Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Р. Ёдгоров, Ф. Исмаил, З. Э. Муминов, Описание местоположения и структуры существенного спектра одного модельного оператора в подпространстве фоковского пространства, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 12, 85–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8305>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:08:14

УДК 517.984

Г. Р. Ёдгоров, Ф. Исмаил, З. Э. Муминов

Описание местоположения и структуры существенного спектра одного модельного оператора в подпространстве фоковского пространства

Рассматривается некоторый модельный оператор, действующий в подпространстве фермионного фоковского пространства. Получен аналог уравнения Фаддеева. Описано местоположение существенного спектра рассматриваемого оператора и показано, что существенный спектр состоит из объединения не более чем четырех отрезков.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: гамильтониан с несохраняющимся ограниченным числом частиц, операторы рождения и уничтожения, существенный спектр, положительный оператор, уравнение Фаддеева, компактный оператор.

DOI: 10.4213/sm8305

§ 1. Введение

В задачах статистической физики [1], физики твердого тела [2], [3], квантовой теории поля (Фридрихс [4], Бухлер и др. [5]) важную роль играет исследование спектров гамильтонианов с несохраняющимся неограниченным числом частиц. Одним из основных методов, применяемых при изучении этих задач, является теория возмущения самосопряженных операторов. Поэтому необходимо подробное изучение спектров гамильтонианов с ограниченным числом квазичастиц, т.е. изучение спектров сужений операторов, действующих на одночастичном, двухчастичном и т.д., n -частичном подпространствах или же на “ n -частичном обрезанном” подпространстве, состоящем из одночастичного, двухчастичного и т.д., n -частичного подпространств [2], [4], [6].

В работах [7]–[13] рассмотрены некоторые модельные операторы, соответствующие операторам энергии с несохраняющимся ограниченным числом частиц. Эти операторы введены в подпространстве (в некоторых случаях в подпространстве бозонов) пространства Фока и являются решетчатыми аналогами гамильтонианов, рассмотренных в [1] и [14]. Для них описаны местоположение и структура существенного спектра.

В настоящей работе рассматривается модельный оператор, действующий в трехчастичном обрезанном подпространстве фермионного пространства Фока $\mathcal{F}_a(L^2(\mathbb{T}^3))$ над $L^2(\mathbb{T}^3)$ как некомпактное возмущение оператора $H_0 = H(0, 0)$,

Работа поддержана грантом ФА-Ф1-Ф045 АН РУз и частично поддержана университетом Путра Малайзии (University Putra Malaysia) по схеме исследовательского гранта университета (FRGS), код проекта 5524430.

рассмотренного в [9], [10], соответствующий оператору энергии с несохраняющимся ограниченным числом частиц, действующему в подпространстве фоковского пространства. Описываются “двухчастичные” и “трехчастичные” ветви существенного спектра, а также получен аналог уравнения Фаддеева для собственных векторов рассматриваемого оператора. Показано, что существенный спектр состоит из не более чем четырех отрезков. Этот оператор является антисимметричным вариантом модельных операторов из [7]–[13] и также является решетчатым аналогом гамильтониана спин-фермионной модели для разбавленных магнитных полупроводников [5].

Структура работы следующая. В § 2 модельный оператор определяется как ограниченный самосопряженный оператор H в гильбертовом подпространстве фермионного пространства Фока. В § 3 с использованием разложения в прямой операторный интеграл изучение спектральных свойств канального оператора сводится к изучению спектральных свойств семейства операторов обобщенной модели Фридрихса. В § 4 получен аналог уравнения Фаддеева для собственных векторов рассматриваемого оператора H . Параграф 5 посвящен формулировке и доказательству основных результатов работы.

§ 2. Модельный оператор

Введем некоторые основные обозначения, которые будут применяться на протяжении всей работы.

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\mathbb{T}^3 \equiv (-\pi; \pi]^3$ – трехмерный куб с отождествлением противоположных граней, $(\mathbb{T}^3)^2 = \mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3$ – декартово произведение, $L_2(\mathbb{T}^3)$, $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ – гильбертовы пространства квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbb{T}^3)$, $(\mathbb{T}^3)^2$ соответственно, и $L_2^{as}((\mathbb{T}^3)^2)$ – подпространство антисимметричных функций в $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$.

Пусть $\mathcal{H}^{(3)} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ – прямая сумма гильбертовых пространств, где $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_1 = L_2(\mathbb{T}^3)$, $\mathcal{H}_2 = L_2^{as}((\mathbb{T}^3)^2)$, и пусть I_j и $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ – единичные операторы и скалярное произведение в $\mathcal{H}_j$, $j = 0, 1, 2$, соответственно. Гильбертово пространство $\mathcal{H}^{(3)}$ называется *трехчастичным обрезанным подпространством* фермионного пространства Фока [15].

При каждом $g \in L_2(\mathbb{T}^3)$ определим операторы

$$\begin{aligned} \mathbf{g}: L_2(\mathbb{T}^3) &\rightarrow \mathbb{C}, \quad \mathbf{g}(f_1) = \langle f_1, g \rangle_1, \quad f_1 \in L_2(\mathbb{T}^3), \\ \mathbf{g}^*: \mathbb{C} &\rightarrow L_2(\mathbb{T}^3), \quad \mathbf{g}^* f_0 = g(\cdot) f_0, \quad f_0 \in \mathbb{C}, \\ L_g, L_{sg}: L_2((\mathbb{T}^3)^2) &\rightarrow L_2(\mathbb{T}^3), \quad L_g = \mathbf{g} \otimes I_1, \quad L_{sg} = I_1 \otimes \mathbf{g}, \\ L_g^*, L_{sg}^*: L_2(\mathbb{T}^3) &\rightarrow L_2((\mathbb{T}^3)^2), \quad L_g^* = I_1 \otimes \mathbf{g}^*, \quad L_{sg}^* = \mathbf{g}^* \otimes I_1. \end{aligned}$$

Рассмотрим в $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(3)}$ операторную матрицу

$$H = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & 0 \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} \\ 0 & H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где операторы $H_{ij}: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1, 2$, определяются по формулам

$$\begin{aligned} H_{01} &= \mathbf{a}, \quad H_{10} = \mathbf{a}^*, \quad H_{12} = L_b, \\ H_{21} &= \frac{1}{2}(L_b^* - L_{sb}^*), \quad H_{22} = H_{22}^0 - L_\varphi^* L_\varphi - L_{s\varphi}^* L_{s\varphi}, \end{aligned}$$

H_{00} , H_{11} , и H_{22}^0 – операторы умножения на функции u_0 , $u(\cdot)$ и $w(\cdot, \cdot)$ в $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ соответственно.

