Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Кирш, Л. А. Пастур, Аналоги теоремы Сегё для эргодических операторов, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 1, 103–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8318>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:10:25

УДК 517.983.28+519.214+519.216.75

В. Киш, Л. А. Пастур

Аналоги теоремы Сегё для эргодических операторов

Теорема Сегё об асимптотическом поведении детерминантов теплицевых матриц большого порядка обобщается на класс эргодических операторов. Это обобщение формулируется в терминах тройки, состоящей из эргодического оператора и двух функций – символа и пробной функции. Показано, что для одномерного дискретного оператора Шрёдингера со случайным эргодическим или квазипериодическим потенциалом и различных выборов символа и пробной функции такое обобщение приводит к ряду результатов, не имеющих аналогов в ситуации теплицевых операторов.

Библиография: 22 названия.

Ключевые слова: теорема Сегё, случайные операторы, предельные теоремы.

DOI: 10.4213/sm8318

§ 1. Введение

Теорема Сегё – это важный аналитический результат, имеющий многочисленные приложения (см., например, [1]–[3] и ссылки в этих работах). В своей исходной форме теорема формулируется следующим образом.

Пусть

$$\{A_j\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad \overline{A_j} = A_{-j}, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} |A_j| < \infty, \quad (1.1)$$

– некоторая последовательность и

$$A = \{A_{j-k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}, \quad (Au)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_{j-k} u_k, \quad (1.2)$$

– ограниченный самосопряженный оператор в $l^2(\mathbb{Z})$ (дискретная свертка), определяемый этой последовательностью. Зафиксировав целое положительное число L , рассмотрим отрезок

$$\Lambda = [-L, -L+1, \dots, L] \subset \mathbb{Z} \quad (1.3)$$

и ограничение

$$A_\Lambda = \{A_{j-k}\}_{j,k \in \Lambda} \quad (1.4)$$

оператора A на Λ , т.е. конечномерный оператор, задаваемый центральным $(2L+1) \times (2L+1)$ -блоком бесконечной матрицы $\{A_{j-k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$. Обозначим через

$$a(p) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} A_j e^{2\pi i p j}, \quad p \in \mathbb{T} = [0, 1), \quad (1.5)$$

преобразование Фурье последовательности (1.1); в этом контексте его называют символом A . Предположим, что

$$a(p) \geq 0, \quad a \in L^1(\mathbb{T}), \quad (1.6)$$

и пусть $\{l_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ – коэффициенты Фурье функции $\log a$. Тогда верна следующая двучленная асимптотическая формула (см., к примеру, [3; теорема 1.6.2]):

$$\log \text{Det } A_\Lambda = |\Lambda| l_0 + \sum_{j=1}^{\infty} k l_j l_{-j} + o(1), \quad |\Lambda| \rightarrow \infty, \quad (1.7)$$

где

$$|\Lambda| = 2L + 1. \quad (1.8)$$

Одночленная асимптотика

$$\log \text{Det } A_\Lambda = |\Lambda| l_0 + o(|\Lambda|), \quad |\Lambda| \rightarrow \infty, \quad (1.9)$$

называется теоремой Сегё (или первой теоремой Сегё), а двучленная формула (1.7) называется сильной теоремой Сегё.

Заметим, что в традиционной постановке в теореме Сегё используются операторы Тёплица, заданные матрицей $\{A_{j-k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}_+}$, бесконечной в одну сторону, и действующие в $l^2(\mathbb{Z}_+)$. Ограничения операторов Тёплица – блоки $\{A_{j-k}\}_{j,k=0}^L$ в левом верхнем углу бесконечной матрицы. Однако в настоящей статье мы используем операторы свертки (1.2), задаваемые матрицей $\{A_{j-k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, бесконечной в обе стороны, и действующие в $l^2(\mathbb{Z})$, ограничения которых задаются центральными блоками вида (1.4). Нам представляется, что они лучше соответствуют целям настоящей работы, посвященной эргодическим операторам, для которых такая постановка стандартна. Эта постановка широко используется и в многомерных обобщениях теоремы Сегё.

С помощью тождества $\log \text{Det } A_\Lambda = \text{Tr } \log A_\Lambda$ перепишем (1.7) в виде

$$\text{Tr } \log A_\Lambda = |\Lambda| \int_0^1 \log a(p) dp + \sum_{j=1}^{\infty} k l_j l_{-j} + o(1), \quad |\Lambda| \rightarrow \infty, \quad (1.10)$$

т.е. как двучленную асимптотическую формулу следа для оператора A_Λ в терминах “предельного” оператора A . Это делает естественным обобщение этой формулы, в котором вместо $\log$ участвовала бы функция $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ из некоторого класса.

Хорошо известна одночленная асимптотика, обобщающая (1.9) (см., например, [4; § 5.2]),

$$\text{Tr } \varphi(A_\Lambda) = |\Lambda| \int_{\mathbb{T}} \varphi(a(p)) dp + o(|\Lambda|), \quad |\Lambda| \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

Она имеет место для любой ограниченной непрерывной функции φ .

По поводу соответствующей двучленной асимптотики

$$\text{Tr } \varphi(A_\Lambda) = |\Lambda| \int_{\mathbb{T}} \varphi(a(p)) dp + T_2 + o(1), \quad |\Lambda| \rightarrow \infty, \quad (1.12)$$

в которой T_2 – функционал от φ и a , не зависящий от Λ (см., к примеру, [1], [3], [5] и соответствующие ссылки).

