Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, Круговая симметризация конденсаторов на римановых поверхностях, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 1, 69–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8309>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 06:08:45

УДК 517.54

В. Н. Дубинин

Круговая симметризация конденсаторов на римановых поверхностях

Дается упрощенное определение новой версии круговой симметризации, предложенной ранее автором для решения экстремальных задач геометрической теории функций. Приводится доказательство принципа симметризации для емкостей конденсаторов, расположенных на римановых поверхностях. Более того, расширяется класс рассматриваемых ранее конденсаторов и устанавливаются все случаи равенства в принципе симметризации.

Библиография: 22 названия.

Ключевые слова: круговая симметризация, емкость конденсатора, риманова поверхность, полином Чебышёва.

DOI: 10.4213/sm8309

§ 1. Введение и основные определения

Хорошо известны приложения метода симметризации в геометрической теории функций (см., например, [1], [2], а также [3]). В работе [4] предложена новая версия круговой симметризации, отличающаяся от классической симметризации Поля (см. [5]) тем, что симметризованные множества и конденсаторы расположены на римановой поверхности функции, обратной полиному Чебышёва первого рода $T_p(z) = 2^{p-1}z^p + \dots$. Вскоре появились интересные приложения симметризации (см. [4]) в теории многолистных функций, особенно в тех случаях, когда применение существующих методов исследования затруднительно (см. [4], [6]–[10]). В связи с этим автору предлагалось сделать статью [4] доступной для более широкого круга читателей. В настоящей работе частично решается поставленная задача. В § 1 дается прямое определение симметризации конденсаторов в отличие от [4], где симметризация конденсаторов определялась через симметризацию (симметричную перестановку) функций (см. замечание 4.1). В § 2 собраны простейшие свойства емкостей плоских конденсаторов, которые можно распространить на случай рассматриваемых в статье римановых поверхностей. В § 3 приводятся свойства кругосимметричных перестановок вещественнозначных функций. Доказательство принципа симметризации (теорема 1.1) дано в § 4, причем для более широкого, чем в [4], класса конденсаторов и с исследованием всех случаев равенства.

Всюду ниже под римановой поверхностью понимается поверхность $\mathcal{R}$, склеенная из конечного или счетного числа областей замкнутой комплексной плоскости таким образом, чтобы выполнялись условия: проекция каждой точки

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта № 14-11-00022).

поверхности $\mathcal{R}$ совпадает с точкой склеиваемой области; окрестность каждой точки $\mathcal{R}$ представляет собой или однолистный круг, или конечнолистный круг¹ с единственной точкой разветвления в его центре (подробнее см. [11; ч. 3]). В том случае, когда это не вызовет недоразумений, мы не будем различать плоские области до склеивания (отождествления некоторых частей границ этих областей) и после склеивания (когда они являются уже подобластями поверхности $\mathcal{R}$). Граничные точки склеиваемых областей, не задействованные в склеивании, порождают граничные точки поверхности $\mathcal{R}$. Совокупность граничных точек обозначим через $\partial\mathcal{R}$. Точки $W \in \partial\mathcal{R}$ можно рассматривать как граничные точки множества $\mathcal{R}$, расположенного на поверхности $\tilde{\mathcal{R}} \supset \mathcal{R}$, которая получена склеиванием подходящих расширений областей, образующих $\mathcal{R}$. Операция проектирования $W \rightarrow \text{pr } W = w$ индуцирует на поверхности $\mathcal{R}$ (евклидову) метрику $|dw|$, что позволяет говорить о длине кривой на $\mathcal{R}$. Пусть $\gamma(\rho) = \{w : |w| = \rho\}$, $0 \leq \rho \leq \infty$.

Обозначим через $\mathfrak{R}_p$, $p \geq 1$, совокупность всех римановых поверхностей $\mathcal{R}$, лежащих над комплексной w -сферой и удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) линейная мера всех дуг на поверхности $\mathcal{R}$, лежащих над любой окружностью $\gamma(\rho)$, с учетом кратности не превосходит $2\pi\rho p$, $0 < \rho < \infty$;
- 2) для всех ρ , $1 \leq \rho < \infty$, любая замкнутая жорданова кривая на поверхности $\mathcal{R}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$ и не проходящая через точки разветвления $\mathcal{R}$, p -кратно покрывает эту окружность.

Несколько замечаний к определению класса $\mathfrak{R}_p$. Если на поверхности $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}_p$ имеется точка, лежащая над бесконечностью, то ввиду 2) эта точка необходимо является точкой разветвления p -го порядка. В силу 1) поверхность $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}_p$ не может покрывать точку $w = 0$ более чем p -кратно. При $p = 1$ условие 2) в определении класса $\mathfrak{R}_p$ излишне. Далее, любая область $\mathcal{R}$ комплексной w -сферы принадлежит классу $\mathfrak{R}_1$. Класс $\mathfrak{R}_1$ содержит классы $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, введенные Дж. Дженкинсом в связи с приложениями симметризации к многолистным функциям (см. [1; § 8.5]). В работе [4] рассмотрен подкласс класса $\mathfrak{R}_p$, состоящий из поверхностей $\mathcal{R}$, покрывающих каждую точку w не более, чем p раз и удовлетворяющих условию 2) для любых кривых, лежащих над окружностями $\gamma(\rho)$, $\rho > 1$ (условие (A)). Важным для нас частным случаем поверхности класса $\mathfrak{R}_p$ является риманова поверхность $\mathcal{R}(T_p)$ функции, обратной полиному Чебышёва $T_p(z)$. Приведем описание этой поверхности в случае $p \geq 2$. Напомним, что в терминах конформных отображений полином $T_p(z)$ можно определить как суперпозицию обратной функции Жуковского, степенной функции и функции Жуковского:

$$T_p(z) = \frac{1}{2}((z + \sqrt{z^2 - 1})^p + (z - \sqrt{z^2 - 1})^p), \quad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Гиперболы с фокусами в точках $z = \pm 1$, проходящие через критические точки полинома Чебышёва $z = \cos(k\pi/p)$, $k = 1, \dots, p-1$, разбивают z -плоскость на p попарно не пересекающихся областей. Обозначим эти области, пронумерованные справа налево, как $B_1, \dots, B_p$. Полином T_p отображает область B_1

¹Под конечнолистным, точнее m -листным, кругом $m > 1$ понимается часть римановой поверхности корня m -й степени, расположенная над плоским кругом с центром в проекции точки разветвления (m -го порядка).

конформно и однолистно на область D_1 – w -плоскость с разрезом по лучу $L^- := [-\infty, -1]$. Области $B_2, \dots, B_{p-1}$ отображаются этим полиномом на области $D_2, \dots, D_{p-1}$ – w -плоскости с разрезами вдоль лучей L^- и $L^+ := [1, +\infty]$. Наконец, область B_p отображается на область D_p – w -плоскость с разрезом по лучу L^- в случае четного p и по лучу L^+ в случае, когда p нечетное. Риманову поверхность $\mathcal{R}(T_p)$ можно получить склеиванием областей D_k , $k = 1, \dots, p$, следующим образом. Область D_1 склеивается крест на крест с областью D_2 по берегам разрезов вдоль луча L^- . Область D_2 склеивается с областью D_3 по берегам разрезов вдоль луча L^+ и т.д. Область D_{p-1} склеивается с областью D_p по берегам разрезов вдоль луча L^- в случае четного p и вдоль луча L^+ в случае, когда p нечетное. Склеиваемые области D_k , рассматриваемые как подмножества поверхности $\mathcal{R}(T_p)$, будем обозначать буквами $\mathcal{D}_k$ соответственно, $k = 1, \dots, p$. Обозначим через $\mathcal{L}$ луч, лежащий на листе $\mathcal{D}_1$ над лучом $[0, +\infty]$ (в случае $p = 1$ через $\mathcal{L}$ будем обозначать вещественную неотрицательную полуось).

Рассмотрим теперь произвольную поверхность $\mathcal{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$, $p \geq 1$. Введенная в [4] круговая симметризация конденсаторов приводит нас к следующему определению симметризации открытых и замкнутых множеств на поверхности $\mathcal{R}$. Пусть $\mathcal{B}$ – открытое множество на $\mathcal{R}$. Симметризация Sym преобразует множество $\mathcal{B}$ в множество $\text{Sym } \mathcal{B}$, лежащее на поверхности $\mathcal{R}(T_p)$ и обладающее следующими свойствами. Если при данном ρ , $0 \leq \rho \leq \infty$, над окружностью $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathcal{B}$, то над ней нет также и точек множества $\text{Sym } \mathcal{B}$. Если множество $\mathcal{B}$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$, $1 \leq \rho \leq \infty$, p -кратно, то множество $\text{Sym } \mathcal{B}$ также покрывает $\gamma(\rho)$ p -кратно. Если $\mathcal{B}$ покрывает $\gamma(\rho)$, $0 \leq \rho < 1$, l -кратно, $l \leq p$, то часть множества $\text{Sym } \mathcal{B}$, лежащая над $\gamma(\rho)$, состоит из l окружностей на листах $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_l$. В остальных случаях при $1 \leq \rho < \infty$ часть множества $\text{Sym } \mathcal{B}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, является открытой дугой² на $\mathcal{R}(T_p)$ с центром на луче $\mathcal{L}$ и линейной меры, равной мере множества $\mathcal{B}(\rho) := \{W \in \mathcal{B} : |\text{pr } W| = \rho\}$. При $0 < \rho < 1$ часть $\text{Sym } \mathcal{B}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, представляет собой совокупность из m окружностей $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ и открытой дуги Γ_{m+1} , $\Gamma_k = \Gamma_k(\mathcal{B}, \rho) \subset \mathcal{D}_k$, $k = 1, \dots, m+1$, $0 \leq m \leq p-1$, суммарная линейная мера которых равна мере множества $\mathcal{B}(\rho)$, а центр дуги Γ_{m+1} расположен над точкой $(-1)^m \rho$. Здесь количество окружностей m зависит от меры множества $\mathcal{B}(\rho)$. Если указанная мера меньше $2\pi\rho$, то необходимо $m = 0$ и множество окружностей пусто. Результат симметризации $\text{Sym } \mathcal{E}$ замкнутого множества $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}$ также лежит на поверхности $\mathcal{R}(T_p)$ и определяется следующим образом. Если при данном ρ , $0 \leq \rho \leq \infty$, над окружностью $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathcal{E}$, то над ней нет также и точек множества $\text{Sym } \mathcal{E}$. Если множество $\mathcal{E}$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$, $1 \leq \rho \leq \infty$, p -кратно, то множество $\text{Sym } \mathcal{E}$ покрывает $\gamma(\rho)$ также p -кратно. Если $\mathcal{E}$ покрывает $\gamma(\rho)$, $0 \leq \rho < 1$, l -кратно, $l \leq p$, то часть множества $\text{Sym } \mathcal{E}$, лежащая над $\gamma(\rho)$, состоит из l окружностей на листах $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_l$. В остальных случаях часть множества $\text{Sym } \mathcal{E}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, $1 \leq \rho < \infty$, является замкнутой дугой (т.е. дугой, содержащей свои концы) на $\mathcal{R}(T_p)$ с центром на луче $\mathcal{L}$ и линейной меры, равной мере множества $\mathcal{E}(\rho) := \{W \in \mathcal{E} : |\text{pr } W| = \rho\}$ (в случае,

²В случае $\rho > 1$ это открытая жорданова дуга, а при $\rho = 1$ данная дуга может иметь точки самоприкасания.

когда данная мера равна нулю, соответствующая дуга является точкой на луче $\mathcal{L}$). Часть $\text{Sym } \mathcal{E}$ над $\gamma(\rho)$, $0 < \rho < 1$, представляет собой совокупность из m окружностей $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ и замкнутой дуги Γ_{m+1} , $\Gamma_k \subset \mathcal{D}_k$, $k = 1, \dots, m+1$, $0 \leq m \leq p-1$, суммарная линейная мера которых равна мере множества $\mathcal{E}(\rho)$, а центр дуги Γ_{m+1} расположен над точкой $(-1)^m \rho$ (если указанная мера равна $2\pi \rho m$, где m – целое неотрицательное число, то дуга Γ_{m+1} является точкой).

При $p = 1$ имеем $\mathcal{R}(T_p) = \overline{\mathcal{T}}_w$, и симметризация Sym совпадает с обобщением круговой симметризации Полия (см. [5]), рассмотренной Дж. Дженкинсом в [1]. Непосредственно из определения симметризации видно, что если $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$, то $\text{Sym } \mathcal{E} \subset \text{Sym } \mathcal{B}$. В § 4 будет показано, что результат симметризации открытого множества $\text{Sym } \mathcal{B}$ есть множество, открытое в $\mathcal{R}(T_p)$, и если $\mathcal{E}$ – компакт в $\mathcal{R}$, то $\text{Sym } \mathcal{E}$ является компактом в $\mathcal{R}(T_p)$ (леммы 4.2 и 4.3). Это позволяет определить симметризацию конденсаторов. *Конденсатором на поверхности $\mathcal{R}$* называют упорядоченную пару³ множеств $\mathcal{C} = (\mathcal{B}, \mathcal{E})$, где $\mathcal{B}$ – открытое подмножество $\mathcal{R}$, а $\mathcal{E}$ – компакт в $\mathcal{B}$. Множество $\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}$ назовем *полем конденсатора $\mathcal{C}$* . Положим

$$\text{Sym } \mathcal{C} = (\text{Sym } \mathcal{B}, \text{Sym } \mathcal{E}).$$

Емкость $\text{cap } \mathcal{C}$ конденсатора $\mathcal{C} = (\mathcal{B}, \mathcal{E})$ определяется равенством

$$\text{cap } \mathcal{C} = \inf \int_{\mathcal{B}} |\nabla \mathcal{V}|^2 d\sigma,$$

где нижняя грань берется по всем *допустимым* функциям $\mathcal{V}$, т.е. вещественнозначным функциям $\mathcal{V}$, финитным в $\mathcal{B}$, равным единице на $\mathcal{E}$ и удовлетворяющим условию Липшица локально в $\mathcal{B}$. Последнее означает, что для любой точки множества $\mathcal{B}$ существуют окрестность и положительное число L такие, что для любой пары точек W и W' из этой окрестности выполняется неравенство

$$|\mathcal{V}(W) - \mathcal{V}(W')| \leq L |\text{pr } W - \text{pr } W'|.$$

Если существует функция $\mathcal{P}$, непрерывная в $\overline{\mathcal{B}}$, равная нулю на $\partial \mathcal{B}$, единице на $\mathcal{E}$ и гармоничная в поле $\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}$, то ее называют *потенциальной функцией* конденсатора $\mathcal{C}$. Из принципа Дирихле (см. [2], [11], [12]) следует, что в этом случае

$$\text{cap } \mathcal{C} = \int_{\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}} |\nabla \mathcal{P}|^2 d\sigma.$$

Пусть область $\mathcal{G}$ принадлежит поверхности $\mathcal{R}$, а область $\tilde{\mathcal{G}}$ – поверхности $\tilde{\mathcal{R}}$. Биективное отображение $\Phi: \mathcal{G} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}$ называется *движением*, если при этом отображении сохраняется расстояние, т.е. для любых двух точек $W, W' \in \mathcal{G}$ выполняется равенство

$$d_{\mathcal{G}}(W, W') = d_{\tilde{\mathcal{G}}}(\Phi(W), \Phi(W')),$$

где $d_{\mathcal{G}}(W, W')$ – расстояние между точками W и W' по области $\mathcal{G}$ (см. § 2).

