Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Мишель, Г. М. Хенкин, Приближения Бишопа–Рунге и обращение теоремы Римана–Клейна, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 2, 149–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8307>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 05:18:34

УДК 517.545+517.577+517.956.27

В. Мишель, Г. М. Хенкин

Приближения Бишоп–Рунге и обращение теоремы Римана–Клейна

В статье изложены результаты по проективным вложениям римановых поверхностей, гладких или с нодальными особенностями. Эти результаты применяются к обратной задаче Дирихле–Неймана и к обращению теоремы Римана–Клейна. Для построения нужных вложений техника Бишопа адаптируется к случаю открытых поверхностей с границей и используется теорема типа Рунге о гармонических приближениях в компактном случае.

Библиография: 36 названий.

Ключевые слова: риманова поверхность, проективное вложение, аппроксимации Бишопа, задача Дирихле–Неймана, теорема Римана–Клейна.

DOI: 10.4213/sm8307

§ 1. Введение

Для случая открытой римановой поверхности с краем результатам Бишопа [1] и Нарасимхана [2] о вложениях многообразий Штейна можно придать следующую формулировку.

ТЕОРЕМА (Бишоп–Нарасимхан). Пусть Z – открытая риманова поверхность с краем, $n \geq 2$, а $f: Z \rightarrow \mathbb{C}^n$ – голоморфное отображение, гладкое вплоть до края. Тогда f равномерно на $\bar{Z}$ приближается вложениями при $n \geq 3$ или погружениями, инъективными вне конечного множества точек, при $n = 2$.

Вопрос, верен ли этот результат при замене $\mathbb{C}^n$ на комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}_n$ той же размерности, возникает в приложениях, но, по-видимому, не рассматривался. Естественный способ строить отображения римановой поверхности Z в проективное пространство – это использовать глобальные сечения канонического расслоения $K(Z)$. В самом деле, если сечение $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in K(Z)^{n+1}$ нигде не обращается в нуль, то ω индуцирует каноническое отображение из Z в $\mathbb{CP}_n$, обозначаемое $[\omega]$ или $[\omega_0 : \dots : \omega_n]$, задаваемое как

$$[\omega] = \left[\frac{\omega_0}{\omega_j} : \dots : \frac{\omega_{j-1}}{\omega_j} : 1 : \frac{\omega_{j+1}}{\omega_j} : \dots : \frac{\omega_n}{\omega_j} \right] \quad (1.1)$$

на множестве $\{\omega_j \neq 0\}$, $0 \leq j \leq n$. Как и в аффинном случае, в ситуации, когда образ отображения – проективное пространство, верен аппроксимационный результат.

ТЕОРЕМА А. Пусть Z – открытая риманова поверхность с краем, $n \geq 2$, и $f: \bar{Z} \rightarrow \mathbb{CP}_n$ – голоморфное отображение, гладко продолжающееся на край. Тогда f равномерно приближается на $\bar{Z}$ каноническими вложениями при $n \geq 3$ или каноническими погружениями, инъективными в дополнении к конечному множеству точек, при $n = 2$.

Как ни удивительно, этот результат не был отмечен раньше. В настоящей работе мы приходим к нему как к следствию теоремы 4, являющейся вариантом теоремы 1 о плотности, которую в [3], [4] мы использовали в конструктивном решении задачи Дирихле–Неймана для римановых поверхностей.

Мы докажем теорему 1, непосредственно адаптируя бишоповский конструктивный метод аппроксимации [1] к каноническим отображениям, с использованием возмущений и $\bar{\partial}$ -техники, применяемой на римановых поверхностях Коппельманом [5]; в результате мы получаем явную процедуру приближения. После появления препринта нашей статьи, Форстнерич сообщил нам, что теореме А можно вывести из результата, полученного Калиманом и Зайденобергом в [6] и Форстнеричем в [7; теорема 7.9.1], и теоремы типа Бишоп–Мергеляна из работы [8].

Канонические отображения и теорема А естественным образом возникают в следующей обратной задаче. Рассмотрим открытую вещественную поверхность Z с краем в $\mathbb{R}^3$, на которой введена комплексная структура, индуцированная стандартной евклидовой структурой в $\mathbb{R}^3$; согласно результатам Гарсии [9] для компактного случая и Рюди [10] для поверхностей с краем, в таком виде можно представить любую риманову поверхность. Предположим, что у Z постоянная электропроводность. Тогда оператор Дирихле–Неймана на Z можно рассматривать как оператор N , сопоставляющий с $u \in C^1(bZ)$ электрический ток на границе, индуцированный потенциалом электрического поля $\tilde{u}$, который u задает на поверхности Z , т.е. $Nu = (d^c \tilde{u})|_{bZ}$, где $\tilde{u}$ – гармоническое продолжение u на Z , а $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$ ($\bar{\partial}$ – оператор Коши–Римана на Z). В этом случае обратная задача Дирихле–Неймана состоит в восстановлении Z по конечному числу измерений электрических токов на границе, т.е. по величине $(Nu_\ell)_{0 \leq \ell \leq n}$ для известных потенциалов u_ℓ на границе, $0 \leq \ell \leq n$. В этой задаче естественно возникают канонические отображения, поскольку наборы данных

$$(u_\ell, Nu_\ell)_{0 \leq \ell \leq n} \quad \text{и} \quad (u_\ell, (\partial \tilde{u}_\ell)|_{bZ})_{0 \leq \ell \leq n}$$

эквивалентны. Недавно был опубликован интересный обзор [11] по этой тематике.

В [3] мы рассматриваем эту задачу в трех аспектах: единственность, восстановление и характеристика. В частности, там мы показываем, что когда край Z известен, достаточно знать всего три потенциала электрического поля u_ℓ на границе, $0 \leq \ell \leq 2$, и соответствующие электрические токи на границе $(\partial \tilde{u}_\ell)|_{bZ}$, $0 \leq \ell \leq 2$, чтобы восстановить Z по граничным значениям канонического отображения $[(\partial \tilde{u})|_{bZ}]$, используя интегральные формулы типа Коши, при условии, что $(u_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}$ удовлетворяют условию общего положения, которое

было сформулировано не вполне точно в [3] и точно в работе [4], где мы распространили некоторые из наших результатов на нодальные кривые с краем, особенности которых электрически заряжены.

В настоящей статье мы докажем, что данные в задаче, отвечающие условиям из [4], находятся в общем положении. По существу они означают, что каноническое отображение $[\partial\tilde{u}]$ является погружением, вкладывающим bX в $\mathbb{CP}_2$ и собственным в том смысле, что полный прообраз образа bX сводится к bX ; таких данных достаточно для того, чтобы результаты из [3], [4] выполнялись.

Наши результаты по обратной задаче Дирихле–Неймана в [4] были применены к обращению следующей теоремы Римана и Клейна.

ТЕОРЕМА (Риман 1857, Клейн 1882). Пусть Z – компактная риманова поверхность, пусть $(a_j^\pm)_{1 \leq j \leq \nu}$ – семейство попарно различных точек Z , и пусть $(c_j)_{1 \leq j \leq \nu} \in \mathbb{R}^\nu$. Тогда существует единственная (с точностью до постоянного слагаемого) гармоническая функция U на $Z \setminus \{a_j^\pm; 1 \leq j \leq \nu\}$, имеющая не более чем логарифмические особенности и для которой вычеты

$$\text{Res}_{a_j^\pm}(d^c U) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\text{dist}(\cdot, a_j^\pm) = \varepsilon} d^c U$$

(здесь $\varepsilon > 0$ достаточно мало) формы

$$d^c U = i(\bar{\partial} - \partial)U$$

в $a_j^\pm$ равны $\pm c_j$, $1 \leq j \leq \nu$.

Здесь Z следует рассматривать как компактную поверхность с постоянной электропроводностью в $\mathbb{R}^3$, с комплексной структурой, индуцированной стандартной евклидовой структурой в $\mathbb{R}^3$, а пары (a_j^-, a_j^+) – как электрически заряженные диполи с зарядом $(-c_j, +c_j)$. В этой постановке потенциал электрического поля – это гармоническая функция, имеющая не более конечного числа логарифмических особенностей, заряды которых, равные вычетам в описанном выше смысле, в сумме равны нулю; сумма их абсолютных величин называется L^1 -нормой этого распределения зарядов.

Объединяя формулировки предложения 1 и теоремы 2 в [4], получаем обращение теоремы Римана–Клейна, которое можно представить как утверждение о восстановлении компактной римановой поверхности по данным, взятым из известной (малой) подобласти на этой поверхности.

ТЕОРЕМА В. Пусть S – открытая подобласть компактной римановой поверхности Z , рассматриваемой как подмногообразие $\mathbb{R}^3$ и наделенной комплексной структурой, индуцированной стандартной евклидовой структурой в $\mathbb{R}^3$. Пусть $(U_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}$ – семейство потенциалов электрического поля, индуцированных на Z электрически заряженными диполями S . Тогда $Z \setminus S$ можно восстановить по $(U_\ell|_S)_{0 \leq \ell \leq 2}$ или по $(V_\ell|_S)_{0 \leq \ell \leq 2}$, где $(V_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}$ – такое семейство потенциалов электрического поля, что разность $(U_\ell - V_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}$ сколь угодно близка к 0 в $C^\infty(Z \setminus S)^3$ и индуцирована распределением электрических зарядов, сосредоточенным в S и имеющим сколь угодно малую L^1 норму.

Этот результат является следствием теоремы 2 из [4] и теоремы 6, из которой вытекает аппроксимационный результат, анонсированный в [4; предложение 1]. Заметим, что утверждаемое восстановление можно провести конструктивно в случае, когда каноническое отображение, ассоциированное с заданным набором потенциалов электрического поля, переводит $Z \setminus S$ в неалгебраическую кривую в $\mathbb{CP}_2$. К примеру, этого можно добиться шевелением потенциалов U_ℓ , индуцированных зарядами $\pm c_\ell$ в точках $a_\ell^\pm$, добавив к ним заряд, равномерно распределенный в малой окрестности $a_\ell^\pm$.

Интересно сравнить теорему В с результатами Г. Шталя [12] и А. Гончара, Е. Рахманова и С. Сутина [13] по аппроксимациям Паде алгебраических функций. Хотя мы используем технику, совершенно непохожую на методы в [13] и [12], мы ставим весьма близкую цель: конструктивно восстановить алгебраическую риманову поверхность Z по оптимальным данным, взятым из окрестности S одной точки на Z .

Для доказательства утверждения теоремы В о возмущениях нам требуется количественный вариант известных результатов качественного характера о приближении гармонических функций [14], [15]. Он получен в теореме 7; для ее доказательства используется дискретизация формулы разложения Ходжа–де Рама (4.2).

Следующий параграф посвящен формулировке основных результатов, включая теоремы А и В. Доказательства приводятся в двух последних параграфах.

§ 2. Формулировки теорем

Открытой римановой поверхностью с краем называется внутренность одномерного компактного комплексного многообразия с краем, все компоненты которого имеют нетривиальный гладкий вещественно одномерный край.

Открытой нодальной кривой (с краем) называется фактор внутренности открытой римановой поверхности (с краем) Z по отношению эквивалентности, идентифицирующему точки в каждом из заданных конечных подмножеств $N_1, \dots, N_k$ внутренних точек X . Если X – нодальная кривая, то *ветвью* X называется любая связная риманова поверхность, содержащаяся в $\bar{X}$. *Нодальной точкой* X называется точка из множества особенностей $\text{Sing } X$; число ветвей X , проходящих через a , обозначается через $\nu(a)$.

Если G – открытое подмножество X и $r \in [0, +\infty]$, то будем говорить, что функция u на G принадлежит классу C^r , если она непрерывна и $u|_B \in C^r(B)$ для всякой ветви B кривой G ; пространство таких функций обозначается через $C^r(G)$. Если $p, q \in \{0, 1\}$, то о (p, q) -форме ω класса $C_{p,q}^r(G \cap \text{Reg } X)$ говорится, что она имеет класс C^r на G , если для всякой ветви B кривой G $\omega|_{B \cap \text{Reg } X}$ продолжается до элемента $C_{p,q}^r(B)$. Пространство таких форм обозначается через $C_{p,q}^r(G)$; заметим, что $C^r(G)$ и $C_{0,0}^r(G)$ не обязательно совпадают.

Если K – компактное подмножество X , а $p, q \in \{0, 1\}$, то на пространстве $C_{p,q}^\infty(K)$ гладких (p, q) -форм с носителем $\subset K$ вводится топология, индуцированная полунормами $\|\omega\|_{m,K,B} = \sup_{B \cap K} \|D^{(m)}\omega|_B\|$, где m – произвольное целое

число, B – любая ветвь X , а D – полный дифференциал, примененный к коэффициентам. Для $K \subset \text{Reg } X$ индекс B опускается.

