Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Звонарёв, А. М. Райгородский, Д. В. Самиров,
А. А. Харламова, О хроматическом числе простран-
ства с запрещенным равносторонним треугольником,
Матем. сб., 2014, том 205, номер 9, 97–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8312>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 18:26:08

УДК 517.538

А. Е. Звонарёв, А. М. Райгородский,
Д. В. Самиров, А. А. Харламова

О хроматическом числе пространства с запрещенным равносторонним треугольником

Улучшена оценка Франкла–Рёдля для произведения чисел ребер в однородных гиперграфах с запретами на мощности пересечения ребер. С помощью этой оценки получены явные границы для хроматического числа пространства с запрещенными одноцветными равносторонними треугольниками.

Библиография: 31 название.

Ключевые слова: гиперграф, системы множеств с запрещенными пересечениями, евклидова теория Рамсея, хроматическое число пространства.

DOI: 10.4213/sm8312

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена классической проблеме отыскания хроматического числа пространства с запрещенной одноцветной конфигурацией.

Первоначально задача была поставлена Э. Нельсоном в 1950 г. Он предложил найти минимальное количество $\chi(\mathbb{R}^n)$ цветов, в которые можно так покрасить все точки евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, чтобы между одноцветными точками не было расстояния 1 (расстояние 1 запрещается между точками одного цвета). Величина $\chi(\mathbb{R}^n)$ была названа *хроматическим числом евклидова пространства*. Сейчас известно много результатов о хроматическом числе. Например, при $n \rightarrow \infty$ выполнены неравенства

$$(1.239 \dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n. \quad (1)$$

Нижняя оценка была получена А. М. Райгородским в работе [1]. Верхняя оценка принадлежит Д. Ларману и К. А. Роджерсу (см. [2]).

За прошедшие шестьдесят с лишним лет появились разнообразные обобщения задачи Нельсона. Например, рассматривались хроматические числа произвольных метрических пространств (см. [3]–[10]); изучались хроматические числа пространств с несколькими (и даже с бесконечно многими) запрещенными расстояниями (см. [7], [8], [11]–[14]). А одним из наиболее интересных направлений исследований стала так называемая *евклидова теория Рамсея*. В рамках

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00683), Программы Президента РФ поддержки молодых докторов наук (грант № МД-6277.2013.1) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2519.2012.1).

© А. Е. Звонарёв, А. М. Райгородский, Д. В. Самиров, А. А. Харламова, 2014

этой теории множество $S \subset \mathbb{R}^d$ называется *рамсеевским*, если для любого r существует такое $n_0 \geq d$, что при каждом $n \geq n_0$ и при любой раскраске пространства $\mathbb{R}^n$ в r цветов найдется конгруэнтная одноцветная копия S . Можно дать то же определение и в терминах хроматических чисел. А именно, пусть $\chi_S(\mathbb{R}^n)$ – минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить $\mathbb{R}^n$, чтобы одноцветные точки не образовывали множеств, конгруэнтных S . В этих обозначениях S рамсеевское тогда и только тогда, когда $\chi_S(\mathbb{R}^n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

В свете оценки (1) ясно, что любое двухточечное множество S является рамсеевским и даже, как говорят, экспоненциально рамсеевским. Для многих других множеств также доказана экспоненциальная рамсеевость. Например, это сделано для множества вершин произвольного симплекса и для декартовых произведений экспоненциально рамсеевских множеств (см. [15]–[18]). Однако всякий раз это делается неявно, так что выписать оценку вида $\chi_S(\mathbb{R}^n) \geq (c + o(1))^n$ с конкретной $c > 1$ не представляется возможным.

Из сказанного выше ясно, что если S – это тройка вершин равностороннего треугольника, то S – экспоненциально рамсеевское множество (обозначим его Δ). Впервые этот факт был доказан в работах [15]–[17]. Ключевыми в доказательстве являются теоремы 1.4 и 1.7 из статьи [16]. Эти теоремы представляют значительный самостоятельный интерес, так как в них оценивается количество ребер в гиперграфах с запрещенными пересечениями и в этом ключе они важны не только для комбинаторной геометрии, но и для экстремальной теории гиперграфов, и для теории кодирования (при построении кодов с запрещенными хэмминговыми расстояниями; см. [19]).

Настоящую работу мы построим следующим образом. В § 2 приведем формулировку теоремы 1.4 из статьи [16] и сформулируем новый результат, который конкретизирует и значительно уточняет оценку в той теореме. В § 3 дадим точную формулировку теоремы о нижней оценке величины $\chi_\Delta(\mathbb{R}^n)$ и укажем явное численное следствие этой теоремы, т.е. укажем некоторую явную константу $c > 1$ в неравенстве $\chi_\Delta(\mathbb{R}^n) \geq (c + o(1))^n$. В последующих параграфах мы докажем новые теоремы.

В завершение отметим, что дополнительно ознакомиться с проблематикой можно по статьям и книгам [18]–[23]. Отметим также, что есть недавние работы [24], [25], в которых изучается несколько иная задача о раскрасках пространств с запрещенными одноцветными треугольниками (см. конец § 3).

§ 2. Формулировка теоремы Франкла–Рёдля и ее уточнения

Следующую замечательную теорему в своей работе [16] доказали П. Франкл и В. Рёдль.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $H_1 = (V, E_1)$, $H_2 = (V, E_2)$ – два гиперграфа на одном и том же множестве V из n вершин, причем для любых $F_1 \in E_1$, $F_2 \in E_2$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \neq l$ (множества ребер E_1 , E_2 могут как пересекаться, так и не пересекаться). Если для некоторого $\eta \in (0, 1/4)$ выполнено $\eta n \leq l \leq (1/2 - \eta)n$, то существует константа $\varepsilon > 0$, зависящая только от η , с которой $|E_1| \cdot |E_2| \leq (4 - \varepsilon + o(1))^n$.

Разумеется, теорема 1 тем интереснее, чем больше n . Фактически мы видим, что при $n \rightarrow \infty$ максимум произведения мощностей двух совокупностей подмножеств n -элементного множества, в которых запрещены “перекрестные” пересечения величины $l = \Theta(n)$, в экспоненту раз меньше чем 4^n , т.е. чем просто максимум произведения мощностей двух совокупностей подмножеств n -элементного множества.

Заметим, что в теореме не предполагается однородность гиперграфов, т.е. мощности ребер могут быть разными. На самом деле в приложениях, которым посвящена наша статья, гиперграфы будут как раз однородны. Поэтому мы сделаем дополнительно допущение, состоящее в том, что для любого $i \in \{1, 2\}$ и любого $F \in E_i$ выполнено $|F| = d$.

Опять же, если говорить о приложениях, то наиболее ценными являются ситуации, когда для каждого n есть своя пара гиперграфов H_1^n, H_2^n , для которых d (мощность каждого ребра) – это функция от n , имеющая асимптотику $d \sim an$, $a \in (0, 1/2)$, при $n \rightarrow \infty$, а l (величина запрета) – это функция от n , имеющая асимптотику $l \sim \rho n$, $\rho \in (0, a)$. В таких ситуациях величина ε из теоремы 1 зависит по-прежнему только от ρ и никак не учитывает значения a . Более того, зависимость функции ε от величины ρ в теореме 1 сильно неявная.

Нам удалось, во-первых, существенно уточнить теорему, во-вторых, сделать оценку зависящей также от a и, в-третьих, явно описать зависимость ε от ρ и a .

Итак, пусть $H_1^n = (V^n, E_1^n)$, $H_2^n = (V^n, E_2^n)$ – гиперграфы, у которых $V^n = \{1, \dots, n\}$, для любого i и для любого $F \in E_i^n$ выполнено $|F| = d(n) \sim an$, $a \in (0, 1/2)$, $n \rightarrow \infty$, а также для любых $F_1 \in E_1^n$, $F_2 \in E_2^n$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \neq l(n) \sim \rho n$, $\rho \in (0, a)$, $n \rightarrow \infty$.

Введем ряд параметров. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ – положительные вещественные числа, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, причем $\alpha + \beta < 1$. Пусть далее $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, \alpha + \beta)$. Положим

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 - \alpha - \beta + \gamma_1, & \mu_2 &= 1 - \alpha - \beta + \gamma_2, \\ a_1 &= \min \left\{ a - \alpha_1 - \beta + \gamma_1, \frac{\mu_1}{2} \right\}, & a_2 &= \min \left\{ a - \alpha_1 - \beta + \gamma_2, \frac{\mu_2}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Теперь введем некоторую величину g_1 . Для этого определим функцию энтропии $H(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$ и рассмотрим несколько случаев. Если $a_1 = \mu_1/2$, то

$$g_1 = 2^{2H\left(\frac{1+\beta}{2\mu_1}\right)\mu_1}.$$

Если $a_1 = a - \alpha_1 - \beta + \gamma_1$ и $a_1 + \beta \geq \mu_1/2$, то

$$g_1 = \min \left\{ 2^{2H\left(\frac{a_1}{\mu_1}\right)\mu_1}, 2^{H\left(\frac{a_1}{\mu_1}\right)\mu_1 + H\left(\frac{a_1+\beta}{\mu_1}\right)\mu_1}, 2^{2H\left(\frac{1+\beta}{2\mu_1}\right)\mu_1} \right\}.$$

Если $a_1 = a - \alpha_1 - \beta + \gamma_1$ и $a_1 + \beta < \mu_1/2$, то

$$g_1 = \min \left\{ 2^{2H\left(\frac{a_1}{\mu_1}\right)\mu_1}, 2^{2H\left(\frac{1+\beta}{2\mu_1}\right)\mu_1} \right\}.$$

Для $\delta \in (0, 1)$ положим

$$\begin{aligned} f_1(\delta) &= \inf \{ (1+y)(1-x) : (1+y)^2 \leq 1+\delta, (1+x)(1-y) \leq 1+\delta, \\ &\quad x > 0, y > 0 \}, \end{aligned}$$

$$f_2(\alpha, \beta, \delta) = \alpha \ln(1 + \delta) + \beta \ln f_1(\delta) + \ln(1 - \delta),$$

$$\delta_1 = \sup \left\{ \delta : \sup \left\{ \frac{\min_{\gamma_1} (g_1/4^{\mu_1})}{(1 + \delta)^\alpha f_1^\beta(\delta)} : \beta = \rho - \alpha_1, \right. \right. \\ \left. \left. \alpha + \beta \geq \rho, f_2(\alpha, \beta, \delta) \leq 0 \right\} < 1 - \delta \right\}.$$