Здесь u_0 – фиксированное вещественное число, $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $u(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ – вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbb{T}^3$, $w(\cdot, \cdot)$ – вещественнозначная непрерывная симметричная функция на $(\mathbb{T}^3)^2$.

Операторы H_{01} и H_{12} называются *операторами уничтожения*, а операторы H_{10} и H_{21} называются *операторами рождения*.

Заметим, что оператор H , определенный операторной матрицей (2.1), действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, является ограниченным и самосопряженным.

§ 3. Спектр канального оператора H_{ch}

Для изучения существенного спектра наряду с оператором H рассмотрим также оператор H_{ch} , действующий в $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{T}^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ по формуле

$$H_{\text{ch}} = \begin{pmatrix} H_{11} & \frac{1}{\sqrt{2}} L_b \\ \frac{1}{\sqrt{2}} L_b^* & H_{22}^0 - L_\varphi^* L_\varphi \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что оператор H_{ch} ограничен и самосопряжен в $\widehat{\mathcal{H}}$.

Оператор H_{ch} обладает характеристическим свойством канального оператора (см., например, [16]) трехчастичного дискретного оператора Шрёдингера. Поэтому мы назовем его канальным оператором, соответствующим модельному оператору H . Заметим, что канальный оператор H_{ch} имеет более простую структуру чем H , и поэтому изучение спектральных свойств оператора H_{ch} играет важную роль в дальнейших исследованиях спектра оператора H .

Поскольку H_{ch} коммутирует с любым оператором U_α , где U_α – оператор умножения на функцию $\alpha(\cdot)$:

$$U_\alpha \begin{pmatrix} f_1(p) \\ f_2(p, q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(p)f_1(p) \\ \alpha(p)f_2(p, q) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in L_2(\mathbb{T}^3),$$

т.е. $H_{\text{ch}}U_\alpha = U_\alpha H_{\text{ch}}$, из разложения пространства $\widehat{\mathcal{H}}$ в прямой интеграл

$$\widehat{\mathcal{H}} = \int_{p \in \mathbb{T}^3} \mathcal{H}^{(2)} dp, \quad \mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1,$$

и свойства коммутативности следует, что оператор H_{ch} разлагается в прямой интеграл [17]

$$H_{\text{ch}} = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus H(p) dp. \quad (3.1)$$

Здесь $H(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$, – обобщенная модель Фридрихса, являющаяся ограниченным самосопряженным оператором, действующим в $\mathcal{H}^{(2)}$ по правилу

$$H(p) = H_0(p) + V,$$

где

$$H_0(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_0(p) \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} u(p) & \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{b} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{b}^* & -\varphi^* \varphi \end{pmatrix}$$

и $h_0(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$, – оператор умножения на функцию $w_p(\cdot) := w(p, \cdot)$:

$$(h_0(p)f_1)(q) = w_p(q)f_1(q), \quad f_1 \in \mathcal{H}_1.$$

3.1. Спектральные свойства $H(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$. Поскольку $\text{rank } V \leq 3$, из известной теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при компактных возмущениях вытекает, что существенный спектр оператора $H(p)$ совпадает с существенным спектром оператора $h_0(p)$, а именно имеет место равенство

$$\sigma_{\text{ess}}(H(p)) = \sigma_{\text{ess}}(h_0(p)) = [m(p), M(p)], \quad p \in \mathbb{T}^3,$$

где числа $m(p)$ и $M(p)$ определяются следующим образом:

$$m(p) = \min_{q \in \mathbb{T}^3} w_p(q), \quad M(p) = \max_{q \in \mathbb{T}^3} w_p(q).$$

Для каждого $p \in \mathbb{T}^3$ определим функцию (определитель Фредгольма оператора, ассоциированного с оператором $H(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$)

$$\begin{aligned} \Delta(p; z) &= (I_0 - \varphi r_0(p, z)\varphi^*) \left(H_{00}(p) - zI_0 - \frac{1}{2} \mathbf{b} r_0(p, z) \mathbf{b}^* \right) f_0 \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mathbf{b} r_0(p, z) \varphi^*)^2 f_0, \quad f_0 \equiv 1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

т.е.

$$\begin{aligned} \Delta(p; z) &= \left(1 - \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi^2(s) ds}{w(p, s) - z} \right) \left(u(p) - z - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{b^2(s) ds}{w(p, s) - z} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{b(s)\varphi(s) ds}{w(p, s) - z} \right)^2, \end{aligned}$$

где $r_0(p; z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus [m(p), M(p)]$ – резольвента оператора $h_0(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$.

ЛЕММА 3.1. При каждом $p \in \mathbb{T}^3$ число $z \in \mathbb{C} \setminus [m(p), M(p)]$ является собственным значением оператора $H(p)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(p; z) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть число $z \in \mathbb{C} \setminus [m(p), M(p)]$ – собственное значение оператора $H(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$, и пусть $f = (f_0, f_1) \in \mathcal{H}^{(2)}$ – соответствующая собственная вектор-функция.