Пространство $D_{p,q}(G)$ гладких финитных (p, q) -форм с носителем G наделено топологией индуктивного предела пространств $C_{p,q}^\infty(K)$, где K – произвольный компакт в G . Пространство $D'_{p,q}(G)$ потоков бистепени (p, q) на G является топологически сопряженным к $D_{p,q}(G)$; элементы $D'_{1,1}(G)$ являются *распределениями* на G . Внешнее дифференцирование гладких форм d корректно определено на ветвях X , так же как ∂ и $\bar{\partial}$. Эти операторы определяются на потоках по двойственности.

Гармоническим распределением называется элемент U пространства $D'_{1,1}(G)$, являющийся (слабо) *гармоническим* в следующем смысле: поток $i\partial\bar{\partial}U$ равен нулю, т.е. $\langle i\partial\bar{\partial}U, \varphi \rangle = 0$ для любого $\varphi \in C_c^\infty(G)$. Таким образом, U гармонический, если и только если $\partial U - \bar{\partial}$ -замкнутый поток. Заметим, что $\omega \in D'_{0,1}(G)$ $\bar{\partial}$ -замкнут, если и только если ω есть $(1, 0)$ -форма слабо голоморфная по Розенлихту [16].

Согласно [4; предложение 2] гармоническое распределение U на G – это обычная гармоническая функция на $\text{Reg } G$ с тем свойством, что для всякой нодальной точки a кривой X в G и всякой ветви B кривой X в a у $U|_{B \cap G}$ имеется не более чем *изолированная логарифмическая особенность*, т.е.

$$U|_{B \cap G} = \text{Res}_B(U, a) \ln \text{dist}(\cdot, a) + R,$$

где $\text{Res}_B(U, a) \in \mathbb{C}$ и расстояние вычисляется в любой эрмитовой метрике на B , а остаточный член R гладкий в окрестности a на B ; кроме того, сумма комплексных чисел

$$\text{Res}_B(U, a) = \text{Res}((\partial U)|_B, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B \cap \{\text{dist}(\cdot, a) = \varepsilon\}} \partial U$$

по всем ветвям B кривой X в a (где $\varepsilon > 0$ достаточно мало) равна 0.

Для произвольной $u \in C^\infty(bX)$ и для *допустимого набора* c (т.е. такого набора комплексных чисел $(c_{a,j})_{a \in \text{Sing } X, 1 \leq j \leq \nu(a)}$, что $\sum_{1 \leq j \leq \nu(a)} c_{a,j} = 0$ для всякого $a \in \text{Sing } X$) существует единственное продолжение u на X в виде гармонического распределения $\tilde{u}^c$ с набором вычетов c (см., к примеру, [4; предложение 2]); если X гладкая, то только пустой набор допустим и $\tilde{u}^\emptyset = \tilde{u}$ – обычное гармоническое продолжение u на X .

Слабо голоморфные $(1, 0)$ -формы на G – это обычные голоморфные формы на $\text{Reg } G$, мероморфные на ветвях G , у которых в каждом полюсе сумма вычетов вдоль всех ветвей, проходящих через этот полюс, равна 0. В частности, такие формы могут задавать канонические отображения. Стоит отметить, что особенности слабо голоморфной $(1, 0)$ -формы на нодальной кривой являются в худшем случае простыми полюсами и в каждом полюсе сумма вычетов равна нулю. В [17] эти свойства описаны в алгебраических терминах для общих кривых, а в [4; предложение 2] приведено элементарное доказательство.

Погружение открытой нодальной кривой X с краем в комплексное многообразие M – это такое многозначное отображение $\bar{X}$ в M , ограничение которого

на каждую ветвь X является обычным однозначным погружением; таким образом, такое отображение оказывается обычным C^1 -погружением $\text{Reg } X$, продолжающимся на всякую ветвь X как C^1 -погружение. Для простоты и поскольку это достаточно для наших целей, все погружения будут предполагаться имеющими класс C^1 вблизи границы. Чтобы обойти возможную несобственность погружения, мы даем следующие определения.

Почти вложением назовем погружение $\varphi: \bar{X} \rightarrow M$ со следующими свойствами: $X' = \varphi(X)$ – аналитическое подмножество $M \setminus bX'$; существует такое конечное подмножество E кривой X , что $\varphi(E) \subset \varphi(X) \setminus \varphi(bX)$, и φ является изоморфизмом римановых поверхностей $(\text{Reg } X) \setminus E$ и $(\text{Reg } X') \setminus \varphi(E)$, продолжающимся до диффеоморфизма многообразий с краем на некоторых открытых окрестностях bX и bX' в $\bar{X}$ и $\bar{X}'$. В частности, $\varphi|_{bX}$ вкладывает bX в M и $\varphi^{-1}(\varphi(bX)) = bX$. Заметим, что φ не обязательно сохраняет нодальные точки.

Вложение – это почти вложение $\varphi: \bar{X} \rightarrow M$, являющееся гомеоморфизмом $\bar{X}$ на $\varphi(\bar{X})$, или, что эквивалентно, однозначное и со следующим свойством: для каждой нодальной точки a на X ветви (ростки ветвей) X' в $\varphi(a)$ являются φ -образами (ростков) ветвей X в a . Для гладких X эти определения совпадают с обычными.

Наша первая теорема относится к граничным данным, получаемым из почти вложений общего положения внутренней части кривой.

ТЕОРЕМА 1 (о граничных данных общего положения). *Пусть X – открытая нодальная кривая с краем, $s = (c_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}$ – тройка допустимых наборов, а $G_c^{ae}(bX)$ – множество таких $(u_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2} \in C^\infty(bX)^3$, что $0 \notin (\partial U_0)(bX)$ и $[\partial U_0 : \partial U_1 : \partial U_2]$ – почти вложение $\bar{X}$ в $\mathbb{CP}_2$, где U_ℓ – единственное продолжение u_ℓ до гармонического распределения с набором вычетов c_ℓ . Тогда $G_c^{ae}(bX)$ – плотное открытое подмножество $C^\infty(bX)^3$. Для вещественных с те же результаты выполняются в пространствах вещественнозначных функций.*

Такие данные общего положения тесно связаны с данными Дирихле–Неймана, используемыми в [4] при решении обратной задачи Дирихле–Неймана; упомянутые данные Дирихле–Неймана являются граничными данными вида $(\gamma, u, (\partial \tilde{u}^c)|_\gamma)$, где γ – ориентированная граница X , а $u = (u_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2} \in G_c^{ae}(\gamma)$. Итак, теорема 1 в некотором смысле говорит, что случайные данные являются хорошими. Однако для нашей обратной задачи особенно ценно то, что можно заранее проверить, будут ли заданные $u \in C^\infty(bX)^3$ иметь общее положение, т.е. принадлежат ли они множеству $G_c^{ae}(bX)$. С помощью [18] и [3; теорема 3а] получаем критерий для распознавания общего положения в терминах разложения граничного интеграла на ударные волны. Мы докажем этот результат в другой статье.

ТЕОРЕМА (критерий общего положения). *Пусть X – открытая риманова поверхность со связным краем, и пусть $u = (u_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2} \in C^\infty(bX)^3$ удовлетворяет условиям $0 \notin (\partial \tilde{u}_0)(bX)$ и*

$$(f_\ell)_{1 \leq \ell \leq 2} = \left(\frac{(\partial \tilde{u}_1)|_{bX}}{(\partial \tilde{u}_0)|_{bX}}, \frac{(\partial \tilde{u}_2)|_{bX}}{(\partial \tilde{u}_0)|_{bX}} \right)$$

является вложением. Рассмотрим индикатрису Коши–Фантаппье формы $f_1 d(\xi_0 + \xi_1 f_1 + f_2)$, представляющую собой функцию

$$G : \mathbb{C}^2 \ni (\xi_0, \xi_1) \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial X} f_1 \frac{d(\xi_0 + \xi_1 f_1 + f_2)}{\xi_0 + \xi_1 f_1 + f_2}.$$

Тогда $u \in G_c^{ae}(bX)$ и образ $[\partial \tilde{u}](X)$ неалгебраичен тогда и только тогда, когда существуют непустое открытое множество W в $\mathbb{C}^2$ и попарно различные голоморфные функции $h_1, \dots, h_p$ на W , удовлетворяющие уравнению ударной волны $h \frac{\partial h}{\partial \xi_0} = \frac{\partial h}{\partial \xi_1}$, для которых

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2} \left(G - \sum_{1 \leq j \leq p} h_j \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_0^2} \neq 0 \quad (2.1)$$

на W .

Для $(u_\ell) \in G_c^{ae}(bX)$ поверхность $Y = [\partial \tilde{u}_0^c : \partial \tilde{u}_1^c : \partial \tilde{u}_2^c](X)$ можно рассматривать как конкретную реализацию X . Если Y можно явно вычислить по граничным данным, то мы получаем инструмент для решения задачи восстановления, весьма интересный для приложений. В этом состоял замысел интегральных формул типа Коши, приведенных в [3; теорема 2] и [4; теорема 5]. Заметим однако, что для эффективной реализации этих результатов потребуются значительные усилия; здесь ключевыми могут оказаться результаты из [18; предложение 3.33], [19; теорема 8.3], [3; теорема 4] и [20; теорема 1.2]. Естественный вопрос о том, что делать с данными необщего или менее общего положения, пока открыт.

Первый шаг доказательства теоремы 1 состоит в получении ее более слабого варианта при адаптировании техники Бишопы, используемой им для построения аффинного вложения многообразия Штейна.

ТЕОРЕМА 2 (слабые приближения). Пусть Σ – открытая nodальная кривая, а $X \subset \Sigma$ – открытое подмножество с гладким краем, для которого $\Sigma \setminus X \subset \text{Reg } \Sigma$. Для $0 \leq \ell \leq 2$ пусть U_ℓ – гармоническое распределение на Σ в окрестности $\overline{X}$. Тогда имеется тройка $V = (V_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}$ гармонических распределений на Σ , гладких вблизи $\Sigma \setminus X$ и таких, что разность $U - V$ сколь угодно близка к 0 в $C^\infty(\overline{X})^3$, $\sigma = [\partial V_0 : \partial V_1 : \partial V_2]$ – погружение $\overline{X}$ в $\mathbb{CP}_2$, вкладывающее $\gamma = bX$, и $(\sigma|_{\overline{X}})^{-1}(\delta) = \gamma$, где $\delta = \sigma(\gamma)$. Если тройка U вещественная, то V также можно выбрать вещественной.

Вторым и последним шагом в доказательстве теоремы 1 является следующая ниже теорема, названная в честь формулы, из которой вытекает, что голоморфная функция на открытом подмножестве $\mathbb{C}$, являющаяся непрерывной вплоть до границы, инъективна, если ее ограничение на границу инъективно.

ТЕОРЕМА 3 (принцип аргумента). Пусть X – открытая nodальная кривая с краем, а $F : \overline{X} \rightarrow \mathbb{CP}_2$ – вложение с инъективным ограничением $F|_\gamma$, удовлетворяющее условию $F^{-1}(F(bX)) = bX$. Тогда $Y = F(X)$ – комплексная кривая, $\text{Sing } Y$ – конечное или пустое множество, а F является изоморфизмом $X \setminus F^{-1}(\text{Sing } Y)$ на $\text{Reg } Y$.

Слегка изменив доказательство теоремы 1, можно доказать следующую теорему 4, относящуюся к проективным вложениям и погружениям открытых римановых поверхностей с краем. Ее можно рассматривать, в первом случае, как вариант теоремы Бишоп–Нарасимхана, а во втором – как вариант результата Бишоп из [1]. Как показывает теорема 4, для проективного вложения открытой поверхности с краем не обязательно делать какие-то сложные построения, поскольку в некотором смысле случайно выбранные канонические отображения оказываются вложениями. Еще одна интересная особенность теоремы 4 заключается в том что, в отличие от некоторых результатов о вложениях, она не использует рода поверхности, который, вообще говоря, не так уж просто выяснить, особенно в интересующих нас обратных задачах.