Далее похожим образом определим δ_2 . А именно, пусть

$$\kappa = \frac{\beta}{\mu_2} - \frac{1}{2}, \quad \lambda \in \left(\frac{1}{2} - \frac{a_2}{\mu_2}, \kappa \right).$$

Если $a_2 + (\kappa - \lambda)\mu_2 \geq \mu_2/2$, то положим

$$g_2(\lambda) = \min \left\{ 2^{2H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2}, 2^{H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2 + H\left(\frac{a_2 + (\kappa - \lambda)\mu_2}{\mu_2}\right)\mu_2}, 2^{2H\left(\frac{1 + (\kappa - \lambda)\mu_2}{2\mu_2}\right)\mu_2} \right\}.$$

Иначе

$$g_2(\lambda) = \min \left\{ 2^{2H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2}, 2^{2H\left(\frac{1 + (\kappa - \lambda)\mu_2}{2\mu_2}\right)\mu_2} \right\}.$$

Если $a_2 = \mu_2/2$, то

$$h(\lambda) = \max \left\{ 2^{\mu_2} \cdot 2^{H\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\mu_2}, 2^{2H\left(\frac{1 + \kappa - \lambda}{2}\right)\mu_2} \right\},$$

иначе

$$h(\lambda) = \min \left\{ 2^{2H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2}, \max \left\{ 2^{H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2} \cdot 2^{H\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\mu_2}, g_2(\lambda) \right\} \right\}.$$

Наконец, $\xi = \min_\lambda h(\lambda)$ и

$$\delta_2 = \sup \left\{ \delta : \sup \left\{ \frac{\min_{\gamma_2: \kappa > 0} (\xi/4^{\mu_2})}{(1 + \delta)^\alpha f_1^\beta(\delta)} : \rho - \alpha_1 = 1 - \alpha - \beta, \right. \right. \\ \left. \left. \alpha + \beta \geq 1 - \rho, f_2(\alpha, \beta, \delta) \leq 0 \right\} < 1 - \delta \right\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Положим $\varepsilon = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Имеет место неравенство

$$|E_1^n| \cdot |E_2^n| \leq (4 - 4\varepsilon + o(1))^n.$$

В случае, когда $a = 1/2$, $\rho = 1/4$, теорема 1 имела следствие, сформулированное как следствие 1.2 в работе [16]: в обозначениях теоремы 2 выполнено неравенство

$$|E_1^n| \cdot |E_2^n| \leq (3.96 + o(1))^n.$$

При тех же параметрах теорема 2 дает оценку

$$|E_1^n| \cdot |E_2^n| \leq (3.284 \dots + o(1))^n.$$

Аналогичные усиления имеют место и в других случаях. Некоторые детали вычислений мы приведем в § 4.

Теорему 2 мы докажем в § 5.

§ 3. Новая оценка хроматического числа

Пусть множество $\mathfrak{M}$ состоит из всех возможных упорядоченных наборов чисел $\mathbf{v} = (v, u, w, v', \theta)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} v &\in \left(0, \frac{1}{2}\right), & u &\in (0, 1), & w &\in \left(0, \frac{u}{2}\right), & v - w &\in \left(0, \frac{1 - u}{2}\right), \\ v' &\in (0, v), & \theta &\in (0, w), & v' - \theta &< v - w, & \theta &< v', \\ 1 - 2v + v' &> u - 2w + \theta. \end{aligned}$$

Для каждого $\mathbf{v} \in \mathfrak{M}$ положим

$$r = \frac{(2\theta - w)(2w - 2\theta)}{u - 4w + 4\theta}, \quad r' = \frac{(2v' - v)(2v - 2v')}{1 - 4v + 4v'}.$$

Напомним, что в теореме 2 величина ε — это функция двух аргументов, которые там обозначены a и ρ . Положим, наконец, при $x > 0$, $y > 0$, $y < x$

$$c_x^y = \frac{x^x}{y^y(x - y)^{x-y}}$$

и обозначим через $\mathbb{I}_A$ индикатор свойства A .

В перечисленных обозначениях имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Положим*

$$\begin{aligned} T = \left\{ (\tau, \mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathfrak{M} : \tau \cdot \frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_1^u c_{1-u}^{v-w}} &> \mathbb{I}_{\{\theta \leq w/2\}} \cdot c_u^{w-\theta} + \mathbb{I}_{\{\theta > w/2\}} \cdot \frac{c_u^{w-\theta} c_u^{2\theta-w+2r}}{c_w^{2\theta-w+r} c_{u-w}^r}, \right. \\ \frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_v^\theta (c_{v-v'}^{w-\theta})^2 c_{1-2v+v'}^{u-2w+\theta}} &> \mathbb{I}_{\{v' \leq v/2\}} \cdot c_1^{v-v'} + \mathbb{I}_{\{v' > v/2\}} \cdot \frac{c_1^{v-v'} c_1^{2v'-v+2r'}}{c_v^{2v'-v+r'} c_{1-v}^{r'}}, \\ \tau^2 \frac{(c_v^w)^2 (c_{1-v}^{u-w})^2}{(c_1^u)^2 (c_u^w)^2} &> \left(4 - 4 \cdot \varepsilon \left(\frac{v-w}{1-u}, \frac{v'-\theta}{1-u} \right) \right)^{1-u} \left. \right\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\chi_\Delta(\mathbb{R}^n) \geq \left(\sup_{(\tau, \mathbf{v}) \in T} \frac{c_1^v}{\tau} + o(1) \right)^n.$$

СЛЕДСТВИЕ. *Имеет место оценка*

$$\chi_\Delta(\mathbb{R}^n) \geq (1.052 \dots + o(1))^n.$$

Подобной явной оценки хроматического числа у П. Франкла и В. Рёдля не было. Было лишь доказано существование константы, большей единицы, в основании экспоненты. Более того, эффективного описания той константы из работы [16] получить невозможно.

В следующем параграфе мы опишем вычисления, позволившие получить наше следствие. В § 5 мы докажем теорему 2, а в § 6 — теорему 3. Отметим, что в статьях [24] и [25] изучено следующее хроматическое число: $\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n)$; это минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить точки

пространства, чтобы не существовало трех точек одного цвета, служащих вершинами равнобедренного треугольника с длиной боковых сторон 1 и длиной основания в пределах от $a < 1$ до $b > 1$. Конечно, $\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n) \geq \chi_{\Delta}(\mathbb{R}^n)$. И во многих случаях оценка из нашего следствия с учетом этого неравенства дает более сильные результаты. А именно, в работе [25] приведена таблица оценок (табл. 1).

Таблица 1

	1.10	1.15	1.2	1.25	1.30	1.35	1.40
0.02	1.053	1.079	1.104	1.129	1.153	1.177	1.200
0.04	1.049	1.075	1.100	1.125	1.149	1.173	1.196
0.06	1.044	1.070	1.095	1.120	1.144	1.168	1.191
0.08	1.038	1.064	1.089	1.114	1.138	1.162	1.185
0.10	1.032	1.057	1.082	1.107	1.131	1.155	1.177
0.12	1.025	1.050	1.075	1.099	1.123	1.147	1.170
0.14	1.020	1.043	1.067	1.091	1.115	1.138	1.161
0.16	1.015	1.036	1.059	1.083	1.106	1.130	1.153
0.18	1.010	1.029	1.051	1.074	1.098	1.121	1.143
0.20	1.006	1.023	1.044	1.066	1.089	1.111	1.134
0.22	1.002	1.018	1.037	1.058	1.080	1.103	1.125
0.24	—	1.013	1.030	1.051	1.072	1.094	1.115
0.26	—	1.009	1.025	1.043	1.064	1.085	1.106
0.28	—	1.004	1.019	1.037	1.056	1.076	1.097
0.30	—	1.001	1.015	1.030	1.049	1.068	1.088
0.32	—	—	1.010	1.025	1.042	1.060	1.080
0.34	—	—	1.005	1.020	1.035	1.053	1.072
0.36	—	—	1.002	1.014	1.030	1.046	1.064
0.38	—	—	1.002	1.009	1.024	1.040	1.057
0.40	—	—	1.002	1.005	1.018	1.034	1.050
0.42	—	—	1.002	1.005	1.013	1.028	1.043
0.44	—	—	1.002	1.005	1.007	1.022	1.037
0.46	—	—	1.002	1.005	1.005	1.016	1.031
0.48	—	—	1.002	1.005	1.005	1.010	1.025
0.50	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.019
0.52	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.012
0.54	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.006
0.56	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.005
0.58	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.005
0.60	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.005

В табл. 1 по горизонтали стоят значения b , по вертикали – значения a , а в клетках – константы в основаниях экспоненциальных нижних оценок величины $\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n)$. Видно, что улучшения возникают при $b = 1.1$, $a \geq 0.03$, при $b = 1.15$, $a \geq 0.12$, при $b = 1.2$, $a \geq 0.18$, при $b = 1.25$, $a \geq 0.24$, при $b = 1.3$, $a \geq 0.3$, при $b = 1.35$, $a \geq 0.36$, при $b = 1.4$, $a \geq 0.4$. Это связано с тем, что результаты работ [24], [25] получены принципиально иным методом, и наличие нового подхода, данного в теореме 3, позволяет серьезно продвинуться в задаче при тех параметрах, где старый метод давал слабые результаты.

§ 4. Описание вычислений (ручных и компьютерных), давших следствие из § 3

Сначала скажем несколько слов о том, как производилось вычисление величины ε из теоремы 2. Тут основным является следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Имеет место точное равенство*

$$f_1(\delta) = \frac{\sqrt{1+\delta}(3-2\sqrt{1+\delta}-\delta)}{2-\sqrt{1+\delta}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что за счет неравенства $(1+y)^2 \leq 1+\delta$ выполнено $y < 1$. Поэтому неравенство $(1+x)(1-y) \leq 1+\delta$ равносильно неравенству $x \leq (\delta+y)/(1-y)$. Функция, которую мы минимизируем, имеет вид $f(x, y) = (1+y)(1-x)$, т.е. по x она убывает. Значит, мы можем считать, что $x = (\delta+y)/(1-y)$. Получаем

$$f(x, y) = \frac{(1+y)(1-2y-\delta)}{1-y}.$$

Производная этой функции по y равна $(2y^2-4y-2\delta)/(1-y)^2$. Корни числителя суть

$$y_1 = 1 - \sqrt{1+\delta} < 0, \quad y_2 = 1 + \sqrt{1+\delta} > 1,$$

т.е. с учетом свойства $y \in (0, 1)$ числитель всегда отрицателен. Следовательно, наша функция убывает по y и минимальна при $y = \sqrt{1+\delta} - 1$. Утверждение доказано.

