) = 0$, откуда $S_1 Q_3 - S_3 Q_1 = 0$. Перейдем к переменным (S, R) : $Q_1 = -S_3 R_2$, $Q_3 = S_1 R_2$. Тогда $S_1 Q_3 - S_3 Q_1 = S_1^2 R_2 + S_3^2 R_2 = (S_1^2 + S_3^2) R_2$ и либо $R_2 = 0$, либо $S = 0$ (так как $S_2 = 0$). В обоих случаях $h = k = 0$.

2) Пусть $S_1 = 0$, тогда $\Delta_{12} = 2\alpha S_2 S_3 Q_1 B = 0$, откуда $S_2 = 0$ или $S_3 = 0$. Но случаи $S_1 = S_3 = 0$ и $S_2 = S_3 = 0$ были разобраны выше.

На рис. 1 изображена бифуркационная диаграмма отображения момента случая Соколова на $\mathfrak{so}(3, 1)$.

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма отображения момента

Как и в случае с бифуркационными значениями гамильтониана, оказывается, что бифуркационные значения отображения момента в случае Соколова на $\mathfrak{so}(3, 1)$ совпадают с критическими (см. § 8).

§ 6. Неполнота поля $\text{sgrad } H$

Мы покажем, что критические траектории, являющиеся прямыми, неполны, что означает, что теорему Лиувилля применять нельзя.

Поле $\text{sgrad } H$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{sgrad } H = & \left(2\alpha S_2 S_3 - Q_2, \frac{2\kappa}{\alpha} S_1 S_3 + Q_1, -2 \left(\frac{\kappa}{\alpha} + \alpha \right) S_1 S_2, S_2 A, \right. \\ & \left. S_1 B, -2 \left(\frac{\kappa}{\alpha} S_1 Q_2 + \alpha S_2 Q_1 \right) \right). \end{aligned}$$

Подставив в него $S_2 = S_3 = Q_1 = 0$, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = -Q_2, \\ \dot{Q}_2 = S_1 B = S_1 \left(q + \frac{2\kappa}{\alpha} Q_3 \right) = S_1 \left(2\kappa S_1^2 - 1 + \frac{2\kappa}{\alpha} Q_3 \right), \\ \dot{Q}_3 = -\frac{2\kappa}{\alpha} S_1 Q_2. \end{cases}$$

Выразив Q_3 из условия

$$h = -\frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 + Q_3$$

и подставив во второе уравнение, имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = -Q_2, \\ \dot{Q}_2 = S_1 \left(2\varkappa S_1^2 - 1 + \frac{2\varkappa}{\alpha} \left(h + \frac{\varkappa}{\alpha} S_1^2 \right) \right) = S_1 \left(2\frac{\varkappa}{\alpha^2} S_1^2 (\alpha^2 + \varkappa) - 1 + \frac{2\varkappa}{\alpha} h \right). \end{cases} \quad (11)$$

Из системы (11) получаем дифференциальное уравнение на S_1

$$\begin{aligned} \ddot{S}_1 &= -\dot{Q}_2 = S_1 \left(-2\frac{\varkappa}{\alpha^2} S_1^2 (\alpha^2 + \varkappa) + 1 - \frac{2\varkappa}{\alpha} h \right), \\ \ddot{S}_1 \dot{S}_1 &= S_1 \left(-2\frac{\varkappa}{\alpha^2} S_1^2 (\alpha^2 + \varkappa) + 1 - \frac{2\varkappa}{\alpha} h \right) \dot{S}_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\dot{S}_1^2}{2} &= \frac{d}{dt} \int S_1 \left(-2\frac{\varkappa}{\alpha^2} S_1^2 (\alpha^2 + \varkappa) + 1 - \frac{2\varkappa}{\alpha} h \right) dS_1, \\ \dot{S}_1 &= \pm \sqrt{2 \int S_1 \left(-2\frac{\varkappa}{\alpha^2} S_1^2 (\alpha^2 + \varkappa) + 1 - \frac{2\varkappa}{\alpha} h \right) dS_1 + C_1}, \\ \dot{S}_1 &= \pm \sqrt{\frac{(-2\frac{\varkappa}{\alpha^2} S_1^2 (\alpha^2 + \varkappa) + 1 - \frac{2\varkappa}{\alpha} h)^2}{-2\frac{\varkappa}{\alpha^2} (\alpha^2 + \varkappa)} + C}. \end{aligned}$$

Видно, что при $\varkappa < 0$ производная S_1 асимптотически растет квадратично, поэтому траектория не является полной.

§ 7. Индексы критических точек

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Индексы критических точек имеют следующие значения.

1. Прообразы кривой

$$k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa g^2}{\alpha}, \quad h < -\frac{1}{2\alpha}$$

имеют индекс 2.

2. Прообразы кривой

$$k = -\alpha h^2 - h - \frac{\varkappa g^2}{\alpha}, \quad h > -\frac{1}{2\alpha}$$

имеют индекс 1.

3. Прообразы кривой

$$k = \frac{\varkappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2, \quad h > \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$$

имеют индекс 2.

4. Прообразы кривой

$$k = \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}, \quad -\frac{1}{2\alpha} < h < \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \varkappa)(1 - 4\varkappa g^2)}}{2\varkappa}$$

имеют индекс 2.

§ 8. Топология совместной поверхности уровня H и K

Обозначим через S_k^2 двумерную сферу с k проколами.