³Здесь используется иная, чем в [4], форма записи конденсатора $\mathcal{C}$, более удобная для определения симметризации Sym .

Вращением (поворотом) области $\mathcal{G}$ на $\tilde{\mathcal{G}}$ на угол θ вокруг начала координат назовем движение $\Phi_\theta: \mathcal{G} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}$, при котором для любых $W \in \mathcal{G}$ выполняется

$$\operatorname{pr} \Phi_\theta(W) = e^{i\theta} \operatorname{pr} W,$$

где θ – вещественное число.

Основным результатом настоящей статьи является

ТЕОРЕМА 1.1 (ср. [4; теорема 1]). *Для любого конденсатора $\mathcal{C}$ на поверхности $\mathcal{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{cap} \mathcal{C} \geq \operatorname{cap} \operatorname{Sym} \mathcal{C}. \quad (1.1)$$

Если дополнительно поле конденсатора $\mathcal{C} = (\mathcal{B}, \mathcal{E})$ связное и существует потенциальная функция этого конденсатора, то равенство в (1.1) достигается только в следующих случаях:

- (i) поле конденсатора $\mathcal{C}$ совпадает с полем конденсатора $\operatorname{Sym} \mathcal{C}$ с точностью до поворота вокруг начала координат;
- (ii) при некоторых s, t и l , $0 < s < t < \infty$, $1 < l \leq p$, поле конденсатора $\mathcal{C}$ l -кратно покрывает круговое кольцо⁴ $s < |w| < t$ так, что над каждой граничной окружностью этого кольца расположены либо только граничные точки множества $\mathcal{B}$, либо только граничные точки $\mathcal{E}$.

Заметим, что, в отличие от плоского случая, равенство в (1.1) нельзя описать в терминах пластин конденсатора $\mathcal{C}$ (т.е. множеств $\overline{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{B}$ и $\mathcal{E}$), так как сдвиг точки разветвления в поле конденсатора может привести как к увеличению, так и к уменьшению его емкости (см. [13], [14]). Прежде чем доказывать теорему 1.1, приведем простейшие свойства конденсаторов на римановой поверхности $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}_p$, аналогичные свойствам плоских конденсаторов.

§ 2. Свойства емкостей конденсаторов

В работе [15] собраны свойства емкостей плоских конденсаторов, необходимые для применения метода симметризации. К сожалению, нам не известна работа с описанием аналогичных свойств для конденсаторов на римановых поверхностях. Вместе с тем, перенос доказательств этих свойств на случай римановых поверхностей является простым упражнением и, по-видимому, относится к фольклору. В этом параграфе приводятся некоторые свойства емкостей конденсаторов с комментариями и указанием необходимых фактов о поверхностях класса $\mathfrak{R}_p$. Отметим прежде всего, что поверхности этого класса унаследуют многие свойства областей на сфере. Например, на поверхности $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}_p$ можно ввести расстояние по области. Именно, пусть W и W' – внутренние точки или граничные точки поверхности $\mathcal{R}$, являющиеся концами жордановых дуг в $\mathcal{R}$ (достижимыми граничными точками). Расстояние $d(W, W') \equiv d_{\mathcal{R}}(W, W')$ между точками W и W' (по области $\mathcal{R}$) определим как нижнюю грань длин в сферической метрике всех кривых в $\mathcal{R}$, соединяющих точки W и W' . Расстояние между точкой и множеством $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}$ определяется, как обычно, через

⁴То есть над каждой точкой этого кольца имеется ровно l точек поля с учетом кратности.

инфимум расстояний до точек $\mathcal{E}$, лежащих в $\mathcal{R}$ либо являющихся достижимыми граничными точками $\mathcal{R}$. Заметим, что последовательность точек $\{W_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к множеству $\mathcal{E} \subset \overline{\mathcal{R}}$, т.е. $d(W_n, \mathcal{E}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда существует другая последовательность точек $W'_n \in \mathcal{E}$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что $d(W_n, W'_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Важным для нас является свойство компактности.

ЛЕММА 2.1. *Из любой бесконечной последовательности $\{W_n\}_{n=1}^\infty$ точек $W_n \in \mathcal{R} \in \mathfrak{R}_p$, $n = 1, 2, \dots$, можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к точке поверхности $\mathcal{R}$ либо к границе этой поверхности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{W_n\}_{n=1}^\infty$ – указанная в формулировке леммы последовательность, и пусть $w_n = \text{rg } W_n$, $n = 1, 2, \dots$. Можно считать, что последовательность $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ сходится в $\overline{\mathbb{C}_w}$ к некоторой точке w_0 . Предположим, что для любой точки W_{n_k} некоторой подпоследовательности последовательности $\{W_n\}_{n=1}^\infty$ найдется граничная точка $W'_{n_k} \in \partial\mathcal{R}$, лежащая на отрезке на $\mathcal{R}$ над отрезком $[w_{n_k}, w_0]$, $k = 1, 2, \dots$. Так как $d(W_{n_k}, W'_{n_k}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то $d(W_{n_k}, \partial\mathcal{R})$ также стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Остается рассмотреть случай, когда каждую точку W_n из $\{W_n\}_{n=1}^\infty$ можно соединить по поверхности $\mathcal{R}$ отрезком с некоторой точкой $W'_n \in \mathcal{R}$, лежащей над w_0 . Обозначим через $\mathcal{E}$ множество всех попарно различных точек из последовательности $\{W'_n\}_{n=1}^\infty$. Если $\mathcal{E}$ конечно, то легко находим подпоследовательность точек из $\{W_n\}_{n=1}^\infty$, сходящуюся к одной из точек в $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}$. Если $\mathcal{E}$ бесконечно и $d(\mathcal{E}, \partial\mathcal{R}) = 0$, то вновь выбираем подпоследовательность $\{W_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ последовательности $\{W_n\}_{n=1}^\infty$ такую, что $d(W_{n_k}, \partial\mathcal{R}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Ситуация, когда $\mathcal{E}$ бесконечно и $d(\mathcal{E}, \partial\mathcal{R}) =: \delta > 0$, невозможна, так как линейная (евклидова) мера всех дуг на поверхности $\mathcal{R}$ над окружностью $\gamma(\rho)$ будет равна бесконечности, что противоречит условию 1) в определении класса $\mathfrak{R}_p$. Здесь $\rho = |\text{rg } w_0|$, если $w_0 \neq 0$, $w_0 \neq \infty$, и $\rho = \delta/2$ в противном случае. Лемма доказана.

Всюду ниже принято обозначение

$$I(\mathcal{V}, \mathcal{G}) = \int_{\mathcal{G}} |\nabla \mathcal{V}|^2 d\sigma.$$

ЛЕММА 2.2 (монотонность). *Для конденсаторов $\mathcal{C} = (\mathcal{B}, \mathcal{E})$ и $\mathcal{C}' = (\mathcal{B}', \mathcal{E}')$, лежащих на одной поверхности и удовлетворяющих условиям $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$, $\mathcal{E} \supset \mathcal{E}'$, справедливо неравенство*

$$\text{cap } \mathcal{C} \geq \text{cap } \mathcal{C}'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\mathcal{V}$, допустимая для конденсатора $\mathcal{C}$ и доопределенная нулем в $\mathcal{B}' \setminus \mathcal{B}$, является допустимой для конденсатора $\mathcal{C}'$. Поэтому

$$\text{cap } \mathcal{C}' \leq I(\mathcal{V}, \mathcal{B}).$$

Осталось перейти к инфимуму по всевозможным допустимым функциям $\mathcal{V}$. Лемма доказана.

Формальным обобщением монотонности является следующая ниже современная версия леммы Гретша (ср. [1; теорема 2.6] и [15; лемма 1.2]).

ЛЕММА 2.3. Если конденсаторы $\mathcal{C} = (\mathcal{B}, \mathcal{E})$ и $\mathcal{C}_k = (\mathcal{B}_k, \mathcal{E}_k)$, $k = 1, \dots, n$, лежат на одной поверхности и удовлетворяют условиям

$$(\mathcal{B}_k \setminus \mathcal{E}_k) \cap (\mathcal{B}_l \setminus \mathcal{E}_l) = \emptyset, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n,$$

$$\mathcal{B} \supset \bigcup_{k=1}^n \mathcal{B}_k, \quad \mathcal{E} \subset \bigcap_{k=1}^n \mathcal{E}_k,$$

то

$$\text{cap } \mathcal{C} \leq \left(\sum_{k=1}^n (\text{cap } \mathcal{C}_k)^{-1} \right)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{V}_k$ – произвольная допустимая функция для конденсатора $\mathcal{C}_k$, $k = 1, \dots, n$. Тогда для любых вещественных чисел d_k , $0 \leq d_k \leq 1$, $k = 1, \dots, n$, $\sum_{k=1}^n d_k = 1$, функция $\mathcal{V} = \sum_{k=1}^n d_k \mathcal{V}_k$, доопределенная нулем в $\mathcal{B} \setminus \bigcup_{k=1}^n \mathcal{B}_k$, является допустимой для конденсатора $\mathcal{C}$. Из определения емкости и первого условия леммы последовательно выводим

$$\text{cap } \mathcal{C} \leq I(\mathcal{V}, \mathcal{B} \setminus \mathcal{E}) = \sum_{k=1}^n I(\mathcal{V}, \mathcal{B}_k \setminus \mathcal{E}_k) = \sum_{k=1}^n d_k^2 I(\mathcal{V}_k, \mathcal{B}_k \setminus \mathcal{E}_k).$$

Переходя к инфимумам по функциям $\mathcal{V}_k$, $k = 1, \dots, n$, получим

$$\text{cap } \mathcal{C} \leq \sum_{k=1}^n d_k^2 \text{cap } \mathcal{C}_k.$$

Требуемое неравенство вытекает отсюда при

$$d_k = \frac{1}{\text{cap } \mathcal{C}_k} \bigg/ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{cap } \mathcal{C}_k}.$$

Лемма доказана.

Последовательность конденсаторов $\mathcal{C}_n = (\mathcal{B}_n, \mathcal{E}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, на поверхности $\mathcal{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$ назовем аппроксимирующей последовательностью для конденсатора $\mathcal{C} = (\mathcal{B}, \mathcal{E})$ на $\mathcal{R}$ или *исчерпанием* $\mathcal{C}$, если выполняются следующие условия:

- 1) при каждом фиксированном n множество $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{E}_n$ ограничено конечным числом непересекающихся замкнутых жордановых кривых на $\mathcal{R}$;
- 2) $\overline{\mathcal{B}_n} \subset \mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{B}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n = \mathcal{B}$;
- 3) $\mathring{\mathcal{E}}_n \supset \mathcal{E}_{n+1} \supset \mathcal{E}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n = \mathcal{E}$.

Существование аппроксимирующей последовательности конденсаторов вытекает из существования исчерпаний для каждой связной компоненты поля конденсатора $\mathcal{C}$. Последние можно установить, например, с помощью полиэдрических областей (точнее, их внутренностей); см. [16; гл. VII, п. 34]. В силу условия 1) и леммы 2.1 замкнутые множества $\mathcal{B}_n$ компактны в $\mathcal{R}$. Кроме того, каждое множество $\mathcal{B}_n$ конечно кратно покрывает $\text{pr } \mathcal{B}_n$. Другими словами, если $N(w)$ есть число точек множества $\mathcal{B}_n$ с проекцией, равной w , то существует константа λ такая, что $N(w) \leq \lambda$ для всех $w \in \text{pr } \mathcal{B}_n$. Действительно, в противном случае найдется последовательность $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек $w_k \in \text{pr } \mathcal{B}_n$, которая

сходится к некоторой точке $w_0 \in \text{pr } \overline{\mathcal{B}}_n$ и для которой $N(w_k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Это противоречит конечности числа $N(w_0)$ (см. концовку доказательства леммы 2.1). Далее, для каждой связной компоненты поля $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{E}_n$ конденсатора $\mathcal{C}_n$ из исчерпания разрешима задача Дирихле, например, с помощью альтернирующего метода Шварца (см. [11], [16]). В частности, каждый конденсатор $\mathcal{C}_n$ из исчерпания конденсатора $\mathcal{C}$ имеет потенциальную функцию. Используя множества уровня таких функций, нетрудно построить исчерпания произвольных конденсаторов конденсаторами, поле каждого из которых ограничено конечным числом непересекающихся замкнутых аналитических⁵ жордановых кривых на $\mathcal{R}$.

ЛЕММА 2.4 (непрерывность). *Если $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^\infty$ – исчерпание конденсатора $\mathcal{C}$, то справедливо равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap } \mathcal{C}_n = \text{cap } \mathcal{C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.2 последовательность $\text{cap } \mathcal{C}_n$ монотонно убывает и ограничена снизу величиной $\text{cap } \mathcal{C}$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap } \mathcal{C}_n = \inf_n \text{cap } \mathcal{C}_n \geq \text{cap } \mathcal{C}.$$

Предположим, что последнее неравенство строгое. Тогда найдется функция $\mathcal{V}$, допустимая для конденсатора $\mathcal{C} = (\mathcal{B}, \mathcal{E})$, для которой

$$\inf_n \text{cap } \mathcal{C}_n > I(\mathcal{V}, \mathcal{B}). \quad (2.1)$$

Покажем, что для каждого $k = 2, 3, \dots$ существует конденсатор $\mathcal{C}_{n_k} = (\mathcal{B}_{n_k}, \mathcal{E}_{n_k})$ такой, что функция $\mathcal{V}$ финитна в $\mathcal{B}_{n_k}$ и выполняется включение

$$\mathcal{E}_{n_k} \subset \left\{ W \in \mathcal{B} : \mathcal{V}(W) > 1 - \frac{1}{k} \right\}. \quad (2.2)$$

Пусть $\mathcal{K}$ – компактный носитель функции $\mathcal{V}$ в $\mathcal{B}$, и пусть для любого n существует точка $W_n \in \mathcal{K}$ и $W_n \notin \mathcal{B}_n$. Ввиду компактности существует подпоследовательность $\{W_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ последовательности $\{W_n\}_{n=1}^\infty$, сходящаяся к некоторой точке $W_0 \in \mathcal{K} \subset \mathcal{B}$ при $j \rightarrow \infty$. Условие 2) из определения исчерпания влечет принадлежность точки W_0 множествам $\mathcal{B}_n$ вместе с некоторой окрестностью начиная с некоторого номера $n > n_0$. Возьмем n_j настолько большим, чтобы точка W_{n_j} принадлежала этой окрестности и чтобы $n_j > n_0$. Тогда $W_{n_j} \in \mathcal{B}_{n_j}$, что противоречит допущенному выше. Следовательно, с некоторого номера n компакт $\mathcal{K}$ принадлежит областям $\mathcal{B}_n$. Предположим теперь, что для некоторого номера k включение (2.2) не выполняется ни для какого $\mathcal{E}_{n_k}$. Тогда для любого $n = 1, 2, \dots$ существует точка $W_n \in \mathcal{E}_n$ такая, что $\mathcal{V}(W_n) \leq 1 - 1/k$. Пусть $\{W_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ – подпоследовательность последовательности $\{W_n\}_{n=1}^\infty$, сходящаяся к некоторой точке $W_0 \in \mathcal{E}_1$. В силу условия 3) из определения исчерпания для любого n начиная с некоторого номера j $\mathcal{E}_{n_j} \subset \mathcal{E}_n$. Следовательно,

⁵Под аналитической кривой на поверхности $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}_p$ понимается кривая на $\mathcal{R}$, которая не содержит точек разветвления этой поверхности и проекция которой есть аналитическая кривая на сфере $\overline{\mathbb{C}}_w$.