Тогда уравнение

$$H(p)f = zf, \quad f \in \mathcal{H}^{(2)}, \quad (3.3)$$

или система линейных уравнений

$$\begin{cases} (u(p) - z)f_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{b} f_1 = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} r_0(p; z) \mathbf{b}^* f_0 + r_0(p; z) \varphi^* \varphi f_1 = f_1, \end{cases} \quad f = (f_0, f_1) \in \mathcal{H}^{(2)},$$

эквивалентны системе уравнений

$$\begin{cases} \left(H_{00}(p) - zI_0 - \frac{1}{2} \mathbf{b} r_0(p, z) \mathbf{b}^* \right) f_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{b} r_0(p, z) \varphi^* \alpha = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi r_0(p, z) \mathbf{b}^* f_0 + (I_0 - \varphi r_0(p, z) \varphi^*) \alpha = 0, \end{cases} \quad f_0, \alpha \in \mathbb{C}. \quad (3.4)$$

При этом решения (3.3) и (3.4) связаны равенствами

$$f_0 = f_0, \quad \alpha = \varphi f_1, \quad f_1(q) = r_0(p; z) \left(-\frac{1}{2} b(q) f_0 + \varphi(q) \alpha \right).$$

Определитель системы уравнений (3.4) равен $\Delta(p; z)$, определенной формулой (3.2).

Таким образом, уравнение $H(p)f = zf$, $f \in \mathcal{H}^{(2)}$, имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\Delta(p; z) = 0$.

Обозначим через $n_-(A, z)$, $z \leq \inf \sigma_{\text{ess}}(A)$ (соответственно $n_+(A, z)$, $z \geq \sup \sigma_{\text{ess}}(A)$), число собственных значений (с учетом кратности) некоторого ограниченного самосопряженного оператора A , лежащих ниже z (соответственно выше z).

ЛЕММА 3.2. *Для каждого $p \in \mathbb{T}^3$ и для $n_-(H(p), m(p))$ и $n_+(H(p), M(p))$ верно следующее:*

- a) *если $\varphi(\cdot)$ и $b(\cdot)$ линейно зависимы (независимы), то $n_-(H(p), m(p)) \leq 1$ ($n_-(H(p), m(p)) \leq 2$);*
- b) $n_+(H(p), M(p)) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно показать, что оператор

$$W = \begin{pmatrix} u(p) & \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{b} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{b}^* & 0 \end{pmatrix}$$

имеет простые собственные значения

$$z_{1,2} = -\frac{u(p) \pm \sqrt{u^2(p) + 4\|\mathbf{b}\|^2}}{2} \quad \text{и} \quad z_1 < 0 < z_2.$$

Тогда, учитывая равенство $\text{Im}g(V) = \mathbb{C} \oplus \langle b, \varphi \rangle$, где $\langle b, \varphi \rangle$ – подпространство, натянутое на функции b и φ , для образа линейного оператора V , $-\varphi^* \varphi \leq 0$ и $\sigma_{\text{ess}}(W) = \{0\}$ имеем:

- i) если функции φ и b линейно независимы, то оператор V имеет два положительных собственных значения (с учетом кратности) и одно (простое) отрицательное собственное значение;
- ii) если функции φ и b линейно зависимы, то оператор V имеет одно (простое) положительное и одно (простое) отрицательное собственные значения.

Согласно $H(p) \geq m(p) + V$, $H(p) \leq M(p) + V$ и принципу минимакса для числа $n_-(H(p), m(p))$ (соответственно $n_+(H(p), M(p))$) собственных значений оператора $H(p)$, лежащих ниже $m(p)$ (соответственно выше $M(p)$), имеем

$$n_-(H(p), m(p)) \leq n_-(m(p) + V, m(p)) \\ (\text{соответственно } n_+(H(p), M(p)) \leq n_+(M(p) + V, M(p))).$$

Отсюда с учетом i), ii) и $n_-(m(p) + V, m(p)) = n_-(V, 0)$ и $n_+(M(p) + V, M(p)) = n_+(V, 0)$ следует утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для числа нулей функции $\Delta(p, \cdot)$ при каждом $p \in \mathbb{T}^3$ верно следующее:

- а) если φ и b линейно зависимы (независимы), то функция $\Delta(p, \cdot)$ может иметь не более (с учетом кратности) одного нуля (двух нулей) на интервале $(-\infty, m(p))$;
- б) функция $\Delta(p, \cdot)$ может иметь лишь один нуль на интервале $(M(p), \infty)$.

Из (3.1) и теоремы (см. в [17]) о спектре разложимых операторов следует

ТЕОРЕМА 1. Для спектра H_{ch} верно равенство

$$\sigma(H_{\text{ch}}) = \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \{\sigma_d(H(p))\} \cup [m_w, M_w],$$

где $\sigma_d(H(p))$ – дискретный спектр оператора $H(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$, и

$$m_w = \min_{p, q \in \mathbb{T}^3} w(p, q), \quad M_w = \max_{p, q \in \mathbb{T}^3} w(p, q).$$

§ 4. Уравнение типа Фаддеева

Пусть

$$\Sigma = [m_w, M_w] \cup \sigma_{\text{two}},$$

где

$$\sigma_{\text{two}} = \{z : z \in \mathbb{R} \setminus [m(p), M(p)] \text{ и } \Delta(p; z) = 0 \text{ хотя бы для одного } p \in \mathbb{T}^3\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Операторы $L_{\mathbf{a}} R_{22}^0(z) L_b^*$ (или $L_{\mathbf{sa}} R_{22}^0(z) L_{sb}^*$), соответственно $L_{\mathbf{a}} R_{22}^0(z) L_{sb}^*$ (или $L_{\mathbf{sa}} R_{22}^0(z) L_b^*$) при каждых $a, b \in L_2(\mathbb{T}^3)$ являются операторами умножения на

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{a(s) \overline{b(s)} ds}{w(p, s) - z}$$

соответственно с интегральным ядром

$$\frac{a(s) \overline{b(p)}}{w(p, s) - z}$$

в $L_2(\mathbb{T}^3)$.