ТЕОРЕМА 3. *При регулярных, т.е. не принадлежащих бифуркационной диаграмме для отображения момента, (h, k) совместная поверхность уровня H и K , обозначаемая $M_{h,k}^2$, имеет следующий тип:*

- 1) пустое множество при $k > -\alpha h^2 - h - \frac{\kappa}{\alpha} g^2$ и $h < -\frac{1}{2\alpha}$, при $k > \frac{1-4\kappa g^2}{4\alpha}$ или при $k > \frac{\kappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2$;
- 2) $2S_4^2$ при $k < -\alpha h^2 - h - \frac{\kappa}{\alpha} g^2$, $(h, k) \neq (0, 0)$ при $g \neq 0$;
- 3) $2T^2$ при $k > -\alpha h^2 - h - \frac{\kappa}{\alpha} g^2$ и $k < \frac{\kappa}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем использовать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ даны эллипс с центром в начале координат, заданный уравнением $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, где $b^2 - 4ac < 0$, $ad > 0$, и эллипс, заданный уравнением $px^2 + qy^2 = r$, где $p, q, r > 0$. Тогда указанные эллипсы пересекаются тогда и только тогда, когда выполнено следующее неравенство:

$$((b^2 - 4ac)r + 2d(aq + cp))^2 \leq 4d^2((aq - cp)^2 + b^2pq). \quad (12)$$

При этом если правая часть равна нулю, то эллипсы совпадают, если неравенство в (12) строгое, то эллипсы пересекаются по четырем различным точкам, а в случае равенства и ненулевой правой части (12) – касаются по двум точкам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Параметризуем эллипс следующим образом:

$$x = \sqrt{\frac{r}{p}} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\frac{r}{q}} \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Подставляя параметризованные значения в уравнение первой кривой, получаем

$$\frac{ar}{p} \cos^2 \varphi + \frac{br}{\sqrt{pq}} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{cr}{q} \sin^2 \varphi = d.$$

Переходя в тригонометрических функциях к двойному аргументу, имеем

$$\begin{aligned} \frac{ar}{2}(1 + \cos 2\varphi) + \frac{br}{2\sqrt{pq}} \sin 2\varphi + \frac{cr}{2q}(1 - \cos 2\varphi) &= d, \\ \left(\frac{a}{p} - \frac{c}{q}\right) \cos 2\varphi + \frac{b}{\sqrt{pq}} \sin 2\varphi &= \frac{2d}{r} - \frac{a}{p} - \frac{c}{q}. \end{aligned}$$

Как известно, функция $A \sin t + B \cos t$ принимает значения от $-\sqrt{A^2 + B^2}$ до $\sqrt{A^2 + B^2}$, причем для внутренних точек данного отрезка существует два различных прообраза на $[0, 2\pi)$, а для точек $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ существует один прообраз на $[0, 2\pi)$. Поэтому для того, чтобы пересечение двух кривых существовало,

необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2d}{r} - \frac{a}{p} - \frac{c}{q}\right)^2 &\leq \left(\frac{a}{p} - \frac{c}{q}\right)^2 + \frac{b^2}{pq}, \\ \frac{4d^2}{r^2} + \frac{a^2}{p^2} + \frac{c^2}{q^2} - \frac{4ad}{pr} - 4\frac{cd}{qr} + \frac{2ac}{pq} &\leq \frac{a^2}{p^2} - \frac{2ac}{pq} + \frac{c^2}{q^2} + \frac{b^2}{pq}, \\ \frac{4d}{r} \left(\frac{d}{r} - \frac{a}{p} - \frac{c}{q}\right) &\leq \frac{b^2 - 4ac}{pq}, \\ 4d^2pq - 4d(aq + cp)r &\leq (b^2 - 4ac)r^2, \\ (b^2 - 4ac)r^2 + 4d(aq + cp)r - 4d^2pq &\geq 0. \end{aligned}$$

Дискриминант D соответствующего уравнения равен

$$\begin{aligned} 16d^2(aq + cp)^2 + 16d^2pq(b^2 - 4ac) &= 16d^2(a^2q^2 + 2acpq + c^2p^2 + b^2pq - 4acpq) \\ &= 16d^2(a^2q^2 - 2acpq + c^2p^2 + b^2pq) = 16d^2((aq - cp)^2 + b^2pq) \geq 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $b^2 - 4ac < 0$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{-4d(aq + cp) + 4|d|\sqrt{(aq - cp)^2 + b^2pq}}{2(b^2 - 4ac)} &\leq r \\ &\leq \frac{-4d(aq + cp) - 4|d|\sqrt{(aq - cp)^2 + b^2pq}}{2(b^2 - 4ac)}, \end{aligned}$$

или

$$((b^2 - 4ac)r + 2d(aq + cp))^2 \leq 4d^2((aq - cp)^2 + b^2pq).$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b \geq a > 0,$$

и окружность $x^2 + y^2 = R^2$ пересекаются тогда и только тогда, когда $a^2 \leq R^2 \leq b^2$, причем если $a^2 = R^2 = b^2$, то кривые совпадают, если оба неравенства строгие, то точек пересечения четыре, иначе – две.

Мы имеем следующую систему, задающую $M_{h,k}^2$:

$$\begin{cases} h = -\frac{\varkappa}{\alpha}S_1^2 + \alpha S_2^2 + Q_3, \\ k = Q_3q - \alpha Q_1^2 + \frac{\varkappa}{\alpha}Q_2^2 + \left(\frac{\varkappa}{\alpha} - \alpha\right)Q_3^2, \\ S_1Q_1 + S_2Q_2 + S_3Q_3 = 0, \\ Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = \frac{1 - q^2}{4\varkappa} - g^2, \\ q = 2\varkappa(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) - 1. \end{cases} \quad (13)$$

Будем рассматривать проекцию $M_{h,k}^2$ на плоскость $\mathbb{R}^2(Q_3, q)$.

