Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ониани, О сходимости двойных рядов Фурье–Хаара по растяжениям множества, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 7, 73–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8303>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 18:25:38

УДК 517.52

Г. Г. Ониани

О сходимости двойных рядов Фурье–Хаара по растяжениям множества

Изучается сходимость двойных рядов Фурье–Хаара для случая, когда частичные суммы берутся по растяжениям наперед заданного ограниченного множества $W \subset \mathbb{R}_+^2$, содержащего пересечение некоторой окрестности начала координат с $\mathbb{R}_+^2$. Из установленных результатов следует, что для множества W достаточно общего вида (в частности, в случае выпуклости W) возможны два альтернативных варианта: либо ряд Фурье–Хаара произвольной функции $f \in L([0, 1]^2)$ сходится почти всюду, либо $L \ln^+ L([0, 1]^2)$ является наилучшим интегральным классом, в котором обеспечена почти всюду сходимость двойных рядов Фурье–Хаара. Более того, найдено характеристическое свойство для W , которое определяет, какая из двух альтернативных возможностей реализуется.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: ряд Фурье–Хаара, двойной ряд, лакунарный ряд, сходимость.

DOI: 10.4213/sm8303

§ 1. Введение

Пусть $W \subset \mathbb{R}_+^2$, где $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Для ряда $\sigma = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$ через $S_W(\sigma)$ обозначим его *частичную сумму по множеству W* , т.е.

$$S_W(\sigma) = \sum_{\mathbf{m} \in W} a_{\mathbf{m}}.$$

Заметим, что сумму по пустому множеству индексов мы считаем равной нулю. Сходимость частичных сумм $S_{rW}(\sigma)$ при $r \rightarrow \infty$ будет упомянута как *W -сходимость ряда σ* . Здесь, как обычно, rW обозначает растяжение множества W с коэффициентом $r > 0$, т.е. $rW = \{r\mathbf{x} : \mathbf{x} \in W\}$.

Через $\mathcal{W}$ обозначим класс всех ограниченных множеств $W \subset \mathbb{R}_+^2$, содержащих пересечение некоторой окрестности начала координат с $\mathbb{R}_+^2$.

Положим $\mathbb{I} = [0, 1]$. Для функции $f \in L(\mathbb{I}^2)$ через $\sigma(f)$ обозначим ее ряд Фурье по двойной системе Хаара $(h_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2}$, т.е.

$$\sigma(f)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} c_{\mathbf{m}}(f) h_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{I}^2,$$

где $c_{\mathbf{m}}(f)$ является $\mathbf{m}$ -м коэффициентом Фурье–Хаара функции f .

Для $f \in L(\mathbb{I}^2)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^2$ и $W \subset \mathbb{R}_+^2$ сумму $S_W(\sigma(f)(\mathbf{x}))$ обозначим через $S_W(f)(\mathbf{x})$.

Работа выполнена при поддержке Грузинского национального научного фонда им. Ш. Руставели (грант № 31/48).

W -сходимости рядов в случаях единичного квадрата $W = \mathbb{I}^2$ и единичного круга $W = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ называются *сходимостью по квадратам* и *сходимостью по сферам* соответственно.

Известно, что квадратичные частичные суммы двойного ряда Фурье–Хаара сходятся почти всюду для каждой функции $f \in L(\mathbb{I}^2)$ (см., например, [1]). С другой стороны, то же самое не справедливо для сферических частичных сумм. В этом случае наилучшим интегральным классом, в котором обеспечена почти всюду сходимость, является $L \ln^+ L(\mathbb{I}^2)$ (см. [2]–[4]). Таким образом, характеристики W -сходимости двойных рядов Фурье–Хаара зависят от свойств множества W .

Ниже мы докажем результаты, из которых следует, что для множеств W из достаточно широкого класса (который содержит, например, класс всех выпуклых множеств из $\mathcal{W}$) случаи единичного квадрата и единичного круга являются типичными: для произвольного множества W из упомянутого семейства либо ряд Фурье–Хаара любой функции $f \in L(\mathbb{I}^2)$ W -сходится почти всюду, либо $L \ln^+ L(\mathbb{I}^2)$ является наилучшим интегральным классом, в котором обеспечена почти всюду W -сходимость двойных рядов Фурье–Хаара.

§ 2. Некоторые свойства системы Хаара

Введем обозначения:

$\mathbb{Z}_0$ – множество всех неотрицательных чисел;

$\mathbb{I}_d$ – множество всех двоично-иррациональных точек единичного отрезка $\mathbb{I}$;

$H(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$, – спектр системы Хаара в точке $\mathbf{x}$, т.е. множество $\{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n : h_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) \neq 0\}$;

$\mathbf{0}$ – начало координат в $\mathbb{R}^n$;

$\mathbf{1}$ – точка $(1, \dots, 1)$ в $\mathbb{R}^n$;

$2^{\mathbf{k}}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$, – точка $(2^{k_1}, \dots, 2^{k_n})$;

$|\mathbf{x}|$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, – сумма $|x_1| + \dots + |x_n|$;

$\Delta_{k,i}^i$, $k \in \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{Z}$, – двоичный интервал $\left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right]$;

$\tilde{\Delta}_{k,i}^i$, $k \in \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{Z}$, – открытый двоичный интервал $\left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right)$;

$\Delta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{i}}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^n$, – n -мерный двоичный интервал $\Delta_{k_1}^{i_1} \times \dots \times \Delta_{k_n}^{i_n}$;

$\mathbf{I} = \mathbf{I}_n$ – семейство всех n -мерных интервалов;

$\mathbf{I}_d = \mathbf{I}_{n,d}$ – семейство всех n -мерных двоичных интервалов;

$\mathbf{I}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{I}_d(\mathbf{x})$) – семейство всех $\mathbf{I} \in \mathbf{I}$ ($\mathbf{I} \in \mathbf{I}_d$), содержащих $\mathbf{x}$;

$\mathbf{k}(I)$ – ранг двоичного интервала I , т.е. $\mathbf{k}(I)$ является тем элементом из $\mathbb{Z}^n$, для которого $I \in \{\Delta_{\mathbf{k}(I)}^{\mathbf{i}} : \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^n\}$;

$\Delta_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^n$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$, – двоичный интервал ранга $\mathbf{k}$, содержащий $\mathbf{x}$;

$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \iff x_i \leq y_i$ для каждого $i \in \overline{1, n}$;

$\mathbf{x} < \mathbf{y} \iff x_i < y_i$ для каждого $i \in \overline{1, n}$;

$[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, – интервал $[x_1, y_1] \times \dots \times [x_n, y_n]$;

$\mathbf{k}(\mathbf{m})$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n$, – точка $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_0^n$, для которой $2^{\mathbf{k}-1} < \mathbf{m} \leq 2^{\mathbf{k}}$;

$A_I(f)$, $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $I \in \mathbf{I}$, – интегральное среднее $\frac{1}{|I|} \int_I f$.

Напомним определение системы Хаара $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$: $h_1(x) = 1$, $x \in \mathbb{I}$, и если $m = 2^k + i$, $k \in \mathbb{Z}_0$, $i \in \overline{1, 2^k}$, то

$$h_m(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } x \in \widetilde{\Delta}_{k+1}^{2i-1}, \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in \widetilde{\Delta}_{k+1}^{2i}, \\ 0 & \text{при } x \notin \Delta_k^i. \end{cases}$$

Во внутренних точках разрыва h_m определена как среднее правого и левого пределов, а в концах $\mathbb{I}$ – как пределы изнутри интервала.

Нижеприведенное свойство непосредственно вытекает из определения системы Хаара.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Выполнены следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} \text{card}(H(x) \cap [2^k + 1, 2^{k+1}]) &= 1, & x \in \mathbb{I}_d, \quad k \in \mathbb{Z}_0, \\ H(\mathbf{x}) &= H(x_1) \times H(x_2), & \mathbf{x} \in \mathbb{I}^2. \end{aligned}$$

Для ряда $\sigma = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_0^2$ через $S_{\mathbf{m}}(\sigma)$ обозначим $\mathbf{m}$ -ю прямоугольную частичную сумму σ , т.е. $S_{\mathbf{m}}(\sigma) = S_{[\mathbf{0}, \mathbf{m}]}(\sigma)$, а для $f \in L(\mathbb{I}^2)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^2$ и $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_0^2$ сумму $S_{[\mathbf{0}, \mathbf{m}]}(f)(\mathbf{x})$ обозначим через $S_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{x})$.

Следующее предложение (см., например, [5; гл. 3, § 1]) связывает прямоугольную сходимость рядов Фурье-Хаара с дифференцированием интегралов относительно базиса из двоичных интервалов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Пусть $f \in L(\mathbb{I}^2)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^2$ и $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_0^2$. Тогда*

$$S_{2^{\mathbf{k}}}(f)(\mathbf{x}) = A_{\Delta_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})}(f).$$

Следствием предложений 2.1 и 2.2 является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Пусть $f \in L(\mathbb{I}^2)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^2$ и $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2$. Тогда:*

а) *если $H(\mathbf{x}) \cap [2^{\mathbf{k}(\mathbf{m})-1} + \mathbf{1}, \mathbf{m}] \neq \emptyset$, то*

$$S_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{x}) = S_{2^{\mathbf{k}(\mathbf{m})}}(f)(\mathbf{x}) = A_{\Delta_{\mathbf{k}(\mathbf{m})}(\mathbf{x})}(f);$$

б) *если $H(\mathbf{x}) \cap [2^{\mathbf{k}(\mathbf{m})-1} + \mathbf{1}, \mathbf{m}] = \emptyset$, то*

$$S_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{x}) = S_{2^{\mathbf{k}(\mathbf{m})-1}}(f)(\mathbf{x}) = A_{\Delta_{\mathbf{k}(\mathbf{m})-1}(\mathbf{x})}(f).$$

Напомним, что последовательность $(a_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2}$ называется *сходящейся*, если $a_{\mathbf{m}}$ сходится к пределу при $\min(m_1, m_2) \rightarrow \infty$, а ряд $\sigma = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$ называется *сходящимся по Прингсхейму*, если последовательность его частичных сумм $S_{\mathbf{m}}(\sigma)$ является сходящейся.