предельная точка $W_0 \in \mathcal{E}_n$ и $W_0 \in \mathcal{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$. Это противоречит неравенству $\mathcal{V}(W_0) \leq 1 - 1/k < 1$. Итак, для больших номеров k функция $\mathcal{V}$ финитна в $\mathcal{B}_{n_k}$ и выполняется (2.2). Отсюда

$$\text{cap } \mathcal{C}_{n_k} \leq I\left(\frac{k\mathcal{V}}{k-1}, \mathcal{B}_{n_k}\right) \leq \left(\frac{k}{k-1}\right)^2 I(\mathcal{V}, \mathcal{B}),$$

что противоречит неравенству (2.1) при достаточно больших k . Лемма доказана.

§ 3. Перестановки функций

Перестановки вещественнозначных функций играют ключевую роль в доказательстве принципов симметризации (см. [2], [17], [18]). Напомним определения круговой симметризации множеств и функций, заданных в кольце $\Omega(s, t) := \{w : s \leq |w| \leq t\}$, $0 \leq s < t \leq \infty$. Пусть B – открытое в $\Omega(s, t)$ множество. *Круговая симметризация* относительно вещественной положительной полуоси сопоставляет множеству B кругосимметричное множество B^* , определенное следующим образом. Если при данном ρ , $s \leq \rho \leq t$, окружность $\gamma(\rho)$ не пересекается с множеством B , то она не пересекается и с множеством B^* . Если $\gamma(\rho) \subset B$, то $\gamma(\rho) \subset B^*$. В остальных случаях множество B^* пересекается с $\gamma(\rho)$ по открытой дуге с центром на вещественной положительной полуоси и линейной меры, равной мере пересечения множества B с $\gamma(\rho)$. Нетрудно видеть, что множество B^* открыто в $\Omega(s, t)$. Рассмотрим вещественнозначную функцию v , непрерывную и ограниченную в $\Omega(s, t)$, и открытые в $\Omega(s, t)$ множества $B_a = \{w \in \Omega(s, t) : v(w) > a\}$, $-\infty < a < +\infty$. Результатом круговой симметризации (относительно вещественной положительной полуоси) функции v называют функцию v^* :

$$v^*(w) = \sup\{a : w \in B_a^*\}, \quad w \in \Omega(s, t).$$

Функцию v^* называют также симметричной равноизмеримой перестановкой функции v . Следующее утверждение вытекает из хорошо известных фактов теории функций.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть функция v определена выше и удовлетворяет условию Липшица в кольце $\Omega(s, t)$. Тогда функция v^* также удовлетворяет условию Липшица в $\Omega(s, t)$ и выполняется неравенство

$$I(v, \Omega(s, t)) \geq I(v^*, \Omega(s, t)). \quad (3.1)$$

Обычно функции v и v^* рассматриваются во всей комплексной плоскости (случай $s = 1/t = 0$). Доказательство утверждения 3.1 практически ничем не отличается от доказательства его в этом частном случае. Вместе с тем рассмотрение перестановок функций в кольце совместно с конформными отображениями дает интересные приложения (см. [15], а также уточнение неравенства (3.1) в [15; теорема 1.4]). Доказательство липшидовости функции v^* приводится в монографии М. Оцуки (см. [17; теорема 2.51]). В случае достаточно гладкой

функции v неравенство (3.1) доказано в [2] и [17]. Доказательства этого неравенства в общем случае приводятся в более поздней литературе (см., например, работы [18], [19] и цитируемую в них литературу). Исследование знака равенства в (3.1) в общем случае приводит к неожиданным утверждениям (см. [20]). Нам понадобится следующий частный случай равенства в (3.1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Пусть функция v определена выше, $0 \leq v(w) \leq 1$, и пусть множество $\{w : 0 < v(w) < 1\}$ является областью в $\Omega(s, t)$, ограниченной конечным числом замкнутых жордановых кривых. Обозначим через u решение задачи Дирихле в $\{w : 0 < v^*(w) < 1\}$ с граничными значениями v^* , доопределенное в кольце $\Omega(s, t)$ по непрерывности нулем или единицей. Тогда равенства

$$I(v, \Omega(s, t)) = I(v^*, \Omega(s, t)) = I(u, \Omega(s, t))$$

выполняются одновременно в том и только том случае, когда

$$v(w) \equiv v^*(e^{i\theta}w) \equiv u(e^{i\theta}w),$$

где θ – некоторое вещественное число.

Данное утверждение доказано по-существу в [17; теорема 2.54]. Другие доказательства единственности приводятся в [21], [22].

Перейдем теперь к рассмотрению перестановок некоторых специально построенных вещественнозначных функций. Пусть $\mathcal{R}$ – риманова поверхность класса $\mathfrak{R}_p$, и пусть $\mathcal{C} = (\mathcal{B}, \mathcal{E})$ – конденсатор на $\mathcal{R}$, у которого множества $\mathcal{B}$ и $\mathcal{E}$ ограничены конечным числом замкнутых аналитических жордановых кривых в $\mathcal{R}$. Обозначим через $\mathcal{P}$ потенциальную функцию конденсатора $\mathcal{C}$, доопределенную нулем в $\overline{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{B}$, и построим функцию $\mathcal{P}_\varepsilon$ для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ следующим образом. Пусть W_l , $l = 1, \dots, n$, – совокупность всех точек разветвления поверхности $\mathcal{R}$, лежащих в $\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}$ (точки разветвления не могут лежать на границе поля конденсатора $\mathcal{C}$, и в силу леммы 2.1 их конечное число). Пусть $\mathcal{U}(W_l, \varepsilon)$ обозначает ε -окрестность точки W_l , т.е. m_l -листный круг на $\mathcal{R}$ с единственной точкой разветвления W_l , лежащий над кругом $|w - w_l| < \varepsilon$, $w_l = \text{pr } W_l$, $l = 1, \dots, n$ (здесь и ниже в случае $w_l = \infty$ модуль разности $|w - w_l|$ заменяем на $|1/w|$). Возьмем ε настолько малым, чтобы круги $\mathcal{U}(W_l, \varepsilon)$ лежали в $\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}$ и попарно не пересекались. Введем вспомогательные функции

$$u_l(w) = \begin{cases} 0, & |w - w_l| \leq \varepsilon^2, \\ \frac{\log(|w - w_l|/\varepsilon^2)}{\log(1/\varepsilon)}, & \varepsilon^2 \leq |w - w_l| \leq \varepsilon, \\ 1, & |w - w_l| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad l = 1, \dots, n.$$

Определим в $\mathcal{R}$ функцию $\mathcal{P}_\varepsilon$, которая на множестве $\mathcal{R} \setminus (\bigcup_{l=1}^n \mathcal{U}(W_l, \varepsilon))$ совпадает с функцией $\mathcal{P}$, а в каждой окрестности $\mathcal{U}(W_l, \varepsilon)$ равна $\min(\mathcal{P}(W), u_l(\text{pr } W))$, $l = 1, \dots, n$. Заметим, что в точках множества $\bigcup_{l=1}^n \mathcal{U}(W_l, \varepsilon^2)$ функция $\mathcal{P}_\varepsilon$ равна нулю.

ЛЕММА 3.1. Функция $\mathcal{P}_\varepsilon$ удовлетворяет условию Липшица локально в $\mathcal{R}$, и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\mathcal{P}_\varepsilon, \mathcal{R}) = I(\mathcal{P}, \mathcal{R}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\mathcal{P}$ аналитически продолжима в окрестность каждой точки границы множества $\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}$, равна нулю на $\overline{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{B}$ и единице на $\mathcal{E}$. Поэтому она удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности каждой точки поверхности $\mathcal{R}$, за исключением точек разветвления этой поверхности. Функции $u_l(w)$, $l = 1, \dots, n$, удовлетворяют условию Липшица в $\overline{\mathcal{C}}_w$. Отсюда следует локальная липшицевость функции $\mathcal{P}_\varepsilon$ в $\mathcal{R}$. Далее,

$$\begin{aligned} |I(\mathcal{P}_\varepsilon, \mathcal{R}) - I(\mathcal{P}, \mathcal{R})| &\leq \sum_{l=1}^n [m_l I(u_l, \{w : \varepsilon^2 < |w - w_l| < \varepsilon\}) + I(\mathcal{P}, \mathcal{U}(W_l, \varepsilon))] \\ &= \frac{2\pi}{\log(1/\varepsilon)} \sum_{l=1}^n m_l + \sum_{l=1}^n O(\varepsilon^{2/m_l}) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть поверхность $\mathcal{R}$, конденсатор $\mathcal{C} = (\mathcal{B}, \mathcal{E})$ на $\mathcal{R}$ и функции $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, определены выше, и пусть $\mathcal{P}_0 := \mathcal{P}$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_e &= \{W \in \mathcal{R} : |\operatorname{pr} W| \geq 1\}, \\ \mathcal{B}_a &= \{W \in \mathcal{R} : \mathcal{P}_\varepsilon(W) > a\}, \quad -\infty < a < +\infty. \end{aligned}$$

Предположим, что множество $\mathcal{B}_0 \cap \mathcal{R}_e$ не пусто, и рассмотрим равноизмеримую перестановку сужения функции $\mathcal{P}_\varepsilon$ на $\mathcal{R}_e$:

$$\mathcal{P}_\varepsilon^*(W) = \begin{cases} \sup\{a : W \in \operatorname{Sym} \mathcal{B}_a\}, & \text{если } \{a : W \in \operatorname{Sym} \mathcal{B}_a\} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad W \in \overline{\mathcal{U}}.$$

Здесь $\mathcal{U}$ обозначает p -листный круг на поверхности $\mathcal{R}(T_p)$, лежащий над $|w| > 1$, с единственной точкой разветвления над бесконечностью, а $\overline{\mathcal{U}}$ есть замыкание этого круга в $\mathcal{R}(T_p)$.

ЛЕММА 3.2 (ср. [4; лемма 2]). *Функция $\mathcal{P}_\varepsilon^*$, $\varepsilon > 0$, удовлетворяет условию Липшица локально на множестве $\overline{\mathcal{U}}$, и для любых s и t , $1 \leq s < t \leq \infty$, выполняется неравенство*

$$I(\mathcal{P}_\varepsilon, \{W \in \mathcal{R} : \operatorname{pr} W \in \Omega(s, t)\}) \geq I(\mathcal{P}_\varepsilon^*, \{W \in \mathcal{U} : \operatorname{pr} W \in \Omega(s, t)\}). \quad (3.2)$$

Если кольцо $\Omega(s, t)$ не содержит проекций точек разветвления из $\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}$, а число ε настолько мало, что $\mathcal{P}_\varepsilon = \mathcal{P}$ над $\Omega(s, t)$, то в случае равенства в (3.2) $\Omega(s, t)$ можно разбить на конечное число концентрических колец, над каждым из которых (пусть над Ω) функция $\mathcal{P}$ совпадает с $\mathcal{P}^*$ с точностью до поворота, т.е. существует вращение Φ_θ , при котором $\mathcal{P}(W) = \mathcal{P}^*(\Phi_\theta(W))$ для всех $W \in \mathcal{R}$ с проекцией на Ω , где θ – некоторое вещественное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся известными доказательствами аналогичных утверждений, приведенными в [2; § 4.7] и [17; теоремы 2.53 и 2.54]. Фиксируем числа s и t , $1 \leq s < t \leq \infty$, и введем обозначения $\mathcal{G} = \{W \in \mathcal{R}_e : \mathcal{P}_\varepsilon(W) > 0\}$. Пусть $\{\gamma(\rho_k)\}_{k=1}^n$ – произвольная конечная совокупность окружностей, содержащая все окружности, проходящие через проекции точек разветвления в $\mathcal{G}$, а также все окружности, имеющие общие касательные с проекцией границы $\mathcal{G}$, $s = \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n = t$. Такие совокупности существуют

в силу леммы 2.1 и аналитичности части границы $\mathcal{G}$ над $|w| > 1$. Так как $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}_p$, то кольца $\Omega(\rho_k, \rho_{k+1})$, $k = 1, \dots, n-1$, могут быть только двух типов. Для одних колец часть множества $\mathcal{G}$, лежащая над любой окружностью $\gamma(\rho)$, $\rho_k < \rho < \rho_{k+1}$, есть замкнутая жорданова кривая, p -кратно покрывающая эту окружность. Другими словами, часть $\mathcal{G}$ над внутренностью $\Omega(\rho_k, \rho_{k+1})$ есть p -листное открытое кольцо без точек разветвления поверхности $\mathcal{R}$. Назовем соответствующие кольца $\Omega(\rho_k, \rho_{k+1})$ кольцами первого типа. Для других колец $\Omega(\rho_k, \rho_{k+1})$ часть $\mathcal{G}$, лежащая над любой окружностью $\gamma(\rho)$, $\rho_k < \rho < \rho_{k+1}$, состоит только из открытых дуг, линейная мера которых с учетом кратности не превосходит $2\pi p \rho$ (кольца второго типа). Часть множества $\mathcal{G}$, лежащая над внутренностью кольца второго типа, есть объединение конечного числа односвязных областей (криволинейных трапеций). Множество точек такой трапеции, лежащее над $\gamma(\rho)$, образует только одну открытую дугу, $\rho_k < \rho < \rho_{k+1}$. Обозначим через $F_k: \{W \in \mathcal{G} : \text{pr } W \in \dot{\Omega}(\rho_k, \rho_{k+1})\} \rightarrow \mathbb{C}_z$ функцию, которая для точек $\mathcal{G}$, лежащих над кольцом первого типа, совпадает с одной из ветвей корня p -й степени, а для каждой криволинейной трапеции на $\mathcal{G}$, лежащей над кольцом второго типа, есть суперпозиция такого корня и поворота в $\mathbb{C}_z$ вокруг начала координат такого, что образы криволинейных трапеций из $\mathcal{G}$ при отображении F_k представляют собой попарно неналегающие области в кольце $\Omega_k := \{z : \rho_k^{1/p} \leq |z| \leq \rho_{k+1}^{1/p}\}$, $k = 1, \dots, n$. Существования таких отображений легко добиться, увеличивая число окружностей в совокупности $\{\gamma(\rho_k)\}_{k=1}^n$ с учетом аналитичности границы $\mathcal{G}$ над $|w| > 1$. Рассмотрим теперь функции

$$H_k(z) = \mathcal{P}_\varepsilon(F_k^{-1}(z)), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