Из последнего уравнения системы (13) следует, что $q \leq -1$. Разберем сначала случай, когда $q = -1$.

Из пятого уравнения системы (13) следует, что $S_1 = S_2 = S_3 = 0$, а из четвертого, что $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$ и $g = 0$. Это особая точка ранга 0. Далее считаем, что $q < -1$.

Из первого уравнения системы (13) следует, что $h \geq Q_3$. Разберем случай $Q_3 = h$.

Из первого уравнения системы (13) следует, что $S_1 = S_2 = 0$. Отсюда и из третьего уравнения $S_3 Q_3 = 0$, $S_3 \neq 0$, иначе $q = -1$, поэтому $h = Q_3 = 0$, получили точки ранга 0. Далее считаем, что $Q_3 < h$.

Из второго и четвертого уравнений (13) получим

$$\begin{cases} \alpha Q_1^2 - \frac{\varkappa}{\alpha} Q_2^2 = Q_3 q - k + \left(\frac{\varkappa}{\alpha} - \alpha \right) Q_3^2, \\ Q_1^2 + Q_2^2 = \frac{1 - q^2}{4\varkappa} - g^2 - Q_3^2. \end{cases} \quad (14)$$

Применив следствие, получим следующую систему неравенств на Q_3 и q , для которых существуют Q_1 и Q_2 , удовлетворяющие системе (14):

$$\begin{cases} \left(\varkappa Q_3 + \frac{\alpha q}{2} \right)^2 \geq k\varkappa\alpha + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha^2 \varkappa g^2, \\ \left(\alpha Q_3 - \frac{q}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4} - \varkappa g^2 - \alpha k. \end{cases} \quad (15)$$

Из второго неравенства следует, что для существования решения необходимо, чтобы

$$k \leq \frac{1 - 4\varkappa g^2}{4\alpha}, \quad (16)$$

откуда

$$k\varkappa\alpha \geq \frac{\varkappa - 4\varkappa^2 g^2}{4} \geq \frac{4\alpha^2 \varkappa g^2 - \alpha^2}{4},$$

т.е. правая часть первого неравенства в системе (15) неотрицательна.

Первое неравенство задает на плоскости (Q_3, q) точки, не находящиеся между парой параллельных прямых

$$q = \frac{2}{\alpha} \left(-\varkappa Q_3 \pm \sqrt{k\varkappa\alpha + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha^2 \varkappa g^2} \right). \quad (17)$$

Будем для краткости называть эти прямые “сплошными” (они будут обозначаться на рисунках сплошными линиями).

Второе неравенство задает на плоскости (Q_3, q) точки между парой параллельных прямых

$$q = 2 \left(\alpha Q_3 \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \varkappa g^2 - \alpha k} \right). \quad (18)$$

Будем называть эти прямые “пунктирными”, на рисунках они будут обозначаться пунктирными линиями.

Система (15) задает на плоскости (Q_3, q) две полосы, граница каждой из которых состоит из двух параллельных лучей и отрезка. Причем внутренним

точкам соответствуют четыре точки (Q_1, Q_2) , удовлетворяющие системе (14), граничным точкам (за исключением угловых) – две, а угловым точкам – одна.

Иными словами, для существования решения системы (14) необходимо и достаточно, чтобы (Q_3, q) лежали вне “сплошных” и внутри “пунктирных” прямых.

Пусть $Q_3 \neq 0$. Тогда выразим S_3 из третьего уравнения и подставим в пятое. Получим

$$\begin{aligned} S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 &= \frac{q+1}{2\kappa}, \\ S_1^2 + S_2^2 + \frac{(S_1 Q_1 + S_2 Q_2)^2}{Q_3^2} &= \frac{q+1}{2\kappa}, \\ (Q_1^2 + Q_3^2)S_1^2 + 2Q_1 Q_2 S_1 S_2 + (Q_2^2 + Q_3^2)S_2^2 &= \frac{Q_3^2(q+1)}{2\kappa}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $Q_3 \neq 0$ существование решений системы уравнений, составленной из первого, третьего и пятого уравнений системы (13), эквивалентно существованию решений у следующей системы:

$$\begin{cases} -\frac{\kappa}{\alpha} S_1^2 + \alpha S_2^2 = h - Q_3, \\ (Q_1^2 + Q_3^2)S_1^2 + 2Q_1 Q_2 S_1 S_2 + (Q_2^2 + Q_3^2)S_2^2 = \frac{Q_3^2(q+1)}{2\kappa}. \end{cases} \quad (19)$$

Применяем утверждение 5. Здесь

$$\begin{aligned} a &= Q_1^2 + Q_3^2, & b &= 2Q_1 Q_2, & c &= Q_2^2 + Q_3^2, & d &= \frac{Q_3^2(q+1)}{2\kappa}, \\ p &= -\frac{\kappa}{\alpha}, & q &= \alpha, & r &= h - Q_3. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 4Q_1^2 Q_2^2 - 4(Q_1^2 + Q_3^2)(Q_2^2 + Q_3^2) = -4Q_3^2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) \\ &= -4Q_3^2 \left(\frac{1-q^2}{4\kappa} - g^2 \right) < 0, & ad &> 0, \end{aligned}$$