ТЕОРЕМА 4 (приближения почти вложениями). Пусть X – открытая риманова поверхность с краем, а $K(\bar{X})$ – пространство голоморфных $(1, 0)$ -форм на X , являющихся гладкими вплоть до края bX . Для $n \in \mathbb{N}^*$ обозначим через $G_n^{ae}(X)$ множество таких $(\omega_\ell)_{0 \leq \ell \leq n} \in K(\bar{X})^{n+1}$, что $[\omega]$ является почти вложением $\bar{X}$ в $\mathbb{CP}_n$, и обозначим через $G_n^e(X)$ множество $(\omega_\ell)_{0 \leq \ell \leq n}$, у которых ассоциированное каноническое отображение оказывается вложением. Тогда $G_n^e(X)$ – плотное открытое подмножество $K(\bar{X})^{n+1}$ для $n \geq 3$, а $G_2^{ae}(X)$ – плотное открытое подмножество $K(\bar{X})^3$.

Эта теорема – частный случай теоремы 5, для которой нам потребуются дополнительные обозначения. Пусть X – нодальная кривая, s – допустимый набор, $K_c(\bar{X})$ – множество слабо голоморфных $(1, 0)$ -форм на X , гладких в окрестности края bX вплоть до bX , для которых s – набор вычетов. Снабдим $K_c(\bar{X})$ расстоянием $(\alpha, \beta) \mapsto \text{dist}(\alpha - \beta, 0)$, где dist – произвольное расстояние, задающее естественную топологию на каноническом расслоении $K(\bar{X})$ гладких $(1, 0)$ -форм на $\bar{X}$. Пусть $c = (c_\ell)_{0 \leq \ell \leq n}$ – тройка допустимых наборов, где

$$c_\ell = (c_{p,j}^\ell)_{p \in \text{Sing } X, 1 \leq j \leq \nu(p)}, \quad 0 \leq \ell \leq n.$$

Если $c_{p,j} = (c_{p,j}^\ell)_{0 \leq \ell \leq n}$ ненулевые для любой пары (p, j) , то c называется *нодальным семейством*, и оно называется *истинным нодальным семейством*, если, вдобавок, для всякого $p \in \text{Sing } X$ точки $c_{p,j}$, $1 \leq j \leq \nu(p)$, лежат на одной комплексной прямой в $\mathbb{C}^3$. Если $p \in \text{Sing } X$ получена отождествлением точек $p_1, \dots, p_{\nu(p)}$ на некоторой римановой поверхности, то отображение $j \mapsto [c_{p,j}^0 : \dots : c_{p,j}^n]$ корректно определено в первом случае и постоянно во втором. Скажем, что истинно нодальное семейство c *инъективно*, если $\text{Sing } X \ni p \mapsto [c_{p,1}^0 : \dots : c_{p,1}^n]$ инъективно.

ТЕОРЕМА 5 (приближения почти вложениями, нодальный случай). Пусть X – открытая нодальная кривая с краем, а $c = (c_\ell)_{0 \leq \ell \leq n}$ – инъективное нодальное семейство. Для $n \in \mathbb{N}^*$ обозначим через $G_{n,c}^e(\bar{X})$ (соответственно через $G_{n,c}^{ae}(\bar{X})$) множество $\omega \in K_{n,c}(\bar{X}) = K_{c_0}(\bar{X}) \times \dots \times K_{c_n}(\bar{X})$, для которых $[\omega]$ – вложение (соответственно почти вложение) $\bar{X}$ в $\mathbb{CP}_n$. Тогда $G_{n,c}^e(X)$ – плотное открытое подмножество $K_{n,c}(\bar{X})$ при $n \geq 3$ и $G_{2,c}^{ae}(X)$ – плотное открытое подмножество $K_{2,c}(\bar{X})$.

Тот факт, что каждая нодальная кривая вкладывается в $\mathbb{C}^3$, – следствие общего результата Вигманна [21] и Шюрманна [22]. Нодальный вариант теоремы А получается использованием в доказательстве теоремы 5 вместо теоремы 4.

Обратимся теперь к задаче восстановления компактной римановой поверхности Z по данным, набранным в малой подобласти S . Точнее, рассматривается пространство функций U , гармонических вне конечного подмножества $P(U)$ поверхности Z , которые имеют изолированные логарифмические особенности в каждой точке из $P(U)$ и для которых $\sum_{p \in P(U)} \text{Res}(U, p) = 0$. В силу последнего условия U оказывается гармоническим распределением на нодальной кривой X , на которой точки из $P(U)$ отождествлены. В дальнейшем такие специальные функции будем называть *гармоническими распределениями* на Z .

Через D_Z обозначим множество пар (a, c) из $Z^6 \times \mathbb{C}^3$, где $a = (a_\ell^-, a_\ell^+)_{0 \leq \ell \leq 2}$ – набор из шести попарно различных точек Z , а $c = (c_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2} \in \mathbb{C}^3$. Если $(a, c) \in D_Z$ и $0 \leq \ell \leq 2$, то $U_{Z, \ell}^{a, c}$ – гармоническое распределение с сингулярным носителем $\{a_\ell^-, a_\ell^+\}$ и с вычетами $\pm c_\ell$ в $a_\ell^\pm$; фактически $U_{Z, \ell}^{a, c}$ – стандартная двухполюсная функция Грина, и, хотя она определена с точностью до постоянного слагаемого, форма $\partial U_{Z, \ell}^{a, c}$ определена однозначно.

Для $n \in \mathbb{N}^*$ пусть $D_{Z, n}$ – множество четверок $(a, c, p, \varkappa)$ из $Z^6 \times \mathbb{C}^3 \times (Z^n)^3 \times (\mathbb{C}^n)^3$, в которых $(a, c) \in D_Z$, и для всякого $\ell \in \{0, 1, 2\}$ $p_\ell = (p_{\ell, j})_{1 \leq j \leq n}$ является набором попарно различных точек из множества $Z \setminus \{a_0^-, a_0^+, a_1^-, a_1^+, a_2^-, a_2^+\}$, а $\varkappa_\ell = (\varkappa_{\ell, j})_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{C}^n$ удовлетворяет условию $\sum_{1 \leq j \leq n} \varkappa_{\ell, j} = 0$.

Для $(a, c, p, \varkappa) \in D_{Z, n}$ обозначим через $V_{Z, \ell}^{p, \varkappa}$ гармоническое распределение с сингулярным носителем $\{p_{\ell, j}; 1 \leq j \leq n\}$ и с вычетами $\varkappa_{\ell, j}$ в точках $p_{\ell, j}$, $1 \leq j \leq n$; $V_{Z, \ell}^{p, \varkappa}$ определено однозначно с точностью до постоянного слагаемого; положим $U_{Z, \ell}^{a, c, p, \varkappa} = U_{Z, \ell}^{a, c} + V_{Z, \ell}^{p, \varkappa}$, $0 \leq \ell \leq 2$. Также обозначим через $E_{Z, n}(S)$ множество таких $(a, c, p, \varkappa) \in D_{Z, n}$, что отображение

$$F_Z^{a, c, p, \varkappa} = [\partial U_{Z, 0}^{a, c, p, \varkappa} : \partial U_{Z, 1}^{a, c, p, \varkappa} : \partial U_{Z, 2}^{a, c, p, \varkappa}]$$

определено и инъективно вне открытого подмножества $Z \setminus S$. Тогда $E_{Z, n}(S)$ открыто в $D_{Z, n}$.

Заметим, что коль скоро $F_Z^{a, c, p, \varkappa}$ принимает значение $(1, 0, 0)$ в каждом полюсе $\partial U_{Z, 0}^{a, c, p, \varkappa}$, отображение $F_Z^{a, c, p, \varkappa}$ не может оказаться вложением, даже когда оно определено на всей Z . Оно не может оказаться и почти вложением, так как его степень должна была бы быть не меньше 2. Так что следующий результат об общем положении, анонсированный в [4; предложение 1], довольно тонкий. В нем S следует рассматривать как заранее известную подобласть, в которой по сути и сосредоточена неинъективность отображений.

ТЕОРЕМА 6 (почти вложение с помощью дипольного возмущения). Пусть Z – компактная риманова поверхность, а S – непустое открытое подмножество Z . Рассмотрим пару (a, c) из D_Z , в которой $a \in S^6$. Тогда для всякого $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ существуют такие $n \in \mathbb{N}^*$ и $(p, \varkappa) \in (S^n)^3 \times (\mathbb{C}^n)^3$, что

$$(a, c, p, \varkappa) \in E_{Z, n}(S), \quad |\varkappa|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{0 \leq \ell \leq 2, 1 \leq j \leq n} |\varkappa_{\ell, j}| \leq \varepsilon.$$

Это доказывается применением теоремы 1 к $Z \setminus S$ и использует теорему 7 ниже. Заметим: что этот и другие результаты из [15], [14] можно трактовать как дальнейшее уточнение теоремы Рунге–Бенке–Штейна [23], [24] для голоморфных функций на открытой римановой поверхности, которая сформулирована следующим образом в книге Реммерта [25].

ТЕОРЕМА С (Бенке–Штейн). *Для всякой подобласти D некомпактной римановой поверхности Z существует не более чем счетное множество T граничных точек D (в Z) со следующим свойством: всякую функцию в $\mathcal{O}(D)$ равномерно внутри D можно приблизить мероморфными функциями на Z , каждая из которых имеет конечное число полюсов, причем все они принадлежат T .*

В следующем утверждении $L_m^1(Z \setminus S)$, $m \in \mathbb{N}$, – соболевское пространство распределений в $Z \setminus \bar{S}$, полные дифференциалы которых до порядка m включительно интегрируемы на $Z \setminus S$, где на Z введена произвольная эрмитова метрика.

ТЕОРЕМА 7 (приближения типа Рунге для гармонических функций – результаты качественного характера). *Пусть Z – связная компактная ориентированная гладкая риманова поверхность, а S – открытое подмножество Z с гладким краем. Тогда существует набор констант $(C_m) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, зависящий только от S , такой, что для всякого $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ и всякой функции $\varphi \in C^\infty(Z \setminus S)$, гармонической на $Z \setminus \bar{S}$, можно найти такое конечное множество P_ε точек из S и такую функцию φ_ε , гармоническую в $Z \setminus P_\varepsilon$ и имеющую изолированные логарифмические особенности, что $\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{C^m(Z \setminus S)} \leq C_m \varepsilon \|\varphi\|_{L_2^1(Z \setminus S)}$ для всякого $m \in \mathbb{N}$, а*

$$\sum_{a \in P_\varepsilon} |\operatorname{Res}(\varphi_\varepsilon, a)| \leq C_0 \|\varphi\|_{L_2^1(Z \setminus S)}.$$

Для вещественных φ функцию φ_ε также можно выбрать вещественной.

§ 3. Доказательства для открытых кривых с краем

Все доказательства, кроме теоремы 3 и теоремы А, которая является следствием теоремы 4, как показывает лемма 8 ниже, будут изложены вслед за несколькими леммами. Важные обозначения и общие постановки вводятся после доказательства леммы 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Так как открытая нодальная кривая с краем является открытой римановой поверхностью с краем, на которой несколько точек отождествлены, достаточно доказать нужный результат для гладких X . Так как $F^{-1}(\delta) = \gamma$, то $F|_X$ – собственное отображение и, как известно из теоремы Реммерта [26], Y является аналитическим множеством в $\mathbb{CP}_2 \setminus \delta$; Y имеет чистую размерность 1, так как F – погружение. Рассматривая компоненты связности X , мы сводим задачу к случаю связной кривой X . Тогда Y связно и, коль скоро F является погружением вплоть до границы, можно определить

степень ν отображения F над $\text{Reg } Y$ формулой

$$\nu = \max\{\text{Card}(X \cap F^{-1}(\{y\})); y \in \text{Reg } Y\}.$$

Поскольку $F|_X$ собственное и гладкое вблизи bX по нашему определению погружения, $F_*[X]$ корректно определено и равно $\nu[Y]$. Значит, $\nu d[Y] = dF_*[X] = F_*d[X] = F_*[\gamma] = [\delta]$, поскольку $F|_\gamma$ инъективно. Так как F – погружение, $d[Y]$ локально имеет вид $\pm[\delta]$ и $\nu = 1$.

Лемма 8 – простое следствие того факта, что любое голоморфное расслоение над открытой римановой поверхностью с краем тривиально, но мы сочли полезным дать ее элементарное доказательство.