В свете нашего утверждения перебор параметров идет без каких-либо дополнительных тонкостей. Для поиска δ_1 параметрами внешних циклов перебора служат δ и α_1, α_2 . Величина δ берется с шагом 0.001, а величины α_1, α_2 – с шагами 0.01. По ним на каждой итерации вычисляется $\beta = \rho - \alpha_1$ и сразу проверяется условие $f_2(\alpha, \beta, \delta) \leq 0$. Если условие не выполнено, осуществляется переход к новой итерации. Иначе считается значение

$$\frac{\min_{\gamma_1}(g_1/4^{\mu_1})}{(1+\delta)^\alpha f_1^\beta(\delta)}.$$

Здесь перебираются γ_1 : шаг 0.001, пределы перебора

$$\left(\max \left\{ 0, \frac{3\beta}{2} + \alpha - \frac{1}{2} \right\}, \alpha + \beta \right).$$

Нижняя граница связана с тем, что $(1+\beta)/(2\mu_1) \in (0, 1)$, так как это аргумент энтропии.

Аналогично считается δ_2 , только здесь есть еще цикл по λ с шагом 0.01.

Теперь обратимся к следствию из § 3. В теореме 3 идет максимизация по $(\tau, \mathbf{v}) \in T$. Экспериментально (в серии запусков с невысокой точностью) было установлено, что достаточно брать $\tau \in (0, 2)$. После этой локализации τ перебирались с шагом 0.0001. При фиксированном τ значения остальных параметров также выбирались в циклах: u, v и w с шагом 0.001; v', θ с шагом 0.01. Когда все параметры были фиксированы, находилось

$$\varepsilon \left(\frac{v - w}{1 - u}, \frac{v' - \theta}{1 - u} \right).$$

При этом точность приходилось понижать по сравнению с описанной выше.

В итоге были найдены

$$\tau = 1.8996, \quad v = 0.4989, \quad u = 0.022, \quad v' = 0.28, \quad \theta = 0.01.$$

Именно с ними и получилась оценка из нашего следствия.

Вычисления осуществлялись на кластере Яндекса. Задача была разделена на 10000 частей, обработка которых велась параллельно. Весь расчет занял трое суток. За плодотворное участие в этой работе авторы благодарят В. А. Кошелева, исследователя и руководителя группы в отделе теоретических и прикладных исследований Яндекса.

Несмотря на то, что вычисления велись на кластере, итоговый результат можно при желании проверить и на обычном персональном компьютере, и даже на калькуляторе. Для этого достаточно знать лишь те значения вспомогательных параметров из формулировки теоремы 2, которые отвечают за величину ε для приведенных выше τ, v, u, v', θ . Вот они:

$$\begin{aligned} \delta_1 = \min\{\delta_1, \delta_2\} &= 0.99, & \alpha_1 &= 0.04, & \alpha_2 &= 0.02, \\ \beta &= 0.236074, & \gamma_1 &= 0.29. \end{aligned}$$

Теоретически при повышении точности перебора можно найти и больше десятичных знаков для оптимальных параметров. Однако это может привести лишь к увеличению ε и улучшению итоговой оценки, которая сейчас имеет величину 1.052.

§ 5. Доказательство теоремы 2

Мы разобьем доказательство на несколько частей.

5.1. Некоторые параметры и алгоритм Франкла–Рёдля. Прежде всего заметим, что доказательство теоремы 2, будучи существенным уточнением доказательства теоремы 1 Франкла–Рёдля, тем не менее во многом с ним перекликается. Поэтому мы будем часто апеллировать к работе [16] и даже к обозначениям из этой работы.

Итак, пусть фиксировано $n \in \mathbb{N}$ и даны гиперграфы $H_1^n = (V^n, E_1^n)$, $H_2^n = (V^n, E_2^n)$. У них одно и то же множество из n вершин, и нам нужно оценить произведение мощностей их множеств ребер. Поскольку n фиксировано, введем для множеств ребер новые обозначения, в которых n явно не фигурирует.

А именно, заменим обозначение E_1^n на $\mathcal{F}$, а обозначение E_2^n – на $\mathcal{G}$. Так и индексов меньше, и символы совпадают со своими аналогами из работы [16].

Отметим, что, зафиксировав n , мы в принципе можем считать, что это достаточно большое число, ведь оценка в теореме 2 сформулирована с точностью до функции $o(1)$, которая стремится к нулю с ростом n , но при необходимости может быть сделана и очень большой на начальном отрезке натурального ряда.

Кроме того, коль скоро n дано, даны и числа d – мощность каждого ребра и l – величина запрещенного пересечения.

Напомним несколько важных обозначений из работы [16]. Пусть на одном и том же n -элементном множестве вершин X есть два множества ребер $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$. Пусть числа l_1, l_2 таковы, что $0 \leq l_1 \leq l_2 \leq n$. Тогда запись $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathcal{P}(n, [l_1, l_2])$ означает, что для любого ребра из $\mathcal{X}$ и любого ребра из $\mathcal{Y}$ мощность их пересечения не принадлежит отрезку $[l_1, l_2]$. При $l_1 = l_2$ отрезок состоит из одного числа. Например, для наших множеств ребер $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ выполнено $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathcal{P}(n, [l, l])$.

Далее, по $x \in X$ определяются совокупности $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1$:

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_0(x) = \{F \in \mathcal{X} : x \notin F\}, \quad \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_1(x) = \{F \setminus \{x\} : x \in F \in \mathcal{X}\},$$

и их аналоги $\mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_1$. Наблюдение (очевидное) из [16; с. 267] состоит в том, что

$$(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1) \in \mathcal{P}(n-1, [l_1-1, l_2-1]), \quad (\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0 \cup \mathcal{Y}_1) \in \mathcal{P}(n-1, [l_1, l_2]), \\ (\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0 \cap \mathcal{Y}_1) \in \mathcal{P}(n-1, [l_1-1, l_2]).$$

Отметим, что если гиперграф $(X, \mathcal{Y})$ однороден, то $\mathcal{Y}_0 \cap \mathcal{Y}_1 = \emptyset$.

Наконец, в [16] используется обозначение

$$p(\mathcal{X}) = \frac{|\mathcal{X}|}{2^{|\cup \mathcal{X}|}},$$

где под $\cup \mathcal{X}$ мы понимаем объединение всех ребер из совокупности $\mathcal{X}$.

Вернемся к нашим совокупностям $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ и их параметрам n, d, l . Пусть $\delta \in (0, 1)$. Опишем алгоритм $\mathfrak{A}(\delta)$ из [16; с. 268]. Этот алгоритм преобразует исходные совокупности $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ в некоторые новые совокупности $\mathcal{F}^*, \mathcal{G}^*$. И если изначально множествам из разных совокупностей было запрещено пересекаться по l элементам, то в итоге взаимные пересечения окажутся либо большими некоторой величины, либо меньшими некоторой другой величины.

Алгоритм $\mathfrak{A}(\delta)$. (a) Полагаем $m = n$, $l_1 = l$, $l_2 = l$.

(b) Проверяем, выполнено ли $l_1 = 0$. Если да, то останавливаем алгоритм. Если нет, то переходим к шагу (c).

(c) Проверяем, выполнено ли $l_2 = m$. Если да, то останавливаем алгоритм. Если нет, то переходим к шагу (d).

(d) Проверяем, выполнено ли $p(\mathcal{F}_1)p(\mathcal{G}_1) > (1 + \delta)p(\mathcal{F})p(\mathcal{G})$. Если да, то полагаем $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$, $l_1 = l_1 - 1$, $l_2 = l_2 - 1$ и переходим к (h). Иначе переходим к (e).

(e) Выбираем $\mathcal{F}_1$ или $\mathcal{G}_1$ (скажем, $\mathcal{F}_1$) с $p(\mathcal{F}_1) \leq \sqrt{1 + \delta}p(\mathcal{F})$ и переходим к (f).

(f) Проверяем, выполнено ли $p(\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1)p(\mathcal{F}_0) > (1 + \delta)p(\mathcal{G})p(\mathcal{F})$. Если да, то полагаем $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1$ и переходим к (h). Иначе переходим к (g).

(g) Полагаем $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1$, $l_1 = l_1 - 1$ и переходим к (h).

(h) Полагаем $m = m - 1$ и переходим к (b).

На шагах (d), (f) совокупности $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ преобразуются в совокупности $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$, у которых

$$p(\mathcal{F}')p(\mathcal{G}') > (1 + \delta)p(\mathcal{F})p(\mathcal{G}).$$

На шаге (g) также имеет место преобразование совокупностей. Но что можно сказать о величинах p ? Если положить, следуя работе [16],

$$\frac{p(\mathcal{F}_1)}{p(\mathcal{F})} = 1 + y, \quad \frac{p(\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1)}{p(\mathcal{G})} = 1 + x,$$

то, конечно, $x > 0$, а y может принимать любые значения. В работе [16] после несложных выкладок при $y < 0$ получено неравенство

$$p(\mathcal{F}')p(\mathcal{G}') > (1 - \delta)p(\mathcal{F})p(\mathcal{G}).$$

В то же время при $y \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} p(\mathcal{F}')p(\mathcal{G}') &= p(\mathcal{F}_1)p(\mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1) = p(\mathcal{F}_1) \frac{p(\mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1)}{p(\mathcal{G})} p(\mathcal{G}) \\ &= (1 + y)p(\mathcal{F}) \left(2 - \frac{p(\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1)}{p(\mathcal{G})} \right) p(\mathcal{G}) = (1 + y)(1 - x)p(\mathcal{F})p(\mathcal{G}). \end{aligned}$$

Очевидно, $1 + y \leq \sqrt{1 + \delta}$, т.е. $(1 + y)^2 \leq 1 + \delta$, ведь шаг (e) уже пройден. Более того, преодолен и шаг (f), откуда

$$\frac{p(\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1)}{p(\mathcal{G})} \cdot \frac{p(\mathcal{F}_0)}{p(\mathcal{F})} \leq 1 + \delta,$$

т.е.

$$(1 + x) \cdot \frac{p(\mathcal{F}_0)}{p(\mathcal{F})} = (1 + x) \left(2 - \frac{p(\mathcal{F}_1)}{p(\mathcal{F})} \right) = (1 + x)(1 - y) \leq 1 + \delta.$$

В итоге

$$p(\mathcal{F}')p(\mathcal{G}') \geq f_1(\delta)p(\mathcal{F})p(\mathcal{G}). \quad (2)$$

Поскольку $f_1(\delta)$, как несложно проверить, не превосходит $1 - \delta$, получаем, что при любых y справедливо (2).