поэтому условия утверждения 5 выполнены. Кроме того,

$$aq + cp = (Q_1^2 + Q_3^2)\alpha + (Q_2^2 + Q_3^2)\frac{-\kappa}{\alpha} = \alpha Q_1^2 - \frac{\kappa}{\alpha} Q_2^2 + \left(\alpha - \frac{\kappa}{\alpha} \right) Q_3^2 = Q_3 q - k,$$

поэтому

$$\begin{aligned} r(b^2 - 4ac) + 2d(aq + cp) &= (Q_3 - h)4Q_3^2 \left(\frac{1-q^2}{4\kappa} - g^2 \right) + \frac{Q_3^2(q+1)}{\kappa} (Q_3 q - k) \\ &= \frac{Q_3^2}{\kappa} ((Q_3 - h)(1 - q^2 - 4\kappa g^2) + (q+1)(Q_3 q - k)). \end{aligned} \quad (20)$$

В данном случае

$$aq - cp = (Q_1^2 + Q_3^2)\alpha - (Q_2^2 + Q_3^2)\frac{-\kappa}{\alpha} = \alpha Q_1^2 + \frac{\kappa}{\alpha} Q_2^2 + \left(\alpha + \frac{\kappa}{\alpha} \right) Q_3^2,$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
 (aq - cp)^2 + b^2 pq &= \alpha^2 Q_1^4 + \frac{\varkappa^2}{\alpha^2} Q_2^4 + \left(\alpha + \frac{\varkappa}{\alpha} \right)^2 Q_3^4 + 2\varkappa Q_1^2 Q_2^2 \\
 &\quad + 2(\alpha^2 + \varkappa) Q_1^2 Q_3^2 + 2 \frac{\alpha^2 \varkappa + \varkappa^2}{\alpha^2} Q_2^2 Q_3^2 - 4\varkappa Q_1^2 Q_2^2 \\
 &= \alpha^2 Q_1^4 + \frac{\varkappa^2}{\alpha^2} Q_2^4 + \left(\alpha + \frac{\varkappa}{\alpha} \right)^2 Q_3^4 - 2\varkappa Q_1^2 Q_2^2 \\
 &\quad + 2(\alpha^2 + \varkappa) Q_1^2 Q_3^2 + 2 \frac{\alpha^2 \varkappa + \varkappa^2}{\alpha^2} Q_2^2 Q_3^2.
 \end{aligned}$$

Справедливо также равенство

$$\begin{aligned}
 (Q_3 q - k)^2 &= \left(\alpha Q_1 - \frac{\varkappa}{\alpha} Q_2^2 + \left(\alpha - \frac{\varkappa}{\alpha} \right) Q_3^2 \right)^2 \\
 &= \alpha^2 Q_1^4 + \frac{\varkappa^2}{\alpha^2} Q_2^4 + \left(\alpha - \frac{\varkappa}{\alpha} \right)^2 Q_3^4 - 2\varkappa Q_1^2 Q_2^2 + 2(\alpha^2 - \varkappa) Q_1^2 Q_3^2 \\
 &\quad + 2 \frac{-\alpha^2 \varkappa + \varkappa^2}{\alpha^2} Q_2^2 Q_3^2 \\
 &= \alpha^2 Q_1^4 + \frac{\varkappa^2}{\alpha^2} Q_2^4 + \left(\alpha + \frac{\varkappa}{\alpha} \right)^2 Q_3^4 - 2\varkappa Q_1^2 Q_2^2 + 2(\alpha^2 + \varkappa) Q_1^2 Q_3^2 \\
 &\quad + 2 \frac{\alpha^2 \varkappa + \varkappa^2}{\alpha^2} Q_2^2 Q_3^2 - 4\varkappa Q_3^4 - 4\varkappa Q_1^2 Q_3^2 - 4\varkappa Q_2^2 Q_3^2 \\
 &= (aq - cp)^2 + b^2 pq - 4\varkappa Q_3^2 (Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) \\
 &= (aq - cp)^2 + b^2 pq - 4\varkappa Q_3^2 \left(\frac{1 - q^2}{4\varkappa} - g^2 \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$(ap - cq)^2 + b^2 pq = (Q_3 q - k)^2 + Q_3^2 (1 - q^2 - 4\varkappa g^2).$$

Неравенство (12) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
 &\frac{Q_3^2}{\varkappa^2} ((Q_3 - h)(1 - q^2 - 4\varkappa g^2) + (q + 1)(Q_3 q - k))^2 \\
 &\leq \frac{Q_3^4}{\varkappa^2} (q + 1)^2 ((Q_3 q - k)^2 + Q_3^2 (1 - q^2 - 4\varkappa g^2)),
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 &(Q_3 - h)^2 (1 - q^2 - 4\varkappa g^2)^2 + 2(Q_3 - h)(1 - q^2 - 4\varkappa g^2)(q + 1)(Q_3 q - k) \\
 &\quad + (q + 1)^2 (Q_3 q - k)^2 \leq (q + 1)^2 (Q_3 q - k)^2 + (q + 1)^2 Q_3^2 (1 - q^2 - 4\varkappa g^2).
 \end{aligned}$$

Уничтожив одинаковое слагаемое $(q + 1)^2 (Q_3 q - k)^2$ в правой и левой частях, а также сократив на $(1 - q^2 - 4\varkappa g^2) = 4\varkappa(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) < 0$ и перенеся все в правую часть, получаем

$$(Q_3 - h)^2 (1 - q^2 - 4\varkappa g^2) + 2(Q_3 - h)(q + 1)(Q_3 q - k) - (q + 1)^2 Q_3^2 \geq 0. \quad (21)$$