ЛЕММА 8. *Всякое голоморфное отображение открытой римановой поверхности (возможно, с краем) является каноническим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – рассматриваемая риманова поверхность, а $F: \bar{R} \rightarrow \mathbb{CP}_n$ – голоморфное отображение, гладкое вплоть до края (если R с краем). Без ограничения общности предположим, что R связна. Пусть $(t_0, \dots, t_n)$ – однородные координаты в $\mathbb{CP}_n$, и, для $0 \leq j \leq n$ положив $T_j = \{t_j \neq 0\}$, обозначим через $\zeta_j = (\zeta_{j,k})_{k \neq j} = (t_k/t_j)$ естественные аффинные координаты на $\mathbb{CP}_n$ в карте T_j ; будем считать, что $\zeta_{j,j} = 1$. Тогда функции $f_{j,k} = \zeta_{j,k} \circ F$ задают набор данных в мультипликативной проблеме Кузена на Z , соответствующей накрытию $(R_j)_{0 \leq j \leq n} = (F^{-1}(T_j))_{0 \leq j \leq n}$. Оригинальное доказательство того факта, что на открытой римановой поверхности (возможно, с краем) у такой задачи всегда есть решение, можно найти для поверхности без края в работе Бенке и Штейна [23] и можно вывести из результатов Коппельмана в [5] по гладким вплоть до границы $\bar{\partial}$ -резольвентам. Итак, можно найти такие $(f_j) \in \mathcal{O}^*(R_0) \times \dots \times \mathcal{O}^*(R_n)$, что $f_{j,k} = f_j/f_k$ на всяком пересечении $R_j \cap R_k$. Для фиксированного k мы видим из равенства $f_k = f_{j,k}f_j$, что f_k голоморфно продолжается на R и будет гладкой на $\bar{R}$. Следовательно, $f_{j,k}$ мероморфно продолжается на R и на $\bar{R}$ выполнены соотношения $f_{j,k} = f_k/f_j$. У отображения $f = (f_k)$ нет нулей на $\bar{R}$, и $[f]$ определено корректно. Имеем $F = [f]$, поскольку на каждом R_j выполняются равенства $[(f_k/f_j)_{0 \leq k \leq n}] = [(f_{j,k})_{0 \leq k \leq n}]$.

Рассмотрим $\alpha_0 \in K(\bar{R})$, не равную нулю тождественно; если у R есть край, то в качестве α_0 возьмем ограничение на $\bar{R}$ ненулевого элемента $K(R')$, где R' – связная открытая окрестность $\bar{R}$ в дубле $\bar{R}$. Теперь с помощью теоремы Вейерштрасса можно выбрать $A \in \mathcal{O}(R) \cap C^\infty(\bar{R})$ с дивизором, равным дивизору α_0 . Пусть α – непрерывное продолжение $\frac{1}{A}\alpha_0$; это элемент $K(\bar{R})$, нигде не обращающийся в нуль. Значит $F = [f\alpha]$ – каноническое отображение.

Лемма 8 доказана.

Утверждения и доказательства, приведенные ниже, технически усложнены наличием нодальных точек, но читатель может без труда выделить рассмотрение гладкого случая. Теперь введем обозначения, используемые далее в этом параграфе. Пусть X – открытая нодальная кривая с краем. Поскольку ее

можно рассматривать как подобласть на своем собственном дубле, будем считать, что X представляет собой относительно компактное открытое подмножество нодальной кривой Σ , все компоненты которой пересекаются с X , причем $\Sigma \setminus X \subset \text{Reg } \Sigma$ и $X \cap \text{Reg } \Sigma$ – область в $\text{Reg } \Sigma$ с гладкой границей. Ниже при необходимости мы будем заменять Σ достаточно малой окрестностью $\bar{X}$.

Пусть R – гладкая риманова поверхность, фактором которой является Σ , а $\pi: R \rightarrow \Sigma$ – естественная проекция. Положим $W = \pi^{-1}(X)$ и

$$S = \pi^{-1}(\text{Sing } \Sigma) = \{p_j; p \in \text{Sing } X, 1 \leq j \leq \nu(p)\},$$

где $\{p_1, \dots, p_{\nu(p)}\} = \pi^{-1}(p)$ для $p \in \text{Sing } X$. Поскольку $\gamma \subset \text{Reg } \Sigma$, мы отождествим $\pi^{-1}(\gamma)$ с γ .

Заметим, что прообраз гармонического распределения (или слабо голоморфной $(1, 0)$ -формы) на X относительно π является гармонической функцией (соответственно голоморфной $(1, 0)$ -формой) на $W \setminus S$ с не более чем изолированными логарифмическими особенностями (соответственно простыми полюсами), у которой для всякой точки $p \in \text{Sing } X$ сумма вычетов в p обращается в нуль. И наоборот, у таких гармонических функций и голоморфных $(1, 0)$ -форм на $W \setminus S$ корректно определен прямой образ относительно π , являющийся гармоническим распределением или слабо голоморфной $(1, 0)$ -формой.

Зафиксируем тройку $c = (c_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}$ допустимых наборов и запишем $c_\ell = (c_{p,j}^\ell)_{p \in \text{Sing } X, 1 \leq j \leq \nu(p)}$. В дальнейшем мы введем обозначение $u = (u_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}$, где u_ℓ , $0 \leq \ell \leq 2$, – ограничение на bX гармонического распределения U_ℓ на Σ , являющегося гладким вблизи $\Sigma \setminus X$ и имеющего набор вычетов c_ℓ ; мы положим

$$\omega = (\omega_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2} = (\partial U_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}, \quad \theta = (\theta_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2} = (\pi^* \omega_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2},$$

и для $0 \leq \ell \leq 2$

$$S_\ell = \{p \in S; \text{Res}(\theta_\ell, p) \neq 0\}, \quad Z_\ell = \{\theta_\ell = 0\}.$$

Для $p \in \text{Sing } X$ и $1 \leq j \leq \nu(p)$ имеет место $p_j \in Z_\ell$ тогда и только тогда, когда $c_{p,j}^\ell = 0$ и θ_ℓ непрерывно продолжается нулем в p . Если это имеет место для всех $\ell \in \{0, 1, 2\}$, то наши данные отвечают нодальной кривой, в которой отождествлены только точки из $\pi^{-1}(p) \setminus \{p_j\}$. Таким образом, в этом параграфе мы можем считать, что

либо $c = 0$, либо c – нодальное семейство.

В первом случае мы имеем дело с гладкими римановыми поверхностями W и R , обычными гармоническими функциями и голоморфными формами. Во втором, $[\theta]$ корректно определено во всякой точке p_j и принимает там значение $[c_{p,j}^0 : c_{p,j}^1 : c_{p,j}^2]$. Когда c – истинно нодальное семейство, $[\omega]$ однозначно в нодальных точках X и не может быть вложением, если c неинъективно.

Для процедуры приближения нам потребуется следующая лемма, формулировка которой впервые появилась в [27], в голоморфном случае. В доказательстве мы используем решения с оценками для операторов $\bar{\partial}$ и $\partial\bar{\partial}$ на римановых поверхностях.

ЛЕММА 9. Пусть Z – относительно компактное открытое подмножество открытой римановой поверхности R , имеющее гладкую границу. Тогда для некоторой открытой окрестности Z' множества $\bar{Z}$ в R пара (Z, Z') является гармонической парой (соответственно парой Рунге) в следующем смысле: любой элемент $C^\infty(\bar{Z})$ (соответственно элемент $C_{1,0}^\infty(\bar{Z})$), являющийся гармоническим (соответственно голоморфным) на Z , можно с произвольной точностью приблизить в $C^\infty(\bar{Z})$ (соответственно в $C_{1,0}^\infty(\bar{Z})$) функциями, гармоническими (соответственно $(1, 0)$ -формами, голоморфными) в Z' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\bar{Z}$ компактно, гармоническая часть утверждения сводится к тому факту, что у всякой граничной точки Z есть открытая относительно компактная окрестность D такая, что $Z' = Z \cup D$ имеет гладкую границу, а (Z, Z') представляет собой гармоническую пару. Пусть $\omega \in bZ$. Поскольку у Z гладкая граница, можно построить открытую окрестность D точки ω , являющуюся относительно компактной в координатной карте на R и со следующим свойством: $\overline{D \setminus Z} \cap \overline{Z \setminus D} = \emptyset$ и у $D \setminus Z$ нет компактных компонент в D . Значит, в силу классической теоремы Рунге в $\mathbb{C}$ (1885 г., см. также [14], [15], [25]) $(Z \cap D, D)$ – гармоническая пара. Рассмотрим такую функцию $\chi \in C_c^\infty(R, [0, 1])$, что $\chi = 1$ в окрестности $\overline{D \setminus Z}$ и $\chi = 0$ в окрестности $\bar{Z} \setminus D$. Пусть $f \in C^\infty(\bar{Z})$ – гармоническая функция в Z и $g \in C^\infty(\bar{D})$ – гармоническая функция в D ; тогда положим $h = (g - f)|_{\overline{Z \cap D}}$. Через h_Z (соответственно через h_D) обозначим продолжение χh (соответственно $(1 - \chi)h$) нулем на $Z \setminus D$ (на $D \setminus Z$) и рассмотрим корректно определенную гладкую форму Φ , где $\Phi = i\partial\bar{\partial}h_Z$ на $\bar{Z}$ и $\Phi = -i\partial\bar{\partial}h_D$ на $\bar{D}$. Поскольку $\overline{D \setminus Z} \cap \overline{Z \setminus D} = \emptyset$, для всякого натурального $m \in \mathbb{N}$ существует постоянная C_m , не зависящая от f и g , с которой выполнено неравенство $\|\Phi\|_{C^m(\bar{D})} \leq C_m \|h\|_{C^{m+1}(\overline{D \cap Z})}$; ниже мы обозначаем подобные неравенства символом $\prec_m$. Согласно, например, [28; теорема 4.3] у уравнения $\Phi = i\partial\bar{\partial}\varphi$ есть решение $\varphi \in C^\infty(\bar{Z}')$, для всякого целого m удовлетворяющее неравенству

$$\|\varphi\|_{C^m(\bar{Z}')} \prec_m \|\Phi\|_{C^m(\bar{Z}')} \prec_m \|h\|_{C^{m+1}(\overline{D \cap Z})}.$$

Определим $\tilde{f}$ формулой $\tilde{f} = f + h_Z - \varphi$ на $\bar{Z}$ и формулой $\tilde{f} = g - h_D - \varphi$ на $\bar{D}$. Это гладкая функция в $\overline{Z \cup D}$, гармоническая в $Z \cup D$, и по построению $\tilde{f} - f = -\varphi$ на $Z \setminus D$, а $\tilde{f} - f = \chi h - \varphi$ на $Z \cap D$. Так что для любого целого m имеет место

$$\|\tilde{f} - f\|_{C^m(\bar{Z})} \prec_m \|g - f\|_{C^{m+1}(\overline{D \cap Z})}.$$

Мы видим, что $\tilde{f}$ будет достаточно близкой к f в $C^\infty(\bar{Z})$ при условии, что $g|_{Z \cap D}$ достаточно близка к $f|_{Z \cap D}$ в $C^\infty(\overline{Z \cap D})$. Это означает, что (Z, Z') – гармоническая пара. Результат для $(1, 0)$ -форм получается так же, с помощью $\bar{\partial}$ -резольвенты для $(1, 1)$ -форм на римановых поверхностях, которую можно, например, найти в оригинальной работе Коппельмана [5]. Лемма 9 доказана.

Если A и A' , $A \subset A'$, – открытые подмножества Σ , то (A, A') назовем *гармонической парой*, если для всякого гармонического распределения U на A ,

являющегося гладким на $\bar{A}$ вблизи bA , существует такое гармоническое распределение V на A' с особенностями и вычетами на A' , такими же как у U на A , что $V - U$ сколь угодно близко к 0 в $C^\infty(\bar{A})$. Аналогично определяются пары Рунге. Процедура аппроксимации начинается с такого следствия леммы 9.

ЛЕММА 10. Пусть Σ – открытая нодальная кривая, а X – относительно компактное открытое подмножество Σ с гладкой границей, причем $(bX) \cap \text{Sing } \Sigma = \emptyset$. Тогда для некоторой открытой окрестности X' множества $\bar{X}$ в Σ пара (X, X') является гармонической парой и парой Рунге.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы повторяем доказательство леммы 9 шаг за шагом за тем исключением, что теперь для уравнения $\Phi = i\partial\bar{\partial}\varphi$ (обозначения те же) надо найти решение $\varphi \in C^\infty(\pi^{-1}(Z'))$. Это можно сделать, поскольку Φ можно считать гладкой формой на $\pi^{-1}(Z') \subset W$. Тогда $\tilde{f}|_Z$ – возмущение f проекцией гладкой функции и, значит, по-прежнему гармоническое распределение. Это дает доказательство в гладком случае, а голоморфный случай разбирается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 10 обеспечивает наличие тройки $(V_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}$ таких гармонических распределений вблизи $\bar{X}$, что разность $(V_\ell - U_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}$ сколь угодно мала в $C^\infty(\bar{X})^3$. Таким образом, достаточно доказать теорему 1 для тройки U гармонических распределений на Σ , являющихся гладкими вблизи $\Sigma \setminus X$; подобную редукцию можно выполнить и в теореме 5. Осталось доказать теорему 2. Здесь используются леммы 11–14, в основном опирающиеся на тот факт, что, поскольку R – многообразие Штейна, используя технику Ока–Вейля или $\bar{\partial}$ -технику с L^2 -оценками для сингулярных плюрисубгармонических весов, мы можем доказать следующие результаты.