Алгоритм останавливается либо при $l_1 = 0$, либо при $l_2 = m$. Обозначим через $\bar{\alpha}$ число шагов (d) и (f), из них $\bar{\alpha}_1$ шагов (d) и $\bar{\alpha}_2$ шагов (f). Аналогично, $\bar{\beta}$ – число шагов (g). Положим

$$\alpha = \frac{\bar{\alpha}}{n}, \quad \alpha_1 = \frac{\bar{\alpha}_1}{n}, \quad \alpha_2 = \frac{\bar{\alpha}_2}{n}, \quad \beta = \frac{\bar{\beta}}{n}.$$

Очевидно, последние четыре величины удовлетворяют всем ограничениям, наложенным на одноименные величины из § 2, т.е. на те величины, по которым фактически берутся внутренние супремумы в определениях чисел δ_1 , δ_2 из формулировки теоремы 2. Иными словами, α_1 , α_2 , β – положительные вещественные числа, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha + \beta < 1$.

Ясно также, что если $\mathcal{F}^*, \mathcal{G}^*$ – совокупности, полученные по завершении алгоритма, то

$$p(\mathcal{F}^*)p(\mathcal{G}^*) \geq (1 + \delta)^{\bar{\alpha}} f_1^{\bar{\beta}}(\delta) p(\mathcal{F}) p(\mathcal{G}).$$

В п. 5.2 мы разберем случай, когда алгоритм останавливается на $l_1 = 0$, в п. 5.3 разберем другой случай остановки.

5.2. Первый случай остановки алгоритма.

5.2.1. *Доказательство теоремы 2 в первом случае.* Зафиксируем любое число $\delta'_1 < \delta_1$ (см. § 2). Пусть m_1 – это мощность множества вершин гиперграфов $\mathcal{F}^*, \mathcal{G}^*$, выданных алгоритмом $\mathfrak{A}(\delta'_1)$. Предположим, что алгоритм завершился при $l_1 = 0$. Ясно, что $m_1 = n - \bar{\alpha} - \bar{\beta}$. Далее, поскольку концы интервала запрещенных пересечений (т.е. величины l_1, l_2) сдвигаются на 1 влево только на шагах (d) и (g), то понятно, что в текущем случае (когда по завершении алгоритма $l_1 = 0$) $l = \bar{\alpha}_1 + \bar{\beta}$, откуда $\rho \sim \alpha_1 + \beta$ при $n \rightarrow \infty$, или, что то же самое, $\beta \sim \rho - \alpha_1$. Разумеется, также выполнено неравенство $\alpha + \beta \geq (1 + o(1))\rho$ при $n \rightarrow \infty$. Иными словами, величины α_1, α, β связаны асимптотически теми же соотношениями, какими связаны одноименные величины из внутреннего супремума в определении числа δ_1 . Если бы еще оказалось, что $f_2(\alpha, \beta, \delta'_1) \leq 0$ (хотя бы при больших n), то мы с уверенностью могли бы утверждать, что при больших n выполнено неравенство

$$\frac{\min_{\gamma_1} (g_1/4^{\mu_1})}{(1 + \delta'_1)^\alpha f_1^\beta(\delta'_1)} < 1 - \delta'_1. \quad (3)$$

Докажем оценку $f_2(\alpha, \beta, \delta'_1) \leq 0$ в дополнительном предположении, что

$$p(\mathcal{F})p(\mathcal{G}) \geq (1 - \delta'_1)^n.$$

Действительно,

$$1 \geq p(\mathcal{F}^*)p(\mathcal{G}^*) \geq (1 + \delta'_1)^{\bar{\alpha}} f_1^{\bar{\beta}}(\delta'_1) p(\mathcal{F}) p(\mathcal{G}) \geq (1 + \delta'_1)^{\bar{\alpha}} f_1^{\bar{\beta}}(\delta'_1) (1 - \delta'_1)^n,$$

откуда логарифмированием получаем

$$0 \geq \bar{\alpha} \ln(1 + \delta'_1) + \bar{\beta} \ln f_1(\delta'_1) + n \ln(1 - \delta'_1) = n(\alpha \ln(1 + \delta'_1) + \beta \ln f_1(\delta'_1) + \ln(1 - \delta'_1)),$$

что и требовалось.

Заметим, что если дополнительное предположение неверно, то

$$|\mathcal{F}| \cdot |\mathcal{G}| = 4^n p(\mathcal{F}) p(\mathcal{G}) < (4 - 4\delta'_1)^n,$$

а стало быть, ввиду произвольности $\delta'_1 < \delta_1$ имеем также

$$|\mathcal{F}| \cdot |\mathcal{G}| \leq (4 - 4\delta_1 + o(1))^n \leq (4 - 4\varepsilon + o(1))^n,$$

т.е. теорема 2 доказана. Таким образом, мы можем считать, что с нашими параметрами $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, a, \rho$ выполнено (3).

Из (3) следует, что существует $\gamma_1 \in (0, \alpha + \beta)$, с которым

$$\frac{g_1/4^{\mu_1}}{(1 + \delta'_1)^\alpha f_1^\beta(\delta'_1)} < 1 - \delta'_1.$$

Положим $\bar{\gamma}_1 = [\gamma_1 n]$ (здесь и далее $[x]$ обозначает целую часть числа x). Очевидно, $\bar{\gamma}_1 \leq \gamma_1 n$ и $\bar{\gamma}_1 \sim \gamma_1 n$ при $n \rightarrow \infty$.

Положим $\bar{m}_1 = m_1 + \bar{\gamma}_1$. Получаем, что $\bar{m}_1 \sim \mu_1 n$ (см. § 2). Рассмотрим множество $\tilde{Y}$ мощности $\bar{\gamma}_1$ и две совокупности

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{F^* \cup Y : F^* \in \mathcal{F}^*, Y \subseteq \tilde{Y}\}, \quad \tilde{\mathcal{G}} = \{G^* \cup Y : G^* \in \mathcal{G}^*, Y \subseteq \tilde{Y}\}.$$

Это совокупности ребер на множестве вершин мощности $\bar{m}_1$. Более того, как и в исходных совокупностях $\mathcal{F}^*, \mathcal{G}^*$, ребра из $\tilde{\mathcal{F}}$ пересекаются с ребрами из $\tilde{\mathcal{G}}$ не менее чем по $\bar{\beta} = \beta n$ вершинам (поскольку в начале алгоритма правый конец интервала запретов – это $l = \bar{\alpha}_1 + \bar{\beta}$, и этот конец смещается на 1 только на шаге (d), т.е. $\bar{\alpha}_1$ раз). Наконец, каждое ребро в любом из гиперграфов “с волной” имеет мощность не больше

$$\bar{a}_1 = d - \bar{\alpha}_1 - \bar{\beta} + \bar{\gamma}_1 \sim (a - \alpha_1 - \beta + \gamma_1)n$$

(ср. величину a_1 из § 2). В самом деле, на каждом шаге (d) и на каждом шаге (g) при смене гиперграфов все ребра укорачиваются на 1.

ЛЕММА 1. *Выполнена оценка*

$$|\tilde{\mathcal{F}}| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}| \leq (g_1 + o(1))^n.$$

Эту лемму мы докажем в п. 5.2.2, а сейчас допустим, что она верна. Тогда

$$\begin{aligned} p(\mathcal{F})p(\mathcal{G}) &\leq \frac{p(\mathcal{F}^*)p(\mathcal{G}^*)}{(1 + \delta'_1)^{\bar{\alpha}} f_1^{\bar{\beta}}(\delta'_1)} = \frac{p(\tilde{\mathcal{F}})p(\tilde{\mathcal{G}})}{(1 + \delta'_1)^{\bar{\alpha}} f_1^{\bar{\beta}}(\delta'_1)} = \frac{|\tilde{\mathcal{F}}| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}|}{4^{\bar{m}_1} (1 + \delta'_1)^{\bar{\alpha}} f_1^{\bar{\beta}}(\delta'_1)} \\ &\leq \left(\frac{g_1/4^{\mu_1}}{(1 + \delta'_1)^{\alpha} f_1^{\beta}(\delta'_1)} + o(1) \right)^n \leq (1 - \delta'_1 + o(1))^n, \end{aligned}$$

и теорема 2 доказана.

5.2.2. *Доказательство леммы 1.* Поскольку мы знаем, что обе совокупности расположены на множестве вершин мощности $\bar{m}_1$ и каждое ребро в них имеет не более $\bar{a}_1$ вершин, то для нас очевидна оценка

$$|\tilde{\mathcal{F}}| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}| \leq \left(\sum_{i=0}^{\bar{a}_1} C_{\bar{m}_1}^i \right)^2,$$

которая при $a_1 = a - \alpha_1 - \beta + \gamma_1$ (см. § 2) не столь уж тривиальна и с учетом формулы Стирлинга (ср. классическое неравенство Чернова) имеет вид

$$|\tilde{\mathcal{F}}| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}| \leq (2^{2H(\frac{a_1}{\mu_1})\mu_1} + o(1))^n.$$

Эта оценка согласуется с определением величины g_1 как раз в тех случаях, когда $a_1 = a - \alpha_1 - \beta + \gamma_1$.

Далее, во всех трех случаях определения величины g_1 присутствует величина $2^{2H(\frac{1+\beta}{2\mu_1})\mu_1}$. Соответствующая оценка доказана в виде теоремы 2.1 в [16; с. 266]. Там нет μ_1 , поскольку там множества вершин имеют мощности n ; у нас же они суть $\bar{m}_1 \sim \mu_1 n$, откуда и нормировка, и $o(1)$ в основании экспоненты, фигурирующей в итоговой оценке.