Обозначим $h - Q_3$ через x , $q + 1$ через y . Тогда

$$q = y - 1, \quad 1 - q^2 = -y^2 + 2y,$$

неравенство (21) переписывается в новых переменных так:

$$x^2(-y^2 + 2y - 4\kappa g^2) + 2xy(Q_3(y - 1) - k) - y^2 Q_3^2 \geq 0. \quad (22)$$

Сгруппируем (22) по степеням y :

$$(2xQ_3 - Q_3^2 - x^2)y^2 - 2x(x - k - Q_3)y - 4\kappa g^2 x^2 \geq 0. \quad (23)$$

Заметим, что

$$2xQ_3 - Q_3^2 - x^2 = 2(h - Q_3)Q_3 - Q_3^2 - (h - Q_3)^2 = -h^2, \quad x - k - Q_3 = -h - k.$$

Неравенство (23) поэтому можно переписать в следующем виде:

$$h^2 y^2 - 2(h - Q_3)(h + k)y + 4\kappa g^2 (h - Q_3)^2 \leq 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{(h - Q_3)(h + k - \sqrt{(h + k)^2 - 4\kappa g^2 h^2})}{h^2} &\leq y \\ &\leq \frac{(h - Q_3)(h + k + \sqrt{(h + k)^2 - 4\kappa g^2 h^2})}{h^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Но $y = q + 1 < 0$, а правая часть неравенств (24) неотрицательна, поэтому окончательно получаем систему

$$\frac{(h - Q_3)(h + k - \sqrt{(h + k)^2 - 4\kappa g^2 h^2})}{h^2} \leq y < 0.$$

Итак, множество точек на плоскости (Q_3, q) , при которых система (19) имеет решение, имеет вид угла (с внутренностью) между лучами $q = -1$, $Q_3 \leq h$ и

$$q + 1 = \frac{(-(h + k) + \sqrt{(h + k)^2 - 4\kappa g^2 h^2})(Q_3 - h)}{h^2}, \quad Q_3 \leq h, \quad (25)$$

пересекающимися в точке $(h, -1)$. Последний луч назовем “точечным”, он будет обозначаться на рисунках точечными линиями. При этом внутренним точкам угла соответствуют четыре точки (S_1, S_2) , удовлетворяющие системе (19), “точечному” лучу – две точки.

Заметим, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - k + \sqrt{(h + k)^2 - 4\kappa g^2 h^2}}{h^2} = \begin{cases} \infty, & \text{если } k \leq 0; \\ -\frac{2\kappa g^2}{k}, & \text{если } k > 0. \end{cases}$$

Поэтому при $h = 0$ и $k \leq 0$ “точечный” луч станет вертикальным лучом $q \leq -1$, $Q_3 = 0$, а при $h = 0$, $k > 0$ “точечный” луч будет иметь вид

$$q + 1 = -\frac{2\kappa g^2}{k} Q_3.$$

Посмотрим, когда “точечный” луч проходит через точку пересечения нижней “пунктирной” и нижней “сплошной” прямой. Обозначим точку их пересечения (Q_3^*, q^*) . Для этого уравнение “точечной” прямой должно совпадать с уравнением прямой, проходящей через точки $(h, -1)$ и (Q_3^*, q^*) . Уравнение этой прямой

$$\frac{q+1}{-1-q^*} = \frac{Q_3-h}{h-Q_3^*},$$

или

$$q+1 = -\frac{q^*+1}{h-Q_3^*}(Q_3-h). \quad (26)$$

Приравнивая коэффициенты при $Q_3 - h$ в (25) и (26), получаем следующее уравнение:

$$\frac{-h-k+\sqrt{(h+k)^2-4\kappa g^2 h^2}}{h^2} = -\frac{q^*+1}{h-Q_3^*},$$

откуда

$$(h-Q_3^*)(-h-k+\sqrt{(h+k)^2-4\kappa g^2 h^2}) = -h^2(q^*+1).$$

После переноса слагаемого с корнем в левую часть, остальных слагаемых – в правую и возведения обеих частей в квадрат получаем

$$\begin{aligned} & (h-Q_3^*)^2((h+k)^2-4\kappa g^2 h^2) \\ &= (h-Q_3^*)^2(h+k)^2 - 2(h-Q_3^*)(h+k)h^2(1+q^*) + h^4(1+q^*)^2, \end{aligned}$$

откуда

$$-4\kappa(h-Q_3^*)^2 g^2 h^2 = -2(h-Q_3^*)(h+k)h^2(1+q^*) + h^4(1+q^*)^2.$$

Пусть $h \neq 0$. Сократим последнее уравнение на h^2 :

$$-4\kappa(h-Q_3^*)^2 g^2 = -2(h-Q_3^*)(h+k)(1+q^*) + h^2(1+q^*)^2. \quad (27)$$

Обозначим $h-Q_3^*$ через x^* , тогда уравнение (27) переписется так:

$$-4\kappa(x^*)^2 g^2 = -2x^*(x^*+Q_3^*+k)(1+q^*) + (x^*+Q_3^*)^2(1+q^*)^2,$$

или

$$(4\kappa g^2 - 2(1+q^*) + (1+q^*)^2)(x^*)^2 - 2x^*(1+q^*)(Q_3^*+k-Q_3(1+q^*)) + Q_3^2(1+q^*)^2 = 0.$$

Сгруппируем последнее уравнение по степеням x^* :

$$(4\kappa g^2 - 2q^* + (q^*)^2)(x^*)^2 - 2x^*(1+q^*)(k - Q_3 q^*) + (Q_3^*)^2(1+q^*)^2 = 0.$$