Пусть $\theta \geq 1$. Последовательность $(a_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2}$ называется *θ -сходящейся к числу s* , если $a_{\mathbf{m}} \rightarrow s$ при $\max(m_1/m_2, m_2/m_1) \leq \theta$ и $\min(m_1, m_2) \rightarrow \infty$. Ряд $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$ называется *θ -сходящимся*, если последовательность его прямоугольных частичных сумм является θ -сходящейся.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из предложения 2.3 и теоремы Лебега о дифференцировании интегралов (см., например, [6; гл. IV, § 5] или [7; гл. I, § 3]) следует, что для каждой функции $f \in L(\mathbb{I}^2)$ ее ряд Фурье-Хаара θ -сходится к $f(\mathbf{x})$ для каждого $\theta \geq 1$ в почти каждой точке $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Из предложения 2.3 и теоремы Йессена–Марцинкевича–Зигмунда о сильной дифференцируемости интегралов от функций из класса $L \ln^+ L(\mathbb{I}^2)$ (см. [7; гл. II, § 3]) вытекает, что для каждой функции из $L \ln^+ L(\mathbb{I}^2)$ ее ряд Фурье–Хаара сходится по Прингсхейму почти всюду, т.е.

$$\lim_{\mathbf{m} \rightarrow \infty} S_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

в почти каждой $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^2$.

Пусть $S \subset \mathbb{N}^n$ и $\lambda > 1$. Множество S называется λ -лакунарным, если для любых $\mathbf{m}, \mathbf{m}^* \in S$, $\mathbf{m} \neq \mathbf{m}^*$, имеем

$$\frac{\max(m_i, m_i^*)}{\min(m_i, m_i^*)} \geq \lambda$$

для каждого $i \in \overline{1, n}$ с $m_i \neq m_i^*$.

Нетрудно видеть, что множество $S \subset \mathbb{N}^n$ является λ -лакунарным тогда и только тогда, когда найдутся λ -лакунарные одномерные множества $S_1, \dots, S_n \subset \mathbb{N}$ такие, что $S \subset S_1 \times \dots \times S_n$.

Множество $S \subset \mathbb{N}^n$ называется лакунарным, если оно λ -лакунарно при некотором $\lambda > 1$.

Последовательность $(a_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2}$ или ряд $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$ называются лакунарными (λ -лакунарными), если лакунарно (λ -лакунарно) множество $S = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2 : a_{\mathbf{m}} \neq 0\}$.

Следующее свойство непосредственно вытекает из определения системы Хаара.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Если $x \in \mathbb{I}_{\mathbf{d}}$ и $H(x) = \{m_1, m_2, \dots\}$, где $m_1 < m_2 < \dots$, то $m_{k+1}/m_k = 2$ или $m_{k+1}/m_k = 2 - 1/m_k$ для каждого $k \in \mathbb{N}$.

Из предложений 2.1 и 2.4 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Спектр системы Хаара $H(\mathbf{x})$ в каждой точке $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_{\mathbf{d}}^2$ является $3/2$ -лакунарным множеством и, следовательно, каждый ряд Фурье–Хаара $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}} h_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$ является $3/2$ -лакунарным в каждой точке $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_{\mathbf{d}}^2$.

§ 3. Сходимость по растяжениям множества, эквивалентного прямоугольнику

Множества $W_1 \subset \mathbb{R}_+^2$ и $W_2 \subset \mathbb{R}_+^2$ назовем эквивалентными, если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $W_1 \setminus (\varepsilon, \infty)^2 = W_2 \setminus (\varepsilon, \infty)^2$.

Если $W \subset \mathbb{R}_+^2$ эквивалентно некоторому прямоугольнику I вида $[0, t_1] \times [0, t_2]$, где $t_1, t_2 > 0$, то будем говорить, что W эквивалентно прямоугольнику.

ТЕОРЕМА 3.1. Если $W \in \mathscr{W}$ эквивалентно прямоугольнику, то для каждой $f \in L(\mathbb{I}^2)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_{rW}(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{почти всюду.}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Частный случай теоремы 3.1 был анонсирован в [8].

Теорема 3.1 получена на основании замечания 2.1, предложения 2.5 и следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $W \in \mathcal{W}$ эквивалентно прямоугольнику. Если лакунарный числовой ряд $\sigma = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$ θ -сходится к s для каждого $\theta \geq 1$, то σ W -сходится к s .

Легко проверить справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 3.1. Пусть $W \subset [\varepsilon, \eta]^2$, где $0 < \varepsilon < \eta$, и пусть $S \subset \mathbb{N}^2$ — λ -лакунарное множество. Тогда

$$\text{card}(S \cap rW) \leq \left[\log_{\lambda} \frac{\eta}{\varepsilon} \right]^2 \quad \text{для каждого } r > 0.$$

ЛЕММА 3.2. Если $\theta > 1$ и числовой ряд $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$ θ -сходится, то $(a_{\mathbf{m}})$ θ^* -сходится к 0 для каждой $\theta^* \in [1, \theta)$. Следовательно, если числовой ряд $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$ θ -сходится для каждого $\theta \geq 1$, то его общий член $(a_{\mathbf{m}})$ θ -сходится к 0 для каждого $\theta \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$N_{\alpha} = \left\{ \mathbf{m} \in \mathbb{N}^2 : \max \left(\frac{m_1}{m_2}, \frac{m_2}{m_1} \right) \leq \alpha \right\}, \quad \alpha \geq 1.$$

Очевидно, для заданного $\theta^* \in [1, \theta)$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\mathbf{m} - \mathbf{e} \in N_{\theta^*} \quad \text{для каждого } \mathbf{e} \in \{0, 1\}^2 \quad (3.1)$$

при $\mathbf{m} \in N_{\theta^*}$ и $\min(m_1, m_2) > N$.

Заметим, что

$$a_{\mathbf{m}} = \sum_{\mathbf{e} \in \{0, 1\}^2} (-1)^{|\mathbf{e}|} S_{\mathbf{m} - \mathbf{e}}(\sigma). \quad (3.2)$$

Теперь, принимая во внимание (3.1) и (3.2), из θ -сходимости последовательности $S_{\mathbf{m}}(\sigma)$ получаем θ^* -сходимость последовательности $(a_{\mathbf{m}})$. Лемма доказана.

Следующая лемма является следствием лемм 3.1 и 3.2.

ЛЕММА 3.3. Пусть $W \subset (\varepsilon, \eta)^2$, где $0 < \varepsilon < \eta$. Если $\sigma = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$ является лакунарным числовым рядом, для которого $(a_{\mathbf{m}})$ η/ε -сходится к 0, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_{rW}(\sigma) = 0.$$

В частности, то же самое заключение справедливо, если $\sigma = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$ является лакунарным числовым рядом, θ -сходящим для некоторого $\theta > \eta/\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Пусть W эквивалентно прямоугольнику $I = [0, t_1] \times [0, t_2]$ и $\varepsilon > 0$ таково, что $W \setminus (\varepsilon, \infty)^2 = I \setminus (\varepsilon, \infty)^2$. Обозначим $W_1 = W \cap (\varepsilon, \infty)^2$ и $W_2 = I \cap (\varepsilon, \infty)^2$.

Легко видеть, что

$$S_{rW}(\sigma) = S_{rI}(\sigma) - S_{rW_2}(\sigma) + S_{rW_1}(\sigma).$$

Положим $\theta_0 = \max(t_1/t_2, t_2/t_1)$. Очевидно, из θ_0 -сходимости ряда σ следует сходимость $S_{rI}(\sigma)$ к s при $r \rightarrow \infty$. С другой стороны, используя ограниченность множеств W_1, W_2 и θ -сходимость σ при каждом $\theta \geq 1$, из леммы 3.3 выводим сходимость к 0 сумм $S_{rW_2}(\sigma)$ и $S_{rW_1}(\sigma)$. Этим теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Легко видеть, что теоремы 3.1 и 3.2 могут быть усилены в виде теорем 3.3 и 3.4 соответственно.

ТЕОРЕМА 3.3. Если множества $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$ эквивалентны, то для каждой $f \in L(\mathbb{I}^2)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (S_{rW_1}(f)(\mathbf{x}) - S_{rW_2}(f)(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{почти всюду.}$$

ТЕОРЕМА 3.4. Если множества $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$ эквивалентны, то для каждого лакунарного числового ряда $\sigma = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$, для которого $(a_{\mathbf{m}})$ θ -сходится к 0 при каждом $\theta \geq 1$, имеем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (S_{rW_1}(\sigma) - S_{rW_2}(\sigma)) = 0.$$

В частности, то же самое заключение справедливо для каждого лакунарного числового ряда $\sigma = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$, который θ -сходится при каждом $\theta \geq 1$.

Теоремы 3.3 и 3.4 показывают, что любое заключение о почти всюду W -сходимости рядов Фурье–Хаара и о W -сходимости числовых лакунарных рядов, которые θ -сходятся при каждом $\theta \geq 1$, можно распространить на V -сходимость аналогичных рядов для каждого множества V , эквивалентного W .

§ 4. Сходимость по растяжениям множества ограниченной вариации

Сечением последовательности $(a_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2}$ назовем любую последовательность, получаемую из $(a_{\mathbf{m}})$ фиксированием одной из двух координат индекса $\mathbf{m}$.