(RS1) Для $z \in R$ и всякой голоморфной $(1, 0)$ -формы Ω , отличной от нуля, в z существует такая функция $h \in \mathcal{O}(R)$, что

$$\partial_\Omega h \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial h}{\Omega}$$

– координатная функция на R вблизи z .

(RS2) Для $z, z' \in R$ таких, что $z \neq z'$, и для всякой голоморфной $(1, 0)$ -формы Ω , отличной от нуля в z и z' , существует такая функция $h \in \mathcal{O}(R)$, что

$$(\partial_\Omega h)(z) \neq (\partial_\Omega h)(z').$$

Сначала мы используем эти инструменты в лемме 11 для приближения U_0 и U_1 гармоническими распределениями на Σ , производные которых индуцируют каноническое отображение.

ЛЕММА 11. Существуют такие гармонические распределения U'_0 и U'_1 на Σ , что для $U' = (U'_0, U'_1, U_2)$ разность $U' - U$ сколь угодно близка к 0 в $C^\infty(\bar{X})^2$, $0 \notin (\partial U'_0)(\gamma)$ и $(\partial U'_0, \partial U'_1)$ (соответственно $\partial U'$) индуцирует корректно определенное каноническое отображение окрестности $\text{Reg } \bar{X}$ (соответственно $\bar{X}$) в Σ . Вдобавок, U можно выбрать вещественной, если и вещественная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы 8 возьмем вспомогательную форму $\alpha \in K(R)$, не обращающуюся в нуль. Поскольку $\overline{W}$ компактно, с помощью (RS2) мы находим $\eta_1, \dots, \eta_m \in \mathcal{O}(R)$ и покрытие $A_1, \dots, A_m$ множества $\overline{W}$ открытыми подмножествами R , для которых $0 \notin (\partial_\alpha \eta_j)(\overline{A_j})$, $1 \leq j \leq m$. По лемме Уитни–Сарда у

$$\left(\frac{\theta_0/\alpha}{\partial_\alpha \eta_1}, \frac{\theta_1/\alpha}{\partial_\alpha \eta_1} \right) (\overline{A_1} \setminus S_\ell) \text{ и } \frac{\theta_0/\alpha}{\partial_\alpha \eta_1} (\gamma \cap A_1)$$

(являющимся подмножеством $\mathbb{C}$, так как $S_0 \cap \gamma = \emptyset$) мера Лебега равна нулю. Значит, для почти всех ε_1 в $\mathbb{C}^2$ имеет место $(\theta_0^1, \theta_1^1) = (\theta_\ell - \varepsilon_{1,\ell} \partial \eta_1)_{0 \leq \ell \leq 1}$ и θ_0^1 не обращаются в нуль на $\overline{A_1}$ и $\gamma \cap \overline{A_1}$ соответственно. Если $S \neq \emptyset$ и $p \in S$, то у θ_ℓ^1 и θ_ℓ , $0 \leq \ell \leq 1$, одинаковые вычеты в p и, поскольку c – нодальное семейство, $[\theta_0^1 : \theta_1^1 : \theta_2^1]$ корректно определено в p .

Повторяя эти рассуждения, мы добьемся, чтобы для произвольного малого вектора $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ из $\mathbb{C}^2$, у которого координата ε_{j+1} достаточно мала по сравнению с ε_j , равенство $(\theta_0^m, \theta_1^m) = (\theta_\ell + \varepsilon_{1,\ell} \partial \eta_1 + \dots + \varepsilon_{m,\ell} \partial \eta_m)$ индуцировало корректно определенное каноническое отображение вблизи $\overline{W} \setminus S$ и чтобы $0 \notin \theta_0^m(\gamma)$. Поскольку $\theta_\ell^m = \partial(U_\ell + \operatorname{Re} B_\ell)$, где $B_\ell = \sum_{1 \leq j \leq r} \varepsilon_{j,\ell} \eta_j \in \mathcal{O}(R)$, значение $B|_{\overline{W}}$ может быть сколь угодно малым в $C^\infty(\overline{W})$ и $(U'_\ell) = (U_\ell + \pi_* \operatorname{Re} B_\ell)$ искомое. Лемма 11 доказана.

Применив лемму 11 к $U = 0$ в гладком случае и взяв в качестве R достаточно малую открытую окрестность $\overline{W}$, мы получим такую пару $(\eta_0, \eta_1) \in \mathcal{O}(R)^2$, что пара $(\alpha_0, \alpha_1) = (\partial \eta_0, \partial \eta_1)$ не обращается в нуль. Это будет полезно ниже для сохранения свойств приближающих форм.

В общем случае ввиду леммы 11 мы можем предполагать, что $[\theta]$ определено корректно и $0 \notin \theta_0(\gamma)$. Итак, $\gamma \subset W_0 = \overline{W} \setminus Z_0$ и $\overline{W}$ – несвязное объединение W_0 и конечных множеств $W_1 = (\overline{W} \cap Z_0) \setminus Z_1$ и $W_2 = \overline{W} \cap Z_0 \cap Z_1 \subset \overline{W} \setminus Z_2$. Заметим, что в точках из W_ℓ θ_ℓ или отлична от нуля, или имеет простой полюс.

Следующие леммы следуют схеме Бишоп, использованной им в доказательстве результата о вложении штейнового многообразия размерности d в $\mathbb{C}^{2d+1}$. Но в действительности, поскольку наша цель много проще результатов Бишоп в [1], мы воспользуемся упрощениями из [29]. Взяв $(\theta_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2} = \pi^* \omega$, мы используем (RS1) и (RS2), чтобы найти достаточное количество таких θ_j , чтобы отображение $[\theta_0 : \dots : \theta_{n+1}]$ фактически вкладывало $\overline{W} \setminus S$ в $\mathbb{CP}_{n+1}$. Затем мы уменьшим n как можно сильнее неоднократным применением леммы Морса–Уитни–Сарда [30], [31], [32], утверждающей, что если $\varphi: M \rightarrow M'$ – гладкое отображение римановых многообразий с $\dim_{\mathbb{R}} M < \dim_{\mathbb{R}} M'$, то мера $\varphi(M)$ равна 0.

ЛЕММА 12. *Существуют такие $h_3, \dots, h_{n+1} \in \mathcal{O}(R)$, что*

$$S \subset \bigcap_{j \geq 3} \{\partial h_j \neq 0\}$$

и $[\partial h_3 : \dots : \partial h_{n+1}]$ – вложение $\overline{W}$. Более того, для $(\theta_j)_{j \geq 3} = (\partial h_j)_{j \geq 3}$, $[\theta] = [\theta_0 : \dots : \theta_{n+1}]$ является почти вложением $\overline{W}$ и

$$[\theta](\overline{W} \setminus S) \cap [\theta](S) = \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\overline{W}$ компактно, то, используя (RS1), мы покроем $\overline{W}$ открытыми подмножествами $V_2, \dots, V_m$ из R и найдем функции $\eta_2, \dots, \eta_m \in \mathcal{O}(R)$ и $\lambda \in \{0, 1\}^{\{2, \dots, m\}}$, для которых всякое отношение $\frac{\alpha_j}{\alpha_{\lambda(j)}}$, где $\alpha_j = \partial \eta_j$, оказывается координатой на R в V_j . Значит, $\Psi = [\alpha_0 : \dots : \alpha_m]$ – такое погружение $\overline{W}$, что из равенства $\Psi(z) = \Psi(z')$ следует $z = z'$ при условии, что $(z, z') \in V = \bigcup_{3 \leq j \leq m} V_j \times V_j$. Так как для любых $z, z' \in K = (\overline{W} \times \overline{W}) \setminus V$ хотя бы одна форма $\beta = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_0 + \alpha_1\}$ не обращается в нуль ни в z , ни в z' , с помощью (RS2) можно найти такие семейства открытых подмножеств R , $(V'_j)_{m+1 \leq j \leq r}$ и $(V''_j)_{m+1 \leq j \leq r}$, для которых $(W_j)_{m+1 \leq j \leq r} = (V'_j \times V''_j)_{m+1 \leq j \leq r}$ – покрытие компакта $K = (\overline{W} \times \overline{W}) \setminus V$, и такие функции $\eta_{m+1}, \dots, \eta_r \in \mathcal{O}(R)$ и индексы $\beta_{m+1}, \dots, \beta_r \in \beta$, что $(\partial_{\beta_j} \eta_j)(z) \neq (\partial_{\beta_j} \eta_j)(z')$ для любых (z, z') из W_j . По построению $[\partial \eta_0 : \dots : \partial \eta_{r+1}]$, где $\eta_{r+1} = \eta_0 + \eta_1$ – инъективное погружение $\overline{W}$, так что в гладком случае лемма доказана и

$$(h_j)_{3 \leq j \leq n+1} = (\eta_j)_{0 \leq j \leq r+1}.$$

Значит, мы можем использовать гладкие случаи лемм 13 и 14 ниже. Для всякого $k \in \{0, \dots, r+1\}$ и почти всех $a \in \mathbb{C}^{r+2}$ с $a_k = 0$ это даст нам вложение $\overline{W}$ отображением $[\theta_3^a : \dots : \theta_{n+1}^a]$, где $(\theta_j^a)_{j \geq 3} = (\partial \eta_{j-3} - a_{j-3} \partial \eta_k)_{j \geq 3}$. Пусть

$$T = \bigcap_{j \geq 3} S \cap \{\partial \eta_j \neq 0\}.$$

Если $q_* \in S \setminus T$ и $\partial \eta_k(q_*) \neq 0$, то θ_j^a не обращаются в нуль в $T' = T \cup \{q_*\}$ для

$$a \notin \bigcup_{m \geq 3, q \in T'} \left\{ t \in \mathbb{C}^{r+2}; t = \frac{\partial \eta_m(q)}{\partial \eta_k(q)} \right\}.$$

Для таких a имеет место

$$\text{Card} \bigcup_{j \geq 3} S \cap \{\theta_j^a = 0\} < \text{Card} S \setminus T,$$

и $\theta^a = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3^a, \dots, \theta_{n+1}^a)$ индуцирует корректно определенное каноническое отображение, принимающее в $p \in S$ значение $[c_p^0 : c_p^1 : c_p^2 : 0 : \dots : 0]$, где $c_p^\ell = \text{Res}(\theta_\ell, p)$, $0 \leq \ell \leq 2$. Допустим, что $z \in \overline{W} \setminus S$ и $p \in S$ имеют один и тот же образ под действием $[\theta^a]$. Пусть $\ell \in \{0, 1, 2\}$ – такой индекс, что $c_p^\ell \neq 0$. Тогда $\theta_\ell(z) \neq 0$ и, коль скоро $0 \notin (\partial \eta_j)_{0 \leq j \leq r+1}(\overline{W})$, равенство $[\theta^a](z) = [\theta^a](p)$ означает, что $(\partial_{\theta_\ell} \eta_k)(z) \neq 0$, так что a принадлежит множеству $(\frac{\partial \eta_j}{\partial \eta_k})_{0 \leq j \leq r+1}(\{\partial \eta_k \neq 0\})$, имеющему меру Лебега 0 по лемме Морса–Уитни–Сарда. Повторив эти рассуждения несколько раз, получим $h_3, \dots, h_{n+1} \in \mathcal{O}(R)$, удовлетворяющие утверждению леммы, при условии, что

$[\theta]$, где $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \partial h_3, \dots, \partial \theta_{n+1})$, задает погружение $\overline{W}$. Рассмотрим $q \in S$, координатную функцию ζ в R с началом координат в q и для $j \in \{0, \dots, n+1\}$ положим

$$\theta_j = \pi^* \omega_j = \left(\frac{c_q^j}{\zeta} + f_j \circ \zeta \right) d\zeta,$$

где $c_q^j \in \mathbb{C}$ и f_j голоморфна в окрестности 0. Поскольку c – нодальное семейство, $c_q^\ell \neq 0$ для некоторого $\ell \in \{0, 1, 2\}$. Тогда для $j \geq 3$ в окрестности q имеем

$$\frac{\theta_j}{\theta_\ell} = \frac{c_q^j}{c_q^\ell} + \frac{1}{c_q^\ell} \left[f_j(0) - \frac{c_q^j}{c_q^\ell} f_\ell(0) \right] \zeta + O(\zeta) \quad (3.1)$$

и $(\theta_j/\theta_\ell)_{j \geq 3}$ продолжается в q голоморфно с производной $(f_j(0)/c_q^\ell)_{j \geq 3}$. Значит, у $[\theta]$ ранг в точке q равен 1. Лемма 12 доказана.