Осталось лишь объяснить “среднюю” оценку в случае, когда $a_1 = a - \alpha_1 - \beta + \gamma_1$ и $a_1 + \beta \geq \mu_1/2$. Она тоже фактически доказана в предпоследнем неравенстве в [16; с. 266]. В наших обозначениях то неравенство выглядит так:

$$|\widetilde{\mathcal{F}}| \cdot |\widetilde{\mathcal{G}}| \leq \left(\sum_{i=0}^{\bar{a}_1} C_{\bar{m}_1}^i \right) \left(\sum_{i=\bar{a}_1+\bar{\beta}}^{\bar{m}_1} C_{\bar{m}_1}^i \right),$$

и в указанных выше условиях последнее произведение имеет вид

$$\left(2^{H(\frac{a_1}{\mu_1})\mu_1 + H(\frac{a_1+\beta}{\mu_1})\mu_1} + o(1) \right)^n,$$

что и требовалось. Заметим, что такое неравенство не могло быть получено в рамках теоремы 2.1 из работы [16]. Дело в том, что там не было явного ограничения на мощность каждого ребра, а у нас оно есть.

Лемма 1 доказана.

5.3. Второй случай остановки алгоритма.

5.3.1. *Доказательство теоремы 2 во втором случае.* Рассуждения очень похожи на те, которые мы провели в п. 5.2.1. Однако для большей четкости изложения их стоит повторить, так как есть и отличия.

Зафиксируем любое число $\delta'_2 < \delta_2$ (см. § 2). Пусть m_2 – это мощность множества вершин гиперграфов $\mathcal{F}^*, \mathcal{G}^*$, выданных алгоритмом $\mathfrak{A}(\delta'_2)$. Предположим, что алгоритм завершился при $l_2 = m$. Ясно, что $m_2 = n - \bar{\alpha} - \bar{\beta}$. Далее, поскольку концы интервала запрещенных пересечений (т.е. величины l_1, l_2) сдвигаются на 1 влево только на шагах (d) и (g), то понятно, что в текущем случае (когда по завершении алгоритма $l_2 = m$) $l - \bar{\alpha}_1 = n - \bar{\alpha} - \bar{\beta}$, откуда $\rho - \alpha_1 \sim 1 - \alpha - \beta$ при $n \rightarrow \infty$. Разумеется, также выполнено неравенство $\alpha + \beta \geq (1 + o(1))(1 - \rho)$ при $n \rightarrow \infty$. Иными словами, величины α_1, α, β связаны асимптотически теми же соотношениями, какими связаны одноименные величины из внутреннего супремума в определении числа δ_2 . При этом неравенство $f_2(\alpha, \beta, \delta'_2) \leq 0$ справедливо при больших n по тем же причинам, по каким такое же неравенство выполнялось в первом случае остановки алгоритма.

Таким образом, существует γ_2 , с которым $\kappa > 0$, и существует такое $\lambda \in (1/2 - a_2/\mu_2, \kappa)$, что

$$\frac{\xi/4^{\mu_2}}{(1 + \delta'_2)^\alpha f_1^\beta(\delta'_2)} < 1 - \delta'_2.$$

Подчеркнем, что интервал, из которого берется λ , заведомо не пуст. В самом деле, если $a_2 = \mu_2/2$ (см. § 2), то интервал имеет вид $(0, \kappa)$, и все в порядке. Иначе

$$\kappa - \left(\frac{1}{2} - \frac{a_2}{\mu_2} \right) = \frac{\beta + a_2}{\mu_2} - 1 = \frac{a - \alpha_1 + \gamma_2}{1 - \alpha - \beta + \gamma_2} - 1,$$

и это больше нуля, коль скоро

$$a - \alpha_1 + \gamma_2 > 1 - \alpha - \beta + \gamma_2 \iff a - \alpha_1 > \rho - \alpha_1 \iff a > \rho.$$

Последнее верно по условию теоремы, и снова все в порядке.

Подчеркнем также, что, с очевидностью, $\kappa \in (0, 1/2)$.

Положим $\bar{\gamma}_2 = \lceil \gamma_2 n \rceil$. Очевидно, $\bar{\gamma}_2 \leq \gamma_2 n$ и $\bar{\gamma}_2 \sim \gamma_2 n$ при $n \rightarrow \infty$.

Положим $\bar{m}_2 = m_2 + \bar{\gamma}_2$. Получаем, что $\bar{m}_2 \sim \mu_2 n$ (см. § 2). Рассмотрим множество $\tilde{Y}$ мощности $\bar{\gamma}_2$ и две совокупности

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{F^* \cup Y : F^* \in \mathcal{F}^*, Y \subseteq \tilde{Y}\}, \quad \tilde{\mathcal{G}} = \{G^* \cup Y : G^* \in \mathcal{G}^*, Y \subseteq \tilde{Y}\}.$$

Это совокупности ребер на множестве вершин мощности $\bar{m}_2$. Более того, ребра из $\tilde{\mathcal{F}}$ пересекаются с ребрами из $\tilde{\mathcal{G}}$ не более чем по

$$n - \bar{\alpha} - 2\bar{\beta} + \bar{\gamma}_2 \sim (1 - \alpha - 2\beta + \gamma_2)n = (\mu_2 - \beta)n = \left(1 - \frac{\beta}{\mu_2}\right)(\mu_2 n) = \left(\frac{1}{2} - \kappa\right)(\mu_2 n)$$

вершинам (поскольку в начале алгоритма левый конец интервала запретов – это $l = \bar{\alpha}_1 + n - \bar{\alpha} - \bar{\beta}$, и этот конец смещается на 1 на шагах (d) и (g), т.е. $\bar{\alpha}_1 + \bar{\beta}$ раз). Наконец, каждое ребро в любом из гиперграфов “с волной” имеет мощность не больше

$$\bar{a}_2 = d - \bar{\alpha}_1 - \bar{\beta} + \bar{\gamma}_2 \sim (a - \alpha_1 - \beta + \gamma_2)n$$

(ср. величину a_2 из § 2). В самом деле, на каждом шаге (d) и на каждом шаге (g) при смене гиперграфов все ребра укорачиваются на 1.

ЛЕММА 2. *Выполнена оценка*

$$|\tilde{\mathcal{F}}| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}| \leq (\xi + o(1))^n.$$

Эту лемму мы докажем в п. 5.3.2. Доказательство же теоремы завершается в точности так же, как в п. 5.2.1.

5.3.2. Доказательство леммы 2. Доказательство основано на сочетании нашей леммы 1 и теоремы 2.2 из [16; с. 267]; напомним ее формулировку.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – две совокупности множеств на множестве из n элементов. Пусть $\kappa \in (0, 1/2)$ таково, что

$$|A \cap B| \leq \left(\frac{1}{2} - \kappa\right)n$$

для всех $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$. Тогда для любого $\lambda \in (0, \kappa)$ выполнено

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq \max\left\{2^n \cdot 2^{H\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)n+1}, 2^{2\left(H\left(\frac{1+\kappa-\lambda}{2}\right)n+1}\right)\right\}.$$

Наши совокупности $\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}}$ находятся во множестве из $\sim \mu_2 n$ элементов. Отсюда сразу получается оценка из леммы 2 в случае, когда $a_2 = \mu_2/2$ (см. § 2).

В остальных случаях оценка улучшается. А именно, если $a_2 < \mu_2/2$, то каждое из множеств в наших совокупностях имеет мощность, асимптотически не превосходящую $a_2 n = a_2/\mu_2 \cdot (\mu_2 n)$. Значит, как и в начале доказательства леммы 1,

$$|\tilde{\mathcal{F}}| \leq \left(2^{H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2} + o(1)\right)^n, \quad |\tilde{\mathcal{G}}| \leq \left(2^{H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2} + o(1)\right)^n,$$

и это сразу приводит к неравенству

$$|\tilde{\mathcal{F}}| \cdot |\tilde{\mathcal{G}}| \leq \left(2^{2H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2} + o(1)\right)^n,$$

правая часть которого имеет вид $(\xi + o(1))^n$ при условии, что минимум в определении $h(\lambda)$ (см. § 2) достигается на первой из двух сравниваемых величин.

Чтобы пояснить, откуда берется оценка с помощью второй из двух сравниваемых в определении $h(\lambda)$ величин, воспроизведем по сути доказательство теоремы 2.2 из [16] применительно к нашей ситуации. Пусть

$$\widetilde{\mathcal{F}}_0 = \left\{ F \in \widetilde{\mathcal{F}} : |F| \leq \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \overline{m}_2 \right\}.$$

Эта совокупность не обязательно совпадает с $\widetilde{\mathcal{F}}$, поскольку про элементы последней мы знаем лишь, что их мощности асимптотически не превосходят $a_2 n$, тогда как

$$\left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \overline{m}_2 < \frac{a_2}{\mu_2} \overline{m}_2 \sim a_2 n.$$

Тем не менее возможны, конечно, два случая: $|\widetilde{\mathcal{F}}_0| \geq \frac{1}{2} |\widetilde{\mathcal{F}}|$ и $|\widetilde{\mathcal{F}}_0| < \frac{1}{2} |\widetilde{\mathcal{F}}|$. Аналогичные конструкции и случаи есть и для $\widetilde{\mathcal{G}}$.

Если имеет место первый случай хотя бы для одной из совокупностей $\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{G}}$ (например, для $\widetilde{\mathcal{F}}$), то

$$|\widetilde{\mathcal{F}}| \cdot |\widetilde{\mathcal{G}}| \leq 2 |\widetilde{\mathcal{F}}_0| \cdot \left(2^{H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2} + o(1) \right)^n \leq \left(2^{H\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\mu_2} \cdot 2^{H\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)\mu_2} + o(1) \right)^n,$$

и это как раз соответствует первой из двух величин под знаком максимума в определении $h(\lambda)$.

Если для обеих совокупностей $\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{G}}$ выполнен второй случай, то возьмем сначала

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1 = \widetilde{\mathcal{F}} \setminus \widetilde{\mathcal{F}}_0, \quad \widetilde{\mathcal{G}}_1 = \widetilde{\mathcal{G}} \setminus \widetilde{\mathcal{G}}_0.$$

Разумеется,

$$|\widetilde{\mathcal{F}}| \cdot |\widetilde{\mathcal{G}}| \leq 4 \cdot |\widetilde{\mathcal{F}}_1| \cdot |\widetilde{\mathcal{G}}_1|.$$

Далее, пусть

$$\widetilde{\mathcal{H}}_1 = \{\overline{G} : G \in \widetilde{\mathcal{G}}_1\},$$

т.е. в $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ находятся дополнения множеств G . Тогда, во-первых, $|\widetilde{\mathcal{H}}_1| = |\widetilde{\mathcal{G}}_1|$ и, во-вторых, для любого $F \in \widetilde{\mathcal{F}}_1$ и любого $\overline{G} \in \widetilde{\mathcal{H}}_1$ выполнено

$$|F \cap \overline{G}| \geq (1 + o(1))(\kappa - \lambda)(\mu_2 n).$$

По лемме 1 отсюда следует оценка

$$|\widetilde{\mathcal{F}}| \cdot |\widetilde{\mathcal{G}}| \leq 4 \cdot |\widetilde{\mathcal{F}}_1| \cdot |\widetilde{\mathcal{G}}_1| = 4 \cdot |\widetilde{\mathcal{F}}_1| \cdot |\widetilde{\mathcal{H}}_1| \leq (g_2(\lambda) + o(1))^n,$$

и лемма 2 доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 3

6.1. Выбор параметров, формулировка лемм и вывод из них утверждения теоремы. Пусть $(\tau, \mathbf{v}) \in T$ – произвольная пара из формулировки теоремы 3. Пусть вектор $\mathbf{v} \in \mathfrak{M}$ состоит из чисел v, u, w, v', θ , связанных известными соотношениями и вместе с τ удовлетворяющих известным неравенствам. Если мы докажем, что $\chi_\Delta(\mathbb{R}^n) \geq (c_1^v/\tau + o(1))^n$, то ввиду произвольности пары $(\tau, \mathbf{v})$ мы установим искомую оценку. Выберем некоторые параметры.