Можно проверить, что

$$D(z) = I_1 - L_{\varphi} R_{22}^0(z) L_{\varphi}^* H_{11} - z I_1 - \frac{1}{2} L_b R_{22}^0(z) L_b^* - \frac{1}{2} L_{\varphi} R_{22}^0(z) L_b^*$$

является оператором умножения на функцию $\Delta(\cdot; z)$, где $R_{22}^0(z) = (H_{22}^0 - z I_2)^{-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus [m_w, M_w]$, – резольвента оператора H_{22}^0 .

4.1. Уравнение типа Фаддеева. Введем следующее обозначение: $\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}_0} \oplus \overline{\mathcal{H}_1} \oplus \overline{\mathcal{H}_2}$, где $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1$.

Пусть операторные матрицы $A(z)$ и $K(z)$ при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ действуют в пространстве $\overline{\mathcal{H}}$ по формулам

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_{00}(z) & 0 & 0 \\ 0 & A_{11}(z) & A_{12}(z) \\ 0 & A_{21}(z) & A_{22}(z) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad K(z) = \begin{pmatrix} K_{00}(z) & K_{01}(z) & 0 \\ K_{10}(z) & K_{11}(z) & K_{12}(z) \\ 0 & K_{21}(z) & K_{22}(z) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где $A_{ij}(z): \overline{\mathcal{H}}_j \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_i$, $i, j = 0, 1, 2$, – оператор умножения на функцию $a_{ij}(p, z)$:

$$\begin{aligned} a_{00}(p, z) &\equiv 1, & a_{11}(p, z) &= H_{11} - zI_1 - \frac{1}{2}L_b R_{22}^0(z)L_b^*, \\ a_{12}(p, z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}L_b R_{22}^0(z)L_\varphi^*, & a_{21}(p, z) &= \overline{a_{12}(p, z)} = \frac{1}{\sqrt{2}}L_\varphi R_{22}^0(z)L_b^*, \\ a_{22}(p, z) &= I_1 - L_\varphi R_{22}^0(z)L_\varphi^* \end{aligned} \quad (4.2)$$

и операторы $K_{ij}(z): \overline{\mathcal{H}}_j \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_i$, $i, j = 0, 1, 2$, определяются формулами

$$\begin{aligned} K_{00}(z) &= (z+1)I_0 - H_{00}, & K_{01}(z) &= -\mathbf{a}, & K_{10}(z) &= K_{01}^*(z), \\ K_{11}(z) &= -\frac{1}{2}L_b R_{22}^0(z)L_{sb}^*, & K_{12}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}L_b R_{22}^0(z)L_{s\varphi}^*, \\ K_{21}(z) &= K_{12}^*(z), & K_{22}(z) &= -L_\varphi R_{22}^0(z)L_{s\varphi}^*. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отметим, что операторы $K_{ij}(z)$ при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ принадлежат классу Гильберта–Шмидта, следовательно, $K(z)$ является компактным оператором в $\overline{\mathcal{H}}$.

ЛЕММА 4.1. *Оператор $A(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, является ограниченным, обратимым, и $A^{-1}(z)$ имеет вид:*

$$A^{-1}(z) = \begin{pmatrix} B_{00}(z) & 0 & 0 \\ 0 & B_{11}(z) & B_{12}(z) \\ 0 & B_{21}(z) & B_{22}(z) \end{pmatrix},$$

где $B_{ij}(z): \overline{\mathcal{H}}_j \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_i$, $i, j = 0, 1, 2$, – оператор умножения на функцию $b_{ij}(p, z)$:

$$\begin{aligned} b_{00}(p, z) &\equiv 1, & b_{11}(p, z) &= \frac{a_{22}(p, z)}{\Delta(p; z)}, & b_{12}(p, z) &= -\frac{a_{12}(p, z)}{\Delta(p; z)}, \\ b_{21}(p, z) &= -\frac{a_{21}(p, z)}{\Delta(p; z)}, & b_{22}(p, z) &= \frac{a_{11}(p, z)}{\Delta(p; z)}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $A(z)$ есть оператор умножения на матрицу $A(p, z)$, где

$$A(p, z) = \begin{pmatrix} a_{00}(p, z) & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}(p, z) & a_{12}(p, z) \\ 0 & a_{12}(p, z) & a_{22}(p, z) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $A(p, z)$ – матричнозначная непрерывная функция на $\mathbb{T}^3$. Отсюда следует ограниченность $A(z)$. Поскольку $\det(A(p, z)) = \Delta(p; z)$ и $\Delta(p; z) \neq 0$, $p \in \mathbb{T}^3$ при $z \notin \Sigma$, имеем $\det(A(p, z)) \neq 0$. Следовательно, при каждом $p \in \mathbb{T}^3$ матрица $A(p, z)$ обратима и ее обратная имеет вид

$$A^{-1}(p, z) = \begin{pmatrix} a_{00}(p, z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{22}(p, z)}{\Delta(p; z)} & -\frac{a_{12}(p, z)}{\Delta(p; z)} \\ 0 & -\frac{a_{21}(p, z)}{\Delta(p; z)} & \frac{a_{11}(p, z)}{\Delta(p; z)} \end{pmatrix}.$$

При этом $A^{-1}(\cdot, z)$ – матричнозначная непрерывная функция на $\mathbb{T}^3$. Пусть $A^{-1}(z)$ – оператор умножения на матрицу $A^{-1}(p, z)$ и он действует в $\overline{\mathcal{H}}$. Легко проверить, что $A^{-1}(z)$ является обратным оператором $A(z)$.

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями операторов H и $\hat{T}(z) = A^{-1}(z)K(z)$.

ЛЕММА 4.2. *Число $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда оператор $\hat{T}(z)$ имеет собственное значение, равное единице.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ – собственное значение оператора H и f – соответствующий собственный вектор, т.е. система уравнений

$$\begin{cases} (H_{00} - z)f_0 + H_{01}f_1 = 0, \\ H_{10}f_0 + (H_{11} - z)f_1 + H_{12}f_2 = 0, \\ H_{21}f_1 + (H_{22} - z)f_2 = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

имеет нетривиальное решение $f = (f_0, f_1, f_2)$.