ЛЕММА 13. *Рассмотрим набор $(\omega_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2} \in K_{3,c}(\Sigma)$, гладкий вблизи $\Sigma \setminus X$, и для $n \geq 2$ рассмотрим*

$$(\omega_j)_{3 \leq j \leq n+1} \in K_{n-1,0}(\Sigma), \quad \theta = (\pi^* \omega_j)_{0 \leq j \leq n+1}.$$

Пусть отображение $[(\theta_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}]$ корректно определено, причем $[\theta]$ – вложение $\overline{W} \setminus S$ и погружение $\overline{W}$, $[\theta](\overline{W} \setminus S) \cap [\theta](S) = \emptyset$ и, кроме того, $S \subset \bigcap_{j \geq 3} \{\theta_j \neq 0\}$. Для $a \in \mathbb{C}^n$ положим $\theta^a = (\theta_0, \theta_1 - a_1 \theta_{n+1}, \dots, \theta_n - a_n \theta_{n+1})$.

Тогда для почти любого a имеет место

$$S \subset \bigcap_{j \geq 3} \{\theta_j^a \neq 0\}, \quad [\theta^a](W_0 \setminus S) \cap [\theta^a](S) = \emptyset,$$

и $[\theta^a]$ – погружение $W_0 \cup S$, являющееся вложением γ , причем для $\delta_a = [\theta^a](\gamma)$ выполнено $([\theta^a]|_{\overline{W}})^{-1}(\delta_a) = \gamma$. Если $n \geq 3$, то $[\theta^a]$ также является вложением $W_0 \setminus S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку c – нодальное семейство, θ^a определено в $p \in S$ и принимает там значение $[c_p^0 : c_p^1 : c_p^2 : 0 : \dots : 0]$, где $c_p^j = \text{Res}(\theta_j, p)$, $0 \leq j \leq n+1$. Если $z \in R \setminus S$ и $\theta_{n+1}(z) = 0$, то θ_a определено в z для любого a . По лемме Морса–Уитни–Сарда мера Лебега $(\frac{\omega_j}{\omega_{n+1}})_{0 \leq j \leq n}(\{\omega_{n+1} \neq 0\})$ равна нулю. Значит, $[\theta^a]$ корректно определено для почти всех $a \in \mathbb{C}^n$.

Положим $\tau = (\theta_j/\theta_0)_{1 \leq j \leq n+1}$ и $\tilde{\tau} = (\tau_j)_{1 \leq j \leq n}$. В W_0 естественные аффинные координаты точек θ и θ^a равны τ и $\tilde{\tau} - \tau_{n+1}a$, где $\tau(p) = (c_p^j/c_p^0)_{1 \leq j \leq n+1}$ при $p \in S_0$. Отображения из [1], [29] для римановых поверхностей выражаются в виде

$$\begin{aligned} T: \mathbb{C} \times W_0 &\rightarrow \mathbb{C}^{n+1}, & (t, z) &\mapsto t(\partial_{\omega_0} \tau)(z), \\ I: \mathbb{C} \times W_0 \times W_0 &\rightarrow \mathbb{C}^{n+1}, & (t, z, z') &\mapsto t[\tau(z) - \tau(z')]. \end{aligned}$$

Отображение $[\theta^a]$ является погружением $W_0^r = W_0 \setminus S$, если и только если $(a, 1) \notin T(\mathbb{C} \times W_0^r)$ и оно инъективно на W_0^r (соответственно на γ), если и только если $(a, 1) \notin I(\mathbb{C} \times W_0^r \times W_0^r)$ (соответственно если $(a, 1) \notin I(\mathbb{C} \times \gamma \times \gamma)$). Как объяснено в [29], по лемме Морса–Уитни–Сарда и в силу однородности первое

и третье свойства выполняются для почти всех $a \in \mathbb{C}^n$, поскольку $n \geq 2$, в то время как второе выполняется для почти всех a при $n \geq 3$.

Выразив функции θ_j через координатную функцию ζ с началом координат в $q \in S$ с помощью обозначений из леммы 12, мы можем применить (3.1), что для $j \in \{0, 1, 2\} \setminus \{\ell\}$ дает

$$\frac{\partial(\theta_j - \theta_{n+1}a_j)/\theta_\ell}{\partial\zeta}(q) = \frac{1}{c_q^\ell} \left(f_j(0) - \frac{c_q^j}{c_q^\ell} f_\ell(0) - f_{n+1}(0)a_j \right).$$

Так как $\omega_{n+1}(q) \neq 0$, отображение $[\theta^a]$ оказывается регулярным в q , если a не лежит на некотором конечном объединении комплексных гиперплоскостей в $\mathbb{C}^n$.

Включение $S \subset \bigcap_{j \geq 3} \{\theta_j^a \neq 0\}$ обеспечивается использованием приема из доказательства леммы 12.

Если образы $z \in W_0^r$ и $p \in S$ относительно θ_a совпадают, то

$$p \in S_0, \quad \tau_{n+1}(p) = 0, \quad \tilde{\tau}(z) - \tau_{n+1}(z)a = \tilde{\tau}(p), \quad \tau_{n+1}(z) \neq 0,$$

поскольку $[\theta](z) \neq [\theta](p)$. Значит,

$$[\theta^a](W_0^r) \cap [\theta^a](S) = \emptyset$$

для $(a, 1) \notin I(\mathbb{C} \times W_0^r \times S)$. Для таких a $([\theta^a]|_{\overline{W}})^{-1}(\delta_a)$ совпадает с $(\theta_a|_{\overline{W_0^r}})^{-1}(\delta_a)$ (поскольку $\gamma \subset W_0$) и равно γ , если и только если $(a, 1) \notin I(\mathbb{C} \times W_0^r \times \gamma)$. Оба условия выполняются для почти всех a , так как $n \geq 2$. Лемма 13 доказана.

ЛЕММА 14. В условиях и обозначениях леммы 13 для почти всех $a \in \mathbb{C}^n$ выполнено следующее утверждение:

$$[\theta^a](\overline{W} \setminus S) \cap [\theta^a](S) = \emptyset, \quad [\theta^a] - \text{погружение } \overline{W}, \text{ являющееся вложением } \gamma.$$

Для $n \geq 3$ $[\theta^a]$ – вложение $\overline{W} \setminus S$, индуцирующее вложение $\overline{X}$ если s – инъективное семейство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $[\theta^a]$ из леммы 13, форму $\alpha \in K(R)$, не обращающуюся в нуль, $g = (\omega_j/\alpha)_{0 \leq j \leq n+1}$ и $\tilde{g} = (g_j)_{0 \leq j \leq n}$.

Пусть образы $z \in \overline{W} \setminus S$ и $q \in S$ относительно θ^a совпадают. Тогда $z, q \in Z_0$ (поскольку $[\theta^a](W_0 \setminus S) \cap [\theta^a](S) = \emptyset$) и

$$\tilde{g}(z) - ag_{n+1}(z) \in \mathbb{C}^* b_q$$

для $b_q = [0 : \text{Res}(\theta_1, q) : \text{Res}(\theta_2, q) : 0 : \dots : 0]$, и в силу этого условия $g_{n+1}(z) \neq 0$, так как $[\theta](z) \neq [\theta](q)$. Значит,

$$[\theta^a](\overline{W} \setminus S) \cap [\theta^a](S) = \emptyset$$

при условии, что a не лежит на объединении аффинных прямых $\frac{\tilde{g}(z)}{g_{n+1}(z)} + \mathbb{C}b_q$, где пара (q, z) пробегает все точки из конечного множества $S \times (\overline{W} \cap Z_0 \cap \{\theta_{n+1} \neq 0\})$.

Если у $[\theta^a]$ ранг в какой-то точке $W \cap Z_0 \setminus S$ не равен 1, то найдутся $j, k \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq k$, для которых

$$[g_j - a_j g_{n+1}]d[g_k - a_k g_{n+1}] - [g_k - a_k g_{n+1}]d[g_j - a_j g_{n+1}] = 0$$

в каких-то точках из $Z_0 \setminus S$, так что $a \in \bigcup_{z \in Z_0} \bigcap_{j \neq k} H_{z,j,k}$, где

$$H_{z,j,k} = \{t \in \mathbb{C}^n; \alpha_{j,k}(z) - t_j \beta_k(z) - t_k \gamma_j(z) = 0\};$$

здесь

$$\begin{aligned} \alpha_{j,k} &= g_j \partial_{\Omega} g_k - g_k \partial_{\Omega} g_j, & \beta_k &= g_{n+1} \partial_{\Omega} g_k - g_k \partial_{\Omega} g_{n+1}, \\ \gamma_j &= g_j \partial_{\Omega} g_{n+1} - g_{n+1} \partial_{\Omega} g_j. \end{aligned}$$

Если $z \in \overline{W} \cap Z_0 \setminus S$ – нуль $(\alpha_{j,k}, \beta_k, \gamma_j)$ для всех $j, k \in \{1, \dots, n\}$ с $j \neq k$, то $(g_j \partial_{\Omega} g_k - g_k \partial_{\Omega} g_j)(z) = 0$ для всех $j, k \in \{1, \dots, n+1\}$ и ранг $[\theta]$ в z равен 0. Но это не так, поэтому $\bigcup_{z \in Z_0} \bigcap_{j \neq k} H_{z,j,k}$ является объединением конечного числа собственных подпространств $\mathbb{C}^n$ и $[\theta^a]$ регулярна на $\overline{W} \setminus S$ почти для всех a .

Если $[\theta^a](z) = [\theta^a](z')$ для $z, z' \in \overline{W} \setminus S$, то $z, z' \in Z_0$ и существует $\lambda \in \mathbb{C}^*$, для которого

$$\tilde{g}(z) - \lambda \tilde{g}(z') = [g_{n+1}(z) - \lambda g_{n+1}(z')]a.$$

Тогда либо $g_{n+1}(z) = \lambda g_{n+1}(z')$, $[\theta](z) = [\theta](z')$, так что $z = z'$, либо $g_{n+1}(z) \neq \lambda g_{n+1}(z')$ и a лежит в образе $I_{z,z'}$ множества $\mathbb{C} \setminus \{g_{n+1}(z)/g_{n+1}(z')\}$ (считаем, что $1/0 = \infty$) относительно

$$H_{z,z'} : \lambda \mapsto [\tilde{g}(z) - \lambda \tilde{g}(z')]/[g_{n+1}(z) - \lambda g_{n+1}(z')].$$

Если пара (z, z') взята из конечного множества $\Lambda = (Z_0 \cap \{g_{n+1} \neq 0\} \setminus S)^2$ и $H_{z,z'}$ непостоянно, то $I_{z,z'}$ – гладкая голоморфная кривая в $\mathbb{C}^n$. Тогда мера Лебега $\bigcup_{(z,z') \in \Lambda} I_{z,z'}$ равна 0. Так что $[\theta^a]$ инъективно на $\overline{W} \setminus S$ почти для всех $a \in \mathbb{C}^n$, если $n \geq 3$. Лемма 14 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Лемма 10 сводит доказательство к случаю, попадающему под условия теоремы 2. В этом редуцированном случае теорема 1 вытекает из теорем 2 и 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сначала мы используем лемму 11 и приблизим начальные данные данными, индуцирующими корректно определенное каноническое отображение $[\omega_0 : \omega_1 : \omega_2]$ в окрестности $\overline{X}$ и имеющими такие же особенности. Затем, отправляясь от $(\theta_{\ell})_{0 \leq \ell \leq 2} = \pi^* \omega$ и используя лемму присоединения 12, получим такие $\theta_3, \dots, \theta_{n+1} \in C_{1,0}^{\infty}(\overline{W})$, что каноническое отображение $\theta = (\theta_{\ell})_{0 \leq \ell \leq n+1}$ почти вкладывает $\overline{W}$ в $\mathbb{CP}_{n+1}$, отделяя при этом S от $\overline{W} \setminus S$. Теперь для $a = ((a_{\nu,\ell})_{0 \leq \ell \leq n-\nu})_{1 \leq \nu \leq n-2}$ из $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n-1} \times \dots \times \mathbb{C}^3$ положим

$$(\theta_{0,\ell})_{1 \leq \ell \leq n+1} = (\theta_{\ell})_{1 \leq \ell \leq n+1},$$