Аналогичные формулы имеют место в непрерывном случае, т.е. для операторов свертки в $L^2(\mathbb{R})$ и их ограничений, и в многомерном контексте, т.е. для операторов свертки в $l^2(\mathbb{Z}^d)$ и $L^2(\mathbb{R}^d)$ и их ограничений на семейство $\{\Lambda_L\}$ гомотетичных компактных областей

$$\Lambda_L = \left\{ x \in \mathbb{Z}^d : \frac{x}{L} \in \Lambda_1 \right\},$$

в пределе распространяющихся на все пространство, где $\Lambda_1 \in \mathbb{R}^d$ – область с C^1 -границей (см. [5]). В этом случае главный член асимптотики пропорционален объему $|\Lambda_L|$ области Λ_L , т.е. величине L^d , а второй член пропорционален площади $|\partial\Lambda_L|$ границы $\partial\Lambda_L$ области Λ_L , т.е. L^{d-1} (см., к примеру, [1], [3], [5]).

Важно подчеркнуть, что в то время как главный член в (1.12), пропорциональный L^d , весьма мало чувствителен к гладкости φ и a , второй член, пропорциональный L^{d-1} , отвечает случаю достаточно гладких φ и a (к примеру, когда a имеет гёльдерову производную, а φ – C^∞ -гладкая функция на спектре A). Однако когда у символа есть особенности и/или нули, второй член асимптотики может расти быстрее, чем L^{d-1} (см. [2], [6], [7]). Важным примером является случай, когда символ есть характеристическая функция интервала Δ спектра A . В этом случае при $d = 1$ двучленная асимптотика имеет вид

$$\mathrm{Tr} \varphi(A_\Lambda) = |\Lambda|((1 - |\Delta|)\varphi(0) + |\Delta|\varphi(1)) + S_2 \log |\Lambda| + o(\log |\Lambda|), \quad |\Lambda| \rightarrow \infty, \quad (1.13)$$

где S_2 – функционал от φ , не зависящий от $|\Lambda|$ (см. [7]). При $d > 1$ главный член аналогичен главному члену при $d = 1$ и, в частности, пропорционален L^d , а второй член пропорционален $L^{d-1} \log L$ (см. [6]–[8]).

Такую зависимость вида второго члена от гладкости φ и a можно сравнить с поведением второго члена в формуле Эйлера–Маклорена, оценивающей аппроксимацию интеграла от непрерывной функции интегральной суммой.

Таким образом, двучленная асимптотика следа $\mathrm{Tr} \varphi(A_\Lambda)$, где A_Λ – ограничение оператора свертки A на компактную область, определяется функциональными параметрами a и φ .

Заметим теперь, что операторы свертки в $l^2(\mathbb{Z}^d)$ и $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$, допускают естественное обобщение, известное под названием эргодических (или метрически транзитивных) операторов (см. [9]). Напомним их определение в технически простом случае $l^2(\mathbb{Z})$.

Пусть

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad (1.14)$$

– вероятностное пространство, а T – сохраняющий меру автоморфизм Ω .

Отметим два важных случая структуры $(\Omega, \mathcal{F}, P, T)$, называемой абстрактной динамической системой. Первый случай соответствует последовательности $\{\xi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ независимых одинаково распределенных случайных величин. Здесь $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, $\mathcal{F}$ – σ -алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$,

P – произведение мер, соответствующее общему вероятностному распределению F всех ξ_j , а

$$T\{\xi_j\}_{j \in \mathbb{Z}} = \{\xi_{j+1}\}_{j \in \mathbb{Z}} \quad (1.15)$$

– правый сдвиг последовательности.

Во втором случае $\Omega = \mathbb{T}$, $\mathcal{F}$ – алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{T}$, P – мера Лебега на $\mathbb{T}$, а

$$T\omega \equiv \omega + \alpha \pmod{1}, \quad (1.16)$$

где $\alpha \in [0, 1)$ – некоторое иррациональное число.

Эти два случая имеют важное общее свойство: никакое множество в $\mathcal{F}$, отличное от Ω и $\emptyset$, не является T -инвариантным. Абстрактная динамическая система с этим свойством называется эргодической (или метрически транзитивной). Во втором случае это свойство элементарно проверяется, а в первом – следует из колмогоровского закона нуля или единицы. С этого момента мы будем рассматривать только эргодические динамические системы, хотя некоторые из результатов, приводимых ниже, верны и без этого предположения.

Далее, назовем последовательность $\{\xi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ измеримых вещественнозначных функций на абстрактной динамической системе эргодическим процессом, если с вероятностью 1 для всякого $t \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$\xi_j(T^t \omega) = \xi_{j+t}(\omega) \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (1.17)$$

Стандартный способ задать эргодический процесс – использовать измеримую функцию $\mathcal{X}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и оператор сдвига:

$$\xi_j(\omega) = \mathcal{X}(T^j \omega). \quad (1.18)$$

Аналогичным образом, измеримая функция $A = \{A_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, принимающая значения в множестве ограниченных операторов в $l^2(\mathbb{Z})$, называется эргодическим оператором, если с вероятностью 1 для всякого $t \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$A_{j+t,k+t}(\omega) = A_{jk}(T^t \omega) \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}. \quad (1.19)$$

Взяв $\Omega = \{0\}$ в (1.14), получаем из (1.19), что A – оператор свертки (1.2). Таким образом, эргодические операторы представляют собой обобщение операторов свертки и, наоборот, последние могут рассматриваться как неслучайные эргодические операторы.