Так как $z \notin [m_w, M_w]$, то из третьего уравнения системы (4.4) для f_2 имеем

$$f_2 = R_{22}^0(z) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(L_\varphi^* - L_{s\varphi}^*)c - \frac{1}{2}(L_b^* - L_{sb}^*)f_1 \right), \quad (4.5)$$

где

$$c = \sqrt{2} L_\varphi f_2, \quad (4.6)$$

поскольку $L_{s\varphi} f_2(q) = -L_{s\varphi} f_2(q)$.

Далее преобразуем систему (4.4), используя f_0 , f_1 и c . С этой целью подставим выражение (4.5) для f_2 в (4.4) и (4.6). В итоге получим

$$\begin{cases} f_0 = ((z+1)I_0 - H_{00})f_0 - \mathbf{a}f_1, \\ \left(H_{11} - zI_1 - \frac{1}{2}L_b R_{22}^0(z)L_b^* \right) f_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}L_b R_{22}^0(z)L_\varphi^* c \\ \quad = -\mathbf{a}^* f_0 - \frac{1}{2}L_b R_{22}^0(z)L_{sb}^* f_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}L_b R_{22}^0(z)L_{s\varphi}^* c, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}L_\varphi R_{22}^0(z)L_b^* f_1 + (I_1 - L_\varphi R_{22}^0(z)L_\varphi^*)c \\ \quad = \frac{1}{\sqrt{2}}L_\varphi R_{22}^0(z)L_{sb}^* f_1 - L_\varphi R_{22}^0(z)L_{s\varphi}^* c \end{cases}$$

или согласно (4.1), (4.2) и (4.3)

$$A(z)\psi = K(z)\psi, \quad \psi = (f_0, f_1, c) \in \overline{\mathcal{H}}.$$

Отсюда и из леммы 4.1 имеем

$$\psi = A^{-1}(z)K(z)\psi, \quad \text{т.е.} \quad \psi = \hat{T}(z)\psi. \quad (4.7)$$

Система (4.4) имеет ненулевое решение, поэтому уравнение (4.7) также имеет ненулевое решение. Это означает, что число 1 есть собственное значение оператора $\hat{T}(z)$.

Достаточность. Пусть число 1 есть собственное значение оператора $\hat{T}(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ и $\psi = (f_0, f_1, c) \in \overline{\mathcal{H}}$ – соответствующая собственная функция, т.е. уравнение (4.7) имеет ненулевое решение. Умножая (4.7) слева на $A(z)$,

получаем

$$\begin{cases} (H_{00} - zI_0)f_0 + \mathbf{a}f_1 = 0, \\ \mathbf{a}^*f_0 + (H_{11} - zI_1)f_1 + L_b \left(R_{22}^0(z) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(L_\varphi^* - L_\varphi^*)c - \frac{1}{2}(L_b^* - L_{sb}^*)f_1 \right) \right) = 0, \\ c = L_\varphi \left(R_{22}^0(z) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(L_\varphi^* - L_\varphi^*)c - \frac{1}{2}(L_b^* - L_{sb}^*)f_1 \right) \right). \end{cases} \quad (4.8)$$

Положим

$$f_2 = R_{22}^0(z) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(L_\varphi^* - L_{s\varphi}^*)c - \frac{1}{2}(L_b^* - L_{sb}^*)f_1 \right).$$

Тогда из последних двух уравнений системы (4.8) имеем

$$c = \sqrt{2} L_\varphi f_2.$$

Легко видеть, что вектор $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}$ удовлетворяет уравнению $Hf = zf$, т.е. число z есть собственное значение оператора H .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Уравнение $\psi = \hat{T}(z)\psi$ является уравнением для собственных функций оператора H и в этом смысле есть аналог уравнения Фаддеева, которое получено для трехчастичного непрерывного оператора Шрёдингера [18].

§ 5. Формулировка и доказательство основных результатов

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 2. *Существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H)$ оператора H совпадает с множеством Σ , т.е. $\sigma_{\text{ess}}(H) = \Sigma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $[m_w, M_w] \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$ доказывается аналогично доказательству в работе [12].

Докажем, что $\sigma_{\text{two}} \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$. Пусть $z_0 \in \sigma_{\text{two}}$ — произвольная точка. Существует точка $p_0 \in \mathbb{T}^3$ такая, что $\det A(p_0, z_0) = \Delta(p_0, z_0) = 0$. Возможны два случая:

- 1) $z_0 \in [m_w, M_w]$,
- 2) $z_0 \notin [m_w, M_w]$.

Если $z_0 \in [m_w, M_w]$, то $z_0 \in \sigma_{\text{ess}}(H)$. Пусть $z_0 \notin [m_w, M_w]$, тогда система однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0, \\ \left(H_{00} - z_0 I_0 - \frac{1}{2} \mathbf{b} r_0(p_0, z_0) \mathbf{b}^* \right) \alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{b} r_0(p_0, z_0) \varphi^* \alpha_2 = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi r_0(p_0, z_0) \mathbf{b}^* \alpha_1 + (I_0 - \varphi r_0(p_0, z_0) \varphi^*) \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

имеет бесконечное число решений. Легко проверить, что существует ненулевое решение $\mathbf{l} = (0, \alpha_1, \alpha_2)$ системы уравнений (5.1), удовлетворяющее $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$.

При этом из (5.1) имеем

$$A(p_0, z_0) \mathbf{l} = 0, \quad \mathbf{l} = (0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^3.$$

Пусть $\chi_n(p)$ – характеристическая функция множества

$$V_n = \left\{ p \in \mathbb{T}^3 : \frac{1}{n+1} < |p - p_0| < \frac{1}{n} \right\}$$

и $\mu(V_n)$ – лебегова мера множества V_n .