Сечением ряда $\sigma = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$ будем называть любой ряд, составленный из некоторого сечения последовательности $(a_{\mathbf{m}})$.

Говорят, что двойной числовой ряд *регулярно сходится*, если он сходится по Прингсхейму и каждое его сечение сходится. Заметим, что такой вид сходимости двойных рядов рассматривали Г. Харди в [9] и Ф. Мориц в [10].

Под *сильной сходимостью* последовательности $(a_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2}$ мы будем понимать сходимость $(a_{\mathbf{m}})$ к пределу при $\max(m_1, m_2) \rightarrow \infty$.

Заметим, что для последовательности $(a_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2}$ следующие условия эквивалентны:

- 1) $(a_{\mathbf{m}})$ сильно сходится к a ;
- 2) $(a_{\mathbf{m}})$ сходится к a и каждое сечение $(a_{\mathbf{m}})$ сходится к a .

Ясно, что если ряд $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$ регулярно сходится, то его общий член $(a_{\mathbf{m}})$ сильно сходится к 0.

Положительные постоянные, зависящее от параметров $p_1, \dots, p_m$, будем обозначать через $c(p_1, \dots, p_m)$, $N(p_1, \dots, p_m), \dots$. Абсолютные постоянные будем обозначать через $c, c_1, c_2, \dots$.

Будем говорить, что множество $W \subset \mathbb{R}^2$ имеет *ограниченную вариацию вдоль направления* $\mathbf{e}$, если пересечение W с произвольной прямой, параллельной $\mathbf{e}$,

состоит из попарно не пересекающихся одномерных отрезков, число которых не превышает некоторую постоянную $N = N(W, \mathbf{e})$. Заметим, что в данном определении отрезки могут быть вырожденными, т.е. состоящими из одной точки.

Будем говорить, что множество $W \in \mathcal{W}$ имеет *ограниченную вариацию*, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что:

- 1) множество $W \cap ([0, \varepsilon] \times \mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию вдоль направления $(1, 0)$;
- 2) множество $W \cap (\mathbb{R} \times [0, \varepsilon])$ имеет ограниченную вариацию вдоль направления $(0, 1)$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $W \in \mathcal{W}$ – множество с ограниченной вариацией. Тогда для каждой $f \in L \ln^+ L(\mathbb{I}^2)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_{rW}(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{почти всюду.}$$

Теорему 4.1 мы выведем из более общих результатов, приведенных ниже.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\sigma = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$ – числовой лакунарный ряд. Если σ регулярно сходится к s по Прингсхейму и $(a_{\mathbf{m}})$ сильно сходится к 0 (в частности, если σ регулярно сходится к s), то σ W -сходится к s для каждого множества $W \in \mathcal{W}$ с ограниченной вариацией.

Принимая во внимание предложение 2.5, из теоремы 4.2 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\sigma = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} c_{\mathbf{m}} h_{\mathbf{m}}$ – ряд Хаара. Если σ сходится по Прингсхейму в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^2$ и его общий член $(c_{\mathbf{m}} h_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}))$ сильно сходится к 0 (в частности, если σ регулярно сходится в $\mathbf{x}$), то σ W -сходится для каждого множества $W \in \mathcal{W}$ с ограниченной вариацией.

В [2] (см. также [11]) было установлено, что для каждого двойного ряда Фурье–Хаара $\sigma(f)$ существует множество полной меры $E \subset \mathbb{I}^2$ такое, что для каждой точки $\mathbf{x}$ из E каждое сечение ряда $\sigma(f)(\mathbf{x})$ является сходящимся. Из этого результата вытекает, что если двойной ряд Фурье–Хаара $\sigma(f)$ сходится по Прингсхейму в каждой точке множества $E \subset \mathbb{I}^2$, то $\sigma(f)$ регулярно сходится в почти каждой точке из E . Отсюда на основании теоремы 4.3 заключаем справедливость следующего результата.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $W \in \mathcal{W}$ – множество с ограниченной вариацией. Если $f \in L(\mathbb{I}^2)$, $E \subset \mathbb{I}^2$ и ряд Фурье–Хаара функции f сходится к $f(\mathbf{x})$ по Прингсхейму в каждой точке $\mathbf{x} \in E$, то $\sigma(f)$ W -сходится к $f(\mathbf{x})$ для почти каждой $\mathbf{x} \in E$.

Теорема 4.1 вытекает из теоремы 4.4 с учетом замечания 2.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Результаты, аналогичные теоремам 4.1–4.4, в случае сферической сходимости кратных рядов были доказаны в [11]. Частные случаи теорем 4.1 и 4.4 были анонсированы в [8].

ЛЕММА 4.1. Пусть $V \subset \mathbb{R}_+^2$, $\varepsilon > 0$ и

$$[0, \varepsilon]^2 \subset V \subset ([0, \varepsilon] \times \mathbb{R}_+) \cup (\mathbb{R}_+ \times [0, \varepsilon]),$$

$V \cap ([0, \varepsilon] \times \mathbb{R}_+)$ имеет ограниченную вариацию вдоль направления $(1, 0)$, $V \cap (\mathbb{R}_+ \times [0, \varepsilon])$ имеет ограниченную вариацию вдоль направления $(0, 1)$.

Допустим, $\lambda \geq 1$ и $S \subset \mathbb{N}^2$ – λ -лакунарное множество. Тогда для произвольного $r > 0$ множество $S \cap rV$ можно представить следующим образом:

$$S \cap rV = (S \cap [0, r\varepsilon]^2) \cup \bigcup_{i=1}^{\nu} (S \cap \Delta_i),$$

где

$$\nu \leq N(V, \lambda),$$

каждое Δ_i является вертикальным или горизонтальным одномерным отрезком,

$$\Delta_i \subset rV \setminus [0, r\varepsilon]^2, \quad i \in \overline{1, \nu}, \quad \text{и } \Delta_i \text{ попарно не пересекаются.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, $\eta \geq \varepsilon$ и $V \subset [0, \eta]^2$.

Пусть $r > 0$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} l_{1,t} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = t\}, \quad l_{2,t} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = t\}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ V_1 &= V \cap ([0, \varepsilon] \times (\varepsilon, \infty)), \quad V_2 = V \cap ((\varepsilon, \infty) \times [0, \varepsilon]), \\ T_1 &= \{t \in \mathbb{N} : t > r\varepsilon, l_{1,t} \cap S \cap rV_1 \neq \emptyset\}, \\ T_2 &= \{t \in \mathbb{N} : t > r\varepsilon, l_{2,t} \cap S \cap rV_2 \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} (S \cap rV_1) \cap (S \cap rV_2) &= \emptyset, \\ (S \cap rV) \setminus (S \cap [0, r\varepsilon]^2) &= (S \cap rV_1) \cup (S \cap rV_2), \\ S \cap rV_1 &= S \cap \bigcup_{t \in T_1} (l_{1,t} \cap rV_1), \quad S \cap rV_2 = S \cap \bigcup_{t \in T_2} (l_{2,t} \cap rV_2). \end{aligned}$$

Очевидно, V_1 имеет ограниченную вариацию вдоль направления $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$. Легко видеть, что rV_1 имеет ограниченную вариацию вдоль $\mathbf{e}_1$ и $N(rV_1, \mathbf{e}_1) = N(V_1, \mathbf{e}_1)$. Аналогично заключаем, что rV_2 имеет ограниченную вариацию вдоль направления $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ и $N(rV_2, \mathbf{e}_2) = N(V_2, \mathbf{e}_2)$.

Так как S – λ -лакунарно, то T_1 будет λ -лакунарным одномерным множеством. Откуда, принимая во внимание включение $T_1 \subset (r\varepsilon, r\eta]$, получим

$$\text{card } T_1 \leq \log_{\lambda} \frac{\eta}{\varepsilon}.$$

Для произвольного $t \in T_1$ множество $l_t \cap rV_1$ состоит из попарно не пересекающихся одномерных горизонтальных отрезков, число которых не превышает $N(V_1, \mathbf{e}_1)$. Обозначим семейство этих отрезков через $\Omega(t)$. Семейство $\Omega_1 = \bigcup_{t \in T_1} \Omega(t)$ дает нам представление множества $\bigcup_{t \in T_1} (l_{1,t} \cap rV_1)$ с помощью

попарно не пересекающихся одномерных горизонтальных отрезков, и при этом число отрезков из Ω_1 не превышает $N(V_1, \mathbf{e}_1) \log_\lambda \frac{\eta}{\varepsilon}$.

Проводя аналогичное рассуждение, мы можем представить множество $\bigcup_{t \in T_2} (l_{2,t} \cap rV_2)$ с помощью семейства Ω_2 попарно не пересекающихся одномерных вертикальных отрезков, число которых не превышает $N(V_2, \mathbf{e}_2) \log_\lambda \frac{\eta}{\varepsilon}$.

Очевидно, $\Omega_1 \cup \Omega_2$ представляет собой семейство отрезков с нужными свойствами. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2. Пусть $W \in \mathscr{W}$ – множество с ограниченной вариацией. Очевидно, можно найти $\varepsilon > 0$ такое, что множество $V = W \setminus (\varepsilon, \infty)^2$ будет удовлетворять условиям леммы 4.1.

Рассмотрим произвольное $\eta > 0$. Сначала подберем $N_1 \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$|S_{\mathbf{m}}(\sigma) - s| < \eta, \quad \text{когда} \quad \min(m_1, m_2) \geq N_1. \quad (4.1)$$

Потом подберем $N_2 \in \mathbb{N}$ со свойством

$$|a_{\mathbf{k}}| < \frac{\eta}{N_1}, \quad \text{когда} \quad \max(k_1, k_2) \geq N_2. \quad (4.2)$$

Пусть $R > 0$ – число такое, что

$$R\varepsilon \geq \max(N_1, N_2) + 1. \quad (4.3)$$

Заметим, что в силу лакунарности ряда σ множество $S = \{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2 : a_{\mathbf{k}} \neq 0\}$ λ -лакунарно при некотором $\lambda > 1$.