Аналогичные определения можно дать и в многомерном контексте как для дискретного случая $\mathbb{Z}^d$, так и для непрерывного случая $\mathbb{R}^d$ (см. [9; § 1D]).

Важным примером эргодических операторов является одномерный дискретный оператор Шрёдингера в $l^2(\mathbb{Z})$, задаваемый формулами

$$H = H_0 + V, \quad (H_0 u)_j = -u_{j-1} - u_{j+1}, \quad (Vu)_j = v_j u_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (1.20)$$

потенциал которого V задается эргодическим процессом $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, что означает следующее (см. (1.18)):

$$v_j(\omega) = \mathcal{V}(T^j \omega), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (1.21)$$

для некоторой измеримой функции $\mathcal{V}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Два наиболее подробно исследованных случая эргодических потенциалов (1.21) соответствуют эргодическим системам и процессам, упомянутым выше, т.е. последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин и последовательности, задаваемой периодической непрерывной функцией $\mathcal{V}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ и иррациональным числом $\alpha \in (0, 1)$ по формуле (см. (1.16))

$$v_j(\omega) = \mathcal{V}(\alpha j + \omega). \quad (1.22)$$

Эти два класса эргодических потенциалов (и процессов) можно рассматривать как “крайние точки” множества всех эргодических процессов с позиции интуитивно трактуемого понятия “случайности”, поскольку потенциал из независимых одинаково распределенных величин представляется “самым случайным”, а квазипериодический потенциал представляется “наименее случайным”.

Аналог теорем Сегё для эргодических операторов мог бы выглядеть так. Пусть H – самосопряженный эргодический оператор в $l^2(\mathbb{R})$, а $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ и $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – достаточно “хорошие” функции. Тогда

$$A = a(H) \quad (1.23)$$

– нормальный эргодический оператор (см. [9; теорема 2.7]). Пусть $\{A_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ – его матрица, а $A_\Lambda = \{A_{jk}\}_{j,k \in \Lambda}$ – ограничение A на Λ (ср. (1.4)), где Λ определено в (1.3). Нас снова будет интересовать асимптотическое поведение величины

$$\text{Tr } \varphi(A_\Lambda) = \text{Tr } \varphi(a_\Lambda(H)), \quad |\Lambda| \rightarrow \infty, \quad (1.24)$$

задаваемой тройкой

$$(H, a, \varphi), \quad (1.25)$$

состоящей из исходного эргодического оператора H и функций $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ и $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, которые мы будем называть *символом* и *пробной функцией*.

В случае дискретных операторов свертки, соответствующих $\Omega = \{0\}$ в (1.14), в роли H выступает самосопряженный оператор $\hat{p}$, связанный с унитарным оператором сдвига

$$(U\psi)_j = \psi_{j+1}, \quad \{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l_2(\mathbb{Z}),$$

по формуле $U = e^{i\hat{p}}$, а в случае непрерывных (интегральных) операторов свертки в $L^2(\mathbb{R})$ роль H исполняет id/dx . Оператор $\hat{p}$ редко рассматривается в этом контексте, однако если символ (1.5) четный (матрица A в (1.2) вещественная симметрическая), то $a(p) = t(\cos 2\pi p)$, где

$$t(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j T_j(x),$$

а $\{T_j\}$ – полиномы Чебышёва первого рода: $T_j(\cos 2\pi p) = \cos 2\pi jp$. Поскольку $\cos 2\pi p$ – символ второй конечной разности, т.е. оператора Шрёдингера H_0 из (1.20) с нулевым потенциалом, мы можем взять его в качестве H в представлении (1.23) для операторов свертки; это иллюстрирует аналогию между теоремами Сегё для операторов свертки и эргодических операторов, согласно

которой для перехода от операторов свертки к эргодическим операторам надо просто заменить оператор Шрёдингера H_0 с нулевым потенциалом на оператор Шрёдингера (1.20) с нетривиальным эргодическим потенциалом.

Для эргодических операторов главный член асимптотики величины (1.24) известен; он является естественным аналогом главного члена асимптотики (1.11), (1.12) для операторов свертки. Чтобы его выписать, нам потребуется понятие интегрированной плотности состояний для эргодических операторов. Пусть $\{\lambda_l^{(\Lambda)}\}_{l=-L}^L$ – собственные значения (с учетом кратностей) ограничения A_Λ эргодического оператора A , δ_x – единичная атомарная мера в $x \in \mathbb{R}$, а

$$\mathcal{N}_\Lambda = \sum_{l=-L}^L \delta_{\lambda_l^{(\Lambda)}}, \quad N_\Lambda = |\Lambda|^{-1} \mathcal{N}_\Lambda \quad (1.26)$$

– считающая мера и нормированная считающая мера собственных значений A_Λ соответственно. Тогда существует неслучайная неотрицательная мера N полной вариации 1,

$$N(\mathbb{R}) = 1, \quad (1.27)$$

для которой с вероятностью 1 для всякой кусочно непрерывной ограниченной функции $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ выполнено

$$\lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} \int \varphi(\lambda) N_\Lambda(d\lambda) = \int \varphi(\lambda) N(d\lambda), \quad (1.28)$$

и для всякого интервала $\Delta \subset \mathbb{R}$

$$N(\Delta) = \mathbf{E}\{(\mathcal{E}_A(\Delta))_{00}\}, \quad (1.29)$$

где $\mathbf{E}\{\dots\}$ – математическое ожидание относительно вероятностной меры P из (1.14), а $\mathcal{E}_A = \{(\mathcal{E}_A)_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ – разложение единицы, отвечающее A . Оператор $\mathcal{E}_A(\Delta)$ тоже будет эргодическим для всякого $\Delta \subset \mathbb{R}$ (см. [9; теорема 2.7]).