Последовательность ортогональных функций $\{f^{(n)}\}$ выберем следующим образом:

$$f^{(n)} = (0, f_1^{(n)}, f_2^{(n)}),$$

где

$$\begin{aligned} f_1^{(n)} &= \alpha_1 \psi^{(n)}, & f_2^{(n)} &= R_{22}^0(z_0) \left(\alpha_2 (L_\varphi^* - L_{s\varphi}^*) \psi^{(n)} - \frac{\alpha_1}{2} (L_b^* - L_{sb}^*) \psi^{(n)} \right), \\ \psi^{(n)} &= \frac{c_n \chi_n}{\sqrt{\mu(V_n)}}. \end{aligned}$$

Здесь $c_n \in L_2(\mathbb{T}^3)$ находится из условия ортогональности $\{f^{(n)}\}$, т.е.

$$\begin{aligned} \langle f^{(n)}, f^{(m)} \rangle_{\mathcal{H}^{(3)}} \\ = - \left\langle R_{22}^0(z_0) \left(\alpha_2 L_\varphi^* - \frac{\alpha_1}{2} L_b^* \right) \psi^{(n)}, R_{22}^0(z_0) \left(\alpha_2 L_{s\varphi}^* - \frac{\alpha_1}{2} L_{sb}^* \right) \psi^{(m)} \right\rangle_2 = 0, \\ n \neq m, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \left\langle R_{22}^0(z_0) L_l^* \psi^{(n)}, R_{22}^0(z_0) L_m^* \psi^{(m)} \right\rangle_2 &= 0, \\ \left\langle R_{22}^0(z_0) L_{sl}^* \psi^{(n)}, R_{22}^0(z_0) L_{sm}^* \psi^{(m)} \right\rangle_2 &= 0, \quad n \neq m, \end{aligned}$$

где l, m принимают значения b или φ .

Существование c_n вытекает из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует ортонормальная система $\{c_n\} \subset L_2(\mathbb{T}^3)$, удовлетворяющая условиям*

- а) $\text{supp } c_n \subset V_n$,
- б) $\left\langle R_{22}^0(z_0) \left(\alpha_2 L_\varphi^* - \frac{\alpha_1}{2} L_b^* \right) \psi^{(n)}, R_{22}^0(z_0) \left(\alpha_2 L_{s\varphi}^* - \frac{\alpha_1}{2} L_{sb}^* \right) \psi^{(m)} \right\rangle_2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $\{c_n\}$ построим по методу индукции.

Пусть $c_1 = \chi_{V_1} / \sqrt{\mu(V_1)}$. Теперь $\tilde{c}_2 \in L_2(V_2)$ выбираем так, чтобы $\|\tilde{c}_2\| = 1$ и $(\tilde{c}_2, \varepsilon_1^{(2)}) = 0$, где

$$\varepsilon_1^{(2)}(p) = \int_{\mathbb{T}^3} \left(\frac{[\alpha_2 \varphi(q) - \alpha_1 b(q)/2][\alpha_1 b(p)/2 - \alpha_2 \varphi(p)]}{(w(p, q) - z_0)^2} \right) c_1(q) \chi_2(p) dq.$$

Положим $c_2(p) = \tilde{c}_2(p) \chi_{V_2}(p)$. Продолжим этот процесс. Допустим, что построены $c_1(p), \dots, c_n(p)$. Тогда функцию $\tilde{c}_{n+1} \in L_2(V_{n+1})$ выбираем так, чтобы $\|\tilde{c}_{n+1}\| = 1$ и она была ортогональна функциям

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^{(n+1)}(p) &= \int_{\mathbb{T}^3} \left(\frac{[\alpha_2 \varphi(q) - \alpha_1 b(q)/2][\alpha_1 b(p) - 2\alpha_2 \varphi(p)]}{(w(p, q) - z_0)^2} \right) \\ &\quad \times c_i(q) \chi_{V_{n+1}}(q) dq, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Положим $c_{n+1}(p) = \tilde{c}_{n+1}(p)\chi_{V_{n+1}}(p)$. Таким образом, мы построили ортонормированную систему $\{c_n\}$, удовлетворяющую условиям предложения.

Предложение 1 доказано.

Продолжим доказательство теоремы 2. Предположим, что $\Delta(p_0, z_0) = 0$. Тогда

$$\|f^{(n)}\|^2 \geq \frac{\xi_0}{2\mu(V_n)}, \quad \xi_0 = \alpha_1^2 + \frac{\alpha_2^2 \|\varphi_2\|^2}{(M_w - z_0)^2}. \quad (5.2)$$

Положим $\tilde{f}^{(n)} = f^{(n)} / \|f^{(n)}\|$. Ясно, что система $\{\tilde{f}^{(n)}\}$ является ортонормальной.

Рассмотрим $(H - z_0)\tilde{f}^{(n)}$ и оценим его норму

$$\|(H - z_0)\tilde{f}^{(n)}\|^2 \leq \|A(z_0)\tilde{\psi}^{(n)}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|K(z_0)\tilde{\psi}^{(n)}\|_{\mathcal{H}}^2,$$

где $\tilde{\psi}^{(n)} = \left(0, \frac{\psi_1^{(n)}}{\|f^{(n)}\|}, \frac{\psi_2^{(n)}}{\|f^{(n)}\|}\right)$.