Рассмотрим произвольное число $r \geq R$. Применим лемму 4.1 для параметров $V, \varepsilon, S, \lambda$ и r . Следовательно, найдем одномерные отрезки $\Delta_1, \dots, \Delta_\nu$ со свойствами из леммы 4.1.

Из (4.1) и (4.3) получаем

$$\left| \sum_{\mathbf{k} \in [0, r\varepsilon]^2} a_{\mathbf{k}} - s \right| < \eta.$$

Оценим сумму $\delta_i = \sum_{\mathbf{k} \in S \cap \Delta_i} a_{\mathbf{k}}$ для каждого заданного $i \in \overline{1, \nu}$. Обозначим $\Omega = [N_1 + 1, \infty)^2$. Возможны три случая:

I) $\Delta_i \subset \Omega$;

II) $\Delta_i \subset \mathbb{R}_+^2 \setminus \Omega$;

III) $\Delta_i \cap \Omega \neq \emptyset$ и $\Delta_i \cap (\mathbb{R}_+^2 \setminus \Omega) \neq \emptyset$.

Заметим, что для $1 \leq i_* \leq i$, $1 \leq j_* \leq j$, $\Pi = [i_*, i] \times \{j\}$ и $\Lambda = \{i\} \times [j_*, j]$ имеем

$$S_{\Pi}(\sigma) = S_{i,j}(\sigma) - S_{i,j-1}(\sigma) - S_{i_*-1,j}(\sigma) + S_{i_*-1,j-1}(\sigma), \quad (4.4)$$

$$S_{\Lambda}(\sigma) = S_{i,j}(\sigma) - S_{i-1,j}(\sigma) - S_{i,j_*-1}(\sigma) + S_{i-1,j_*-1}(\sigma). \quad (4.5)$$

Заметим также, что каждый Δ_i является вертикальным или горизонтальным одномерным отрезком.

В случае I) на основании (4.1) и (4.3)–(4.5) имеем $|\delta_i| < 4\eta$. В случае II) из (4.2)–(4.5) получаем $|\delta_i| < \eta$. В случае III) мы разложим Δ_i в два отрезка $\Delta_i \cap \Omega$ и $\Delta_i \cap (\mathbb{R}_+^2 \setminus \Omega)$. Потом сделаем для этих двух отрезков оценки,

аналогичные сделанным в случаях I) и II) соответственно. Следовательно, заключим, что $|\delta_i| < 5\eta$.

Принимая во внимание оценку $\nu \leq N(V, \lambda)$, на основании оценок, установленных для δ_i , имеем

$$\left| \sum_{\mathbf{k} \in S \cap rV} a_{\mathbf{k}} - s \right| < 5N(V, \lambda)\eta, \quad \text{когда } r \geq R.$$

Таким образом, $\lim_{r \rightarrow \infty} S_{rV}(\sigma) = s$. Теперь из эквивалентности множеств W и V и теоремы 3.4 заключаем, что $\lim_{r \rightarrow \infty} S_{rW}(\sigma) = s$.

Теорема доказана.

§ 5. Класс регулярных множеств

Под термином *кривая* будем подразумевать жорданову кривую, т.е. множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ вида $\gamma([0, 1])$, где $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ – непрерывное отображение, которое инъективно на интервале $(0, 1)$.

Любое непрерывное отображение $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое инъективно на $(0, 1)$ и $\Gamma = \gamma([0, 1])$, будем называть *параметризацией кривой* Γ .

Будем говорить, что кривая Γ *подобна отрезку вдоль направления $\mathbf{e}$* , если Γ является отрезком, параллельным $\mathbf{e}$, или каждая прямая, параллельная $\mathbf{e}$, пересекает Γ не более чем в одной точке.

Обозначим $Ox_1^+ = \{(t, 0) : t > 0\}$ и $Ox_2^+ = \{(0, t) : t > 0\}$.

Кривую Γ будем называть *регулярной*, если существует ее параметризация γ со свойствами:

- 1) $\gamma(0) \in Ox_1^+, \gamma(1) \in Ox_2^+$ и $\gamma(t) \in (0, \infty)^2$ при $0 < t < 1$;
- 2) существует $\varepsilon \in (0, 1/2)$ такое, что кривая $\gamma([0, \varepsilon])$ подобна отрезку вдоль направления $(0, 1)$ и кривая $\gamma([1 - \varepsilon, 1])$ подобна отрезку вдоль направления $(1, 0)$.

Если параметризация γ из вышеприведенного определения такова, что $\gamma([0, \varepsilon])$ ($\gamma([1 - \varepsilon, 1])$) является отрезком, параллельным направлению $(0, 1)$ ($(1, 0)$), то будем говорить, что регулярная кривая Γ *тривиальна вблизи Ox_1 (Ox_2)*.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Скажем, что кривая Γ имеет *выпуклые окончания*, если существует ее параметризация $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ со свойствами:

- 1) $\gamma(0) \in Ox_1^+, \gamma(1) \in Ox_2^+$ и $\gamma(t) \in (0, \infty)^2$ при $0 < t < 1$;
- 2) существуют число $\varepsilon \in (0, 1/2)$ и функции f и g на $[0, \varepsilon]$ такие, что f выпукла или вогнута, g выпукла или вогнута, $\gamma(t) = (f(t), t)$ при $0 \leq t \leq \varepsilon$ и $\gamma(t) = (1 - t, g(1 - t))$ при $1 - \varepsilon \leq t \leq 1$.

Из свойств выпуклых функций вытекает, что каждая кривая с выпуклыми окончаниями является регулярной.

Множество $W \in \mathscr{W}$ назовем *регулярным*, если W эквивалентно некоторому множеству V со свойствами:

- 1) V звездчато относительно начала координат;
- 2) V ограничена прямыми Ox_1, Ox_2 и некоторой регулярной кривой Γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Принимая во внимание замечание 5.1, легко видеть, что каждое множество $W \in \mathcal{W}$, ограниченное прямыми Ox_1 , Ox_2 и некоторой кривой Γ с выпуклыми окончаниями, является регулярным. Следовательно, регулярным является:

- 1) каждое выпуклое множество $W \in \mathcal{W}$;
- 2) каждое множество $W \in \mathcal{W}$ с выпуклым дополнением;
- 3) каждый многоугольник $W \in \mathcal{W}$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Каждое регулярное множество $W \in \mathcal{W}$ имеет ограниченную вариацию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть W – регулярное множество, ограниченное прямыми Ox_1 , Ox_2 и регулярной кривой Γ .

Докажем существование числа $\eta > 0$ такого, что $W \cap (\mathbb{R} \times [0, \eta])$ имеет ограниченную вариацию.

Если Γ тривиальна вблизи Ox_1 , то утверждение очевидно. Так что рассмотрим случай, когда Γ не тривиальна вблизи Ox_1 . Рассмотрим $\varepsilon > 0$, для которой каждая прямая, параллельная направлению $(0, 1)$, пересекает $\Gamma_1(\varepsilon)$ не более чем в одной точке. Нетрудно убедиться в существовании числа $\eta > 0$, для которого

$$\Gamma \setminus \Gamma_1(\varepsilon) \subset \mathbb{R}_+ \times (\eta, \infty). \quad (5.1)$$

Обозначим

$$\Pi = \mathbb{R} \times [0, \eta], \quad V = W \cap \Pi.$$

Положим также $\Delta_1 = \{(t, 0) : 0 \leq t \leq a\}$, где $(a, 0)$ – конец Γ , лежащий на Ox_1 , и $\Delta_2 = \{(0, t) : 0 \leq t \leq \eta\}$.

Через l_t , $t \geq 0$, обозначим прямую $\{(t, \tau) : \tau \in \mathbb{R}\}$. Исследуем структуру множества $l_t \cap V$. Сначала заметим, что если $t = 0$, то $l_t \cap V = \Delta_2$. Далее, рассмотрим $t \neq 0$ с $l_t \cap V \neq \emptyset$. Так как $V \subset \Pi$ и Π замкнуто, то $\partial V \subset \Pi$. С другой стороны, $\partial V \subset \partial W \cup \partial \Pi$. Следовательно, в силу (5.1)

$$\partial V \subset (\partial W \cup \partial \Pi) \cap \Pi = (\partial W \cap \Pi) \cup \partial \Pi = (\Gamma_1(\varepsilon) \cap \Pi) \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \partial \Pi. \quad (5.2)$$

Заметим, что множество $\partial_1(l_t \cap V)$ всех граничных точек множества $l_t \cap V$ в смысле одномерной естественной топологии на l_t содержится в $l_t \cap \partial V$. Оценим число точек, входящих в $l_t \cap \partial V$. В силу выбора ε имеем

$$\text{card}[l_t \cap (\Gamma_1(\varepsilon) \cap \Pi)] \leq \text{card}[l_t \cap \Gamma_1(\varepsilon)] \leq 1.$$

С другой стороны, ясно, что $\text{card}(l_t \cap \Delta_1) \leq 1$, $\text{card}(l_t \cap \Delta_2) = 0$, $\text{card}(l_t \cap \partial \Pi) \leq 2$. Следовательно, принимая во внимание (5.2), получаем

$$\text{card}[\partial_1(l_t \cap V)] \leq \text{card}(l_t \cap \partial V) \leq 4. \quad (5.3)$$

Из (5.3) вытекает, что $l_t \cap V$ является объединением не более чем четырех одномерных отрезков. Таким образом, $V = W \cap (\mathbb{R} \times [0, \eta])$ имеет ограниченную вариацию вдоль направления $(0, 1)$.