Очевидно, что (1.24) можно переписать в виде

$$\sum_{l=-L}^L \varphi(\lambda_l^{(\Lambda)}) = \int \varphi(\lambda) \mathcal{N}_\Lambda(d\lambda). \quad (1.30)$$

В математической статистике такие выражения называются линейными статистиками случайных величин $\{\lambda_l^{(\Lambda)}\}_{l=-L}^L$, а φ называется пробной функцией.

Как следует из (1.26), (1.28) и (1.29), имеем с вероятностью 1

$$\mathrm{Tr} \varphi(A_\Lambda) = |\Lambda| \int \varphi(\lambda) N(d\lambda) + o(|\Lambda|) = |\Lambda| \mathbf{E}\{\varphi_{00}(A)\} + o(|\Lambda|), \quad |\Lambda| \rightarrow \infty. \quad (1.31)$$

Заметим, что если A – оператор свертки, то

$$(\mathcal{E}_A(\Delta))_{jk} = \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i(j-k)p} \chi_\Delta(a(p)) dp, \quad (1.32)$$

где χ_Δ – характеристическая функция Δ , и в силу (1.29)

$$N(\Delta) = \mathrm{mes}\{p \in \mathbb{T} : a(p) \in \Delta\}.$$

В итоге правая часть (1.31) переходит в правую часть (1.11), так что (1.31) можно рассматривать как обобщение (1.11).

Чтобы понять, каким может быть порядок величины второго члена в (1.31) для эргодических операторов, заметим прежде всего, что если A – оператор свертки, то, грубо говоря, $\lambda_l^{(\Lambda)} = a(2\pi l/|\Lambda|)$ для достаточно больших Λ (см., к примеру, [4; §§ 5.2, 5.3]). Вспомнив формулу Эйлера–Маклорена, можно ожидать, что второй член асимптотики не будет зависеть от Λ для достаточно гладких a . Как видно из (1.7)–(1.12), это и происходит. С другой стороны, если A эргодичен и “достаточно случаен”, то разумно думать, что и его собственные значения “достаточно случайны”, и тогда можно предполагать, что главный член в (1.30) отвечает закону больших чисел, т.е. неслучаен и пропорционален $|\Lambda|$, а второй член асимптотики должен отвечать центральной предельной теореме, т.е. иметь вид гауссовской случайной величины, умноженной на $|\Lambda|^{1/2}$. Мы видим из (1.31), что эти эвристические рассуждения дают правильный главный член асимптотики $\text{Tr } \varphi(A_\Lambda)$. Более того, как показано в [10], [11], считающая мера (1.26) для $\Delta = (-\infty, \mu]$, $\mu \in \mathbb{R}$, отвечающая дискретному оператору Шрёдингера (1.20) с независимым одинаково распределенным случайным потенциалом и его непрерывному аналогу со случайным марковским потенциалом, удовлетворяет центральной предельной теореме. Это частный случай (1.24), в котором H – рассматриваемый оператор Шрёдингера, $a(\lambda) = \lambda$, а $\varphi(\lambda) = \chi_{(-\infty, \mu]}(\lambda)$ – характеристическая функция $(-\infty, \mu]$, $\mu \in \mathbb{R}$. Аналогичным образом ниже мы докажем центральную предельную теорему для $\text{Tr } \varphi(a_\Lambda(H))$, в которой снова H – оператор (1.20) со случайным независимым одинаково распределенным потенциалом, $a(\lambda) = \lambda$, а $\varphi(\lambda) = (\lambda - x)^{-1}$ или $\varphi(\lambda) = \log(\lambda - x)$ для некоторого $x \in \mathbb{R}$, не принадлежащего спектру H (см. теоремы 2.1 и 2.2). Мы видим, что для некоторых случайных операторов вышеприведенные эвристические рассуждения правильно предсказывают вид второго члена двучленной асимптотики левой части (1.31), который может отличаться от вида аналогичного члена для операторов свертки (т.е. для неслучайных эргодических операторов), даваемого теоремой Сегё.