Пусть $\bar{v} = [vn]$,

$$V_n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = \bar{v}\}.$$

Из формулы Стирлинга, очевидно, следует, что

$$|V_n| = C_n^{\bar{v}} = (c_1^v + o(1))^n.$$

И, кстати, именно руководствуясь подобными соображениями, мы ввели обозначение c_a^b .

Пусть, далее, $\bar{p}_1$ – это минимальное простое число, с которым $\bar{v}' := \bar{v} - \bar{p}_1 \leq v'n - 2$. Известные результаты аналитической теории чисел (см. [26] и [27]) говорят о том, что существует такая функция f вещественного аргумента x , что $f(x) = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$ и для любого $x \geq 1$ на отрезке $[x, x + f(x)]$ есть простое число. Это значит, что $\bar{v}' \sim v'n$. Положим

$$E_n = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{v}'\},$$

где $(\cdot, \cdot)$ – евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Пара $G_n = (V_n, E_n)$ – это так называемый *дистанционный граф*. У этого графа вершины – точки пространства, а ребра – отрезки данной длины.

ЛЕММА 3. *Если множество точек $W \subset V_n$ таково, что $|W| > \tau^n$, то существует треугольник с вершинами в W и ребрами из E_n .*

Эту лемму мы докажем позже, а пока выведем из нее теорему 3. Пусть $\mathbb{R}^n$ покрашено в $\chi < |V_n|/\tau^n$ цветов. Тогда и V_n покрашено в не более χ цветов. По принципу Дирихле в один из этих цветов покрашено некоторое множество точек $W \subset V_n$ мощности $> \tau^n$. Значит, есть в W одноцветный треугольник, т.е.

$$\chi_\Delta(\mathbb{R}^n) \geq \frac{|V_n|}{\tau^n} = \left(\frac{c_1^v}{\tau} + o(1) \right)^n,$$

и теорема 3 доказана.

В свою очередь лемма 3 является следствием леммы 4. Для ее формулировки введем еще ряд параметров. Положим $\bar{u} = [un]$, $\bar{w} = [wn]$. Выберем $\bar{p}_2$ как минимальное простое число, с которым величина $\bar{\theta}$, определенная равенством $\bar{\theta} = \bar{w} - \bar{p}_2$, не превосходит $\theta n - 2$. Опять же (см. [26] и [27]) имеем $\bar{\theta} \sim \theta n$.

ЛЕММА 4. *Если множество точек $W \subset V_n$ таково, что $|W| > \tau^n$, то число ребер графа G_n , оба конца которых находятся в W , не меньше величины*

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{|W| C_{\bar{v}}^{\bar{w}} C_{n-\bar{v}}^{\bar{u}-\bar{w}}}{C_{\bar{v}'}^{\bar{\theta}} (C_{\bar{v}-\bar{v}'}^{\bar{w}-\bar{\theta}})^2 C_{n-2\bar{v}+\bar{v}'}^{\bar{u}-2\bar{w}+\bar{\theta}}}.$$

Выведем из леммы 4 лемму 3. Пусть $W \subset V_n$ таково, что $|W| > \tau^n$. Тогда по лемме 4 в W много ребер графа G_n . Значит, хотя бы одна из вершин в W имеет степень не меньше величины

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{C_{\bar{v}}^{\bar{w}} C_{n-\bar{v}}^{\bar{u}-\bar{w}}}{C_{\bar{v}'}^{\bar{\theta}} (C_{\bar{v}-\bar{v}'}^{\bar{w}-\bar{\theta}})^2 C_{n-2\bar{v}+\bar{v}'}^{\bar{u}-2\bar{w}+\bar{\theta}}},$$

которая имеет вид

$$\left(\frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_{v'}^\theta (c_{v-v'}^{w-\theta})^2 c_{1-2v+v'}^{u-2w+\theta}} + o(1) \right)^n,$$

и это можно обосновать с помощью стандартных выкладок.

Для дальнейшего удобства заменим наш граф на гиперграф по следующему принципу. Вершине графа, т.е. n -мерному $(0,1)$ -вектору с $\bar{v}$ единицами, сопоставим ребро $\bar{v}$ -однородного гиперграфа с n вершинами. Обозначим совокупность ребер полученного гиперграфа $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n$. Тогда пара (F_1, F_2) ребер из $\mathcal{F}$ “образует ребро” (в исходном графовом смысле), если $|F_1 \cap F_2| = \bar{v}'$ (мощность пересечения ребер гиперграфа $\mathcal{F}$ равна скалярному произведению векторов из V_n , отвечающих этим ребрам).

В новых терминах множество W – это тоже совокупность ребер $\mathcal{G}$ некоторого гиперграфа: $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. И мы знаем, что одно из ребер $F \in \mathcal{G}$ имеет не меньше

$$\left(\frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_{v'}^\theta (c_{v-v'}^{w-\theta})^2 c_{1-2v+v'}^{u-2w+\theta}} + o(1) \right)^n$$

соседей. Обозначим через $\mathcal{H}$ совокупность, составленную из этих соседей.

Воспользуемся теоремами, доказанными П. Франклом и Р. М. Уилсоном в [28] и Е. И. Пономаренко в [29], [30] (см. также [3], [31]).

ТЕОРЕМА 4 (см. [28]). Пусть $H = (V, E)$ – k -однородный гиперграф на n вершинах, причем для любых $F_1, F_2 \in E$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \neq l$ и $k - l$ – степень простого числа, которую мы обозначим q . Если $2l < k$, то

$$|E| \leq \sum_{i=0}^{q-1} C_n^i.$$

ТЕОРЕМА 5 (см. [29], [30]). Пусть $H = (V, E)$ – k -однородный гиперграф на n вершинах, причем $k \leq n/2$, для любых $F_1, F_2 \in E$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \neq l$, $2l \geq k$ и $q = k - l$ – степень простого числа. Положим $d = 2l - k + 1$. Определим натуральное число $\bar{r}$ из соотношения

$$(k - d + 1) \left(2 + \frac{d - 1}{\bar{r} + 1} \right) \leq n < (k - d + 1) \left(2 + \frac{d - 1}{\bar{r}} \right).$$

Тогда

$$|E| \leq \frac{C_n^{d+2\bar{r}}}{C_k^{d+\bar{r}} C_{n-k}^{\bar{r}}} \left(\sum_{i=0}^{q-1} C_n^i \right).$$

Допустим, $v' \leq v/2$. Тогда по условию теоремы 3

$$\frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_{v'}^\theta (c_{v-v'}^{w-\theta})^2 c_{1-2v+v'}^{u-2w+\theta}} > c_1^{v-v'}.$$

В то же время

$$\sum_{i=0}^{\bar{p}_1-1} C_n^i = (c_1^{v-v'} + o(1))^n.$$

Значит, при больших n выполнено неравенство $|\mathcal{H}| > \sum_{i=0}^{\bar{p}_1-1} C_n^i$. Но $\mathcal{H}$ – это $\bar{v}$ -однородный гиперграф на n вершинах и $2\bar{v}' \leq 2v'n - 4 \leq vn - 4 < \bar{v}$, т.е. применима теорема 4 с $k = \bar{v}$, $l = \bar{v}'$, $q = \bar{p}_1$, которая говорит, что в $\mathcal{H}$ есть пара (F_1, F_2) , образующая ребро в исходном графе G_n . Поскольку, наконец, и F_1 , и F_2 являются соседями F , то втроем они и задают треугольник в W .

Допустим теперь, что $v' > v/2$. Тогда возможны два варианта: $2\bar{v}' \geq \bar{v}$ и $2\bar{v}' < \bar{v}$. Но второй вариант возможен лишь при малых n , которыми мы, как обычно, можем пренебречь. Поэтому работаем в предположении $2\bar{v}' \geq \bar{v}$.

По условию теоремы 3

$$\frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_{v'}^\theta (c_{v-v'}^{w-\theta})^2 c_{1-2v+v'}^{u-2w+\theta}} > \frac{c_1^{v-v'} c_1^{2v'-v+2r'}}{c_v^{2v'-v+r'} c_{1-v}^{r'}}.$$

В то же время при $k = \bar{v}$, $l = \bar{v}'$, $q = \bar{p}_1$ в теореме 5 имеем $d \sim (2v' - v)n$ и $\bar{r} \sim r'n$ (см. определение r' в §3), откуда

$$\frac{C_n^{d+2\bar{r}}}{C_k^{d+\bar{r}} C_{n-k}^{\bar{r}}} \left(\sum_{i=0}^{q-1} C_n^i \right) = \left(\frac{c_1^{v-v'} c_1^{2v'-v+2r'}}{c_v^{2v'-v+r'} c_{1-v}^{r'}} + o(1) \right)^n,$$

т.е.

$$|\mathcal{H}| > \frac{C_n^{d+2\bar{r}}}{C_k^{d+\bar{r}} C_{n-k}^{\bar{r}}} \left(\sum_{i=0}^{q-1} C_n^i \right)$$

и в $\mathcal{H}$ есть пара (F_1, F_2) , образующая вместе с F треугольник в W .

Итак, все случаи разобраны, и лемма 3 выведена из леммы 4. Остается доказать лемму 4.

6.2. Доказательство леммы 4. Во многом дальнейшие рассуждения являются обобщениями рассуждений из доказательства теоремы 1.7 в статье [16]. Мы также сохраняем для удобства многие обозначения той работы.