а при $0 \leq \nu \leq n-2$ положим

$$(\theta_{\nu+1,\ell})_{1 \leq \ell \leq n-\nu} = (\theta_{\nu,\ell} - a_{\nu,\ell} \theta_{\nu,n-\nu+1})_{1 \leq \ell \leq n-\nu}.$$

Рассуждая по индукции и применяя леммы 13 и 14, мы видим, что $\sigma = [\theta_0 : \theta_{n-1,1} : \theta_{n-1,2}]$ – погружение $\bar{W}$, задающее вложение γ и удовлетворяющее условию $(\sigma|_{\bar{W}})^{-1}(\sigma(\gamma)) = \gamma$. По построению $\sigma = [\theta_0 : \theta_1 + K_1 : \theta_2 + K_2]$ с $K_\ell = \sum_{j \geq 3} b_{\ell,j} \theta_j$, где каждый коэффициент $b_{\ell,j}$ является универсальным многочленом от координат a . Значит, у σ те же особенности и вычеты, что и у $\pi^* \omega$, так что $\pi_* \sigma$ корректно определено. Вдобавок, $K_\ell|_\gamma$ можно выбрать произвольно малым элементом $C^\infty(\bar{W})$. Кроме того, в обозначениях леммы 11

$$K_\ell = \sum_{j \geq 3} b_{\ell,j} dh_j = dk_\ell, \quad k_\ell = \sum_{j \geq 3} b_{\ell,j} h_j.$$

Поскольку K_ℓ голоморфно, функция $R_\ell = 2 \operatorname{Re} k_\ell$ гармоническая, сколь угодно близка к нулю в $C^\infty(\bar{W})$ и удовлетворяет условию $\partial R_\ell = K_\ell$. Теперь $(V_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2} = (U_\ell + \pi_* R_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}$ – корректно определенное гармоническое распределение с нужными свойствами. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Теорема 4 представляет собой гладкий вариант теоремы 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Если в доказательстве теоремы 1 выше забыть, что возникающие там $(1, 0)$ -формы являются образом гармонического распределения относительно оператора ∂ , то получится доказательство теоремы 5 – строго говоря, для $n = 3$, однако случай $n \geq 4$ разбирается точно так же.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда X – открытая нодальная риманова поверхность с краем, а c – допустимый набор, 4-мерные данные Дирихле–Неймана задаются тройкой $(\gamma, u, \theta u)$, где γ – ориентированный край X , $u = (u_\ell)_{0 \leq \ell \leq 3} \in C^\infty(\gamma)^4$, $\theta u = (\partial \tilde{u}_\ell^{c_\ell}|_\gamma)_{0 \leq \ell \leq 3}$ и $[(\partial \tilde{u}_\ell^{c_\ell})]$ вкладывает $\bar{X}$ в $\mathbb{CP}^3$. В этом случае оказывается, что по ходу доказательства теоремы 4 установлен тот факт, что множество

$$\{u \in C^\infty(\gamma)^4, (\gamma, u, \theta u) \text{ — 4-мерные данные Дирихле–Неймана}\}$$

– открыто и плотно в $C^\infty(\gamma)^4$.

§ 4. Доказательства в компактном случае

Пусть Z – компактная риманова поверхность с кэлеровой формой ω и

$$\int_Z \omega = 1.$$

Пусть $*$ – классический оператор Ходжа на формах, а $\delta = -*d*$ является сопряженным оператором к неограниченному оператору $d: L_{p,q}^2(Z) \rightarrow L_{p,q+1}^2(Z)$, где $L_{r,s}^2(Z)$ – пространство (r, s) -форм с коэффициентами из L^2 . Через $\Delta = \delta d + d\delta$ обозначим оператор Лапласа–Бельтрами, а через G – его функцию Грина, т.е.

такую гладкую вещественную функцию на $Z \times Z$ вне диагонали, что для всякого $z \in Z$ функция $G_z = G(z, \cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta G_z = \delta_z - 1 \quad (4.1)$$

в смысле потоков, где δ_z – мера Дирака. Классические результаты (см., к примеру, [33]) говорят, что G симметрична, $|G(z, \zeta)| = O(\ln \text{dist}(z, \zeta))$ для любого расстояния, задаваемого эрмитовой метрикой на Z , и $z \mapsto \int_Z G_z \omega$ – постоянная функция; поскольку G определена однозначно с точностью до постоянного слагаемого, можно считать, что константа выше равна 0.

Раз Z компактна, гармонические функции на Z постоянны и для $\varphi \in L^2(Z)$ ортогональное разложение Ходжа–де Рама (см. [34], [35] или [33]) имеет вид

$$\varphi = \mathcal{H}\varphi + \Delta \mathcal{G}\varphi = \mathcal{H}\varphi + \mathcal{G}\Delta\varphi \quad (4.2)$$

где $\mathcal{H}\varphi = \int_Z \varphi \omega$, а $\mathcal{G}\varphi$ – это функция $Z \ni z \mapsto \int_Z \varphi G_z \omega$.

ЛЕММА 15. Пусть z – точка Z , а w – координатная функция на Z с началом координат в z . Тогда $G_z - \frac{1}{\pi} \ln |w|$ гладко продолжается в окрестность z и вычет G_z в z , т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\varepsilon} \partial G_z,$$

равен 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это тривиальное следствие эллиптичности Δ и равенства $\Delta(G_z - \frac{1}{\pi} \ln |w|) = -1$ в окрестности z . Лемма доказана.

Нам также потребуется следующая лемма, представляющая собой небольшую адаптацию классических результатов (см. [36]) по $L_m^p(Z \setminus S)$ с $(p, m) \in [1, \infty] \times \mathbb{N}$, пространству Соболева распределения на $Z \setminus \bar{S}$ с полными дифференциалами порядков до m включительно лежат в $L^p(Z \setminus S)$, где предполагается, что на Z введена некоторая эрмитова метрика.

ЛЕММА 16. Пусть S – открытое подмножество Z с гладкой границей. Тогда существует оператор продолжения $E: C^\infty(Z \setminus S) \rightarrow C^\infty(Z)$, непрерывно действующий из $L_m^p(Z \setminus S)$ в $L_m^p(Z)$ для всякого $(p, m) \in [1, \infty] \times \mathbb{N}$, отображающий $C^\infty(Z \setminus S, \mathbb{R})$ в $C^\infty(Z \setminus S, \mathbb{R})$ и удовлетворяющий равенству $\mathcal{H} \circ E = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя [36], получим оператор продолжения E_0 , отображающий (вещественные) функции на $Z \setminus S$ в (вещественные) функции на Z и непрерывно действующий из $L_m^p(Z \setminus \bar{S})$ в $L_m^p(Z \setminus \bar{S})$ для любых $(p, m) \in [1, \infty] \times \mathbb{N}$. Выберем открытые подмножества U_1, V_1 в Z и такие функции $\chi_1, \chi_2 \in C^\infty(Z, [0, 1])$, что

$$Z \setminus S \subset \text{Supp } \chi_1 \subset U_1 \subset \subset V_1, \quad \chi_1|_{U_1} = 1, \quad \text{Supp } \chi_2 \subset V_1 \setminus \overline{U_1}, \quad \int_Z \chi_2 \omega = 1.$$

Тогда оператор продолжения E , определенный по формуле

$$\forall f \in C^\infty(Z \setminus S) \quad Ef = \chi_1 E_0 f - \chi_2 \int_Z (E_0 f) \chi_1 \omega$$

с теми же самыми свойствами непрерывности что и E_0 , для $f \in C^\infty(Z \setminus S)$ имеем

$$\mathcal{H}(E\varphi) = \int_Z \chi_1 E_0 f \omega - \left(\int_Z \chi_2 \omega \right) \int_Z (E_0 f) \omega = 0.$$

Лемма доказана.

Докажем теперь теоремы 7 и 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Лемма 9 позволяет свести доказательство для функций, являющихся ограничениями $Z \setminus S$ гармонических функций на $Z \setminus \overline{S'}$, где S' – относительно компактное открытое подмножество S с границей. Пусть $\varphi: Z \rightarrow \mathbb{R}$ гармоническая в $Z \setminus S$, и пусть $\tilde{\varphi} = E\varphi$, где $E: C^\infty(Z \setminus S') \rightarrow C^\infty(Z)$ – оператор продолжения из леммы 16. Рассмотрим семейство $(S'_\nu)_{1 \leq \nu \leq N}$ таких попарно непересекающихся открытых конформных кругов диаметра не больше $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, что $\overline{S'} = \bigcup_{1 \leq \nu \leq N} \overline{S'_\nu}$. По теореме о среднем для всякого ν можно найти $\zeta_\nu \in S'_\nu$, для которого

$$\int_{S'_\nu} (\Delta \tilde{\varphi}) \omega = I_\nu m_\nu,$$

где $I_\nu = \int_{S'_\nu} \omega$ и $m_\nu = (\Delta \tilde{\varphi})(\zeta_\nu)$. Положим $P_\varepsilon = \{\zeta_\nu, 1 \leq \nu \leq n\}$ и $Z_\varepsilon = Z \setminus P_\varepsilon$. Функция φ_ε , определенная на Z_ε формулой

$$\varphi_\varepsilon(z) = \sum_\nu I_\nu m_\nu G(\zeta_\nu, z),$$

вещественно-аналитическая на Z_ε и принимает вещественные значения, если φ – вещественная и в соответствии с (4.1) и выбором (ζ_ν) удовлетворяет равенству

$$\Delta \varphi_\varepsilon = \sum_\nu I_\nu m_\nu (\delta_{\zeta_\nu} - 1) = \sum_\nu I_\nu m_\nu \delta_{\zeta_\nu} - \int_{S_\nu} (\Delta \tilde{\varphi}) \omega.$$

Поскольку¹ $(\Delta \tilde{\varphi}) \omega = d^c d \tilde{\varphi}$, по формуле Стокса

$$\int_{S'} (\Delta \tilde{\varphi}) \omega = - \int_{Z \setminus S'} d^c d \tilde{\varphi} = 0$$

и φ_ε оказывается гармонической на Z_ε . В ζ_ν у φ_ε такая же особенность, как у G_{ζ_ν} в ζ_ν , т.е. изолированная логарифмическая. Вдобавок,

$$\sum_\nu |\text{Res}(\partial \varphi_\varepsilon, \zeta_\nu)| \leq \sum_\nu \int_{S'_\nu} |\Delta \tilde{\varphi}| \omega \leq Cte \|\tilde{\varphi}\|_{L_2^1(S')} \leq Cte \|\varphi\|_{L_2^1(Z \setminus S)}.$$

¹Зафиксируем z в Z и геодезическую координату w с началом координат в z . Тогда $\omega = i dw \wedge d\bar{w} + O(|w|^2)$. Пусть f есть C^2 -функция в окрестности z . Поскольку $*$ действует умножениями на $-i$ (соответственно на i) на формах бистепени $(1, 0)$ (соответственно $(0, 1)$) и поскольку $*\omega = 1$, получаем $*df = -i \frac{\partial f}{\partial w} dw + i \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} d\bar{w}$ и $\delta df = -*d*df = -2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{w} \partial w} + O(|w|^2)$. С другой стороны, $dd^c f = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial \bar{w}} i dw \wedge d\bar{w}$. Вычисления в точке z дают $(dd^c f)_z = -(\Delta f)(z) \omega_z$.