Более того, в § 2 мы приведем аргументы, показывающие, что для случайных эргодических операторов в $l^2(\mathbb{Z}^d)$, $d \geq 1$, имеется следующая двучленная асимптотическая формула в смысле распределений:

$$\text{Tr } \varphi(A_\Lambda) = L^d \int \varphi(\lambda) N(d\lambda) + L^{d/2} \xi + O(L^{d-1}), \quad L \rightarrow \infty, \quad (1.33)$$

где L – характеристическая длина области Λ (в том смысле, что $|\Lambda|$ пропорционально L^d , а $|\partial\Lambda|$ пропорционально L^{d-1}), к примеру длина стороны куба с центром в начале координат, а ξ – гауссовская случайная величина. Таким образом, при $d = 1$ следующий за главным член асимптотики (1.33) – это второй член в правой части, в то время как при $d = 2$ второй и третий члены имеют один и тот же порядок величины по $|\Lambda|$, хотя второй представляется более важным, поскольку он имеет гауссовские флуктуации неограниченной амплитуды. И только начиная с $d = 3$ член порядка L^{d-1} , т.е. вклад границы Λ будет вторым членом асимптотики, в то время как второй член в правой

части (1.33), происходящий от “объемных” флуктуаций всей суммы (1.30), будет иметь меньший порядок, чем поверхностный член.

Здесь уместно сравнить изложенное выше с хорошо известным в статистической физике критерием Ларкина–Имри–Ма нижней критической размерности фазового перехода в ферромагнитной n -векторной модели с короткодействующим взаимодействием и (“замороженным”) случайным независимым одинаково распределенным внешним полем с нулевым средним (см. [12], [13]). В этом случае “поверхностный” член $O(L^{d-1})$ – это энергия переворота доменной стенки с характерной длиной L , в то время как энергия ориентации спинов вдоль поля есть $O(L^{d/2})$. Если последняя доминирует, то спины ориентированы хаотически и ферромагнитный порядок отсутствует; рассуждая, как выше, мы видим, что такая ситуация имеет место при $d = 1, 2$.

Мы уже упоминали, что для гладких пробных функций и разрывных символов (к примеру, когда $a = \chi_\Delta$ является характеристической функцией интервала спектра Δ) второй член в асимптотической формуле Сегё в одномерном случае является логарифмической функцией L (см. (1.13) и [6]–[8]). С другой стороны, в теореме 2.4 мы покажем, что для $\varphi(\lambda) = \lambda(1 - \lambda)$ и $a = \chi_\Delta$, где Δ – интервал, принадлежащий спектру оператора Шрёдингера (1.20) с независимым одинаково распределенным потенциалом, аналог асимптотики Сегё не содержит ни главного члена $O(|\Lambda|)$, ни гауссовского второго члена $O(|\Lambda|^{1/2})$, как в (1.33), а точнее, соответствующая асимптотическая формула оказывается суммой двух ограниченных с вероятностью 1 эргодических процессов относительно L из (1.3). В то время как отсутствие неслучайного “объемного” вклада $O(|\Lambda|)$ в (1.23) было ожидаемо (в этом случае $a(H)$ – это спектральный проектор $\mathcal{E}_H(\Delta)$, а для эргодических проекторов мера N из (1.27)–(1.29) имеет носителем множество $\{0, 1\}$; см. первый член в правой части (1.13)), отсутствие случайного флуктуирующего члена $O(|\Lambda|^{1/2})$ – еще одно новое явление, указывающее, что дисперсия этого члена сильно зависит от пробной функции. Точно так же ограниченный “поверхностный член” в случае разрывного символа (в отличие от логарифмически растущего второго члена для операторов свертки; см. (1.13) для $d = 1$) тоже является новым фактом, тесно связанным с тем, что спектр является чисто точечным, что характерно для всех одномерных случайных операторов и многомерных случайных операторов с достаточно большим потенциалом, но не имеет места для операторов свертки.

Мы только что обсудили вид двучленной асимптотики следа для случайных эргодических операторов. Однако выше мы упоминали еще один важный класс эргодических операторов, как непрерывных, так и дискретных операторов с почти периодическими коэффициентами. Хотя у почти периодических коэффициентов стохастические свойства выражены весьма “слабо”, наличие эргодической структуры оказывается довольно полезным для спектрального анализа соответствующих операторов (см., к примеру, [14], [9]). В п. 2.2 рассматривается одномерный оператор Шрёдингера (1.20) с квазипериодическим потенциалом (1.22), где $\mathcal{V}$ – достаточно гладкая периодическая функция с периодом 1, а $\alpha \in (0, 1)$ – диофантово иррациональное число. Мы покажем (см. теорему 2.6), что при $a(\lambda) = \lambda$ и $\varphi(\lambda) = (\lambda - x)^{-1}$, где x не принадлежит спектру H , т.е. в том же классе гладких символов и пробных функций, что и

в теореме 2.1 для оператора Шрёдингера со случайным потенциалом, двучленная асимптотика снова отличается от асимптотики для операторов свертки, хотя на этот раз отличия “минимальны”: главный член формулы $O(|\Lambda|)$ вполне аналогичен главным членам в (1.12) и (1.31), однако второй член $O(1)$ не постоянен по L из (1.3), а квазипериодичен. Более того, при $\varphi(\lambda) = \lambda(1 - \lambda)$ и $a = \chi_\Delta$, т.е. в том же классе разрывных символов и гладких пробных функций, что и в теореме 2.4, для оператора Шрёдингера со случайным потенциалом, формула следа похожа на формулу из теоремы 2.4 при условии, что Δ лежит в чисто точечном спектре рассматриваемого квазипериодического оператора. Это асимптотическое поведение опять отличается от логарифмического роста по $|\Lambda|$ в соответствующей формуле следа для операторов свертки (см. детали в замечании 2.5).