Пусть $\mathcal{F}$ – совокупность, отвечающая множеству W из леммы 4. Предположим противное, т.е. что число ребер (F_1, F_2) в $\mathcal{F}$ – обозначим его s – строго меньше, чем

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{|\mathcal{F}| C_{\bar{v}}^{\bar{w}} C_{n-\bar{v}}^{\bar{u}-\bar{w}}}{C_{v'}^{\bar{\theta}} (C_{v-v'}^{\bar{w}-\bar{\theta}})^2 C_{n-2\bar{v}+\bar{v}'}^{\bar{u}-2\bar{w}+\bar{\theta}}}.$$

Пусть $\mathcal{A}$ – совокупность всех $\bar{u}$ -элементных подмножеств n -элементного множества, в котором находятся также все множества из совокупности $\mathcal{F}$. Для каждого $A \in \mathcal{A}$ положим $x_A = |\{F \in \mathcal{F} : |F \cap A| = \bar{w}\}|$. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} x_A = |\mathcal{F}| C_{\bar{v}}^{\bar{w}} C_{n-\bar{v}}^{\bar{u}-\bar{w}}.$$

Значит, существует такое $A \in \mathcal{A}$, что

$$x_A \geq \frac{|\mathcal{F}| C_{\bar{v}}^{\bar{w}} C_{n-\bar{v}}^{\bar{u}-\bar{w}}}{C_n^{\bar{u}}}.$$

Из некоторых соображений огрубим этот вывод, сказав, что заведомо

$$x_A \geq \frac{1}{2} \frac{|\mathcal{F}| C_{\bar{v}}^{\bar{w}} C_{n-\bar{v}}^{\bar{u}-\bar{w}}}{C_n^{\bar{u}}} =: x_1.$$

И это действительно полезно, так как таких A уже довольно много:

$$\sum_{A \in \mathcal{A}: x_A < x_1} x_A < |\mathcal{A}| \cdot x_1 = C_n^{\bar{u}} \cdot x_1 = \frac{1}{2} |\mathcal{F}| C_{\bar{v}}^{\bar{w}} C_{n-\bar{v}}^{\bar{u}-\bar{w}},$$

откуда

$$\sum_{A \in \mathcal{A}: x_A \geq x_1} x_A = \sum_{A \in \mathcal{A}} x_A - \sum_{A \in \mathcal{A}: x_A < x_1} x_A > \frac{1}{2} |\mathcal{F}| C_{\bar{v}}^{\bar{w}} C_{n-\bar{v}}^{\bar{u}-\bar{w}}.$$

Пусть теперь для $A \in \mathcal{A}$

$$y_A = |\{(F_1, F_2) \in \mathcal{F}^2 : |F_1 \cap A| = |F_2 \cap A| = \bar{w}, |F_1 \cap F_2 \cap A| = \bar{\theta}, |F_1 \cap F_2| = \bar{v}'\}|.$$

Для большей наглядности мы на рис. 1 изображаем типичное взаимное расположение множеств A , F_1 , F_2 .

Рис. 1

Рис. 2

Опять-таки, несложно понять, что (рис. 2)

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} y_A = s C_{\bar{v}'}^{\bar{\theta}} (C_{\bar{v}-\bar{v}'}^{\bar{w}-\bar{\theta}})^2 C_{n-2\bar{v}+\bar{v}'}^{\bar{u}-2\bar{w}+\bar{\theta}}.$$

Вернемся к тем $A \in \mathcal{A}$, для которых $x_A \geq x_1$. Если предположить, что для каждого такого A выполнено $y_A \geq (1/4)x_A$, то окажется, что с учетом изначального предположения о величине s выполнена серия неравенств

$$\begin{aligned} \sum_{A \in \mathcal{A}: x_A \geq x_1} y_A &\geq \sum_{A \in \mathcal{A}: x_A \geq x_1} \frac{1}{4} x_A > \frac{1}{8} |\mathcal{F}| C_{\bar{v}}^{\bar{w}} C_{n-\bar{v}}^{\bar{u}-\bar{w}} \\ &> s C_{\bar{v}'}^{\bar{\theta}} (C_{\bar{v}-\bar{v}'}^{\bar{w}-\bar{\theta}})^2 C_{n-2\bar{v}+\bar{v}'}^{\bar{u}-2\bar{w}+\bar{\theta}} = \sum_{A \in \mathcal{A}} y_A, \end{aligned}$$

которая противоречива, ведь получается, что часть суммы строго больше всей этой суммы. Значит, существует A_0 , для которого одновременно $x_{A_0} \geq x_1$ и $y_{A_0} < (1/4)x_{A_0}$.

Положим

$$\mathcal{F}_{A_0} = \{F \in \mathcal{F} : |F \cap A_0| = \bar{w}\}.$$

Естественно, $|\mathcal{F}_{A_0}| = x_{A_0} \geq x_1$.

Удалим из совокупности $\mathcal{F}_{A_0}$ все множества F' , для каждого из которых существует такое множество $F \in \mathcal{F}_{A_0}$, что

$$|F \cap F' \cap A_0| = \bar{\theta}, \quad |F \cap F'| = \bar{v}'.$$

Останется совокупность $\overline{\mathcal{F}}_{A_0}$, причем

$$|\overline{\mathcal{F}}_{A_0}| \geq |\mathcal{F}_{A_0}| - 2y_{A_0} \geq \frac{1}{2} x_{A_0} \geq \frac{1}{2} x_1.$$

Перечислим все $C_{\bar{u}}^{\bar{w}}$ подмножеств множества A_0 , имеющих мощность $\bar{w}$. Пусть z_i – число множеств из совокупности $\overline{\mathcal{F}}_{A_0}$, каждое из которых содержит i -е такое подмножество. Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{C_{\bar{u}}^{\bar{w}}} z_i = |\overline{\mathcal{F}}_{A_0}| \geq \frac{1}{2} x_1.$$

В то же время

$$\sum_{i: z_i < 1/4 \cdot x_1 / C_{\bar{u}}^{\bar{w}}} z_i < \frac{1}{4} x_1,$$

а стало быть,

$$\sum_{i: z_i \geq 1/4 \cdot x_1 / C_{\bar{u}}^{\bar{w}}} z_i = \sum_{i=1}^{C_{\bar{u}}^{\bar{w}}} z_i - \sum_{i: z_i < 1/4 \cdot x_1 / C_{\bar{u}}^{\bar{w}}} z_i > \frac{1}{4} x_1.$$

Поскольку есть тривиальная оценка $z_i \leq C_{n-\bar{u}}^{\bar{v}-\bar{w}}$, отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \left| \left\{ i : z_i \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{x_1}{C_{\bar{u}}^{\bar{w}}} \right\} \right| &> \frac{1}{4} \frac{x_1}{C_{n-\bar{u}}^{\bar{v}-\bar{w}}} = \frac{1}{8} \frac{|\mathcal{F}| C_{\bar{v}}^{\bar{w}} C_{n-\bar{v}}^{\bar{u}-\bar{w}}}{C_{\bar{n}}^{\bar{u}} C_{n-\bar{u}}^{\bar{v}-\bar{w}}} \\ &= |\mathcal{F}| \left(\frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_1^u c_{1-u}^{v-w}} + o(1) \right)^n > \left(\tau \cdot \frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_1^u c_{1-u}^{v-w}} + o(1) \right)^n. \end{aligned}$$

Обозначим $B_{\nu_1}, \dots, B_{\nu_t}$ – те самые $\bar{w}$ -элементные подмножества множества A_0 , которым соответствуют z_i с условием $z_i \geq 1/4 \cdot x_1 / C_u^{\bar{w}}$. Разумеется,

$$t > \left(\tau \cdot \frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_1^u c_{1-u}^{v-w}} + o(1) \right)^n. \quad (4)$$

Для удобства введем обозначение $z(B_{\nu_j})$ для величины z_i , отвечающей множеству B_{ν_j} , и положим $\mathcal{B} = \{B_{\nu_1}, \dots, B_{\nu_t}\}$.

Как и в конце п. 6.1, рассмотрим два случая. Во-первых, может статься, что $\theta \leq w/2$. Тогда

$$2\bar{\theta} \leq 2\theta n - 4 \leq wn - 4 < \bar{w},$$

т.е. применима теорема 4 с $k = \bar{w}$, $l = \bar{\theta}$, $q = \bar{p}_2$. Эта теорема говорит, что если в совокупности $\mathcal{B}$ нет пар множеств, пересекающихся по l элементам, то

$$|\mathcal{B}| \leq \sum_{i=0}^{\bar{p}_2} C_u^i = (c_u^{w-\theta} + o(1))^n. \quad (5)$$

По условию теоремы 3 в текущем случае

$$\tau \cdot \frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_1^u c_{1-u}^{v-w}} > c_u^{w-\theta},$$

а значит, неравенства (4) и (5) не согласуются при больших n , откуда следует, что существуют такие $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, что $|B_1 \cap B_2| = \bar{\theta}$.

Во-вторых, может быть и $\theta > w/2$. Тогда при больших n выполнено $2\bar{\theta} > \bar{w}$, т.е. применима теорема 5 с $k = \bar{w}$, $l = \bar{\theta}$, $q = \bar{p}_2$ (при этом число вершин гиперграфа, которое в теореме 5 обозначено n , сейчас равно $\bar{u}$). Эта теорема говорит, что если в совокупности $\mathcal{B}$ нет пар множеств, пересекающихся по l элементам, то

$$|\mathcal{B}| \leq \frac{C_u^{d+2\bar{r}}}{C_k^{d+\bar{r}} C_{\bar{u}-k}^{\bar{r}}} \left(\sum_{i=0}^{\bar{p}_2-1} C_u^i \right).$$

Здесь

$$d \sim (2\theta - w)n, \quad \bar{r} \sim rn, \quad n \rightarrow \infty$$

(см. определение величины r в § 3). Таким образом,

$$|\mathcal{B}| \leq \left(\frac{c_u^{w-\theta} c_u^{2\theta-w+2r}}{c_w^{2\theta-w+r} c_{u-w}^r} + o(1) \right)^n. \quad (6)$$

По условию теоремы 3 в текущем случае

$$\tau \cdot \frac{c_v^w c_{1-v}^{u-w}}{c_1^u c_{1-u}^{v-w}} > \frac{c_u^{w-\theta} c_u^{2\theta-w+2r}}{c_w^{2\theta-w+r} c_{u-w}^r},$$

а значит, неравенства (4) и (6) не согласуются при больших n , откуда следует, что существуют такие $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, что $|B_1 \cap B_2| = \bar{\theta}$.