Остается оценить погрешность, с которой φ_ε приближает φ . Поскольку $\mathcal{H} \circ E = 0$, по тождеству Ходжа 4.2 получим $\tilde{\varphi} = \mathcal{G}\Delta\tilde{\varphi}$. Так как $\tilde{\varphi} = \varphi -$ гармоническая функция в $Z \setminus S'$ в силу симметрии G , для всякой точки z в $Z \setminus S'$ имеем

$$\varphi(z) - \varphi_\varepsilon(z) = \int_{S'} (\Delta\tilde{\varphi})G_z\omega - \sum_\nu \int_{S'_\nu} (\Delta\tilde{\varphi})G(\zeta_\nu, z)\omega = \sum_\nu I_\nu(z),$$

где

$$I_\nu(z) = \int_{\zeta \in S'_\nu} (\Delta\tilde{\varphi})(\zeta)[G_z(\zeta) - G_z(\zeta_\nu)]\omega(\zeta).$$

А поскольку $Z \setminus S$ – компактное подмножество $Z \setminus \overline{S'}$ и диаметры S'_ν не превосходят ε , получаем

$$\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{0, Z \setminus S} \leq Cte\varepsilon\|G\|_{1, (Z \setminus S) \times \overline{S'}} \sum_\nu \int_{S'_\nu} |\Delta\tilde{\varphi}|\omega \leq Cte\varepsilon \leq C_0\|\varphi\|_{L^1_2(Z \setminus S)} \quad (4.3)$$

с C_0 , зависящим только от (S, S') , где $\|G\|_{1, (Z \setminus S) \times \overline{S'}}$ – равномерная норма на $(Z \setminus S) \times \overline{S'}$ функции G и ее полного дифференциала по второму аргументу. В силу гармоничности φ и φ_ε в $Z \setminus S'$ из (4.3) следует, что для каждого m существует такое $C_m \in \mathbb{R}_+$, зависящее только от (S, S') , что

$$\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{m, Z \setminus S} \leq C_m\varepsilon\|\varphi\|_{L^1_2(Z \setminus S)}.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Предположим без ограничения общности, что у S гладкая граница, так что можно рассматривать ориентированную границу γ множества $Z \setminus S$; положим $u = (U_{Z, \ell}^{a, c}|_\gamma)_{0 \leq \ell \leq 2}$ и $\theta u = ((\partial U_{Z, \ell}^{a, c})|_\gamma)_{0 \leq \ell \leq 2}$. С помощью теоремы 1 найдем в $C^\infty(Z \setminus S)^3$ тройку (V_ℓ^1) таких гармонических функций на $Z \setminus S$, что (V_ℓ^1) достаточно близка к $(U_{Z, \ell}^{a, c})$ в $C^\infty(Z \setminus S)^3$ и каноническое отображение Φ , ассоциированное с (V_ℓ^1) является почти вложением $Z \setminus S$ в $\mathbb{CP}_2$. Последнее, в частности, означает, что Φ вкладывает γ в $\mathbb{CP}_2$ и для $\delta = \Phi(\gamma)$ выполнено $\Phi^{-1}(\delta) = \gamma$. Так как $(U_{Z, \ell}^{a, c})$ – гладкая в окрестности $Z \setminus S$, мы на самом деле оказались в ситуации теоремы 2, из доказательства которой следует, что $(V_\ell^1 - U_{Z, \ell}^{a, c}) = (\text{Re } H_\ell)$, где (H_ℓ) – тройка голоморфных функций в окрестности $Z \setminus S$.

Пусть теперь $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Применяя теорему 7, для всякого $\ell \in \{0, 1, 2\}$ найдем вещественную функцию R_ℓ , гармоническую вне конечного подмножества P_ℓ множества S , имеющую всего лишь логарифмические особенности в точках P_ℓ , чье ограничение на $Z \setminus S$ достаточно близко к $\text{Re } H_\ell$ в $C^\infty(Z \setminus S)$ и удовлетворяет условию

$$|\varkappa|_1 \leq C\|\text{Re } H_\ell\|_{L^1_2(Z \setminus S)}, \quad (4.4)$$

где C – постоянная, а $\varkappa = (\varkappa_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}$, где $\varkappa_\ell$ обозначает семейство вычетов R_ℓ в точках из P_ℓ , $0 \leq \ell \leq 2$. По построению $(V_\ell) = (U_{Z, \ell}^{a, c} + R_\ell)$ отличается от $U_{Z, \ell}^{a, c, p, \varkappa}$ всего лишь на постоянное слагаемое, достаточно близка к (V_ℓ^1)

в $C^\infty(Z \setminus S)^3$, и в силу (4.4) $|\varkappa|_1 \leq \varepsilon$ при условии, что (H_ℓ) достаточно мало в $C^\infty(Z \setminus S)^3$.

Для (V_ℓ) достаточно близких к (V_ℓ^1) , (∂V_ℓ) индуцирует каноническое отображение Ψ из $Z \setminus S$ в $\mathbb{CP}_2$, являющееся погружением и вкладывающее γ в $\mathbb{CP}_2$. Поскольку Φ – почти вложение, у кривых γ и δ можно найти открытые окрестности Γ и Δ с гладкими границами в X и $Y = \Phi(X)$ соответственно, для которых $\Phi|_{\overline{\Gamma}}$ – диффеоморфизм. Положим $\Psi(X) = Y'$, $\Psi(\overline{\Gamma}) = \Delta'$, $\delta' = \Psi(\delta)$. Рассмотрим эрмитову метрику на $\mathbb{CP}_2$ и обозначим через h расстояние по Хаусдорфу между подмножествами Z , вычисляемое по этой метрике. Если (V_ℓ) достаточно близко к (V_ℓ^1) , то $\Psi|_{\overline{\Gamma}}$ – также диффеоморфизм, и можно добиться, чтобы $h(Y \setminus \Delta, Y' \setminus \Delta') + h(\delta, \delta')$ было сколь угодно малым и, в частности, меньше, чем $\text{dist}(Y \setminus \Delta, \delta)$ (это положительная величина, так как $\Phi^{-1}(\delta) = \gamma$). Тем самым невозможно, чтобы $\Phi^{-1}(\delta') \cap \Delta' \neq \emptyset$. Значит, $\Phi^{-1}(\delta') = \gamma'$ и, применяя теорему 3, можно сделать вывод, что Ψ – почти вложение $Z \setminus S$. Итак, $(a, c, p, \varkappa) \in E_{Z,n}(S)$, где $n = \max_{0 \leq \ell \leq 2} \text{Card } p_\ell$. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] E. Bishop, “Mappings of partially analytic spaces”, *Amer. J. Math.*, **83**:2 (1961), 209–242.
- [2] R. Narasimhan, “Imbedding of holomorphically complete complex spaces”, *Amer. J. Math.*, **82**:4 (1960), 917–934.
- [3] G. Henkin, V. Michel, “On the explicit reconstruction of a Riemann surface from its Dirichlet–Neumann operator”, *Geom. Funct. Anal.*, **17**:1 (2007), 116–155.
- [4] Г. Хенкин, В. Мишель, “Обратная задача Дирихле–Неймана для нодальных кривых”, *УМН*, **67**:6(408) (2012), 101–124; англ. пер.: G. Henkin, V. Michel, “Inverse Dirichlet-to-Neumann problem for nodal curves”, *Russian Math. Surveys*, **67**:6 (2012), 1069–1089.
- [5] W. Koppelman, “The Riemann–Hilbert problem for finite Riemann surfaces”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **12**:1 (1959), 13–35.
- [6] Sh. Kaliman, M. Zaidenberg, “A transversality theorem for holomorphic mappings and stability of Eisenman–Kobayashi measures”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348**:2 (1996), 661–672.
- [7] F. Forstnerič, *Stein manifolds and holomorphic mappings. The homotopy principle in complex analysis*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **56**, Springer, Heidelberg, 2011, xii+489 pp.
- [8] B. Drinovec-Drnovšek, F. Forstnerič, “Approximation of holomorphic mappings on strongly pseudoconvex domains”, *Forum Math.*, **20**:5 (2008), 817–840.
- [9] A. M. Garsia, “An imbedding of closed Riemann surfaces in Euclidean space”, *Comment. Math. Helv.*, **35** (1961), 93–110.
- [10] R. A. Rüedy, “Embeddings of open Riemann surfaces”, *Comment. Math. Helv.*, **46** (1971), 214–225.
- [11] C. Guillarmou, L. Tzou, “Survey on Calderon inverse problem in 2 dimensions”, *Inverse problems and applications: inside out. II*, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, **60**, ed. G. Uhlmann, MSRI, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013, 119–166; 2011, 37 pp., www.math.ens.fr/~guillarmou/procMSRI.pdf.
- [12] H. Stahl, “The convergence of Padé approximants to functions with branch points”, *J. Approx. Theory*, **91**:2 (1997), 139–204.

- [13] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде–Чебышева для многозначных аналитических функций, вариация равновесной энергии и S -свойство стационарных компактов”, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 3–36; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, “Padé–Chebyshev approximants for multivalued analytic functions, variation of equilibrium energy, and the S -property of stationary compact sets”, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1015–1048.
- [14] Т. Bagby, “A Runge theorem for harmonic functions on closed subsets of Riemann surfaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **103**:1 (1988), 160–164.
- [15] А. Boivin, P. M. Gauthier, “Approximation harmonique sur les surfaces de Riemann”, *Canad. J. Math.*, **36**:1 (1984), 1–8.
- [16] М. Rosenlicht, “Generalized Jacobian varieties”, *Ann. of Math.* (2), **59**:3 (1954), 505–530.
- [17] Дж. Харрис, Я. Моррисон, *Модули кривых*, Мир, М., 2004, 448 с.; пер. с англ.: J. Harris, I. Morrison, *Moduli of curves*, Grad. Texts in Math., **187**, Springer-Verlag, New York, 1998, xiv+366 pp.
- [18] P. Dolbeault, G. Henkin, “Chaînes holomorphes de bord donné dans $\mathbb{CP}^n$ ”, *Bull. Soc. Math. France*, **125**:3 (1997), 383–445.
- [19] F. R. Harvey, H. B. Lawson, Jr., “Boundaries of varieties in projective manifolds”, *J. Geom. Anal.*, **14**:4 (2004), 673–695.
- [20] R. A. Walker, “Extended shockwave decomposability related to boundaries of holomorphic 1-chains within $\mathbb{CP}^2$ ”, *Indiana Univ. Math. J.*, **57**:3 (2008), 1133–1172.
- [21] К.-W. Wiegmann, “Einbettungen komplexer Räume in Zahlenräume”, *Invent. Math.*, **1**:3 (1966), 229–242.
- [22] J. Schürmann, “Embeddings of Stein spaces into affine spaces of minimal dimension”, *Math. Ann.*, **307**:3 (1997), 381–399.
- [23] Н. Behnke, К. Stein, “Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen”, *Math. Ann.*, **120**:1 (1949), 430–461.
- [24] О. Форстер, *Римановы поверхности*, Мир, М., 1980, 248 с.; пер. с англ.: O. Forster, *Riemannsche Flächen*, Heidelberger Taschenbücher, **184**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977, x+223 pp.
- [25] R. Remmert, *Classical topics in complex function theory*, Transl. from German, Grad. Texts in Math., **172**, Springer-Verlag, New York, 1998, xx+349 pp.
- [26] R. Remmert, “Projektionen analytischer Mengen”, *Math. Ann.*, **130**:5 (1956), 410–441.
- [27] E. Bishop, “Subalgebras of functions on a Riemann surface”, *Pacific J. Math.*, **8**:1 (1958), 29–50.
- [28] Г. М. Хенкин, “Уравнение Г. Леви и анализ на псевдовыпуклом многообразии. II”, *Матем. сб.*, **102**(144):1 (1977), 71–108; англ. пер.: G. M. Henkin, “H. Lewy’s equation and analysis on a pseudoconvex manifold. II”, *Math. USSR-Sb.*, **31**:1 (1977), 63–94.
- [29] Л. Хермандер, *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, Мир, М., 1968, 279 с.; пер. с англ.: L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, 3rd ed., North-Holland Math. Library, **7**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990, xii+254 pp.
- [30] М. Morse, G. B. Van Schaack, “The critical point theory under general boundary conditions”, *Ann. of Math.* (2), **35**:3 (1934), 545–571.
- [31] Н. Whitney, “Differentiable manifolds”, *Ann. of Math.* (2), **37**:3 (1936), 645–680.
- [32] A. Sard, “The measure of the critical values of differentiable maps”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48**:12 (1942), 883–890.
- [33] Т. Aubin, *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 1998, xviii+395 pp.

- [34] G. de Rham, *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques*, 3-ème éd., rev. et augm., Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, **III**, Actualites Sci. Indust., no. 1222b, Hermann, Paris, 1973, x+198 pp.
- [35] W. V. D. Hodge, *The theory and applications of harmonic integrals*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952, x+282 pp.
- [36] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973, 342 с.; пер. с англ.: E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970, xiv+290 pp.

Венсан Мишель

(Vincent Michel)

Universite Pierre & Marie Curie, Paris VI, France

E-mail: michel@math.jussieu.fr

Поступила в редакцию

22.11.2013 и 09.07.2014

Геннадий Маркович Хенкин

(Gennadi M. Henkin)

Universite Pierre & Marie Curie, Paris VI, France;

Центральный экономико-математический

институт РАН, г. Москва

E-mail: guennadi.henkin@imj-prg.fr