Заметим, что $\{\tilde{\psi}^{(n)}\} \subset \overline{\mathcal{H}}$ – ограниченная ортогональная система. Действительно, ортогональность вытекает из непересекаемости носителей функций $\tilde{\psi}^{(n)}$ и $\tilde{\psi}^{(m)}$. Из равенства

$$\|\tilde{\psi}^{(n)}\|^2 = \frac{1}{\|f^{(n)}\|^2} \frac{1}{\mu(V_n)} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$$

и (5.2) следует равномерная ограниченность системы $\{\tilde{\psi}^{(n)}\}$, т.е. $\|\tilde{\psi}^{(n)}\|^2 \leq 1/\xi_0 \|l\|_{\mathbb{C}^3}^2$ при всех $n \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

В силу компактности $K(z_0)$ заключаем, что $\|K(z_0)\tilde{\psi}^{(n)}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теперь оценим $\|A(z_0)\tilde{\psi}^{(n)}\|$. Применяя неравенство Шварца, имеем

$$\|A(z_0)\tilde{\psi}^{(n)}\|^2 \leq C^2 \sup_{p \in V_n} \|A(p, z_0)l\|_{\mathbb{C}^3}^2, \quad \text{где } C^2 = \max\left\{\frac{2}{\xi_0}, \frac{8\|\varphi\|^2}{\xi_0}\right\}.$$

В силу непрерывности матричнозначной функции $F(p) = A(p, z_0)$ заключаем, что $\sup_{p \in V_n} \|A(p, z_0)l\|_{\mathbb{C}^3} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, для последовательности ортонормальных вектор-функций $\{\tilde{f}^{(n)}\}$ верно $\|(H - z_0)\tilde{f}^{(n)}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что $z_0 \in \sigma_{\text{ess}}(H)$. Из произвольности точки z_0 следует, что $\sigma_{\text{two}} \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$. Итак, мы доказали, что $[m_w, M_w] \cup \sigma_{\text{two}} \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$.

Теперь докажем обратное включение, т.е. $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset \Sigma$. В силу компактности $K(z)$ и ограниченности $A^{-1}(z)$ имеем $f(z) = A^{-1}(z)K(z)$ – компактнозначная аналитическая функция в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$. Из самосопряженности H и леммы 4.2 следует, что оператор $(I - f(z))^{-1}$ существует при всех $\text{Im } z \neq 0$, где I – единичный оператор в $\mathcal{H}$. По аналитической теореме Фредгольма заключаем, что операторнозначная функция $(I - f(z))^{-1}$ существует в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ всюду, за исключением дискретного множества D' , где она имеет вычеты конечного ранга. Отсюда, обозначая через $\sigma_{\text{disc}}(H)$ дискретный спектр оператора H , имеем $\mathbb{C} \setminus \Sigma \subset \sigma_{\text{disc}}(H)$, т.е. $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset \Sigma$.

Теорема 2 полностью доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H)$ оператора H состоит из объединения не более чем четырех отрезков.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma \subset \sigma(H)$ – сегмент, содержащий $[m_w, M_w]$, и границы σ являются границами $\sigma(H)$,

$$\sigma_0 := \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \{\sigma_d(H(p))\} \setminus \sigma. \quad (5.3)$$

В частности, может быть $\sigma = [m_w, M_w]$.

Если $\sigma_0 = \emptyset$, то существенный спектр оператора H состоит из одного отрезка σ .

Предположим $\sigma_0 \neq \emptyset$. Тогда $\sigma_0 \cap \sigma = \emptyset$ и по определению спектра σ_0 – замкнутое множество.

Согласно (5.3) при каждом $p \in \mathbb{T}^3$ оператор $H(p)$ имеет собственное значение в σ_0 .

Предположим, что $[a, b] \subset \sigma_0$, где a, b принадлежат множеству границ $\sigma(H)$.

Обозначим через G_ω точки $p \in \mathbb{T}^3$, в которых $H(p)$ имеет собственное значение на $[a, b]$.

Покажем, что $G_\omega = \mathbb{T}^3$. Пусть $p_0 \in G_\omega$. Тогда по теореме 1 и лемме 3.1 существует $z_0 \in [a, b]$ такое, что $\Delta(p_0, z_0) = 0$.

Поскольку $[a, b] \cap [m_w, M_w] = \emptyset$, при каждом $p \in \mathbb{T}^3$ функция $\Delta(p, \cdot)$ является аналитической в некоторой области, содержащей $[a, b]$.

Из следствия 1 функция $\Delta(p, \cdot)$ может иметь не более двух, с учетом кратности (одного), нулей, лежащих левее (правее) существенного спектра. Поэтому согласно теореме В.2 в [19] кратность нуля функции $\Delta(p_0, \cdot)$ не больше двух. Отсюда имеют место соотношения

$$\frac{\partial^1}{\partial z^1} \Delta(p_0, z_0) \neq 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^1}{\partial z^1} \Delta(p_0, z_0) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Delta(p_0, z_0) \neq 0.$$

По теореме о неявной функции существуют окрестности $U(p_0) \subset \mathbb{T}^3$, $U'(z_0) \subset [a, b]$ точек p_0, z_0 и непрерывная функция $z: U(p_0) \rightarrow U'(z_0)$ такие, что $\Delta(p, z(p)) \equiv 0$ справедливо для всех $p \in U(p_0)$ (см. [19; теорема В.3]). В силу леммы 3.1 число $z(p) \in [a, b]$ является собственным значением $H(p)$ для всех $p \in U(p_0) \subset G_\omega$. Это означает, что множество G_ω открыто.

Докажем, что G_ω – замкнутое множество. Действительно, пусть последовательность $\{p_n\} \subset G_\omega$ сходится к $p_0 \in \mathbb{T}^3$ и пусть $\{z(p_n)\} \subset [a, b]$ – собственные значения $H(p_n)$. Не нарушая общности, можно считать (в противном случае можно взять подпоследовательность), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(p_n) = z_0 \in [a, b].$$

Функция $\Delta(\cdot, \cdot)$ является непрерывной в $\mathbb{T}^3 \times [a, b]$. Поэтому

$$0 \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(p_n, z(p_n)) = \Delta(p_0, z_0)$$

и, следовательно, $p_0 \in G_\omega$, так как $[a, b]$ замкнуто. Таким образом, множество G_ω замкнуто. Значит, G_ω является одновременно и открытым, и замкнутым множеством. Следовательно, имеем $G_\omega = \mathbb{T}^3$.