Итак, в любом случае существуют такие $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, что $|B_1 \cap B_2| = \bar{\theta}$. При этом

$$z(B_i) \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{x_1}{C_{\bar{u}}^{\bar{w}}}, \quad i = 1, 2.$$

Положим

$$\mathcal{F}_{(i)} = \{F \setminus B_i : F \in \overline{\mathcal{F}}_{A_0}, F \supset B_i\}, \quad i = 1, 2,$$

так что $|\mathcal{F}_{(i)}| = z(B_i)$ и $\mathcal{F}_{(i)}$ – это множество ребер $(\bar{v} - \bar{w})$ -однородного гиперграфа на $n - \bar{u}$ вершинах. Более того, с учетом условия теоремы 3

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{(1)}| \cdot |\mathcal{F}_{(2)}| &\geq \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{x_1}{C_{\bar{u}}^{\bar{w}}} \right)^2 = \frac{1}{64} \cdot \left(\frac{|\mathcal{F}| C_{\bar{v}}^{\bar{w}} C_{n-\bar{v}}^{\bar{w}-\bar{w}}}{C_{\bar{n}}^{\bar{u}} C_{\bar{u}}^{\bar{w}}} \right)^2 > \frac{1}{64} \cdot \left(\frac{\tau^n \cdot C_{\bar{v}}^{\bar{w}} C_{n-\bar{v}}^{\bar{w}-\bar{w}}}{C_{\bar{n}}^{\bar{u}} C_{\bar{u}}^{\bar{w}}} \right)^2 \\ &= \left(\tau^2 \frac{(c_v^w)^2 (c_{1-v}^{u-w})^2}{(c_1^u)^2 (c_u^w)^2} + o(1) \right)^n \\ &> \left(\left(4 - 4 \cdot \varepsilon \left(\frac{v-w}{1-u}, \frac{v'-\theta}{1-u} \right) \right)^{1-u} + o(1) \right)^n. \end{aligned}$$

По теореме 2 существуют два таких множества $F_1 \in \mathcal{F}_{(1)}$ и $F_2 \in \mathcal{F}_{(2)}$, что $|F_1 \cap F_2| = \bar{v}' - \bar{\theta}$. Значит, в $\overline{\mathcal{F}}_{A_0}$ есть два множества $F'_1 = F_1 \cup B_1$ и $F'_2 = F_2 \cup B_2$, для которых

$$|F'_1 \cap F'_2 \cap A_0| = \bar{\theta}, \quad |F'_1 \cap F'_2| = \bar{v}'.$$

Но в $\overline{\mathcal{F}}_{A_0}$ по построению не может быть таких пар, и это противоречие завершает доказательство теоремы 3.

Список литературы

- [1] А. М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства”, *УМН*, **55:2**(332) (2000), 147–148; англ. пер.: А. М. Raigorodskii, “On the chromatic number of a space”, *Russian Math. Surveys*, **55:2** (2000), 351–352.
- [2] D. G. Larman, C. A. Rogers, “The realization of distances within sets in Euclidean space”, *Mathematika*, **19:1** (1972), 1–24.
- [3] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56:1**(337) (2001), 107–146; англ. пер.: А. М. Raigorodskii, “Borsuk’s problem and the chromatic numbers of some metric spaces”, *Russian Math. Surveys*, **56:1** (2001), 103–139.
- [4] А. М. Raigorodskii, “Coloring distance graphs and graphs of diameters”, *Thirty essays on geometric graph theory*, Springer, New York, 2013, 429–460.
- [5] А. М. Райгородский, “О хроматических числах сфер в евклидовых пространствах”, *Докл. РАН*, **432:2** (2010), 174–177; англ. пер.: А. М. Raigorodskii, “On the chromatic numbers of spheres in Euclidean spaces”, *Dokl. Math.*, **81:3** (2010), 379–382.
- [6] А. М. Raigorodskii, “On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$ ”, *Combinatorica*, **32:1** (2012), 111–123.
- [7] А. Б. Купавский, “Хроматическое число пространства $\mathbb{R}^n$ с множеством запрещенных расстояний”, *Докл. РАН*, **435:6** (2010), 740–743; англ. пер.: А. В. Kupavskii, “On the chromatic number of $\mathbb{R}^n$ with a set of forbidden distances”, *Dokl. Math.*, **82:3** (2010), 963–966.

- [8] A. B. Kupavskiy, “On the chromatic number of $\mathbb{R}^n$ with an arbitrary norm”, *Discrete Math.*, **311**:6 (2011), 437–440.
- [9] А. Б. Купавский, “О раскрасках сфер, вложенных в $\mathbb{R}^n$ ”, *Матем. сб.*, **202**:6 (2011), 83–110; англ. пер.: A. B. Kupavskii, “On the colouring of spheres embedded in $\mathbb{R}^n$ ”, *Sb. Math.*, **202**:6 (2011), 859–886.
- [10] А. М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства с метрикой l_q ”, *УМН*, **59**:5(359) (2004), 161–162; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, “The chromatic number of a space with the metric l_q ”, *Russian Math. Surveys*, **59**:5 (2004), 973–975.
- [11] Е. С. Горская, И. М. Митричева, В. Ю. Протасов, А. М. Райгородский, “Оценка хроматических чисел евклидова пространства методами выпуклой минимизации”, *Матем. сборник*, **200**:6 (2009), 3–22; англ. пер.: E. S. Gorskaya, I. M. Mitricheva (Shitova), V. Yu. Protasov, A. M. Raigorodskii, “Estimating the chromatic numbers of Euclidean space by convex minimization methods”, *Sb. Math.*, **200**:6 (2009), 783–801.
- [12] А. М. Райгородский, И. М. Шитова, “О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с вещественными или рациональными запрещенными расстояниями”, *Матем. сб.*, **199**:4 (2008), 107–142; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, I. M. Shitova, “Chromatic numbers of real and rational spaces with real or rational forbidden distances”, *Sb. Math.*, **199**:4 (2008), 579–612.
- [13] Н. Г. Мощевитин, А. М. Райгородский, “О раскрасках пространства $\mathbb{R}^n$ с несколькими запрещенными расстояниями”, *Матем. заметки*, **81**:5 (2007), 733–743; англ. пер.: N. G. Moshchevitin, A. M. Raigorodskii, “Colorings of the space $\mathbb{R}^n$ with several forbidden distances”, *Math. Notes*, **81**:5 (2007), 656–664.
- [14] А. М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства с двумя запрещенными расстояниями”, *Докл. РАН*, **408**:5 (2006), 601–604.
- [15] P. Frankl, V. Rödl, “All triangles are Ramsey”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **297**:2 (1986), 777–779.
- [16] P. Frankl, V. Rödl, “Forbidden intersections”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **300**:1 (1987), 259–286.
- [17] P. Frankl, V. Rödl, “A partition property of simplices in Euclidean space”, *J. Amer. Math. Soc.*, **3**:1 (1990), 1–7.
- [18] R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer, *Ramsey theory*, 2nd ed., Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., New York, John Wiley & Sons, Inc., 1990, xii+196 pp.
- [19] Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*, Части I, II, Связь, М., 1979, 744 с.; пер. с англ.: F. J. MacWilliams, N. J. A. Sloane, *The theory of error-correcting codes*, Parts I, II, North-Holland Mathematical Library, **16**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York–Oxford, 1977.
- [20] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, New York, 2005, xii+499 pp.
- [21] A. Soifer, *The mathematical coloring book. Mathematics of coloring and the colorful life of its creators*, Springer, New York, 2009, xxx+607 pp.
- [22] Д. Е. Райский, “Реализация всех расстояний при разбиении пространства R^n на $n + 1$ часть”, *Матем. заметки*, **7**:3 (1970), 319–323; англ. пер.: D. E. Raiskii, “Realization of all distances in a decomposition of the space R^n into $n + 1$ parts”, *Math. Notes*, **7**:3 (1970), 194–196.
- [23] L. A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *Paul Erdős and his mathematics*, v. II (Budapest, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, 649–666.
- [24] А. М. Райгородский, Д. В. Самиров, “Хроматические числа пространств с запрещенными одноцветными треугольниками”, *Матем. заметки*, **93**:1 (2013), 117–126; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, D. V. Samirov, “Chromatic numbers of spaces with forbidden monochromatic triangles”, *Math. Notes*, **93**:1 (2013), 163–171.

- [25] А. М. Райгородский, Д. В. Самиров, “Новые нижние оценки хроматического числа пространства с запрещенными равнобедренными треугольниками”, *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения*, **125** (2013), 252–268.
- [26] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967, 511 с.; пер. с нем.: К. Prachar, *Primzahlverteilung*, Grundlehren Math. Wiss., **91**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1957, x+415 pp.
- [27] R. C. Baker, G. Harman, J. Pintz, “The difference between consecutive primes. II”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **83**:3 (2001), 532–562.
- [28] P. Frankl, R. M. Wilson, “Intersection theorems with geometric consequences”, *Combinatorica*, **1**:4 (1981), 357–368.
- [29] Е. И. Пономаренко, А. М. Райгородский, “Улучшение теоремы Франкла–Уилсона о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения”, *Докл. РАН*, **454**:3 (2014), 268–269.
- [30] Е. И. Пономаренко, А. М. Райгородский, “Новые оценки в задаче о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения”, *Пробл. передачи информ.*, **49**:4 (2013), 98–104; англ. пер.: Е. I. Ponomarenko, A. M. Raigorodskii, “New estimates in the problem of the number of edges in a hypergraph with forbidden intersections”, *Problems Inform. Transmission*, **49**:4 (2013), 384–390.
- [31] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007, 138 с.

Артем Евгеньевич Звонарёв
(**Artem E. Zvonarev**)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова;
Московский физико-технического институт
(государственный университет)
E-mail: artem.zvonarev@gmail.com

Поступила в редакцию
12.12.2013 и 14.04.2014

Андрей Михайлович Райгородский
(**Andrei M. Raigorodskii**)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова;
Московский физико-технического институт
(государственный университет)
E-mail: mraigor@yandex.ru

Дмитрий Вячеславович Самиров
(**Dmitriy V. Samirov**)

Московский физико-технического институт
(государственный университет)
E-mail: dsamirov@gmail.com

Александра Андреевна Харламова
(**Alexandra A. Kharlamova**)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: a_harl@mail.ru