§ 2. Основные результаты

В этом параграфе мы изложим основные результаты работы с некоторыми комментариями. Технические результаты, используемые в доказательствах, приведены в § 3. Подчеркнем, что в дальнейшем в качестве исходного оператора H в тройке (1.25) всегда выступает эргодический оператор Шрёдингера (1.20). Поскольку целью статьи является обсуждение новых явлений, возникающих в аналогах теоремы Сегё для эргодических операторов, мы ограничимся технически простыми случаями символов $a(\lambda) = \lambda$ и $a(\lambda) = \chi_\Delta(\lambda)$, где Δ – промежуток, лежащий в спектре H , и пробных функций $\varphi(\lambda) = (\lambda - x)^{-1}$, $\varphi(\lambda) = \log(\lambda - x)$, где x лежит вне спектра H , и $\varphi(\lambda) = \lambda(1 - \lambda)$. Мы также обсудим некоторые другие возможности для выбора пары (a, φ) . Заметим, что случай $\varphi(\lambda) = \log(\lambda - x)$ соответствует оригинальной теореме Сегё (см. левую часть в (1.10)).

Кроме того, чтобы упростить техническую сторону, будем предполагать, что эргодический потенциал $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ оператора Шрёдингера (1.20) ограничен:

$$|v_j| \leq V_0 < \infty, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.1)$$

2.1. Случайные операторы. Рассмотрим случай независимых одинаково распределенных потенциалов, интуитивно представляющийся “самым случайным” (см. комментарий после формулы (1.22)).

Пусть $\sigma(H) \subset \mathbb{R}$ – спектр H , а

$$G = (H - x)^{-1} = \{G_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \sigma(H), \quad (2.2)$$

– резольвента H . Заметим, что H , как всякий эргодический оператор, имеет неслучайный спектр. Обозначим через H_Λ ограничение H на промежуток Λ из (1.3), а через

$$G_\Lambda = (H_\Lambda - x)^{-1} = \{(G_\Lambda)_{jk}\}_{j,k \in \Lambda} \quad (2.3)$$

– резольвенту H_Λ . Для всякого самосопряженного оператора выполняются оценки

$$|G_{jk}| \leq \|G\| \leq \frac{1}{\text{dist}(x, \sigma(H))}, \quad |(G_\Lambda)_{jk}| \leq \|G_\Lambda\| \leq \frac{1}{\text{dist}(x, \sigma(H))}. \quad (2.4)$$

Здесь важно, что эти оценки зависят только от $\text{dist}(x, \sigma(H))$ и, в частности, не зависят от потенциала и Λ .

Из (1.20) и (2.1) следует, что $\|H\| \leq \|H_0\| + \|V\| \leq 2 + V_0$, так что $\sigma(H) \subset [-2 - V_0, 2 + V_0]$ и

$$\text{dist}(x, \sigma(H)) \geq \max\{0, |x| - (2 + V_0)\}. \quad (2.5)$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть H – оператор Шрёдингера (1.20) с потенциалом, представляющим собой последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, удовлетворяющих (2.1), и пусть G и G_Λ определены в (2.2) и (2.3). Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$ и наложим условие

$$\varepsilon := \frac{2}{|x| - V_0} \in (0, 1). \quad (2.6)$$

Тогда случайная величина

$$|\Lambda|^{-1/2} (\text{Tr } G_\Lambda - |\Lambda| \mathbf{E}\{G_{00}\}) \quad (2.7)$$

сходится по распределению к гауссовской случайной величине с нулевым математическим ожиданием и конечной ненулевой дисперсией $0 < \sigma^2 < \infty$ (см. её вид в (3.14)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что, как следует из (2.5) и (2.6),

$$\text{dist}(x, \sigma(H)) \geq \delta := \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} > 0, \quad (2.8)$$

и ввиду (2.4)

$$|G_{jk}| \leq \|G\| \leq \delta^{-1} < \infty, \quad |(G_\Lambda)_{jk}| \leq \|G_\Lambda\| \leq \delta^{-1} < \infty, \quad (2.9)$$

что доказывает корректность определения резольвент G и G_Λ .

Пусть $H_{\mathbb{Z} \setminus \Lambda}$ – ограничение H на дополнение $\mathbb{Z} \setminus \Lambda$ к Λ . Записав резольвентную формулу для пары G и $(H_{\mathbb{Z} \setminus \Lambda} \oplus H_\Lambda - x)^{-1} = G_\Lambda(x) \oplus (H_{\mathbb{Z} \setminus \Lambda} - x)^{-1}$, получаем

$$(G_\Lambda)_{jk} = G_{jk} + (R_\Lambda)_{jk}, \quad j, k \in \Lambda, \quad (2.10)$$

где

$$(R_\Lambda)_{jk} = -(G_\Lambda)_{jL} G_{L+1,k} - (G_\Lambda)_{j,-L} G_{-L-1,k}. \quad (2.11)$$

Итак,

$$\text{Tr } G_\Lambda := \sum_{j \in \Lambda} (G_\Lambda)_{jj} = \sum_{j \in \Lambda} G_{jj} + r_\Lambda, \quad (2.12)$$

где

$$r_\Lambda = \text{Tr } R_\Lambda. \quad (2.13)$$

С помощью неравенств

$$\left| \sum_{j \in \Lambda} (G_\Lambda)_{jL} G_{L+1,j} \right|^2 \leq \sum_{j \in \Lambda} |(G_\Lambda)_{jL}|^2 \sum_{j \in \Lambda} |G_{L+1,j}|^2 \leq (G_\Lambda^* G_\Lambda)_{LL} (G G^*)_{L+1,L+1},$$