Поскольку согласно следствию 1 дискретный спектр оператора $H(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$, может состоять не более чем из трех собственных значений, то число сегментов $[a, b] \subset \sigma_0$, в которых a, b являются границами $\sigma(H)$, не превосходит 3.

Отсюда и в силу $\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma_0 \cup [m_w, M_w]$ существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H)$ состоит из объединения не более чем четырех отрезков.

Авторы выражают благодарность С. Н. Лакаеву за постановку задачи и рецензенту за полезные замечания, а также И. Н. Бозорову за помощь при оформлении работы.

Список литературы

- [1] R. Minlos, H. Spohn, "The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons", *Topics in statistical and theoretical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **177**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 159–193.
- [2] D. C. Mattis, "The few-body problem on a lattice", *Rev. Modern Phys.*, **58** (1986), 361–379.
- [3] A. Mogil'ner, "Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results", *Many-particle Hamiltonians: spectra and scattering*, Adv. Soviet Math., **5**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 139–194.
- [4] К. О. Фридрихс, *Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1969, 232 с.; пер. с англ.: К. О. Friedrichs, *Perturbation of spectra in Hilbert space*, Lectures in Appl. Math., **3**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965, xiii+178 pp.
- [5] Ch. Buhler, S. Yunoki, A. Moreo, "Magnetic domains and stripes in a spin-fermion model for cuprates", *Phys. Rev. Lett.*, **84**:12 (2000), 2690–2693.
- [6] В. А. Малышев, Р. А. Минлос, "Кластерные операторы", *Тр. семинара им. И. Г. Петровского*, 1983, № 9, 63–80.
- [7] S. Albeverio, S. N. Lakaev, T. H. Rasulov, "On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics", *J. Stat. Phys.*, **127**:2 (2007), 191–220.
- [8] S. Albeverio, S. N. Lakaev, T. H. Rasulov, "The Efimov effect for a model operator associated with the Hamiltonian of a non conserved number of particles", *Methods Funct. Anal. Topology*, **13**:1 (2007), 1–16.
- [9] С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов, "Модель в теории возмущений существенного спектра многочастичных операторов", *Матем. заметки*, **73**:4 (2003), 556–564; англ. пер.: S. N. Lakaev, T. Kh. Rasulov, "A model in the theory of perturbations of the essential spectrum of multiparticle operators", *Math. Notes*, **73**:4 (2003), 521–528.
- [10] С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов, "Об эффекте Ефимова в модели теории возмущений существенного спектра", *Функц. анализ и его прил.*, **37**:1 (2003), 81–84; англ. пер.: S. N. Lakaev, T. Kh. Rasulov, "Efimov's effect in a model of perturbation theory of the essential spectrum", *Funct. Anal. Appl.*, **37**:1 (2003), 69–71.
- [11] Г. Р. Ёдгоров, М. Э. Муминов, "О спектре одного модельного оператора в теории возмущений существенного спектра", *ТМФ*, **144**:3 (2005), 544–554; англ. пер.: G. R. Yodgorov, M. I. Muminov, "Spectrum of a model operator in the perturbation theory of the essential spectrum", *Theoret. and Math. Phys.*, **144**:3 (2005), 1344–1352.
- [12] Т. Х. Расулов, "Исследование существенного спектра одного матричного оператора", *ТМФ*, **164**:1 (2010), 62–77; англ. пер.: T. Kh. Rasulov, "Study of the essential spectrum of a matrix operator", *Theoret. and Math. Phys.*, **164**:1 (2010), 883–895.
- [13] Т. Н. Rasulov, "Investigations of the essential spectrum of a Hamiltonian in Fock space", *Appl. Math. Inf. Sci.*, **4**:3 (2010), 345–412.
- [14] Ю. В. Жуков, Р. А. Минлос, "Спектр и рассеяние в модели "спин-бозон" с не более чем тремя фотонами", *ТМФ*, **103**:1 (1995), 63–81; англ. пер.: Yu. V. Zhukov, R. A. Minlos, "Spectrum and scattering in a model "spin-boson" with not more than three photons", *Theoret. and Math. Phys.*, **103**:1 (1995), 398–411.
- [15] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 1: *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977, 357 с.; пер. с англ.: M. Reed, B. Simon,

- Methods of modern mathematical physics*, v. I: *Functional analysis*, Academic Press, New York–London, 1972, xvii+325 pp.
- [16] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, “Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics”, *Ann. Henri Poincaré*, **5**:4 (2004), 743–772.
- [17] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982, 430 с.; пер. с англ.: М. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, v. IV: *Analysis of operators*, Academic Press, New York–London, 1978, xv+396 pp.
- [18] Л. Д. Фаддеев, “Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц”, Тр. МИАН СССР, **69**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1963, 3–122; англ. пер.: L. D. Faddeev, *Mathematical aspects of the three-body problem in the quantum scattering theory*, IPST, Jerusalem; Daniel Davey & Co., Inc., New York, 1965, iii+110 pp.
- [19] С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Хольден, *Решаемые модели в квантовой механике*, Мир, М., 1991, 568 с.; пер. с англ.: S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Nøegh-Krohn, H. Holden, *Solvable models in quantum mechanics*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, New York, 1988, xiv+452 pp.

Гайрат Рузиевич Ёдгоров
(Gairat R. Yodgorov)

Навоийский государственный педагогический
институт, Узбекистан
E-mail: g.yodgorov@mail.ru

Поступила в редакцию
19.11.2013 и 25.09.2014

Фудзиях Исмаил
(Fudziah Ismail)

Department of Mathematics,
University Putra Malaysia, Selangor, Malaysia
E-mail: fudziah@science.upm.edu.my

Захриддин Эшкобилович Муминов
(Zahriddin I. Muminov)

Malaysia–Japan International Institute of Technology,
University Teknologi Malaysia Kuala Lumpur,
Malaysia
E-mail: zimuminov@gmail.com