доопределенные нулем во внутренних точках колец Ω_k и по непрерывности на границах $\partial\Omega_k$. Согласно лемме 3.1 функция $\mathcal{P}_\varepsilon$ удовлетворяет условию Липшица локально в $\overline{\mathcal{B}}$. Поэтому функция H_k удовлетворяет этому условию локально в кольце Ω_k и, следовательно, в кольце Ω_k , $k = 1, \dots, n-1$. В силу утверждения 3.1 функция H_k^* также удовлетворяет условию Липшица в Ω_k , $k = 1, \dots, n$. С другой стороны, по определению симметричной перестановки имеем

$$H_k^*(z) = \mathcal{P}_\varepsilon^*(z^p), \quad z \in \Omega_k, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Здесь под отображением $W = z^p$ понимается степенная функция, отображающая область $1 < |z| \leq \infty$ на p -листный круг $\mathcal{U}$ так, что вещественным z соответствуют точки на луче $\mathcal{L}$, и доопределенная на $|z| = 1$ по непрерывности. Поэтому функция $\mathcal{P}_\varepsilon^*$ удовлетворяет условию Липшица локально над каждым кольцом $\Omega(\rho_k, \rho_{k+1})$ и, следовательно, локально в $\Omega(s, t)$ и $\mathcal{U}$ (заметим, что в окрестности бесконечности функция $\mathcal{P}_\varepsilon^*$ равна нулю либо единице). Используя утверждение 3.1 и либо повторяя доказательство из [2; с. 120–122] для функции $H_k(z)$ (вместо $\omega(z)$ в [2]), либо повторяя доказательство из [17; с. 169–175], где надо положить $H(z) = H_k(z)$, приходим к неравенствам

$$I(H_k, \Omega_k) \geq I(H_k^*, \Omega_k), \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (3.3)$$

Незначительное отличие в доказательстве вызовет тот факт, что в достаточно малой окрестности каждой точки W_l (см. определение перед леммой 3.2) имеется замкнутая аналитическая кривая, на которой нарушается гармоничность

функции $\mathcal{P}_\varepsilon$. Это влечет нарушение гармоничности функции H_k в $\{z : 0 < H_k(z) < 1\}$ в некоторых окрестностях конечного числа точек на $\partial\Omega_k$. Ситуация исправляется, если к стационарным значениям в [2] и [17] добавить значения функции H_k в точках нарушения ее гармоничности. В силу конформной инвариантности интеграла Дирихле неравенства (3.3) дают

$$I(\mathcal{P}_\varepsilon, \{W \in \mathcal{R} : \text{pr } W \in \Omega(\rho_k, \rho_{k+1})\}) \geq I(\mathcal{P}_\varepsilon^*, \{W \in \mathcal{U} : \text{pr } W \in \Omega(\rho_k, \rho_{k+1})\}),$$

$k = 1, \dots, n-1$. Суммируя последние неравенства по k , приходим к (3.2). Если в предположениях леммы 3.2 имеет место знак равенства в (3.2), то равенство выполняется в предыдущих соотношениях и в (3.3) при любом $k = 1, \dots, n-1$. В [17; с. 177–179] по существу показано, что в этом случае кольцо Ω_k можно разбить на конечное число колец Ω_{kj} окружностями вида $\gamma(r_j)$ (в терминологии [17] r_j – исключительное значение) так, что в каждом таком кольце выполняется

$$H_k(z) = H_k^*(e^{i\theta_{kj}}z), \quad z \in \Omega_{kj},$$

где θ_{kj} – некоторое вещественное число. Это влечет совпадение функций $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$ с точностью до поворота над соответствующим кольцом в w -плоскости. Лемма доказана.

§ 4. Симметризация конденсаторов

Нам понадобятся “координаты” на поверхности $\mathcal{R}(T_p)$. Каждой точке W на $\mathcal{R}(T_p)$, не лежащей над $w = 0$ и $w = \infty$, сопоставим пару чисел (ρ, φ) , где $\rho = |\text{pr } W|$, а φ совпадает с одним из значений $\arg \text{pr } W$ по следующему правилу. В круге $\mathcal{U}$, из которого удален луч $\mathcal{L}_p$ на листе $\mathcal{D}_p$ с проекцией $[(-1)^p, (-1)^p\infty]$, φ совпадает со значением непрерывной ветви аргумента, равной нулю на луче $\mathcal{L}$. На берегах луча $\mathcal{L}_p$ значения φ определяются по непрерывности. Для остальных точек поверхности $\mathcal{R}(T_p)$ число φ равно значению непрерывной ветви аргумента $\text{pr } W$ в $\pm(-1)^{l+1}\mathcal{H}_l$, равной $\pm\pi(l-1)$ в точке над $(-1)^{l+1}$, где $\pm\mathcal{H}_l$ обозначает часть листа $\mathcal{D}_l$, лежащую над полукругом $\{w : |w| \leq 1, \pm \text{Im } w \geq 0\}$, $l = 1, \dots, p$. Заметим, что каждой точке на луче $\mathcal{L}_p$ соответствуют пары координат $(\rho, \pm\pi\rho)$. Каждой точке W на листе $\mathcal{D}_1$ с проекцией на $[-1, 0)$ соответствуют две пары $(\rho, \pm\pi)$. Точкам на листе $\mathcal{D}_2$ с проекцией на $[-1, 0)$ соответствуют те же две пары $(\rho, \pm\pi)$, а точкам листа $\mathcal{D}_2$ с проекцией на $[0, 1]$ – две пары $(\rho, \pm 2\pi)$ и т.д. Всюду далее, если точка W лежит на произвольной римановой поверхности, то ρ означает $|\text{pr } W|$, а значение аргумента φ определяется из контекста. В случае $W \in \mathcal{R}(T_p)$ пара (ρ, φ) будет обозначать координаты W на $\mathcal{R}(T_p)$, при этом принимается запись $W = (\rho, \varphi)$.

Определение симметризации Sym открытых и замкнутых множеств на римановых поверхностях дано в § 1. В обозначениях этого параграфа пусть $\mathcal{B}$ – открытое множество на поверхности $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}_p$, $0 \notin \text{pr } \mathcal{B}$, и пусть линейная мера $\text{mes } \mathcal{B}(\rho) < 2\pi\rho$ для всех ρ , $0 < \rho < \infty$. Тогда результат симметризации множества $\mathcal{B}$ можно записать в виде

$$\text{Sym } \mathcal{B} = \left\{ (\rho, \varphi) : 0 < \rho < \infty, |\varphi| < \frac{1}{2\rho} \text{mes } \mathcal{B}(\rho) \right\}.$$

ЛЕММА 4.1. *Если открытое либо компактное множество на поверхности $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}_p$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$, $0 < \rho < 1$, l -кратно, $1 \leq l \leq p$, то часть этого множества, лежащая над $\gamma(\rho)$, является объединением замкнутых кривых.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}$ – открытое множество, покрывающее $\gamma(\rho)$, $0 < \rho < 1$, l -кратно, $1 \leq l \leq p$. Множество $\mathcal{B}(\rho)$ состоит из открытых дуг и замкнутых кривых (возможно, пересекающихся в точках разветвления). Предположим, что множество дуг не пусто, и пусть $\mathcal{G}$ – связная часть одной из таких дуг меры $< 2\pi\rho$, примыкающая к ее концу, лежащему над точкой $w \in \gamma(\rho)$. Над w лежит ровно l точек множества $\mathcal{B}(\rho) \setminus \mathcal{G}$, каждая из которых принадлежит $\mathcal{B}$ вместе с некоторой окрестностью. Следовательно, множество $\mathcal{B}(\rho) \setminus \mathcal{G}$ l -кратно покрывает окрестность w на окружности $\gamma(\rho)$. Поэтому $\mathcal{B}(\rho)$ покрывает не менее чем $(l + 1)$ -кратно часть окружности $\gamma(\rho)$, примыкающей к w с одной из сторон, что противоречит условию леммы 4.1. Точно так же убеждаемся, что если открытое множество $\mathcal{B}$ покрывает открытую дугу γ на окружности $\gamma(\rho)$ l -кратно, то $\mathcal{B}(\rho)$ состоит только из дуг, проекции концов которых не принадлежат γ . Пусть теперь $\mathcal{E}$ – компакт, покрывающий $\gamma(\rho)$ l -кратно. Достаточно убедиться, что для любой точки $w_0 \in \gamma(\rho)$ существует окрестность $U(w_0, r) := \{w : d(w, w_0) < r\}$ такая, что часть $\mathcal{E}$, лежащая над $\gamma := \gamma(\rho) \cap U(w_0, r)$, состоит только из дуг с концами, проекции которых лежат вне γ . Обозначим через $\mathcal{E}'$ часть множества $\mathcal{E}$, лежащую над кругом $U(w_0, r)$, $2r < d(\mathcal{E}, \partial\mathcal{R})$, и пусть $\mathcal{B}'$ – объединение всех кругов на $\mathcal{R}$ с проекцией $U(w_0, r)$, содержащих точки из $\mathcal{E}'$. Ясно, что $\mathcal{E}' \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{R}$. В силу определения класса $\mathfrak{R}_p$ число кругов, составляющих $\mathcal{B}'$, конечно. Пусть N – кратность накрытия $\mathcal{B}'$ окрестности $U(w_0, r)$. Открытое множество $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \setminus \mathcal{E}'$ покрывает дугу γ $(N - l)$ -кратно и по указанному выше $\mathcal{B}(\rho)$ состоит из дуг, проекции концов которых лежат вне γ . Следовательно, $\mathcal{E}'(\rho)$ также состоит из таких дуг. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. *Если множество $\mathcal{B}$ открытое на поверхности $\mathcal{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$, то симметризованное множество $\text{Sym } \mathcal{B}$ открыто на поверхности $\mathcal{R}(T_p)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка W_0^* множества $\text{Sym } \mathcal{B}$ лежит над бесконечностью. Тогда над бесконечностью есть точка W_0 множества $\mathcal{B}$, и она является точкой разветвления порядка p . Поскольку W_0 принадлежит $\mathcal{B}$ вместе с некоторой окрестностью в $\mathcal{R}$, то W_0^* принадлежит $\text{Sym } \mathcal{B}$ с окрестностью на $\mathcal{R}(T_p)$. Пусть $W_0^* \in \text{Sym } \mathcal{B}$, $\text{pr } W_0^* = 0$ и $\text{Sym } \mathcal{B}$ содержит ровно l точек на листах $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_l$ над $\gamma(0)$. Тогда множество $\mathcal{B}$ содержит l точек над $\gamma(0)$ (с учетом кратности) вместе с некоторыми окрестностями. Следовательно, $\text{Sym } \mathcal{B}$ содержит l открытых кругов на листах $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_l$ с центрами над $\gamma(0)$. Один из этих кругов есть окрестность точки W_0^* . Рассмотрим теперь случай, когда $W_0^* = (\rho_0, \varphi_0) \in \text{Sym } \mathcal{B}$, $0 < \rho_0 < \infty$. Если $\rho_0 \geq 1$ и $\varphi_0 = \pi p$, то множество $\text{Sym } \mathcal{B}$ содержит замкнутую кривую, p -кратно покрывающую окружность $\gamma(\rho_0)$. Следовательно, $\mathcal{B}$ также содержит такую кривую. Так как множество $\mathcal{B}$ открыто, то для некоторого числа $\varepsilon > 0$ оно p -кратно покрывает любую окружность $\gamma(\rho)$, $\rho_0 - \varepsilon < \rho < \rho_0 + \varepsilon$. Отсюда $\text{Sym } \mathcal{B}$ тоже p -кратно покрывает такую окружность и точка (ρ_0, φ_0) внутренняя для $\text{Sym } \mathcal{B}$. Если

$\rho_0 < 1$, $\varphi_0 = \pi l$ и часть $\text{Sym } \mathcal{B}$, лежащая над $\gamma(\rho_0)$, состоит из l окружностей на листах $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_l$, то $\mathcal{B}$ покрывает окружность $\gamma(\rho_0)$ l -кратно. По лемме 4.1 множество $\mathcal{B}(\rho_0)$ состоит только из замкнутых кривых. Вновь из открытости множества $\mathcal{B}$ вытекает, что это множество и, следовательно, множество $\text{Sym } \mathcal{B}$ покрывают любую окружность $\gamma(\rho)$, $\rho_0 - \varepsilon < \rho < \rho_0 + \varepsilon$, не менее чем l -кратно, где ε – некоторое положительное число. Поэтому точка (ρ_0, φ_0) внутренняя для $\text{Sym } \mathcal{B}$. В остальных случаях часть множества $\mathcal{B}$, лежащая над $\gamma(\rho_0)$, представляет собой объединение не более чем счетного числа открытых дуг и, возможно, конечного числа замкнутых кривых. Общая линейная мера покрытия $\gamma(\rho_0)$ с учетом кратности равна $\text{mes } \mathcal{B}(\rho_0)$ и

$$|\varphi_0| < \frac{1}{2\rho_0} \text{mes } \mathcal{B}(\rho_0).$$

Поэтому существует конечное число замкнутых дуг и замкнутых кривых, принадлежащих $\mathcal{B}(\rho_0)$, суммарная мера которых μ с учетом кратности удовлетворяет неравенству

$$|\varphi_0| < \frac{\mu}{2\rho_0} < \frac{1}{2\rho_0} \text{mes } \mathcal{B}(\rho_0).$$