Аналогично мы можем доказать существование числа $\zeta > 0$, для которого $W \cap ([0, \zeta] \times \mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию вдоль направления $(1, 0)$.

Теорема доказана.

§ 6. Расходимость прямоугольного общего члена в классах, более широких, чем $L \ln^+ L(\mathbb{I}^2)$

Для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ обозначим

$$\pi_1(\mathbf{x}) = \frac{|x_1|}{|x_2|}, \quad \pi_2(\mathbf{x}) = \frac{|x_2|}{|x_1|}, \quad \pi(\mathbf{x}) = \max\left(\frac{|x_1|}{|x_2|}, \frac{|x_2|}{|x_1|}\right).$$

Будем говорить, что числовая последовательность $(a_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2}$ неограниченно расходится вблизи Ox_1 (Ox_2), если существует последовательность $\mathbf{m}_k = (m_{k,1}, m_{k,2})$ со свойствами

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min(m_{k,1}, m_{k,2}) = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_1(\mathbf{m}_k) = \infty \quad \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_2(\mathbf{m}_k) = \infty \right),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{\mathbf{m}_k}| = \infty.$$

ТЕОРЕМА 6.1. Для каждой функции $f \in L \setminus L \ln^+ L(\mathbb{I}^2)$ существует равноизмеримая с f функция g на $\mathbb{I}^2$ такая, что $(c_{\mathbf{m}}(g)h_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}))$ неограниченно расходится почти всюду вблизи как Ox_1 , так и Ox_2 .

Прямоугольный общий член ряда Фурье–Хаара $f \in L(\mathbb{I}^2)$ обозначим через $G_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{x})$, т.е. $G_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{x}) = c_{\mathbf{m}}(f)h_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$.

Следующая лемма непосредственно вытекает из предложения 2.3.

ЛЕММА 6.1. Пусть $f \in L(\mathbb{I}^2)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_{\mathbf{d}}^2$ и $\mathbf{m} \in H(\mathbf{x})$. Тогда

$$G_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{e} \in \{0,1\}^2} (-1)^{|\mathbf{e}|} S_{2^{\mathbf{k}(\mathbf{m})-\mathbf{e}}}(f)(\mathbf{x}).$$

Для $I \in \mathbf{I}_{\mathbf{d}}$ и $\mathbf{e} \in \{0,1\}^2$ через $I(\mathbf{e})$ обозначим двоичный интервал ранга $\mathbf{k}(I) - \mathbf{e}$, содержащий I .

Для $f \in L(\mathbb{R}^2)$ и $I \in \mathbf{I}_{\mathbf{d}}$ через $G_I(f)$ обозначим модифицированную интегральную среднюю:

$$G_I(f) = \sum_{\mathbf{e} \in \{0,1\}^2} (-1)^{|\mathbf{e}|} A_{I(\mathbf{e})}(f).$$

Пусть $I \in \mathbf{I}_{\mathbf{d}}$ и $I \subset \mathbb{I}^2$. Индекс $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2$, для которого носитель функции $h_{\mathbf{m}}$ совпадает с I (с точностью множеств нулевой меры), обозначим через $\mathbf{m}(I)$.

Нижеприведенное утверждение является непосредственным следствием предложений 2.1 и 2.3 и леммы 6.1.

ЛЕММА 6.2. Пусть $f \in L(\mathbb{I}^2)$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_{\mathbf{d}}^2$. Тогда:

- а) $G_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{x}) = G_{\Delta_{\mathbf{k}(\mathbf{m})}(\mathbf{x})}(f)$ для каждого $\mathbf{m} \in H(\mathbf{x})$;
- б) $G_I(f) = G_{\mathbf{m}(I)}(f)(\mathbf{x})$ для каждого $I \in \mathbf{I}_{\mathbf{d}}(\mathbf{x})$.

Таким образом, лемма 6.2 редуцирует сходимость $G_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{x})$ к сходимости модифицированных интегральных средних $G_I(f)$.

Для $I = I_1 \times I_2 \in \mathbf{I}$ положим

$$\pi_1(I) = \frac{|I_1|}{|I_2|}, \quad \pi_2(I) = \frac{|I_2|}{|I_1|}, \quad \pi(I) = \max\left(\frac{|I_1|}{|I_2|}, \frac{|I_2|}{|I_1|}\right).$$

Обозначим также

$$\mathbf{I}_d^\nu = \{I \in \mathbf{I}_d : \pi_\nu(I) \geq 1\}, \quad \nu = 1, 2,$$

$$\mathbf{I}_d^\nu(\mathbf{x}) = \{I \in \mathbf{I}_d^\nu : \mathbf{x} \in I\}, \quad \nu = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^n.$$

Учитывая теорему Лебега о дифференцировании интеграла, из леммы 6.2 получаем следующее утверждение.

Пусть $f \in L(\mathbb{I}^2)$ и $E \subset \mathbb{I}^2$. Тогда следующие предложения эквивалентны:

1) $(G_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{x}))$ неограниченно расходится вблизи как Ox_1 , так и Ox_2 для почти каждой $\mathbf{x} \in E$;

2) $\limsup_{I \in \mathbf{I}_d^2(\mathbf{x}), \text{diam } I \rightarrow 0} |G_I(f)| = \infty \quad \left(\limsup_{I \in \mathbf{I}_d^1(\mathbf{x}), \text{diam } I \rightarrow 0} |G_I(f)| = \infty \right)$

для почти каждой $\mathbf{x} \in E$.

Таким образом, теорему 6.1 мы можем переформулировать в терминах модифицированных интегральных средних $G_I(f)$ следующим образом.

Для каждой функции $f \in L \setminus L \ln^+ L(\mathbb{I}^2)$ существует равноизмеримая с f функция g на $\mathbb{I}^2$ такая, что

$$\limsup_{I \in \mathbf{I}_d^1(\mathbf{x}), \text{diam } I \rightarrow 0} |G_I(g)| = \infty, \quad \limsup_{I \in \mathbf{I}_d^2(\mathbf{x}), \text{diam } I \rightarrow 0} |G_I(g)| = \infty$$

почти всюду.

Из теоремы 2 работы [4] следует:

Для каждой функции $f \in L \setminus L \ln^+ L(\mathbb{I}^2)$ существует равноизмеримая с f функция g на $\mathbb{I}^2$ такая, что

$$\limsup_{I \in \mathbf{I}_d(\mathbf{x}), \text{diam } I \rightarrow 0} |G_I(g)| = \infty \quad \text{почти всюду.}$$

Ниже мы опишем, каким образом надо видоизменить схему доказательства упомянутой теоремы 2 из [4] для получения теоремы 6.1.

Пусть $I \in \mathbf{I}_d$, $\alpha \geq 1$ и $\nu = 1, 2$. Через $\Omega(I, \alpha)$ ($\Omega_\nu(I, \alpha)$) обозначим семейство всех $J \in \mathbf{I}_d$ ($J \in \mathbf{I}_d^\nu$) со свойствами $I \subset J$ и $|J| < \alpha|I|$, а через $\Omega^*(I, \alpha)$ ($\Omega_\nu^*(I, \alpha)$) обозначим семейство всех интервалов $I(\mathbf{e})$, где $I \in \Omega(I, \alpha)$ ($I \in \Omega_\nu(I, \alpha)$) и $\mathbf{e} \in \{0, 1\}^2$.

Положим

$$E(I, \alpha) = \bigcup_{J \in \Omega(I, \alpha)} J, \quad E^*(I, \alpha) = \bigcup_{J \in \Omega^*(I, \alpha)} J,$$

$$E_\nu(I, \alpha) = \bigcup_{J \in \Omega_\nu(I, \alpha)} J, \quad E_\nu^*(I, \alpha) = \bigcup_{J \in \Omega_\nu^*(I, \alpha)} J, \quad \nu = 1, 2.$$

Ясно, что если I – двоичный квадрат, то интервалы из семейств $\Omega_1(I, \alpha)$ и $\Omega_2(I, \alpha)$ ($\Omega_1^*(I, \alpha)$ и $\Omega_2^*(I, \alpha)$) симметричны относительно одной из диагоналей I . Учитывая это замечание, мы можем видоизменить лемму 6 из [4] следующим образом.

ЛЕММА 6.3. Пусть I – двоичный квадрат, $\alpha \geq 1$ и $\nu = 1, 2$. Тогда

$$I \subset E_\nu(I, \alpha) \subset E_\nu^*(I, \alpha) \subset 2\alpha I, \\ |E_\nu(I, \alpha)| \geq c_1 |E_\nu^*(I, \alpha)|, \quad |E_\nu(I, \alpha)| \geq c_2 \alpha \ln \alpha |I|.$$

Минимальную среди длин сторон интервала I обозначим через $l(I)$.

Для $f \in L(\mathbb{R}^2)$, положительных чисел λ , η и δ , где $\eta < \delta$, и $\nu = 1, 2$ через $\Lambda_\nu^{\eta, \delta}(f, \lambda)$ обозначим семейство всех двоичных интервалов $I \in \mathbf{I}_d^\nu$ со свойствами

$$G_I(f) > \lambda, \quad l(I) \geq \eta, \quad \text{diam } I < \delta.$$

ЛЕММА 6.4. Пусть I – двоичный квадрат $\lambda > 0$, $\alpha > 4\lambda$ и $\nu = 1, 2$. Если функция $f \in L(\mathbb{R}^2)$ такова, что $f(\mathbf{x}) \geq \alpha$ при $\mathbf{x} \in I$ и $f(\mathbf{x}) = 0$ при $\mathbf{x} \in E^*(I, \alpha/(4\lambda)) \setminus I$, то

$$\Omega_\nu\left(I, \frac{\alpha}{4\lambda}\right) \subset \Lambda_\nu^{\eta, \delta}(\alpha \chi_I, \lambda) \subset \Lambda_\nu^{\eta, \delta}(f, \lambda),$$

где $\delta = (\alpha/(4\lambda)) \text{diam } I$ и $\eta = l(I)$.