Необходимо отметить, что при $Q_3 = Q_3^*$ и $q = q^*$ система (14) имеет единственное решение $Q_1 = Q_2 = 0$. Поэтому

$$k - Q_3^* q^* = \left(\frac{\kappa}{\alpha} - \alpha \right) (Q_3^*)^2, \quad \frac{1 - (q^*)^2}{4\kappa} - g^2 - (Q_3^*)^2 = 0,$$

откуда

$$-4\kappa(Q_3^*)^2(x^*)^2 - 2x^*(1+q^*)\left(\frac{\kappa}{\alpha} - \alpha\right)(Q_3^*)^2 + (Q_3^*)^2(1+q^*)^2 = 0.$$

Так как $Q_3^* \neq 0$ по предположению, то получаем следующее уравнение:

$$-4\kappa(x^*)^2 - 2x^*(1+q^*)\left(\frac{\kappa}{\alpha} - \alpha\right) + (1+q^*)^2 = 0. \quad (28)$$

Из следующей системы

$$\begin{cases} q^* = 2\left(\alpha Q_3^* - \sqrt{\frac{1}{4} - \kappa g^2 - \alpha k}\right), \\ q^* = \frac{2}{\alpha}\left(-\kappa Q_3^* - \sqrt{k\kappa\alpha + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha^2\kappa g^2}\right) \end{cases} \quad (29)$$

находятся Q_3^* и q^* .

Рассмотрим дискриминант уравнения (28), который обозначим через D :

$$\frac{D}{4} = (1+q^*)^2\left(\frac{\kappa}{\alpha} - \alpha\right)^2 + 4\kappa(1+q^*)^2 = (1+q^*)^2\left(\frac{\kappa}{\alpha} + \alpha\right)^2.$$

Справедливо равенство

$$x_1^* = h_1 - Q_3^* = \frac{(1+q^*)\left(\frac{\kappa}{\alpha} - \alpha\right) + (1+q^*)\left(\frac{\kappa}{\alpha} + \alpha\right)}{-4\kappa} = \frac{1+q^*}{-2\alpha},$$

откуда

$$h_1 = -\frac{1}{2\alpha} - Q_3^* + \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{4} - \kappa g^2 - \alpha k} + Q_3^* = -\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{4} - \kappa g^2 - \alpha k}.$$

Заметим, что точка (h_1, k) лежит на правой ветви параболы

$$k = -\alpha h^2 - h - \frac{\kappa}{\alpha}g^2.$$

Выполнено также

$$x_2^* = h_2 - Q_3^* = \frac{(1+q^*)\left(\frac{\kappa}{\alpha} - \alpha\right) - (1+q^*)\left(\frac{\kappa}{\alpha} + \alpha\right)}{-4\kappa} = \frac{(1+q^*)\alpha}{2\kappa},$$

откуда

$$h_2 = \frac{\alpha}{2\kappa} - Q_3^* - \frac{1}{\kappa}\sqrt{k\kappa\alpha + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha^2\kappa g^2} + Q_3^* = \frac{\alpha}{2\kappa} - \frac{1}{\kappa}\sqrt{k\kappa\alpha + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha^2\kappa g^2}.$$

Заметим, что точка (h_2, k) лежит на куске параболы

$$k = \frac{\kappa}{\alpha}h^2 - h + \alpha g^2.$$

Итак, мы получили, что “точечный” луч и нижние “пунктирная” и “сплошная” прямые проходят через одну точку только при значениях параметров h

и k , лежащих на кусках парабол, составляющих часть бифуркационной диаграммы.

Аналогично можно показать, что “точечный” луч имеет больший угол наклона, чем прямая, соединяющая точки $(h, -1)$ и (Q_3^*, q^*) , при значениях параметров h и k , лежащих в области под кусками парабол на бифуркационной диаграмме, и больший угол наклона при значениях параметров h и k вне данной области.

Посмотрим, как расположены “сплошные” и “пунктирные” прямые, а также “точечный” луч относительно друг друга.

Во-первых, они все имеют неотрицательные коэффициенты наклона, так как

$$2\alpha > 0, \quad \frac{-2\kappa}{\alpha} > 0, \quad \frac{-h - k + \sqrt{(h+k)^2 - 4\kappa g^2 h^2}}{h^2} \geq 0.$$

Заметим, что

$$\frac{-h - k + \sqrt{(h+k)^2 - 4\kappa g^2 h^2}}{h^2} < 2\alpha$$

тогда и только тогда, когда $k > -\alpha h^2 - h - \frac{\kappa}{\alpha} g^2$. Поэтому “точечный” луч имеет меньший угол наклона при значениях параметров h и k над параболой $k = -\alpha h^2 - h - \frac{\kappa}{\alpha} g^2$ и больший угол наклона при значениях h и k под данной параболой, чем “пунктирные” прямые.

Заметим, что

$$\frac{-h - k + \sqrt{(h+k)^2 - 4\kappa g^2 h^2}}{h^2} < \frac{-2\kappa}{\alpha}$$

тогда и только тогда, когда $k > \frac{\kappa}{\alpha} h^2 - h - \alpha g^2$. Поэтому “точечный” луч имеет меньший угол наклона при значениях параметров h и k , лежащих над параболой $k = -\alpha h^2 - h - \frac{\kappa}{\alpha} g^2$, и больший угол наклона при значениях параметров h и k под данной параболой, чем “сплошные” прямые.