аналогичных неравенств с $-L$ и $-(L+1)$ вместо L и $L+1$ и формулы (2.9) получим

$$|r_\Lambda| \leq \frac{2}{\delta^2}, \quad (2.14)$$

так что второй член в правой части (2.12) имеет порядок $O(1)$, $|\Lambda| \rightarrow \infty$, для любой реализации случайного потенциала, так как наши рассуждения на самом деле детерминистские. Поскольку потенциал $V = \{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ в (1.20) является набором независимых одинаково распределенных случайных величин, то H – эргодический оператор (см. [9; следствие 2.6]). Тогда из теоремы 2.7 и леммы 2.8 в [9] следует, что при $z \notin \sigma(H)$ резольвента $(H - z)^{-1}$ есть также эргодический оператор, значит, $\{G_{jj}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ – эргодическая последовательность (см. (1.19)) и, в частности,

$$\mathbf{E}\{G_{jj}\} = \mathbf{E}\{G_{00}\} \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда и из (2.12) для (2.7) мы получаем

$$|\Lambda|^{-1/2}(\mathrm{Tr} G_\Lambda - |\Lambda| \mathbf{E}\{G_{00}\}) = |\Lambda|^{-1/2} \sum_{j \in \Lambda} (G_{jj} - \mathbf{E}\{G_{jj}\}) + \tilde{r}_\Lambda, \quad (2.15)$$

где

$$|\tilde{r}_\Lambda| \leq \frac{4}{|\Lambda|^{1/2} \delta^2}. \quad (2.16)$$

Таким образом, доказательство теоремы сводится к доказательству центральной предельной теоремы для последовательности диагональных матричных элементов резольвенты одномерного оператора Шрёдингера (1.20) с независимым одинаково распределенным потенциалом. Эта теорема доказана в лемме 3.3 в предположении (2.6).

Теорема доказана.

Приведем еще один пример реализации общей формулы (1.33) с $d = 1$ – аналог оригинальной теоремы Сегё (1.10).

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть H – оператор Шрёдингера (1.20) с потенциалом, являющимся последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющих (2.1), и пусть H_Λ – его ограничение на Λ из (1.3). Положим

$$L = \log(H - x) = \{L_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}, \quad (2.17)$$

$$L_\Lambda = \log(H_\Lambda - x) = \{(L_\Lambda)_{jk}\}_{j,k \in \Lambda}, \quad (2.18)$$

где x ограничено, неположительно и удовлетворяет (2.6). Тогда случайная величина

$$|\Lambda|^{-1/2}(\mathrm{Tr} L_\Lambda - |\Lambda| \mathbf{E}\{L_{00}\})$$

сходится по распределению к гауссовской случайной величине с нулевым математическим ожиданием и ненулевой конечной дисперсией $0 < \hat{\sigma}^2 < \infty$ (см. ее вид в (3.41)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что в соответствии с (2.6)

$$H - x \geq |x| - (V_0 + 2) \geq \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} > 0,$$

так что операторы (2.17) и (2.18) корректно определены (ср. (1.6)).

Мы используем представление

$$\log(H - x) = \log|x| + \int_0^1 H(sH - x)^{-1} ds \quad (2.19)$$

и его аналог для $H_\Lambda \oplus H_{\mathbb{Z} \setminus \Lambda}$. Тогда (ср. (2.10)–(2.13))

$$\mathrm{Tr} L_\Lambda = \sum_{|j| \in \Lambda} L_{jj} + \sum_{|j| \in \Lambda} (\hat{R}_\Lambda)_j,$$

где (ср. (2.10), (2.11))

$$\begin{aligned} (\hat{R}_\Lambda)_j &= -x \int_0^1 ((sH_\Lambda - x)^{-1})_{j,L} ((sH - x)^{-1})_{L+1,j} ds \\ &\quad - x \int_0^1 ((sH_\Lambda - x)^{-1})_{j,-L} ((sH - x)^{-1})_{-L-1,j} ds. \end{aligned}$$

Поскольку в последней формуле под интегралом стоят выражения, сходные с правой частью (2.11), мы получаем аналоги (2.15), (2.16):

$$|\Lambda|^{-1/2} \sum_{j \in \Lambda} ((L_\Lambda)_{jj} - \mathbf{E}\{L_{jj}\}) = |\Lambda|^{-1/2} \sum_{j \in \Lambda} (L_{jj} - \mathbf{E}\{G_{jj}\}) + \hat{r}_\Lambda,$$

где

$$|\hat{r}_\Lambda| \leq \frac{4x_0}{\delta^2},$$

а δ определено в (2.8).