Лемма 6.4 является видоизменением леммы 7 из [4], причем доказательства вполне аналогичны.

Для $0 < \eta < \delta$ и $\nu = 1, 2$ введем следующие срезанные максимальные операторы:

$$G_{\mathbf{I}_d^\nu}^{(\eta, \delta)}(f)(\mathbf{x}) = \sup\{G_I(f) : I \in \mathbf{I}_d^\nu(\mathbf{x}), \text{diam } I < \delta, l(I) \geq \eta\}, \\ M_{\mathbf{I}_d}^{(\eta)}(f)(\mathbf{x}) = \sup\{A_I(f) : I \in \mathbf{I}_d(\mathbf{x}), l(I) \geq \eta\}.$$

ЛЕММА 6.5. Для каждой функции $f \in L \setminus L \ln^+ L(\mathbb{I}^2)$, принимающей натуральные значения, и каждого $m \in \mathbb{N}$ существуют измеримое множество $A \subset \mathbb{I}^2$, число $\eta > 0$ и измеримая функция $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ такие, что:

- 1) $A \subset \{f \geq 2^m\}$ и $f\chi_A$ – ограниченная функция;
- 2) g равноизмерима с $f\chi_A$ и $\text{supp } g \subset \mathbb{I}^2$;
- 3) существуют множества $E_1, E_2 \subset \mathbb{I}^2$ со свойствами: для каждого двоичного квадрата $Q \subset \mathbb{I}^2$ со сторонами длины $1/2^m$ имеем

$$|E_1 \cap Q| \geq c_3 |Q|, \quad |E_2 \cap Q| \geq c_3 |Q|$$

и для каждой функции $v \in L(\mathbb{I}^2)$ с $\text{supp } v = \text{supp } g$ и $v \geq g$ имеем

$$\{G_{\mathbf{I}_d^1}^{(\eta, 1/2^m)}(v) > m\} \supset E_1, \quad \{G_{\mathbf{I}_d^1}^{(\eta, 1/2^m)}(v) > m\} \supset E_2;$$

- 4) $M_{\mathbf{I}_d}^{(1/2^m)}(g)(\mathbf{x}) \leq 1/2^m$ для каждой $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^2$.

Лемма 6.5 является видоизменением леммы 11 из [4], при этом доказательство аналогично с тем отличием, что надо использовать леммы 6.3 и 6.4 вместо лемм 6 и 7 из [4].

Таким образом, мы изменили леммы 6, 7 и 11 из [4] их модификациями – леммами 6.3, 6.4 и 6.5 соответственно. Остальная часть доказательства теоремы 6.1 повторяет рассуждения из доказательства теоремы 2 из [4].

§ 7. Две теоремы о расходимости числовых лакунарных рядов

Если регулярная кривая Γ нетривиальна вблизи как Ox_1 , так и Ox_2 , то будем говорить, что Γ *двусторонне нетривиальна*.

Пусть Γ – двусторонне нетривиальная регулярная кривая с концами в точках $(a_1, 0)$ и $(0, a_2)$. *Эксцентриситетом* кривой Γ назовем число $\varrho(\Gamma) = a_1/a_2$.

Пусть $S_1, S_2 \subset \mathbb{N}$. Скажем, что число $\varrho > 0$ является *предельным эксцентриситетом* пары (S_1, S_2) , если существуют последовательности $p_k \in S_1$, $q_k \in S_2$ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} q_k = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{q_k} = \varrho.$$

Очевидно, ϱ не является предельным эксцентриситетом пары (S_1, S_2) тогда и только тогда, когда существуют $\varepsilon > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что $|p/q - \varrho| > \varepsilon$ для любых $p \in S_1$ и $q \in S_2$ с $p, q \geq N$.

Пусть $S \subset \mathbb{N}^2$ и Γ – двусторонне нетривиальная регулярная кривая. Допустим, S_1 и S_2 – проекции S на осях Ox_1 и Ox_2 соответственно. Будем говорить, что кривая Γ *хороша относительно множества S* , если эксцентриситет Γ не является предельным эксцентриситетом пары (S_1, S_2) . Очевидно, если Γ хороша относительно S , то Γ будет хорошей относительно любого подмножества S .

Спектр числового ряда $\sigma = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$ определим как множество $H(\sigma) = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2 : a_{\mathbf{m}} \neq 0\}$.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $\sigma = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$ – числовой лакунарный ряд со свойствами:

1) $(a_{\mathbf{m}})$ неограниченно расходится вблизи по крайней мере одной из осей Ox_1 и Ox_2 ;

2) $(a_{\mathbf{m}})$ θ -сходится к 0 для каждого $\theta \geq 1$.

Тогда для каждой двусторонне нетривиальной регулярной кривой Γ , которая хороша относительно спектра σ , имеем

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} |S_{r\Gamma}(\sigma)| = \infty.$$

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть $i, j = 1, 2$, $i \neq j$ и $\sigma = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$ – числовой ряд со свойствами:

1) $(a_{\mathbf{m}})$ неограниченно расходится вблизи Ox_i ;

2) σ θ -сходится для каждого $\theta \geq 1$.

Тогда для каждой регулярной кривой Γ , которая нетривиальна вблизи Ox_i и тривиальна вблизи Ox_j , имеем

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} |S_{r\Gamma}(\sigma)| = \infty.$$

Пусть Γ – регулярная кривая, а γ – ее параметризация такая, что: $\gamma(0) \in Ox_1^+$, $\gamma(1) \in Ox_2^+$ и $\gamma(t) \in (0, \infty)^2$ при $0 < t < 1$. Для $\varepsilon \in (0, 1/2)$ через $\Gamma_1(\varepsilon)$, $\Gamma_2(\varepsilon)$, $\Gamma(\varepsilon)$ обозначим множества $\gamma([0, \varepsilon])$, $\gamma([1 - \varepsilon, 1])$ и $\gamma((\varepsilon, 1 - \varepsilon))$ соответственно.

Легко проверить справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 7.1. Пусть $S \subset \mathbb{N}^2$ – лакунарное множество и Γ – регулярная кривая. Тогда для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$ существуют числа $0 < \delta < \eta$ такие, что

$$\Gamma(\varepsilon) \subset [\delta, \eta]^2.$$

ЛЕММА 7.2. Пусть $S \subset \mathbb{N}^2$ – лакунарное множество, $i = 1, 2$ и Γ – регулярная кривая, которая нетривиальна вблизи Ox_i . Тогда для достаточно малого $\varepsilon \in (0, 1)$ будем иметь

$$\text{card}(S \cap r\Gamma_i(\varepsilon)) \leq 1 \quad \text{для каждого } r > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, положим $i = 1$. Допустим, $\lambda > 1$ таково, что S является λ -лакунарным, $(a, 0)$ – конец Γ , лежащий на Ox_1 , $0 < \delta < ((\lambda - 1)/(\lambda + 1))a$ и $Q = (a - \delta, a + \delta) \times (0, \delta)$.

Так как Γ регулярна и нетривиальна вблизи Ox_1 , то мы можем найти $\varepsilon > 0$ такое, что:

1) каждая прямая, параллельная направлению $(0, 1)$, пересекает $\Gamma_1(\varepsilon)$ не более чем в одной точке;

2) $\Gamma_1(\varepsilon) \subset Q$.

Предположим, $\mathbf{m} \in S \cap r\Gamma_1(\varepsilon)$. Тогда $\mathbf{m} \in rQ$ и, следовательно,

$$r(a - \delta) < m_1 < r(a + \delta). \quad (7.1)$$

Докажем, что $r\Gamma_1(\varepsilon)$ не содержит никакой точки S , отличную от $\mathbf{m}$. Учитывая определение $\Gamma_1(\varepsilon)$, получаем, что пересечение $r\Gamma_1(\varepsilon)$ с вертикальной линией l , содержащей $\mathbf{m}$, не содержит других точек, отличных от $\mathbf{m}$. Следовательно, нам остается доказать, что $(S \setminus l) \cap r\Gamma_1(\varepsilon) = \emptyset$. Допустим, $\mathbf{m}^* \in S$ и $\mathbf{m}^* \notin l$. Тогда из λ -лакулярности S , определения $\Gamma_1(\varepsilon)$ и (7.1) имеем

$$m_1^* \geq \lambda r(a - \delta) > r(a + \delta),$$

или

$$m_1^* \leq \frac{1}{\lambda} r(a + \delta) < r(a - \delta).$$

В обоих случаях мы получаем, что $\mathbf{m}^* \notin rQ$ и, следовательно, $\mathbf{m}^* \notin r\Gamma_1(\varepsilon)$. Этим лемма доказана.

ЛЕММА 7.3. Пусть $S \subset \mathbb{N}^2$ – лакунарное множество и Γ – двусторонне нетривиальная регулярная кривая, которая хороша относительно S . Тогда для достаточно малого $\varepsilon \in (0, 1)$ имеем

$$\text{card}(S \cap [r\Gamma_1(\varepsilon) \cup r\Gamma_2(\varepsilon)]) \leq 1 \quad \text{для каждого } r \geq r(S, \Gamma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S_1 и S_2 – проекции S на осях Ox_1 и Ox_2 соответственно. Так как Γ хороша относительно S , то существуют числа $\eta = \eta(S, \Gamma) > 0$ и $N = N(S, \Gamma)$ такие, что

$$\left| \frac{p}{q} - \varrho(\Gamma) \right| > \eta \quad (7.2)$$

для каждых $p \in S_1$, $q \in S_2$ с $p, q \geq N$.