В зависимости от значения параметров возможны следующие случаи.

1. При $k > \frac{1-4\kappa g^2}{4\alpha}$ система (14) не имеет решений в силу (16), поэтому $M_{h,k}^2$ пусто.

2. При $k = \frac{1-4\kappa g^2}{4\alpha}$ две параллельные “пунктирные” прямые

$$q = 2 \left(\alpha Q_3 \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \kappa g^2 - \alpha k} \right)$$

сливаются в одну прямую $q = 2\alpha Q_3$. При этом для h не из отрезка

$$\left[-\frac{1}{2\alpha}; \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \kappa)(1 - 4\kappa g^2)}}{2\kappa} \right]$$

“точечный” луч пересекает “пунктирную” прямую между “сплошными” прямыми, а внутри отрезка – ниже “сплошных” прямых (см. рис. 2). Это означает, что $M_{h,k}^2$ в первом случае пусто, а во втором представляет собой две критические окружности.

3. При $k > -\alpha h^2 - h - \frac{\kappa g^2}{\alpha}$ и $h < -\frac{1}{2\alpha}$ угол и полоса не пересекаются (см. рис. 3), поэтому $M_{h,k}^2$ пусто.

Рис. 2. Случай 2

Рис. 3. Случай 3

4. При $k = -\alpha h^2 - h - \frac{\kappa g^2}{\alpha}$ и $h < -\frac{1}{2\alpha}$ угол и полоса имеют общую сторону (см. рис. 4). В этом случае мы получаем луч, над внутренней точкой луча находятся четыре точки при проекции $M_{h,k}^2$ на плоскость (Q_3, q) , а над вершиной – две. Таким образом, $M_{h,k}^2$ состоит из двух критических прямых.

Рис. 4. Случай 4

5. При $k < -\alpha h^2 - h - \frac{\kappa g^2}{\alpha}$ и $(h, k) \neq (0, 0)$ угол и полоса пересекаются так, как показано на рис. 5. Проекцией $M_{h,k}^2$ на плоскость $\mathbb{R}^2(Q_3, q)$ является закрашенное множество. При этом над внутренними точками находятся шестнадцать точек, над сторонами – восемь, над вершинами – четыре. Чтобы получить тип $M_{h,k}^2$ в этом случае, необходимо склеить шестнадцать экземпляров закрашенного множества по соответствующим сторонам. Можно убедиться, что в этом случае получится $2S_4^2$.

Рис. 5. Случай 5

6. При $k = -\alpha h^2 - h - \frac{\kappa g^2}{\alpha}$ и $h > -\frac{1}{2\alpha}$ “точечный” луч совпадает с нижней “пунктирной” прямой, как показано на рис. 6. Закрашено множество, являющееся образом проекции $M_{h,k}^2$ на плоскость $\mathbb{R}^2(Q_3, q)$. Над внутренними точками находятся шестнадцать точек, над внутренними точками верхнего “сплошного” отрезка – четыре, над внутренними точками верхнего “пунктирного” луча – четыре точки, над внутренними точками нижнего луча – две, над угловыми точками – две (на верхней) и одна (на нижней). В этом случае $M_{h,k}^2$ является особой поверхностью и представляет собой две пары цилиндров, склеенных по образующей (одна пара представляет собой “восьмерку”, умноженную на прямую).

Рис. 6. Случай 6

7. При $k > -\alpha h^2 - h - \frac{\alpha g^2}{\alpha}$ и $k < \frac{\alpha}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2$ множество проекции представляет собой четырехугольник, изображенный на рис. 7. Над внутренними точками находятся шестнадцать точек, над сторонами – восемь, над вершинами – четыре. Склеив шестнадцать закрашенных четырехугольников по соответствующим сторонам, получаем $2T^2$.

Рис. 7. Случай 7

8. При $k = \frac{\alpha}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2$ точка $(h, -1)$ находится на нижней “сплошной” прямой справа от “пунктирных” прямых, а угол наклона “точечного” луча и “сплошных” прямых совпадает, т.е. “точечный” луч является подмножеством нижней “сплошной” прямой. Образом проекции является отрезок, над внутренними точками которого находятся четыре точки, а над концевыми – две, откуда $M_{h,k}^2$ представляет собой две критические окружности.

9. При $k > \frac{\alpha}{\alpha} h^2 - h + \alpha g^2$ точка $(h, -1)$ находится справа от “пунктирных” прямых и между “сплошными” прямыми. При этом угол наклона у “сплошной” прямой больше, чем у “точечного” луча. Поэтому угол и полоса не пересекаются, т.е. $M_{h,k}^2$ пусто в этом случае.

Список литературы

- [1] Н. Poincaré, “Sur la précession des corps déformables”, *Bull. Astron.*, **27** (1910), 321–356.
- [2] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Динамика твердого тела*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевск, 2001, 384 с.
- [3] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, В. В. Соколов, “Новый интегрируемый случай на $so(4)$ ”, *Докл. РАН*, **381**:5 (2001), 614–615; англ. пер.: A. V. Borisov, I. S. Mamaev, V. V. Sokolov, “A new integrable case on $so(4)$ ”, *Dokl. Phys.*, **46**:12 (2001), 888–889.
- [4] В. В. Соколов, “Об одном классе квадратичных гамильтонианов на $so(4)$ ”, *Докл. РАН*, **394**:5 (2004), 602–605; англ. пер.: V. V. Sokolov, “One class of quadratic $so(4)$ Hamiltonians”, *Dokl. Math.*, **69**:1 (2004), 108–111.
- [5] В. В. Соколов, “Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа”, *ТМФ*, **129**:1 (2001), 31–37; англ. пер.: V. V. Sokolov, “A new integrable case for the Kirchhoff equation”, *Theoret. and Math. Phys.*, **129**:1 (2001), 1335–1340.