Обозначим через $\mathcal{E}$ объединение этих дуг и кривых. Поскольку $d(\mathcal{E}, \partial \mathcal{B}) > 0$, то существует такое число $\delta > 1$, что множество $\mathcal{B}$ содержит наряду с $\mathcal{E}$ все его растяжения с любым коэффициентом t , $1/\delta < t < \delta$. Поэтому для всех ρ , $\rho_0/\delta < \rho < \rho_0\delta$, выполняется

$$\frac{\mu}{2\rho_0} < \frac{1}{2\rho} \text{mes } \mathcal{B}(\rho).$$

Отсюда множество $\{(\rho, \varphi) : \rho_0/\delta < \rho < \rho_0\delta, |\varphi| < \mu/(2\rho_0)\}$ принадлежит $\text{Sym } \mathcal{B}$ и, следовательно, точка (ρ_0, φ_0) является внутренней точкой этого множества. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. *Если множество $\mathcal{E}$ – компакт на поверхности $\mathcal{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$, то множество $\text{Sym } \mathcal{E}$ является компактом на поверхности $\mathcal{R}(T_p)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как поверхность $\mathcal{R}(T_p)$ компактная, то достаточно установить замкнутость множества $\text{Sym } \mathcal{E}$. Пусть точка $W_0^* = (\rho_0, \varphi_0) \in \mathcal{R}(T_p)$ является предельной точкой множества $\text{Sym } \mathcal{E}$. Если проекция W_0^* равна бесконечности и W_n^* , $n = 1, 2, \dots$, – точки множества $\text{Sym } \mathcal{E}$, стремящиеся к W_0^* , то $\rho_n := |\text{pr } W_n^*| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и над каждой окружностью $\gamma(\rho_n)$ есть точка (скажем, W_n), принадлежащая множеству $\mathcal{E}$. Так как $\mathcal{E}$ – компакт, то можно считать, что $W_n \rightarrow W_0 \in \mathcal{E}$, $n \rightarrow \infty$. Ясно, что $\text{pr } W_0 = \infty$ и, следовательно, $W_0^* \in \text{Sym } \mathcal{E}$. Пусть $\text{pr } W_0^* = 0$ и $W_0^* \in \mathcal{D}_l$, $1 \leq l \leq p$. При достаточно малом ε , $0 < \varepsilon < 1$, обозначим через $\{\mathcal{U}_\varepsilon\}$ совокупность всех конечнолистных кругов в $\mathcal{R}$ над $|w| < \varepsilon$ с центром над $w = 0$. Так как $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}_p$, то число таких кругов с учетом кратности не превосходит p . Пусть $\{W_n^*\}_{n=1}^\infty$ – последовательность точек множества $\text{Sym } \mathcal{E}$, стремящаяся к точке W_0^* и такая, что $\rho_n < \varepsilon$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда для любого n линейная мера $\text{mes } \mathcal{E}(\rho_n) \geq 2\pi\rho_n(l-1)$, причем в случае равенства множество $\mathcal{E}(\rho_n)$ не должно покрывать $\gamma(\rho_n)$ $(l-1)$ -кратно. Поэтому над каждой окружностью $\gamma(\rho_n)$ существует по крайней мере l точек

множества $\mathcal{E}$, принадлежащих разным окрестностям из $\{\mathcal{U}_\varepsilon\}$ с учетом кратности (т.е. если окрестность, скажем, s -листка, то она содержит s таких точек). Отсюда следует, что существуют последовательность окружностей $\gamma(\rho_{n_k})$ и l окрестностей (с учетом кратности) из $\{\mathcal{U}_\varepsilon\}$ такие, что для каждой окрестности над каждой $\gamma(\rho_{n_k})$ найдется точка множества $\mathcal{E}$, принадлежащая такой окрестности. Следовательно, центры указанных окрестностей суть предельные точки множества $\mathcal{E}$, и они принадлежат $\mathcal{E}$. Значит, $\mathcal{E}$ а потому и $\text{Sym } \mathcal{E}$ покрывают точку $w = 0$ по крайней мере l -кратно. Отсюда $W_0^* \in \text{Sym } \mathcal{E}$. Предположим теперь, что $0 < \rho_0 < \infty$, и вновь некоторая последовательность точек W_n^* принадлежит $\text{Sym } \mathcal{E}$, $W_n^* \rightarrow W_0^*$ при $n \rightarrow \infty$, и пусть $W_0^* \notin \text{Sym } \mathcal{E}$. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что с некоторого номера n_0 выполняется неравенство

$$\frac{1}{\rho_n} \text{mes } \mathcal{E}(\rho_n) \geq \frac{1}{\rho_0} \text{mes } \mathcal{E}(\rho_0) + \delta, \quad n \geq n_0$$

($\rho_n = |\text{pr } W_n^*|$). Действительно, в противном случае для некоторой подпоследовательности $W_{n_k}^* = (\rho_{n_k}, \varphi_{n_k})$ имеем

$$2\rho_0|\varphi_0| = \lim_{k \rightarrow \infty} 2\rho_{n_k}|\varphi_{n_k}| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \text{mes } \mathcal{E}(\rho_{n_k}) \leq \text{mes } \mathcal{E}(\rho_0).$$

Отсюда вытекает, что $W_0^* \in \text{Sym } \mathcal{E}$, за исключением того случая, когда $0 < \rho_0 < 1$, $\varphi_0 = \pi l$ ($1 \leq l \leq p-1$), а часть множества $\text{Sym } \mathcal{E}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho_0)$, состоит только из l окружностей. Однако в этом случае множество $\mathcal{E}(\rho_0)$ состоит из замкнутых кривых, l -кратно покрывающих $\gamma(\rho_0)$ (лемма 4.1), и, следовательно, либо $\text{mes } \mathcal{E}(\rho_{n_k}) = 2\pi\rho_{n_k}l$ и для некоторой последовательности “близкие” множества $\mathcal{E}(\rho_{n_k})$ также состоят из таких кривых, либо $\text{mes } \mathcal{E}(\rho_{n_k}) < 2\pi\rho_{n_k}l$, $k = 1, 2, \dots$. В любом случае вновь $W_0^* \in \text{Sym } \mathcal{E}$, что противоречит допущению. Из леммы 2.1 вытекает, что существуют число N и окрестность $\mathcal{G}$ множества $\mathcal{E}$ такие, что $\mathcal{G}$ содержит лишь конечное число (пусть m) точек разветвления поверхности $\mathcal{R}$ и покрывает каждую точку w -плоскости не более чем N раз, $d(\mathcal{E}, \partial\mathcal{G}) > 0$. Можно считать, что для этой окрестности справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_n} \text{mes } \mathcal{E}(\rho_n) &\geq \frac{1}{\rho_0} \text{mes } \mathcal{G}(\rho_0) + \frac{\delta}{2}, \\ d_{\mathbb{C}}(\rho_n, \rho_0) &< d_{\mathcal{R}}(\mathcal{E}, \partial\mathcal{G}), \quad n \geq n_0. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathcal{E}_n$ множество всех тех точек поверхности $\mathcal{R}$, которые лежат над $\gamma(\rho_n)$ и которые можно соединить с точками множества $\mathcal{G}(\rho_0)$ прямолинейными отрезками на $\mathcal{R}$, лежащими над радиальными лучами. Ясно, что

$$\frac{1}{\rho_n} \text{mes } \mathcal{E}_n \leq \frac{1}{\rho_0} \text{mes } \mathcal{G}(\rho_0).$$

Пусть K – объединение равных углов на w -плоскости с вершинами в начале координат и биссектрисами, проходящими через проекции всех точек разветвления в $\mathcal{G}$ суммарной угловой меры $\delta/(2N)$. Из предыдущего вытекает, что для множества

$$\tilde{\mathcal{E}}(\rho_n) = \{W \in \mathcal{E}(\rho_n) : \text{pr } W \notin K\}$$

выполняется неравенство

$$\frac{1}{\rho_n} \text{mes } \tilde{\mathcal{E}}(\rho_n) \geq \frac{1}{\rho_n} \text{mes } \mathcal{E}_n + \frac{\delta}{4}, \quad n \geq n_0.$$

Поэтому для любого $n \geq n_0$ найдется точка $W_n \in \tilde{\mathcal{E}}(\rho_n) \setminus \mathcal{E}_n$. Ввиду компактности $\mathcal{E}$ можно считать, что последовательность точек $\{W_n\}_{n=n_0}^\infty$ сходится к некоторой точке $W_0 \in \mathcal{E}(\rho_0)$, что противоречит неравенству

$$d(W_n, \mathcal{E}(\rho_0)) \geq \min \left[d(\partial \mathcal{G}, \mathcal{E}), \frac{\rho_0 \delta}{8mN(1 + \rho_0^2)} \right] > 0$$

для всех $n \geq n_0$, при которых $\rho_n/\rho_0 > 1/2$. Лемма доказана.

Из лемм 4.2 и 4.3 вытекает, что если $\mathcal{C} = (\mathcal{B}, \mathcal{E})$ – конденсатор на поверхности $\mathcal{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$, то $\text{Sym } \mathcal{C} = (\text{Sym } \mathcal{B}, \text{Sym } \mathcal{E})$ является конденсатором на поверхности $\mathcal{R}(T_p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Если $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^\infty$ – исчерпание конденсатора $\mathcal{C}$ и неравенство (1.1) справедливо для каждого конденсатора этого исчерпания, то с учетом монотонности емкости имеем

$$\text{cap } \mathcal{C}_n \geq \text{cap } \text{Sym } \mathcal{C}_n \geq \text{cap } \text{Sym } \mathcal{C}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Применение леммы 2.4 дает неравенство (1.1) для конденсатора $\mathcal{C}$. Поэтому для доказательства (1.1) достаточно рассмотреть “гладкие” конденсаторы. Всюду ниже, если не оговорено противное, $\mathcal{C} = (\mathcal{B}, \mathcal{E})$ – конденсатор на $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}_p$, у которого множества $\mathcal{B}$ и $\mathcal{E}$ ограничены конечным числом замкнутых аналитических жордановых кривых в $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}$ – потенциальная функция этого конденсатора, доопределенная нулем в $\overline{\mathcal{R}} \setminus \overline{\mathcal{B}}$, и $\mathcal{P}_\varepsilon$, $\varepsilon \geq 0$, – функция из § 3. Следуя [4], определим функцию $\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon$ на множестве $\{W \in \mathcal{R}(T_p) : \text{pr } W \in \overline{U}\}$, $U := \{w : |w| < 1\}$. Как уже отмечалось ранее, существует число N такое, что над каждой точкой круга $\overline{U}$ расположено не более чем N точек множества $\mathcal{B}$. Пусть w – произвольная фиксированная точка круга $\overline{U}$. Значения функции $\mathcal{P}_\varepsilon$ в точках W с проекцией $\text{pr } W = w$, взятые с учетом кратности, обозначим как

$$v_1(w) \geq v_2(w) \geq \dots \geq v_N(w), \quad w \in \overline{U}. \quad (4.1)$$

Если для данной точки w не существует точки $W \in \mathcal{B}$ с $\text{pr } W = w$ либо если указанных выше значений (с учетом кратности) меньше чем N , то соответствующие значения $v_k(w)$ полагаем равными нулю. Поступая так в каждой точке $w \in \overline{U}$, получим в $\overline{U}$ N непрерывных функций $v_k(w)$, $k = 1, \dots, N$. Для каждой пары функций (v_k, v_l) , $1 \leq k < l \leq N$, определим F -преобразование, которое сопоставляет этой паре пару других функций (v'_k, v'_l) :

$$\begin{aligned} v'_k(w) &= (\max(v_k^*(w), v_l^*(-w)))^*, & w \in \overline{U}, \\ v'_l(w) &= (\min(v_k^*(w), v_l^*(-w)))^*, & w \in \overline{U}. \end{aligned}$$

Положим

$$M_\rho(v) = \max\{v(w) : |w| = \rho\}, \quad m_\rho(v) = \min\{v(w) : |w| = \rho\}, \quad 0 \leq \rho \leq 1,$$

и заметим, что в результате F -преобразования выполняются неравенства

$$M_\rho(v'_k) = M_\rho(v_k), \quad m_\rho(v'_k) \geq m_\rho(v_k), \quad m_\rho(v'_k) \geq M_\rho(v'_l), \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

Проведем F -преобразование над парой (v_1, v_2) , затем над парой (v'_1, v_3) , над парой $((v'_1)', v_4)$ и т.д. В результате получим совокупность функций

$$(\dots((v'_1)')' \dots)', v'_2, v'_3, \dots, v'_N,$$

которую перенумеруем вновь соответственно как

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_N,$$

при этом имеем

$$M_\rho(v_1) \geq m_\rho(v_1) \geq M_\rho(v_k), \quad k = 2, \dots, N.$$

Далее повторим предыдущую процедуру с набором функций $v_2, \dots, v_N$, затем с $v_3, \dots, v_N$, пока, наконец, не получим совокупность функций $v_1, \dots, v_N$, удовлетворяющих неравенствам

$$m_\rho(v_k) \geq M_\rho(v_{k+1}), \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (4.2)$$

В случае $\rho = 1$ неравенства (4.2) превращаются в равенства. Действительно, пусть $\{\gamma(\rho_n)\}_{n=1}^\infty$ – последовательность окружностей, над которыми нет точек разветвления из $\mathcal{B}$ и $\rho_n > 1$, $\rho_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Ввиду непрерывности $\mathcal{P}_\varepsilon$ и условия 2) из определения класса $\mathfrak{R}_p$ множество значений функции $\mathcal{P}_\varepsilon$ над каждой окружностью $\gamma(\rho_n)$ есть отрезок (возможно, вырожденный). Вновь из непрерывности это свойство сохраняется и для окружности $\gamma(1)$, что влечет равенства в (4.2) при $\rho = 1$, так как множество значений функции $\mathcal{P}_\varepsilon$ над $|w| = 1$ совпадает с “суммарным” множеством значений функций v_k на $|w| = 1$, $k = 1, \dots, N$. Заметим, что в конце преобразований функций $v_k = v_k^*$, $k = 1, \dots, N$, и на каждом этапе преобразований функций v_k выполняется

$$\sum_{k=1}^N \text{mes}\{w : |w| = \rho, v_k(w) > 0\} = \text{mes}\{W \in \mathcal{R} : |\text{pr } W| = \rho, \mathcal{P}_\varepsilon(W) > 0\},$$

$$0 \leq \rho \leq 1.$$

Из определения класса $\mathfrak{R}_p$ следует, что правая часть этого равенства не превосходит $2\pi\rho p$ при любом ρ , $0 \leq \rho \leq 1$. Учитывая (4.2), заключаем, что $v_k \equiv 0$ при $k = p+1, \dots, N$. Положим

$$\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon(W) = v_k(\rho e^{i(|\varphi| - \pi(k-1))}), \quad W = (\rho, \varphi) \in \overline{\mathcal{D}}_k, \quad \text{pr } W \in \overline{U}, \quad k = 1, \dots, p.$$