Допустим, $(a_1, 0)$ и $(0, a_2)$ – концы кривой Γ и $\delta > 0$ – число такое, что

$$\varrho(\Gamma) - \eta < \frac{a_1 - \delta}{a_2 + \delta} < \frac{a_1 + \delta}{a_2 - \delta} < \varrho(\Gamma) + \eta. \quad (7.3)$$

Обозначим $Q_1 = (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times (0, \delta)$ и $Q_2 = (0, \delta) \times (a_2 - \delta, a_2 + \delta)$. В силу леммы 7.2 существует $\varepsilon > 0$, для которого

$$\text{card}(S \cap r\Gamma_i(\varepsilon)) \leq 1 \quad (7.4)$$

при каждом $i = 1, 2$ и $r > 0$. Мы можем предполагать также, что

$$\Gamma_1(\varepsilon) \subset Q_1, \quad \Gamma_2(\varepsilon) \subset Q_2. \quad (7.5)$$

Очевидно, существует число $r = r(S, \Gamma)$ со свойством

$$r\Gamma \subset [N, \infty)^2 \quad \text{при} \quad r \geq r(S, \Gamma). \quad (7.6)$$

Из (7.5) следует, что если $r > 0$, $\mathbf{x} \in r\Gamma_1(\varepsilon)$ и $\mathbf{y} \in r\Gamma_2(\varepsilon)$, то

$$\frac{a_1 - \delta}{a_2 + \delta} < \frac{x_1}{y_2} < \frac{a_1 + \delta}{a_2 - \delta}.$$

Следовательно, в силу (7.3)

$$\left| \frac{x_1}{y_2} - \varrho(\Gamma) \right| < \eta. \quad (7.7)$$

Из (7.2), (7.4), (7.6) и (7.7) имеем

$$\text{card}(S \cap [r\Gamma_1(\varepsilon) \cup r\Gamma_2(\varepsilon)]) \leq 1$$

для каждого $r \geq r(S, \Gamma)$. Лемма доказана.

Для $\alpha \geq 0$ через $l_{1,\alpha}$ и $l_{2,\alpha}$ обозначим лучи $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2 : x_2/x_1 = \alpha\}$ и $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2 : x_1/x_2 = \alpha\}$ соответственно.

Легко проверить справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 7.4. Пусть Γ – регулярная кривая. Тогда для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует $\alpha(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$l_{1,\alpha} \cap \Gamma_1(\varepsilon) \neq \emptyset, \quad l_{2,\alpha} \cap \Gamma_2(\varepsilon) \neq \emptyset$$

для каждого $\alpha \in (0, \alpha(\varepsilon))$.

Пусть Ω – класс всех отрезков на плоскости вида $\{(a, t) : 0 \leq t \leq b\}$, $\{(t, b) : 0 \leq t \leq a\}$, где $a, b > 0$.

ЛЕММА 7.5. Пусть $\sigma = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$ – числовой ряд, который θ -сходится для каждого $\theta \geq 1$. Тогда для каждого отрезка $\Delta \in \Omega$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_{r\Delta}(\sigma) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, рассмотрим случай отрезка Δ вида $\{(a, t) : 0 \leq t \leq b\}$.

Пусть число $r > 0$ таково, что $r\Delta \cap \mathbb{N}^2 \neq \emptyset$. Тогда имеем $ra \in \mathbb{N}$ и $rb > 1$. Допустим, $p = ra$ и q – целая часть числа rb . Легко видеть, что

$$S_{r\Delta}(\sigma) = S_{p,q}(\sigma) - S_{p-1,q}(\sigma), \quad \pi[(p, q)] \leq 2\pi[(a, b)].$$

Отсюда, учитывая θ -сходимость ряда σ при каждом $\theta \geq 1$, заключаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_{r\Delta}(\sigma) = 0.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.1. Не ограничивая общности, предположим, что $(a_{\mathbf{m}})$ неограниченно расходится вблизи Ox_1 . Тогда существует последовательность $\mathbf{m}_k = (m_{k,1}, m_{k,2})$ со свойствами

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min(m_{k,1}, m_{k,2}) = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_{k,1}}{m_{k,2}} = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{\mathbf{m}_k}| = \infty.$$

Число $\varepsilon > 0$ подберем так, чтобы заключения лемм 7.2 и 7.3 были выполнены. Тогда имеем:

- 1) для каждого $k \geq k_0$, где k_0 – достаточно большое число, существует $r_k > 0$ такое, что $\mathbf{m}_k \in r_k \Gamma_1(\varepsilon)$ (по лемме 7.4);
- 2) $H(\sigma) \cap r_k \Gamma_1(\varepsilon) = \{\mathbf{m}_k\}$ для каждого $k \geq k_0$ (по лемме 7.2);
- 3) $H(\sigma) \cap r_k \Gamma_2(\varepsilon) = \emptyset$ для каждого $k \geq k_1$, где $k_1 \geq k_0$ – достаточно большое число (по лемме 7.3);
- 4) существуют $0 < \delta < \eta$ такие, что $\Gamma(\varepsilon) \subset [\delta, \eta]^2$ (по лемме 7.1).

Из 1)–4) заключаем:

- 5) $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \infty$ (в силу 1));
- 6) $\lim_{k \rightarrow \infty} |S_{r_k \Gamma_1(\varepsilon)}(\sigma)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{\mathbf{m}_k}| = \infty$ (в силу 1) и 2));
- 7) $S_{r_k \Gamma_2(\varepsilon)}(\sigma) = 0$, если $k \geq k_1$ (в силу 3));
- 8) $\lim_{k \rightarrow \infty} |S_{r_k \Gamma(\varepsilon)}(\sigma)| = 0$ (в силу 4) и леммы 3.3).

Учитывая, что

$$S_{r_k \Gamma}(\sigma) = S_{r_k \Gamma_1(\varepsilon)}(\sigma) + S_{r_k \Gamma(\varepsilon)}(\sigma) + S_{r_k \Gamma_2(\varepsilon)}(\sigma),$$

из 5)–8) получим

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} |S_{r\Gamma}(\sigma)| \geq \lim_{k \rightarrow \infty} |S_{r_k \Gamma}(\sigma)| = \infty.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.2. Не ограничивая общности, предположим, что Γ тривиальна вблизи Ox_2 и $(a_{\mathbf{m}})$ неограниченно расходится вблизи Ox_1 . Пусть последовательность $\mathbf{m}_k = (m_{k,1}, m_{k,2})$ такова, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min(m_{k,1}, m_{k,2}) = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_{k,1}}{m_{k,2}} = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{\mathbf{m}_k}| = \infty.$$

Число $\varepsilon > 0$ подберем так, чтобы $\Gamma_1(\varepsilon)$ удовлетворяла заключению леммы 7.2 и $\Gamma_2(\varepsilon)$ была горизонтальным отрезком из Ω . Тогда имеем:

1) для каждого $k \geq k_0$, где k_0 – достаточно большое число, существует $r_k > 0$ такой, что $\mathbf{m}_k \in r_k \Gamma_1(\varepsilon)$ (по лемме 7.4);

2) $H(\sigma) \cap r_k \Gamma_1(\varepsilon) = \{\mathbf{m}_k\}$ для каждого $k \geq k_0$ (по лемме 7.2);

3) существуют $0 < \delta < \eta$ такие, что $\Gamma(\varepsilon) \subset [\delta, \eta]^2$ (по лемме 7.1).

Из 1)–3) заключаем:

4) $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \infty$ (в силу 1));

5) $\lim_{k \rightarrow \infty} |S_{r_k \Gamma_1(\varepsilon)}(\sigma)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{\mathbf{m}_k}| = \infty$ (в силу 1) и 2));

6) $\lim_{k \rightarrow \infty} |S_{r_k \Gamma(\varepsilon)}(\sigma)| = 0$ (в силу 3) и леммы 3.3).

По лемме 7.5 также имеем:

7) $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{r_k \Gamma_2(\varepsilon)}(\sigma) = 0$.

Из 4)–7), принимая во внимание

$$S_{r_k \Gamma}(\sigma) = S_{r_k \Gamma_1(\varepsilon)}(\sigma) + S_{r_k \Gamma(\varepsilon)}(\sigma) + S_{r_k \Gamma_2(\varepsilon)}(\sigma),$$

получаем

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} |S_r \Gamma(\sigma)| \geq \lim_{k \rightarrow \infty} |S_{r_k \Gamma}(\sigma)| = \infty.$$

Теорема доказана.

§ 8. Расходимость в классах, более широких, чем $L \ln^+ L(\mathbb{I}^2)$

ТЕОРЕМА 8.1. Для каждой функции $f \in L \setminus L \ln^+ L(\mathbb{I}^2)$ существует равноизмеримая с f функция g на $\mathbb{I}^2$ такая, что для каждого регулярного множества $W \in \mathscr{W}$, которое не эквивалентно прямоугольнику, имеем

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} |S_{rW}(g)(\mathbf{x})| = \infty \quad \text{почти всюду.}$$

Из теорем 3.1, 3.3, 4.1, 5.1 и 8.1 получаем следующее следствие для регулярных множеств.