- [6] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых систем дифференциальных уравнений*, Факториал, М.; Изд-во Удмурт. ун-та, Ижевск, 1995, 448 с.
- [7] Г. Хагигатдуст, А. А. Ошемков, “Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$ ”, *Матем. сб.*, **200**:6 (2009), 119–142; англ. пер.: G. Haghighatdoost, A. A. Oshemkov, “The topology of Liouville foliation for the Sokolov integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(4)$ ”, *Sb. Math.*, **200**:6 (2009), 899–921.
- [8] Г. Хагигатдуст, “Бифуркационная диаграмма некоторого класса гамильтонианов на алгебре $\mathfrak{so}(4)$ ”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 2005, № 6, 3–10; англ. пер.: G. Haghighatdoost, “The bifurcation diagram of a class of Hamiltonians on the algebra $\mathfrak{so}(4)$ ”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **60**:6 (2005), 1–8.
- [9] Г. Хагигатдуст, “Топология изоэнергетических поверхностей для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$ ”, *Докл. РАН*, **401**:5 (2005), 599–602; англ. пер.: Gh. Haghighatdoost, “The topology of isoenergetic surfaces for the Sokolov integrable case in the Lie algebra $\mathfrak{so}(4)$ ”, *Dokl. Math.*, **71**:2 (2005), 256–259.
- [10] Д. В. Новиков, “Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $\mathfrak{e}(3)$ ”, *Матем. сб.*, **202**:5 (2011), 127–160; англ. пер.: D. V. Novikov, “Topological features of the Sokolov integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{e}(3)$ ”, *Sb. Math.*, **202**:5 (2011), 749–781.
- [11] Д. В. Новиков, “Топология изоэнергетических поверхностей для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $\mathfrak{so}(3,1)$ ”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 2011, № 4, 62–64; англ. пер.: D. V. Novikov, “The topology of isoenergy surfaces for the Sokolov integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(3,1)$ ”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **66**:4 (2011), 181–184.
- [12] Д. В. Новиков, *Топология некоторых новых интегрируемых случаев на алгебрах Ли $\mathfrak{so}(4)$, $\mathfrak{so}(3,1)$ и $\mathfrak{e}(3)$* , Дипломная работа, 2007.
- [13] А. Т. Фоменко, “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *УМН*, **44**:1(265) (1989), 145–173; англ. пер.: A. T. Fomenko, “The symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems”, *Russian Math. Surveys*, **44**:1 (1989), 181–219.
- [14] А. Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *Докл. АН СССР*, **287**:5 (1986), 1071–1075; англ. пер.: A. T. Fomenko, “Morse theory of integrable Hamiltonian systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **33**:2 (1986), 502–506.
- [15] А. Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:6 (1986), 1276–1307; англ. пер.: A. T. Fomenko, “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:3 (1987), 629–658.
- [16] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике”, *Докл. АН СССР*, **294**:2 (1987), 283–287; англ. пер.: A. T. Fomenko, H. Zieschang, “On the topology of three-dimensional manifolds arising in Hamiltonian mechanics”, *Soviet Math. Dokl.*, **35**:2 (1987), 529–534.
- [17] А. В. Болсинов, П. Х. Рихтер, А. Т. Фоменко, “Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской”, *Матем. сб.*, **191**:2 (2000), 3–42; англ. пер.: A. V. Bolsinov, P. H. Richter, A. T. Fomenko, “The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top”, *Sb. Math.*, **191**:2 (2000), 151–188.
- [18] А. Т. Фоменко, А. Ю. Кonyaев, “New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems”, *Topology Appl.*, **159**:7 (2012), 1964–1975.
- [19] Е. А. Кудрявцева, А. Т. Фоменко, “Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях”, *Докл. РАН*, **446**:6 (2012), 615–617; англ. пер.:

- Е. А. Kudryavtseva, A. T. Fomenko, “Symmetry groups of nice Morse functions on surfaces”, *Dokl. Math.*, **86**:2 (2012), 691–693.
- [20] М. П. Харламов, *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела*, Изд-во ЛГУ, Л., 1988, 200 с.
- [21] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “Траекторная классификация геодезических потоков двумерных эллипсоидов. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела”, *Функц. анализ и его прил.*, **29**:3 (1995), 1–15; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, “Orbital classification of geodesic flows on two-dimensional ellipsoids. The Jacobi problem is orbitally equivalent to the integrable Euler case in rigid body dynamics”, *Funct. Anal. Appl.*, **29**:3 (1995), 149–160.
- [22] А. А. Ошемков, “Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела”, *Труды семинара по вект. и тенз. анализу*, **25** (1993), 23–109.
- [23] П. Е. Рябов, “Бифуркации первых интегралов в случае Соколова”, *ТМФ*, **134**:2 (2003), 207–226; англ. пер.: P. E. Ryabov, “Bifurcations of first integrals in the Sokolov case”, *Theoret. and Math. Phys.*, **134**:2 (2003), 181–197.
- [24] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы: Геометрия, топология, классификация*, В 2-х тт., НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 1999, 443 с., 448 с.; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004, xvi+730 pp.

Дмитрий Вячеславович Новиков
(Dmitrii V. Novikov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: dmitry.novikov@softbt.ru

Поступила в редакцию
13.11.2013