При таком определении функция $\text{Sym } \mathcal{P}_\varepsilon$ задается дважды в точках разветвления поверхности $\mathcal{R}(T_p)$, лежащих над окружностью $|w| = 1$ на замыканиях (в $\mathcal{R}(T_p)$) двух соседних листов $\overline{\mathcal{D}}_k$ и $\overline{\mathcal{D}}_{k+1}$ ($1 \leq k \leq p-1$). Однако мы имеем дело с однозначной функцией, поскольку при $\rho = 1$ в (4.2) выполняются равенства. Сравним функцию $\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon$ с введенной в §3 функцией $\mathcal{P}_\varepsilon^*$ в точках

поверхности $\mathcal{R}(T_p)$ над окружностью $|w| = 1$. Обе функции непрерывны над $|w| = 1$, симметричны (т.е. принимают одинаковые значения в точках $(1, \pm\varphi)$), $0 \leq \varphi \leq \pi p$, и, кроме того, справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \text{mes}\{W \in \mathcal{R}(T_p) : |\text{pr } W| = 1, \widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon(W) > a\} \\ &= \sum_{k=1}^p \text{mes}\{w : |w| = 1, v_k(w) > a\} = \text{mes}\{W \in \mathcal{R} : |\text{pr } W| = 1, \mathcal{P}_\varepsilon(W) > a\} \\ &= \text{mes}\{W \in \mathcal{R}(T_p) : |\text{pr } W| = 1, \mathcal{P}_\varepsilon^*(W) > a\} \end{aligned}$$

при любых вещественных a . Следовательно, над окружностью $|w| = 1$ имеем $\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon = \mathcal{P}_\varepsilon^*$. Это позволяет определить однозначную функцию

$$\text{Sym } \mathcal{P}_\varepsilon(W) = \begin{cases} \widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon(W), & W \in \mathcal{R}(T_p), \text{ pr } W \in \overline{U}, \\ \mathcal{P}_\varepsilon^*(W), & W \in \overline{\mathcal{U}}. \end{cases}$$

Покажем сейчас, что при условии $\{W \in \mathcal{R} : 0 < \mathcal{P}(W) < 1\} = \mathcal{B} \setminus \mathcal{E}$ выполняются равенства

$$\{W \in \mathcal{R}(T_p) : \text{Sym } \mathcal{P}_0(W) > 0\} = \text{Sym } \mathcal{B}, \quad (4.3)$$

$$\{W \in \mathcal{R}(T_p) : \text{Sym } \mathcal{P}_0(W) = 1\} = \text{Sym } \mathcal{E} \quad (4.4)$$

($\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$). Рассмотрим сначала равенство (4.3). Пусть в некоторой точке W_0^* , $\text{pr } W_0^* = 0$, лежащей на листе $\mathcal{D}_l$, $1 \leq l \leq p$, поверхности $\mathcal{R}(T_p)$ выполняется $\text{Sym } \mathcal{P}(W_0^*) = \widetilde{\mathcal{P}}(W_0^*) > 0$. Тогда $v_1(0) \geq \dots \geq v_l(0) > 0$, и эта цепочка неравенств справедлива также на первом этапе преобразований функций v_k (4.1). Поэтому над $w = 0$ имеется по крайней мере l точек (с учетом кратности) поверхности $\mathcal{R}$, в которых $\mathcal{P}(W) > 0$, т.е. точек множества $\mathcal{B}$. Отсюда $\text{Sym } \mathcal{B}$ покрывает $w = 0$ по крайней мере l раз и, следовательно, $W_0^* \in \text{Sym } \mathcal{B}$. Наоборот, если W_0^* , $\text{pr } W_0^* = 0$ на листе $\mathcal{D}_l$ и $W_0^* \in \text{Sym } \mathcal{B}$, то над $w = 0$ имеется по крайней мере l точек поверхности $\mathcal{R}$, где $\mathcal{P}(W) > 0$, и, следовательно, в (4.1) $v_1(0) \geq \dots \geq v_l(0) > 0$. Это влечет $\widetilde{\mathcal{P}}(W_0^*) = \text{Sym } \mathcal{P}(W_0^*) > 0$. Пусть $W_0^* \in \mathcal{R}(T_p)$, $\text{pr } W_0^* = \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Sym } \mathcal{P}(W_0^*) > 0 & \iff \mathcal{P}^*(W_0^*) > 0 \iff \mathcal{P}(W_0) > 0 \\ & \iff W_0 \in \mathcal{B} \iff W_0^* \in \text{Sym } \mathcal{B}, \end{aligned}$$

где W_0 – точка поверхности $\mathcal{R}$, лежащая над бесконечностью. Пусть теперь $W_0^* = (\rho, \varphi) \in \mathcal{D}_l$, $0 < \rho < 1$, $1 \leq l \leq p$. Если сумма

$$\sum_{k=1}^p \text{mes}\{w : |w| = \rho, v_k(w) > 0\} \quad (4.5)$$

больше чем $2|\varphi|$, то $\text{Sym } \mathcal{P}((\rho, \varphi)) > 0$ и равная (4.5) величина

$$\text{mes}\{W \in \mathcal{R} : |\text{pr } W| = \rho, \mathcal{P}(W) > 0\} > 2|\varphi|.$$

Поэтому

$$\text{mes } \mathcal{B}(\rho) > 2|\varphi|, \quad (\rho, \varphi) \in \text{Sym } \mathcal{B}.$$

Таким образом, точка (ρ, φ) принадлежит одновременно левой и правой частям (4.3). Если сумма (4.5) меньше чем $2|\varphi|$, то $\text{Sym } \mathcal{P}((\rho, \varphi)) = 0$ и аналогично $(\rho, \varphi) \notin \text{Sym } \mathcal{B}$. В случае, когда сумма (4.5) равна $2|\varphi|$ и $\pi(l-1) \leq |\varphi| < \pi l$, из определений функции $\text{Sym } \mathcal{P} = \widetilde{\mathcal{P}}$ и симметризации Sym имеем $\widetilde{\mathcal{P}}((\rho, \varphi)) = 0$ и одновременно $(\rho, \varphi) \notin \text{Sym } \mathcal{B}$. Пусть теперь сумма (4.5) равна $2|\varphi| = 2\pi l$. Если при этом множество $\mathcal{B}$ l -кратно покрывает $\gamma(\rho)$, то из леммы 4.1 видно, что функции $v_1, \dots, v_l$ в (4.1) не обращаются в нуль на $\gamma(\rho)$. Поэтому $(\rho, \varphi) \in \text{Sym } \mathcal{B}$ и $\widetilde{\mathcal{P}}((\rho, \varphi)) > 0$. Если множество $\mathcal{B}$ не осуществляет l -кратного накрытия $\gamma(\rho)$, то $(\rho, \varphi) \notin \text{Sym } \mathcal{B}$ и по крайней мере одна из функций $v_1, \dots, v_l$ в (4.1) обращается в нуль на $\gamma(\rho)$. Поэтому $\widetilde{\mathcal{P}}((\rho, \varphi)) = 0$. Случай $W_0^* = (\rho, \varphi) \in \overline{\mathcal{U}}$ ($1 \leq \rho < \infty$) рассматривается так же и даже проще, только вместо (4.5) надо взять величину

$$\text{mes}\{W \in \mathcal{R}(T_p) : |\text{pr } W| = \rho, \mathcal{P}^*(W) > 0\}.$$

Равенство (4.3) доказано. Часть доказательства равенства (4.4) практически повторяет первую часть доказательства (4.3), где во всех функциональных неравенствах необходимо сделать замену “ > 0 ” на “ $= 1$ ”, $\mathcal{B}$ на $\mathcal{E}$ и выполнить другие очевидные изменения. Оставшаяся часть требует пояснения, и она относится к случаю, когда

$$\sum_{k=1}^p \text{mes}\{w : |w| = \rho, v_k(w) = 1\} = 2|\varphi|, \quad 0 < \rho < 1. \quad (4.6)$$

Пусть выполняется (4.6) и $\pi(l-1) < |\varphi| \leq \pi l$. Тогда $\text{Sym } \mathcal{P}((\rho, \varphi)) = 1$ и

$$\begin{aligned} \text{mes}\{W \in \mathcal{R} : |\text{pr } W| = \rho, \mathcal{P}(W) = 1\} &= 2|\varphi| \\ \implies \text{mes } \mathcal{E}(\rho) = 2|\varphi| &\implies (\rho, \varphi) \in \text{Sym } \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Пусть вновь выполняется (4.6) и $|\varphi| = \pi(l-1)$. Если при этом множество $\mathcal{E}$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$ $(l-1)$ -кратно, то $(\rho, \varphi) \notin \text{Sym } \mathcal{E}$, и с помощью леммы 4.1 легко получаем, что $\widetilde{\mathcal{P}}((\rho, \varphi)) < 1$. Если множество $\mathcal{E}$ не осуществляет $(l-1)$ -кратного накрытия $\gamma(\rho)$, то по определению $(\rho, \varphi) \in \text{Sym } \mathcal{E}$ и по крайней мере одна из функций v_k , $1 \leq k \leq l$, в (4.1) не равна тождественно единице на $\gamma(\rho)$. Следовательно, среди функций v_k , $l+1 \leq k \leq N$, есть функция, принимающая значение единица хотя бы в одной точке. Отсюда $\widetilde{\mathcal{P}}((\rho, \varphi)) = 1$. Равенство пересечений правой и левой частей в (4.4) с кругом $\overline{\mathcal{U}}$ выводится стандартным образом из определения равноизмеримой перестановки $\mathcal{P}^*(W)$. Это завершает доказательство (4.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. При доказательстве равенств (4.3) и (4.4) не использовалась “гладкость” конденсатора $\mathcal{C}$. Поэтому эти соотношения верны для произвольных конденсаторов, имеющих потенциальную функцию $\mathcal{P}$. Отсюда следует, в частности, что определение симметризации в § 1 по существу эквивалентно определению симметризации в работе [4].

В силу равенств (4.3) и (4.4) для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ справедливости включения

$$\begin{aligned} \{W \in \mathcal{R}(T_p) : \text{Sym } \mathcal{P}_\varepsilon(W) > 0\} &\subset \text{Sym } \mathcal{B}, \\ \{W \in \mathcal{R}(T_p) : \text{Sym } \mathcal{P}_\varepsilon(W) = 1\} &\supset \text{Sym } \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Кроме того, при $\varepsilon > 0$ функция $\text{Sym } \mathcal{P}_\varepsilon$ удовлетворяет условию Липшица локально в $\mathcal{R}(T_p)$. Действительно, по лемме 3.1 функция $\mathcal{P}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, удовлетворяет условию Липшица локально в $\mathcal{R}$. Отсюда следует липшицевость функций v_k , $k = 1, \dots, N$, в (4.1) в замкнутом круге $\bar{U}$. При последующих преобразованиях функций v_k липшицевость не меняется в силу утверждения 3.1, где $s = 0$ и $t = 1$. Поэтому функция $\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon$ удовлетворяет условию Липшица локально на множестве $\{W \in \mathcal{R}(T_p) : \text{pr } W \in \bar{U}\}$. По лемме 3.2 функция $\mathcal{P}_\varepsilon^*$ удовлетворяет условию Липшица локально на множестве $\bar{\mathcal{U}}$. Из сказанного выше следует локальная липшидовость функции $\text{Sym } \mathcal{P}_\varepsilon$ в $\mathcal{R}(T_p)$. Так как множества $\mathcal{B}$ и $\mathcal{E}$ ограничены конечным числом замкнутых аналитических жордановых кривых в $\mathcal{R}$, то граница множества $\text{Sym } \mathcal{B} \setminus \text{Sym } \mathcal{E}$ состоит из регулярных точек для задачи Дирихле и, возможно, конечного числа изолированных граничных точек. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{B}}$ ($\widetilde{\mathcal{E}}$) множество, полученное из $\text{Sym } \mathcal{B}$ ($\text{Sym } \mathcal{E}$) присоединением (удалением) изолированных граничных точек $\text{Sym } \mathcal{B}$ ($\text{Sym } \mathcal{E}$). Пусть $\mathcal{S}$ – потенциальная функция конденсатора $\mathcal{C} := (\widetilde{\mathcal{B}}, \widetilde{\mathcal{E}})$. По принципу Дирихле

$$I(\text{Sym } \mathcal{P}_\varepsilon, \mathcal{R}(T_p)) \geq I(\mathcal{S}, \mathcal{R}(T_p)) = \text{cap } \widetilde{\mathcal{C}} = \text{cap } \text{Sym } \mathcal{C}. \quad (4.8)$$

С другой стороны, в силу (3.1) и (3.2) имеем

$$\begin{aligned} I(\text{Sym } \mathcal{P}_\varepsilon, \mathcal{R}(T_p)) &= I(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon, \{W \in \mathcal{R}(T_p) : \text{pr } W \in U\}) + I(\mathcal{P}_\varepsilon^*, \mathcal{U}) \\ &\leq I(\mathcal{P}_\varepsilon, \{W \in \mathcal{R} : \text{pr } W \in U\}) + I(\mathcal{P}_\varepsilon, \mathcal{R}_\varepsilon) = I(\mathcal{P}_\varepsilon, \mathcal{R}). \end{aligned}$$

Неравенство для интегралов Дирихле от функций $\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon$ и $\mathcal{P}_\varepsilon$ вытекает непосредственно из утверждения 3.1 (где $s = 0$, $t = 1$) и из приведенного выше способа построения функций v_k , $k = 1, \dots, p$, и функции $\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon$. Таким образом, для $\varepsilon > 0$ выполняется

$$I(\mathcal{P}_\varepsilon, \mathcal{R}) \geq \text{cap } \text{Sym } \mathcal{C}. \quad (4.9)$$

Согласно лемме 3.1 предельный переход в (4.9) при $\varepsilon \rightarrow 0$ дает неравенство (1.1).

Предположим теперь, что $\mathcal{C} = (\mathcal{B}, \mathcal{E})$ – произвольный конденсатор⁶ на $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}_p$, $p > 1$, удовлетворяющий следующим условиям: поле конденсатора $\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}$ есть область на $\mathcal{R}$, существует потенциальная функция $\mathcal{P}$ конденсатора $\mathcal{C}$ и выполняется равенство

$$\text{cap } \mathcal{C} = \text{cap } \text{Sym } \mathcal{C}. \quad (4.10)$$

Пусть a и b – вещественные числа такие, что $0 < a < b < 1$, и линии уровня $\mathcal{P}(W) = a$, $\mathcal{P}(W) = b$ не проходят через точки разветвления поверхности $\mathcal{R}$ и точки, в которых

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial u} - i \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial v} = 0$$

(здесь $w = u + iv$ – локальный параметр). Ввиду аналитичности функции $\partial \mathcal{P} / \partial u - i \partial \mathcal{P} / \partial v$ в поле конденсатора $\mathcal{C}$ и локального строения в поле конденсатора $\mathcal{C}$ римановой поверхности $\mathcal{R}$ указанные точки не могут сгущаться к внутренней точке $\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}$. Поэтому этих точек не более чем счетное множество. Учитывая локальное строение линий уровня гармонических функций, легко заключаем, что при таких a и b множество $\{W : a < \mathcal{P}(W) < b\}$ ограничено

⁶Случай $p = 1$ рассмотрен по существу Дж. Дженкинсом в [1] и М. Оцукой в [17].