Допустим, $W \in \mathscr{W}$ – регулярное множество. Тогда:

I) *если W эквивалентно прямоугольнику, то для каждой $f \in L(\mathbb{I}^2)$*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_{rW}(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{почти всюду;}$$

II) *если W не эквивалентно прямоугольнику, то для каждой $f \in L \ln^+ L(\mathbb{I}^2)$*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_{rW}(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{почти всюду,}$$

a для каждой $f \in L \setminus L \ln^+ L(\mathbb{I}^2)$ существует равноизмеримая с f функция g на $\mathbb{I}^2$ такая, что

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} |S_{rW}(g)(\mathbf{x})| = \infty \quad \text{почти всюду.}$$

Теорему 8.1 мы выводим из следующего более общего результата.

ТЕОРЕМА 8.2. *Для каждой функции $f \in L \setminus L \ln^+ L(\mathbb{I}^2)$ существует равноизмеримая с f функция g на $\mathbb{I}^2$ такая, что для каждой нетривиальной регулярной кривой Γ имеем*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} |S_{r\Gamma}(g)(\mathbf{x})| = \infty \quad \text{почти всюду.}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Пусть $W \in \mathscr{W}$ звездчато относительно начала координат и ограничено прямыми Ox_1 , Ox_2 и регулярной кривой Γ . Допустим, $r > 0$ и $r\Gamma \cap \mathbb{N}^2 \neq \emptyset$. Тогда легко видеть, что существует $\varepsilon > 0$, для которого $tW \setminus \tau W = r\Gamma$ при $r - \varepsilon < \tau < r < t < r + \varepsilon$. Откуда заключаем: если “ Γ -общий член” $S_{r\Gamma}(\sigma)$ ряда $\sigma = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} a_{\mathbf{m}}$ неограниченно расходится, то и σ неограниченно расходится. Теперь, учитывая теорему 3.3, из теоремы 8.2 получаем теорему 8.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. Результат, аналогичный теореме 8.2 для случая сферического общего члена кратного ряда Фурье–Хаара (т.е. для $S_{r\Gamma}(g)$, где $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$), был доказан в [4]. Частный случай теоремы 8.1 был анонсирован в [8]. До работы [4] Р. Гецадзе в [12] показал, что в интегральных классах, более широких, чем $L \ln^+ L(\mathbb{I}^2)$, сферический общий член двойного ряда Фурье–Хаара может расходиться на множествах положительной меры.

Теорему 8.2 мы выведем из теоремы 6.1 на основании следующего результата.

ТЕОРЕМА 8.3. *Если для функции $g \in L(\mathbb{I}^2)$ $(c_{\mathbf{m}}(g)h_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}))$ неограниченно расходится вблизи как Ox_1 , так и Ox_2 для каждой точки из множества $E \subset \mathbb{I}^2$, то для каждой нетривиальной регулярной кривой Γ имеем*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |S_{r\Gamma}(g)(\mathbf{x})| = \infty \quad \text{для почти каждой } \mathbf{x} \in E.$$

Для $t \in \mathbb{I}$ через $(m(t)_k)$ обозначим возрастающую последовательность натуральных чисел, которые составляют спектр $H(t)$, т.е. $H(t) = \{m(t)_1, m(t)_2, \dots\}$.

ЛЕММА 8.1. *Если $t \in \mathbb{I}_d$ и $\tau \in \mathbb{I}_d$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что*

$$\left| \frac{m(t)_i}{m(\tau)_j} - 2^{i-j} \frac{1+t}{1+\tau} \right| < \varepsilon$$

для каждой $i \geq N$ и $j \geq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения системы Хаара имеем, что для $x \in \mathbb{I}$ $m(x)_k = 2^{k-2} + [2^{k-2}x] + 1$ при $k \geq 3$, где $[a]$ обозначает целую часть числа a . Отсюда легко вытекает нужное нам заключение. Лемма доказана.

ЛЕММА 8.2. *Если $t \in \mathbb{I}_d$ и $\tau \in \mathbb{I}_d$, то множество всех положительных предельных эксцентриситетов пары $(H(t), H(\tau))$ имеет вид*

$$E(t, \tau) = \left\{ 2^\nu \frac{1+t}{1+\tau} : \nu \in \mathbb{Z} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $a_\nu = 2^\nu(1+t)/(1+\tau)$, $\nu \in \mathbb{Z}$. Из леммы 8.1 имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(t)_{k+\nu}}{m(\tau)_k} = a_\nu \quad \text{для каждого } \nu \in \mathbb{Z}.$$

Так что при каждом $\nu \in \mathbb{Z}$ a_ν является предельным эксцентриситетом пары $(H(t), H(\tau))$.

Пусть теперь $\varrho > 0$ и $\varrho \notin E(t, \tau)$. Рассмотрим $\nu \in \mathbb{Z}$ такое, что $a_\nu < \varrho < a_{\nu+1}$. Положим $\varepsilon = \min(\varrho - a_\nu, a_{\nu+1} - \varrho)/2$. В силу леммы 8.1 мы можем выбрать число $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\left| \frac{m(t)_i}{m(\tau)_j} - a_{i-j} \right| < \varepsilon \quad \text{для каждых } i, j \geq N.$$

Из последней оценки получаем

$$\left| \frac{m(t)_i}{m(\tau)_j} - \varrho \right| > \varepsilon \quad \text{для каждых } i, j \geq N.$$

Следовательно, ϱ не является предельным эксцентриситетом пары $(H(t), H(\tau))$. Этим лемма доказана.

ЛЕММА 8.3. Пусть Γ – двусторонне нетривиальная регулярная кривая. Тогда для почти каждой $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^2$ кривая Γ является хорошей относительно спектра $H(\mathbf{x})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^2$. Поскольку $H(\mathbf{x}) = H(x_1) \times H(x_2)$, то по лемме 8.2 Γ является хорошей относительно $H(\mathbf{x})$ тогда и только тогда, когда $\varrho(\Gamma) \notin E(x_1, x_2)$.

Оценим меру множества A всех точек $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^2$, для которых $\varrho(\Gamma) \in E(x_1, x_2)$. Если $\mathbf{x} \in A$, то $\mathbf{x}$ является решением уравнения $2^\nu(1+x_1)/(1+x_2) = \varrho(\Gamma)$ при некотором $\nu \in \mathbb{Z}$. Отсюда вытекает, что A имеет нулевую меру. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8.3. Пусть Γ – нетривиальная регулярная кривая. Множество всех точек $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^2$, для которых Γ хороша относительно спектра $H(\mathbf{x})$, обозначим через A_1 . По лемме 8.3 A_1 имеет полную меру.

Заметим, что $H[\sigma(g)(\mathbf{x})] \subset H(\mathbf{x})$, в силу чего Γ является хорошей относительно $H[\sigma(g)(\mathbf{x})]$ при каждой $\mathbf{x} \in A_1$.

Через A_2 обозначим множество всех $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^2$, для которых g θ -сходится для каждого $\theta \geq 1$. Имеем $|A_2| = 1$ (см. замечание 2.1).

Положим $E^* = E \cap A_1 \cap A_2$. Учитывая определение E^* и используя теоремы 7.1 и 7.2 для ряда

$$\sigma(g)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2} c_{\mathbf{m}}(g) h_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$$

в произвольной точке $\mathbf{x} \in E^*$, получим

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |S_{r\Gamma}(g)(\mathbf{x})| = \infty \quad \text{для каждой } \mathbf{x} \in E^*. \quad (8.1)$$

Поскольку $E^* \subset E$ и $|E^*| = |E|$, то из (8.1) мы заключаем справедливость теоремы 8.3.

Список литературы

- [1] Т. Ш. Зерекидзе, “Сходимость кратных рядов Фурье–Хаара и сильная дифференцируемость интегралов”, *Труды Тбилис. матем. ин-та им. А. М. Размадзе АН ГрССР*, **76** (1985), 80–99.
- [2] Г. Г. Кемхадзе, “О сходимости шаровых частичных сумм кратных рядов Фурье–Хаара”, *Труды Тбилис. матем. ин-та им. А. М. Размадзе АН ГрССР*, **55** (1977), 27–38.
- [3] G. E. Tkebuchava, “On the divergence of the spherical sums of double Fourier–Haar series”, *Anal. Math.*, **20**:2 (1994), 147–153.
- [4] G. G. Oniani, “On the divergence of multiple Fourier–Haar series”, *Anal. Math.*, **38**:3 (2012), 227–247.
- [5] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984, 496 с.; англ. пер.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, xii+451 pp.
- [6] С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949, 496 с.; пер. с англ.: S. Saks, *Theory of the integral*, 2nd ed., Monografie Matematyczne, **VII**, G. E. Stechert, New York, 1937, xvi+343 pp.
- [7] М. Гусман, *Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$* , Мир, М., 1978, 200 с.; пер. с англ.: M. de Guzmán, *Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$* , Lecture Notes in Math., **481**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1975, xii+266 pp.
- [8] G. Oniani, “On the Fourier–Haar series convergence with respect to sets which are homothetic to the given set”, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **126** (2001), 126–128.
- [9] G. H. Hardy, “On the convergence of certain multiple series”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **19** (1916–1919), 86–95.
- [10] F. Móricz, “On the convergence in a restricted sense of multiple series”, *Anal. Math.*, **5**:2 (1979), 135–147.
- [11] Г. Г. Ониани, “О сходимости кратных рядов Хаара”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:1 (2014), 99–116; англ. пер.: G. G. Oniani, “On the convergence of multiple Haar series”, *Izv. Math.*, **78**:1 (2014), 90–105.
- [12] R. Getsadze, “On divergence of the general terms of the double Fourier–Haar series”, *Arch. Math. (Basel)*, **86**:4 (2006), 331–339.

Гиорги Гиглаевич Ониани
(Giorgi G. Oniani)

Государственный университет им. А. Церетели,
г. Кутаиси, Грузия
E-mail: oniani@atsu.edu.ge

Поступила в редакцию
15.11.2013