замкнутыми аналитическими жордановыми кривыми, а с учетом леммы 2.1 таких кривых конечное число (ср. [2; с. 110]). Рассмотрим конденсаторы

$$\mathcal{C}_{0a} = (\mathcal{B}, \{W : \mathcal{P}(W) \geq a\}), \quad \mathcal{C}_{ab} = (\{W : \mathcal{P}(W) > a\}, \{W : \mathcal{P}(W) \geq b\}), \\ \mathcal{C}_{b1} = (\{W : \mathcal{P}(W) > b\}, \mathcal{E}).$$

В поле каждого конденсатора $\mathcal{C}_{0a}$, $\mathcal{C}_{ab}$, $\mathcal{C}_{b1}$ функции соответственно $\mathcal{P}/a$, $(\mathcal{P} - a)/(b - a)$, $(\mathcal{P} - b)/(1 - b)$ совпадают с потенциальными функциями этих конденсаторов. Вычисления емкостей конденсаторов с применением формулы Грина дают

$$(\text{cap } \mathcal{C})^{-1} = (\text{cap } \mathcal{C}_{0a})^{-1} + (\text{cap } \mathcal{C}_{ab})^{-1} + (\text{cap } \mathcal{C}_{b1})^{-1}$$

(см. [2; теорема 4.3]). С другой стороны, по лемме 2.3

$$(\text{cap Sym } \mathcal{C})^{-1} \geq (\text{cap Sym } \mathcal{C}_{0a})^{-1} + (\text{cap Sym } \mathcal{C}_{ab})^{-1} + (\text{cap Sym } \mathcal{C}_{b1})^{-1}.$$

Учитывая доказанное ранее неравенство (1.1) для конденсаторов $\mathcal{C}_{0a}$, $\mathcal{C}_{ab}$, $\mathcal{C}_{b1}$ и равенство в (4.10), заключаем, что

$$\text{cap } \mathcal{C}_{ab} = \text{cap Sym } \mathcal{C}_{ab}$$

при любых a и b , указанных выше.

Для конденсаторов $\mathcal{C}_{ab}$ применимы построения и доказательства, приведенные ранее для конденсаторов $\mathcal{C} = (\mathcal{B}, \mathcal{E})$, у которых множества $\mathcal{B}$ и $\mathcal{E}$ ограничены конечным числом замкнутых аналитических жордановых кривых. Всюду далее будем считать, что в этих построениях конденсатор $\mathcal{C}$ – это конденсатор вида $\mathcal{C}_{ab}$, а произвольный конденсатор $\mathcal{C}$, по которому построен $\mathcal{C}_{ab}$, будем называть *исходным*. Итак, пусть выполняется равенство (4.10). Тогда на множестве $\text{Sym } \mathcal{B} \setminus \text{Sym } \mathcal{E}$ функция $\text{Sym } \mathcal{P}$ совпадает с потенциальной функцией $\mathcal{S}$ конденсатора $\tilde{\mathcal{C}}$. Действительно, ввиду непрерывности этих функций достаточно показать их совпадение (возможно, с точностью до постоянного слагаемого) в каждой связной компоненте множества $\text{Sym } \mathcal{B} \setminus \text{Sym } \mathcal{E}$, лежащей над любым кольцом $\Omega(s, t)$, над которым нет точек разветвления поля $\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}$, $0 \leq s < t \leq \infty$. Пусть $\Omega(s, t)$ – такое кольцо, и пусть в некоторой связной компоненте $\text{Sym } \mathcal{B} \setminus \text{Sym } \mathcal{E}$ над $\Omega(s, t)$ не выполняется $\text{Sym } \mathcal{P} - \mathcal{S} \equiv \text{const}$. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ над кольцом $\Omega(s, t)$ имеем $\mathcal{P}_\varepsilon = \mathcal{P}$ и $\text{Sym } \mathcal{P}_\varepsilon = \text{Sym } \mathcal{P}$. Пользуясь известными соотношениями для интегралов Дирихле, вытекающими из формулы Грина, получаем

$$I(\text{Sym } \mathcal{P}_\varepsilon, \mathcal{R}(T_p)) = I(\mathcal{S}, \mathcal{R}(T_p)) + I(\text{Sym } \mathcal{P}_\varepsilon - \mathcal{S}, \mathcal{R}(T_p)) \\ \geq \text{cap Sym } \mathcal{C} + I(\text{Sym } \mathcal{P} - \mathcal{S}, \Omega(s, t)) \quad (4.11)$$

(см., например, [2; с. 111]). Отсюда следует превышение левой части неравенства (4.8) над правой на постоянную величину, не зависящую от ε . Это превышение сохраняется в (4.9), что противоречит равенству (4.10). Итак, $\text{Sym } \mathcal{P} \equiv \mathcal{S}$ в поле конденсатора $\text{Sym } \mathcal{C}$, и в силу (4.3), (4.4) имеем $\tilde{\mathcal{C}} = \text{Sym } \mathcal{C}$. Предположим, что поле исходного конденсатора имеет точки над областью $|w| > 1$. Тогда при a , достаточно близких к нулю, и b , близких к единице,

поле конденсатора $\mathcal{C}$ вида $\mathcal{C}_{ab}$ также имеет точки над $|w| > 1$. Для любого кольца $\Omega(s, t)$, $1 \leq s < t \leq \infty$, не содержащего проекций точек разветвления $\mathcal{R}$ в $\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}$, имеет место равенство

$$I(\mathcal{P}, \{W \in \mathcal{R} : \text{pr } W \in \Omega(s, t)\}) = I(\mathcal{P}^*, \{W \in \mathcal{U} : \text{pr } W \in \Omega(s, t)\}). \quad (4.12)$$

Действительно, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ над кольцом $\Omega(s, t)$ $\mathcal{P}_\varepsilon = \mathcal{P}$, и если равенство (4.12) неверно, то с учетом (3.2) левая часть неравенства (4.9) строго больше правой части плюс положительное число, не зависящее от ε . Последнее противоречит равенству (4.10). При выполнении равенства (4.12) из леммы 3.2 следует, что кольцо $\Omega(s, t)$ можно разбить на конечное число концентрических колец, над каждым из которых функция $\mathcal{P}$ совпадает с $\mathcal{P}^*$ с точностью до поворота. Если Ω – одно из таких колец и если $\{W : 0 < \mathcal{P}(W) < 1, \text{ pr } W \in \Omega\} \neq \emptyset$, то из сказанного выше вытекает, в частности, существование точек W_0, W_0^* , $|\text{pr } W_0| = |\text{pr } W_0^*| \in \dot{\Omega}$, принадлежащих полям конденсаторов соответственно $\mathcal{C}$ и $\text{Sym } \mathcal{C}$ вместе с некоторыми однолиственными кругами $\mathcal{U}(W_0, r)$, $\mathcal{U}(W_0^*, r)$, в которых выполняются равенства

$$\mathcal{P}(W) = \mathcal{P}^*(W^*) = \mathcal{S}(W^*). \quad (4.13)$$

Здесь $W^* = \Phi_\theta(W)$ – вращение окрестности $\mathcal{U}(W_0, r)$ на $\mathcal{U}(W_0^*, r)$ на некоторый угол θ вокруг начала координат. Далее считаем $\theta = 0$. Обозначим через $\mathcal{G}$ связную компоненту поля конденсатора $\mathcal{C}$, содержащую точку W_0 , а через $\mathcal{G}^*$ – связную компоненту поля $\text{Sym } \mathcal{C}$, содержащую W_0^* , из которых удалены точки разветвления поверхностей соответственно $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}(T_p)$, а также все точки, проекции которых совпадают с проекциями точек разветвления обеих поверхностей из $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^*$. Построим отображение $\Psi: \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{G}$, $\Psi(W_0^*) = W_0$, и покажем, что за исключением ситуации (ii) в теореме 1.1 это отображение является движением. Пусть W_1^* – произвольная точка области $\mathcal{G}^*$, и пусть γ^* – кривая в $\mathcal{G}^*$, соединяющая точки W_0^* и W_1^* . Рассмотрим в $\mathcal{G}^*$ цепь однолистных кругов $\{\mathcal{U}_k^*\}_{k=1}^n$ с центрами на γ^* такую, что $\mathcal{U}_1^* = \mathcal{U}(W_0^*, r)$, $\mathcal{U}_k^* \cap \mathcal{U}_{k+1}^* \neq \emptyset$, $k = 1, \dots, n-1$, и центр круга $\mathcal{U}_n^*$ есть точка W_1^* .

Введем обозначения:

$U_k = \text{pr } \mathcal{U}_k^*$, $k = 1, \dots, n$;

f_* – отображение проектирования, заданное на $\mathcal{G}^*$;

f – отображение проектирования, заданное на $\mathcal{G}$.

В силу (4.13) в окрестности $\mathcal{U}_1 := \mathcal{U}(W_0, r)$ выполняется

$$\mathcal{P}(W) = \mathcal{S}(f_*^{-1}(f(W))), \quad (4.14)$$

где $f_*^{-1}: U_1 \rightarrow \mathcal{U}_1^*$. Пусть $\mathcal{U}_2$ – связная часть множества $\{W \in \mathcal{G} : \text{pr } W \in U_2\}$, имеющая непустое пересечение с $\mathcal{U}_1$. По теореме единственности для гармонических функций заключаем, что в $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ выполняется (4.14), где $f_*^{-1}: U_k \rightarrow \mathcal{U}_k^*$, $k = 1, 2$. Поскольку в неизолированных граничных точках областей $\mathcal{G}^*$, $\mathcal{G}$ функции соответственно $\mathcal{S}$ и $\mathcal{P}$ равны нулю либо единице, а во внутренних точках строго больше нуля и меньше единицы, то $\mathcal{U}_2$ необходимо является однолиственным кругом, лежащим над U_2 . Повторяя предыдущие рассуждения с заменой круга $\mathcal{U}_1$ на круг $\mathcal{U}_2$ и т.д., получим в области $\mathcal{G}$ цепь однолистных кругов $\{\mathcal{U}_k\}_{k=1}^n$ такую, что $\mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}_{k+1} \neq \emptyset$, $k = 1, \dots, n-1$, и в каждом

круге $\mathcal{U}_k$ выполняется равенство (4.14), где под f_*^{-1} понимается непрерывная ветвь функции, обратной f_* , $f_*^{-1}: U_k \rightarrow \mathcal{U}_k^*$, $k = 1, \dots, n$. Обозначим через W_1 центр круга $\mathcal{U}_n$ и положим

$$\Psi(W_1^*) = W_1.$$

В области $\mathcal{G}$ определена кривая

$$\gamma = f^{-1}(f_*(\gamma^*)),$$

$f^{-1}: U_k \rightarrow \mathcal{U}_k$, $k = 1, \dots, n$, которую назовем результатом *переноса* кривой γ^* с $\mathcal{G}^*$ на $\mathcal{G}$. Аналогично определяется перенос кривой γ с $\mathcal{G}$ на $\mathcal{G}^*$. Предположим, что функция Ψ неоднозначная, т.е. существуют точка $W_1^* \in \mathcal{G}^*$ и две кривые γ_1^*, γ_2^* в $\mathcal{G}^*$, соединяющие точки W_0^* и W_1^* так, что результаты переноса этих кривых на $\mathcal{G}$ суть кривые γ_1, γ_2 , соединяющие точку W_0 с различными точками соответственно W_{11} и W_{12} , $\text{pr } W_{1k} = \text{pr } W_1^*$, $k = 1, 2$. В силу (4.14) в области $\mathcal{G}$ существуют однолиственный круг с центром в W_{11} и однолиственный круг с центром в W_{12} такие, что в точках этих кругов с одинаковыми проекциями функция $\mathcal{P}$ принимает одинаковые значения. По теореме единственности это свойство функции $\mathcal{P}$ сохраняется вдоль подходящей цепи однолистных кругов в $\mathcal{G}$, “нанизанных” на γ_1 , и соответствующей цепи однолистных кругов в $\mathcal{G}$, “нанизанных” на некоторую кривую $\tilde{\gamma}_1$ ($\text{pr } \tilde{\gamma}_1 = \text{pr } \gamma_1$), соединяющую точку W_{12} с точкой $W_{02} \neq W_0$, $\text{pr } W_{02} = \text{pr } W_0 \in \dot{\Omega}$. Так как над кольцом Ω потенциальная функция $\mathcal{P}$ совпадает с функцией $\mathcal{P}^*$ с точностью до поворота, то функция $\mathcal{P}$ необходимо является постоянной на замкнутых кривых, p -кратно покрывающих окружности $\gamma(\rho)$, $\rho_0 - \varepsilon < \rho < \rho_0 + \varepsilon$, из кольца Ω , $\rho_0 = |\text{pr } W_0|$, ε – некоторое положительное число. Следовательно, над кольцом $\rho_0 - \varepsilon < |w| < \rho_0 + \varepsilon$ функция $\mathcal{P}$ совпадает с поднятием на $\mathcal{G}$ функции вида

$$(b - a) \frac{\log |w/(\rho_0 - \varepsilon)|}{\log[(\rho_0 + \varepsilon)/(\rho_0 - \varepsilon)]} + a, \quad (4.15)$$

где a и b – вещественные числа. По теореме единственности это совпадение имеет место во всем поле конденсатора $\mathcal{C}$, т.е. выполняется ситуация (ii) из теоремы 1.1. В противном случае Ψ – однозначная функция. Предположим, что Ψ не является взаимно однозначным отображением, т.е. существуют две различные точки W_1^* и W_2^* , принадлежащие $\mathcal{G}^*$, и две кривые γ_1^*, γ_2^* в $\mathcal{G}^*$, соединяющие точки соответственно W_0^* , W_1^* и W_0^* , W_2^* , такие, что результат переноса этих кривых на $\mathcal{G}$ суть кривые γ_1 и γ_2 , соединяющие точку W_0 с некоторой точкой W_1 . С учетом (4.14) на $\mathcal{G}^*$ существуют однолистные круги с центрами в точках W_1^* и W_2^* , обладающие тем свойством, что в точках этих кругов с одинаковыми проекциями функция $\mathcal{S}$ и, следовательно, функция $\mathcal{P}^*$ принимают одинаковые значения. Отсюда, как и выше, получаем совпадение функции $\mathcal{S}$ над некоторым кольцом $\rho_0 - \varepsilon < |w| < \rho_0 + \varepsilon$ с поднятием на $\mathcal{G}^*$ функции (4.15). Это влечет выполнение ситуации (ii) для конденсаторов $\text{Sym } \mathcal{C}$ и $\mathcal{C}$. Пусть теперь W_1 – произвольная точка области $\mathcal{G}$ и γ – кривая в $\mathcal{G}$, соединяющая эту точку с W_0 . Перенос кривой γ с $\mathcal{G}$ на $\mathcal{G}^*$ дает кривую γ^* , соединяющую некоторую точку W_1^* с точкой W_0^* . Ясно, что $\Psi(W_1^*) = W_1$. Итак, за исключением ситуации (ii), отображение Ψ является биекцией области $\mathcal{G}^*$ на $\mathcal{G}$. Кроме того, Ψ сохраняет расстояние. Действительно, если W_1^* и W_2^* – произвольные точки

области $\mathcal{G}^*$ и кривая γ^* соединяет эти точки в $\mathcal{G}^*$, то перенос этой кривой γ (от точки W_1^* или W_2^*) в $\mathcal{G}$ соединяет точки $W_k = \Psi(W_k^*)$, $k = 1, 2$. Так как длина кривой при переносе сохраняется, то отсюда имеем

$$d_{\mathcal{G}^*}(W_1^*, W_2^*) \geq d_{\mathcal{G}}(W_1, W_2).$$

Неравенство в другую сторону получим при рассмотрении обратного отображения $\Phi = \Psi^{-1}$. Доопределяя отображение Ψ по непрерывности в изолированных граничных точках области $\mathcal{G}^*$, получим движение связной компоненты поля конденсатора $\text{Sym } \mathcal{C}$, содержащей точку W_0^* , на связную компоненту поля $\mathcal{C}$, содержащую W_0 ($\Psi = \Phi_0^{-1}$). Напомним, что мы рассматривали конденсатор $\mathcal{C}$ вида $\mathcal{C}_{ab}$, $0 < a < b < 1$. Любая точка поля исходного конденсатора принадлежит связной компоненте поля $\mathcal{C}_{ab}$, содержащей точку W_0 , при некоторых a и b . Поэтому в случае равенства (4.10) для исходного конденсатора также имеет место либо ситуация (i), либо (ii). Осталось рассмотреть случай равенства (4.10), когда поле исходного конденсатора лежит над кругом U . Всюду ниже под конденсатором $\mathcal{C}$ будем вновь понимать конденсатор вида $\mathcal{C}_{ab}$, поле которого также лежит над кругом U . Можно считать, что поле этого конденсатора связно. Предположим, что в поле конденсатора $\mathcal{C}$ имеется хотя бы одна точка разветвления W' поверхности $\mathcal{R}$. Из непрерывности потенциальной функции $\mathcal{P}$ следует, что в любой достаточно малой окрестности точки W' найдутся по крайней мере две точки с одной проекцией, отличной от $\text{pr } W'$, в которых функция $\mathcal{P}$ принимает одинаковые значения. Следовательно, при малых $\varepsilon > 0$ на множестве $\{W : 0 < \mathcal{P}_\varepsilon(W) < 1\}$ найдутся две точки, пусть W_1 и W_2 , не зависящие от $\varepsilon \rightarrow 0$, такие, что $\text{pr } W_1 = \text{pr } W_2 =: w \in U$ и $\mathcal{P}_\varepsilon(W_1) = \mathcal{P}_\varepsilon(W_2)$. Применяя теорему о среднем значении для гармонических функций, заключаем, что для некоторых функций v_k и v_j из совокупности (4.1) выполняется следующее. Либо эти функции не являются гармоническими в окрестности точки w , либо в окрестности этой точки $v_k = v_j$, $1 \leq k < j \leq N$. Отсюда и из теоремы единственности вытекает, что либо в поле конденсатора $\mathcal{C}$ нет точек разветвления поверхности $\mathcal{R}$, либо существует функция v_j из (4.1), не являющаяся гармонической на множестве $\{w : 0 < v_j(w) < 1\} \setminus \bigcup_{k=1}^n \text{pr } \mathcal{U}(W_k, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, либо при $\varepsilon = 0$ число не равных тождественно нулю функций в (4.1) равно l , $2 \leq l \leq p$, и

$$v_k(w) = v_1(w) \quad \text{в } U, \quad k = 2, \dots, l \quad (4.16)$$

(см. определение функции $\mathcal{P}_\varepsilon$ и окрестностей $\mathcal{U}(W_k, \varepsilon)$ перед леммой 3.1). В первом случае ввиду связности поля можно применить утверждение 3.2, согласно которому из (4.10) следует, что поле конденсатора $\mathcal{C}$ совпадает с полем $\text{Sym } \mathcal{C}$ с точностью до поворота вокруг начала координат. Во втором случае обозначим через G_j множество $\{w \in \bar{U} : 0 < v_j(w) < 1\}$, к которому присоединены изолированные граничные точки, и пусть u_j – решение задачи Дирихле в G_j с граничными значениями, как у функции v_j . Пусть числа c и d таковы, что $0 < c < d < 1$, и линии уровня $u_j = c$, $u_j = d$ не проходят через точки, в которых $\partial u_j / \partial u - i \partial u_j / \partial v = 0$. Положим $\tilde{v}_j = (u_j - c) / (d - c)$ на множестве $\{w \in G_j : c \leq u_j(w) \leq d\}$ и доопределим $\tilde{v}_j$ в $\bar{U}$ по непрерывности нулем либо единицей. Функция $\tilde{v}_j$ является липшицевой в $\bar{U}$, и, кроме того, с точностью

до конечного числа изолированных точек выполняются включения

$$\begin{aligned} \{w : \tilde{v}_j(w) > 0\} &\subset \{w : v_j(w) > 0\}, \\ \{w : \tilde{v}_j(w) = 1\} &\supset \{w : v_j(w) = 1\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

По принципу Дирихле для подходящих значений c , d и $\delta > 0$ имеем

$$I(v_j, U) > \frac{1}{(d-c)^2} I(u_j, G_j) + \delta \geq I(\tilde{v}_j, U) + \delta, \quad (4.18)$$

причем δ не меняется при малых $\varepsilon \rightarrow 0$ (мы вновь воспользовались превышением интеграла Дирихле от произвольной функции над интегралом Дирихле от гармонической функции с теми же граничными значениями, как это было сделано в (4.11)). Заменяем в определении функции $\mathcal{P}_\varepsilon$ функцию v_j на $\tilde{v}_j$, оставив неизменными функции v_k , $k \neq j$, $1 \leq k \leq N$, и сохранив все последующие преобразования. В силу (4.17) вновь будут выполняться включения (4.7), и с учетом (4.18) и утверждения 3.1 имеют место неравенства

$$\begin{aligned} I(\mathcal{P}_\varepsilon, \mathcal{R}) &\geq \sum_{k=1}^N I(v_k, U) > I(\tilde{v}_j, U) + \delta + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N I(v_k, U) \\ &\geq I(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon, \{W \in \mathcal{R}(T_p) : \text{pr } W \in U\}) + \delta = I(\text{Sym } \mathcal{P}_\varepsilon, \mathcal{R}(T_p)) + \delta \\ &\geq \text{cap } \text{Sym } \mathcal{C} + \delta. \end{aligned}$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, приходим к противоречию с равенством (4.10). Рассмотрим теперь случай (4.16), при котором функции v_k являются гармоническими в областях соответственно $\{w : 0 < v_k(w) < 1\}$, $k = 1, \dots, l$. Пусть (v'_1, v'_2) – результат F -преобразования пары функций (v_1, v_2) . Если функция v'_k не является гармонической на множестве $\{w : 0 < v'_k(w) < 1\}$, то, заменяя ее на гармоническую подобно тому, как заменили выше v_j на $\tilde{v}_j$, приходим к противоречию с (4.10), $k = 1, 2$. В противном случае применяем утверждение 3.2 к функциям $\max(v_1^*(w), v_2^*(-w)) = \max(v_1^*(w), v_1^*(-w))$ и $\min(v_1^*(w), v_1^*(-w))$. Строгие неравенства

$$\begin{aligned} I(\max(v_1^*(w), v_1^*(-w), U)) &> I(v'_1, U), \\ I(\min(v_1^*(w), v_1^*(-w), U)) &> I(v'_2, U) \end{aligned}$$

вновь приводят к противоречию с (4.10), а случай равенства для обеих функций возможен лишь тогда, когда функция v_1^* (и, следовательно, v_1) является постоянной на окружностях $\gamma(\rho)$, $0 \leq \rho \leq 1$. Учитывая (4.16), делаем вывод, что выполняется ситуация (ii). Утверждение о знаке равенства для исходного конденсатора вытекает из предыдущего и предельных переходов $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 1$.

Достаточность условия (i) для равенства (1.1) следует из конформной инвариантности емкости конденсатора. Если для конденсатора $\mathcal{C}$ выполняется условие (ii), то оно выполняется и для конденсатора $\text{Sym } \mathcal{C}$. В этом случае в поле конденсатора $\mathcal{C}$ потенциальная функция этого конденсатора совпадает с поднятием функции

$$\frac{\log |w/s|}{\log(t/s)} \quad \text{либо} \quad \frac{\log |w/t|}{\log(s/t)},$$

$w \in \Omega(s, t)$, на риманову поверхность $\mathcal{R}$, а в поле конденсатора $\text{Sym } \mathcal{C}$ его потенциальная функция совпадает с поднятием одной из указанных функций на поверхность $\mathcal{R}(T_p)$. В обоих случаях емкости конденсаторов $\mathcal{C}$ и $\text{Sym } \mathcal{C}$ равны величине $(2\pi l)/\log(t/s)$.

Теорема 1.1 доказана.

Автор выражает благодарность С. П. Суетину и Л. В. Ковалеву за полезные обсуждения результатов статьи.

Список литературы

- [1] Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, ИЛ, М., 1962, 265 с.; пер. с англ.: J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mapping*, *Ergeb. Math. Grenzgeb. (N.F.)*, **18**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1958, vi+169 pp.
- [2] W. K. Hayman, *Multivalent functions*, 2nd ed., Cambridge Tracts in Math., **110**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994, xii+263 pp.
- [3] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009, 400 с.
- [4] В. Н. Дубинин, “Новая версия круговой симметризации с приложениями к p -листным функциям”, *Матем. сб.*, **203**:7 (2012), 79–94; англ. пер.: V. N. Dubinin, “A new version of circular symmetrization with applications to p -valent functions”, *Sb. Math.*, **203**:7 (2012), 996–1011.
- [5] Г. Поля, Г. Сегё, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, Физматгиз, М., 1962, 336 с.; пер. с англ.: G. Pólya, G. Szegő, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, *Ann. of Math. Stud.*, **27**, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1951, xvi+279 pp.
- [6] В. Н. Дубинин, “Экстремальные задачи Гретша и Тейхмюллера на римановой поверхности”, *Матем. заметки*, **92**:6 (2012), 834–843; англ. пер.: V. N. Dubinin, “The Grötzsch and Teichmüller extremal problems on a Riemann surface”, *Math. Notes*, **93**:1 (2013), 50–57.
- [7] V. N. Dubinin, “Four-point distortion theorem for complex polynomials”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **59**:1 (2014), 59–66.
- [8] В. Н. Дубинин, “Неравенство марковского типа и нижняя оценка модулей критических значений полиномов”, *Докл. РАН*, **451**:5 (2013), 495–497; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Markov-type inequality and a lower bound for the moduli of critical values of polynomials”, *Dokl. Math.*, **88**:1 (2013), 449–450.
- [9] В. Н. Дубинин, “Симметризация конденсаторов и неравенства для многолистных в круге функций”, *Матем. заметки*, **94**:6 (2013), 846–856; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Symmetrization of condensers and inequalities for functions multivalent in a disk”, *Math. Notes*, **94**:6 (2013), 876–884.
- [10] В. Н. Дубинин, “К теореме Дженкинса о покрытии окружностей голоморфными в круге функциями”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 28, Зап. научн. сем. ПОМИ, **418**, ПОМИ, СПб., 2013, 60–73; англ. пер.: V. N. Dubinin, “On the Jenkins circles covering theorem for functions holomorphic in a disk”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **200**:5 (2014), 551–558.
- [11] А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций*, Наука, М., 1968, 648 с.; пер. с нем.: A. Hurwitz, R. Courant, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, *Grundlehren Math. Wiss.*, **3**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1964, xiii+706 pp.

- [12] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Изд-во ЛГУ, Л., 1950, 255 с.; англ. пер.: S. L. Sobolev, *Applications of functional analysis in mathematical physics*, Transl. Math. Monogr., **7**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1963, vii+239 pp.
- [13] M. Nakai, “Dependence of Dirichlet integrals upon lumps of Riemann surfaces”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **81**:7 (2005), 131–133.
- [14] M. Nakai, “The dependence of capacities on moving branch points”, *Nagoya Math. J.*, **186** (2007), 1–27.
- [15] В. Н. Дубинин, “Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного”, *УМН*, **49**:1(295) (1994), 3–76; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable”, *Russian Math. Surveys*, **49**:1 (1994), 1–79.
- [16] С. Стойлов, *Теория функций комплексного переменного*, т. 2, ИЛ, М., 1962, 413 с.; пер. с румын.: S. Stoilow, *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, v. 2: *Funcții armonice. Suprafețe Riemanniene*, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, Bucharest, 1958, 378 pp.
- [17] M. Ohtsuka, *Dirichlet problem, extremal length, and prime ends*, Van Nostrand Reinhold Math. Ser., Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1970, 326 pp.
- [18] A. Baernstein, II, “A unified approach to symmetrization”, *Partial differential equations of elliptic type* (Cortona, 1992), Sympos. Math., **35**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994, 47–91.
- [19] F. Brock, A. Yu. Solynin, “An approach to symmetrization via polarization”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:4 (2000), 1759–1796.
- [20] J. E. Brothers, W. P. Ziemer, “Minimal rearrangements of Sobolev functions”, *J. Reine Angew. Math.*, **384** (1988), 153–179.
- [21] В. А. Шлык, “К теореме единственности для симметризации произвольных конденсаторов”, *Сиб. матем. журн.*, **23**:2 (1982), 165–175; англ. пер.: V. A. Shlyk, “A uniqueness theorem for the symmetrization of arbitrary capacitors”, *Siberian Math. J.*, **23**:2 (1982), 267–287.
- [22] И. П. Митюк, *Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы*, Кубанский гос. ун-т, Краснодар, 1980, 90 с.

Владимир Николаевич Дубинин
(Vladimir N. Dubinin)

Дальневосточный федеральный университет,
г. Владивосток;
Институт прикладной математики ДВО РАН,
г. Владивосток
E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию
26.11.2013