Итак, доказательство теоремы сводится к доказательству центральной предельной теоремы для диагональных матричных элементов оператора L из (2.17). Она доказывается в лемме 3.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. (i) В теоремах 2.1 и 2.2 рассмотрены случаи тройки (1.25), в которых H есть одномерный оператор Шрёдингера со случайным потенциалом, $a(\lambda) = \lambda$ и φ есть гладкая функция на спектре H . В этой связи необходимо отметить, что случай с этими же H и a и с $\varphi(\lambda) = \chi_{\mathbb{R}_-}(\lambda - \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$, т.е. с разрывной пробной функцией, был рассмотрен в упоминавшихся выше работах [10], [11]. Он соответствует линейной статистике (1.30), равной считающей функции собственных значений (1.26). В [10], [11] показано, что случайная величина

$$(\mathcal{N}_\Lambda(\mu) - |\Lambda|N((-\infty, \mu)|\Lambda|^{-1/2}),$$

где $\mathcal{N}$ определено в (1.28), (1.29), сходится по распределению к гауссовской случайной величине с нулевым средним и положительной дисперсией, т.е. что в этом случае тоже имеет место центральная предельная теорема.

(ii) Многомерный случай $d \geq 1$ теорем 2.1 и 2.2 рассматривается аналогично и будет изложен в другой работе. В этом случае

$$(Hu)_j = - \sum_{|k-j|=1} u_k + v_j u_j, \quad j \in \mathbb{Z}^d,$$

вместо (1.20) и

$$(R_\Lambda)_{jk} = \sum_{|t-s|=1, t \in \Lambda, s \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda} (G_\Lambda)_{jt} G_{s,k}$$

вместо (2.11). В итоге рассуждения, аналогичные использованным при выводе (2.14), приводят к неравенству

$$|\tilde{\tau}_\Lambda| \leq \frac{|\partial\Lambda|}{\delta^2},$$

в котором Λ теперь может быть, скажем, кубом в $\mathbb{Z}^d$ с центром в начале координат, а $|\partial\Lambda|$ – число точек в $\mathbb{Z}^d$, удовлетворяющих условиям $|t-s|=1$, $t \in \Lambda$, $s \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda$. В этом случае также имеет место центральная предельная теорема для эргодической последовательности $\{G_{jj}\}_{j \in \mathbb{Z}^d}$.

Теоремы 2.1 и 2.2 представляют собой два случая общей постановки (1.25) для двучленной асимптотической формулы следа (см. (1.33)), аналогичной теореме Сегё, в которой H – одномерный оператор Шрёдингера со случайным независимым одинаково распределенным потенциалом, а a и φ гладкие (и даже вещественно аналитические). В обоих случаях второй член асимптотики дается центральной предельной теоремой, а не вкладом поверхности Λ . Поэтому разумно предположить, что то же выполнено и для достаточно большого класса гладких символов и пробных функций. Более того, согласно [10], [11] такой же результат имеет место для некоторых разрывных пробных функций и гладких символов. Легко также показать, что в случае оператора свертки для его считающей меры имеем $\mathcal{N}_\Lambda(\Delta) = c(\Delta)|\Lambda| + O(1)$, $|\Lambda| \rightarrow \infty$. Все это свидетельствует об устойчивости порядка величины второго члена асимптотической формулы следа (1.24) относительно гладкости пробных функций в тройке (1.25) (при условии гладкости символа) для эргодических операторов (как неслучайных, т.е. операторов свертки, так и случайных).

С другой стороны, как показывает следующая теорема, асимптотическая формула следа (1.24) зависит от гладкости символа. А именно, в теореме рассмотрен случай тройки (1.25), в которой H есть опять одномерный оператор Шрёдингера со случайным потенциалом, $\varphi(\lambda) = \lambda(1-\lambda)$ и $a = \chi_\Delta$ – характеристическая функция интервала Δ (т.е. случай, когда $a(H) = \mathcal{E}_H(\Delta)$ есть спектральный проектор H , соответствующий спектральному интервалу Δ). Оказывается, что этот случай отличается как от такового для операторов свертки и разрывных символов (см. (1.13) и [6]–[8]), так и для случайных операторов и гладких символов, как, например, в [10], [11] и теоремах 2.1 и 2.2.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть H – оператор Шрёдингера (1.20) с потенциалом, представляющим собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющих (2.1) и имеющих ограниченную

плотность распределения. Пусть $\mathcal{E}_H(\Delta)$ – спектральный проектор H , соответствующий интервалу спектра $\Delta \subset \sigma(H)$, удовлетворяющему условию

$$N(\Delta) \in (0, 1), \quad (2.20)$$

где N определено в (1.27)–(1.29). Тогда существуют нетривиальные случайные величины $t_{\pm}$, измеримые относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{-\infty}^{\infty}$, порожденной $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ (см. ниже формулы (2.22), (2.26) и (2.28)), такие, что с вероятностью 1 верна асимптотическая формула

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{E}_H(\Delta))_{\Lambda}(\mathbf{1}_{\Lambda} - (\mathcal{E}_H(\Delta))_{\Lambda}) = t_{+}(T^L \omega) + t_{-}(T^{-L} \omega) + o(1), \quad L \rightarrow \infty, \quad (2.21)$$

для ограничения $(\mathcal{E}_H(\Delta))_{\Lambda}$ оператора $\mathcal{E}_H(\Delta)$ на отрезок $\Lambda = [-L, L]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначив

$$\mathcal{E}_H(\Delta) = \{P_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}, \quad (2.22)$$

мы можем записать левую часть (2.21) как

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=-L}^L P_{jk}(\delta_{jk} - P_{jk}) &= \sum_{j=-L}^L \left(P_{jj} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} |P_{jk}|^2 + \sum_{|k|>L} |P_{jk}|^2 \right) \\ &= \sum_{j=-L}^L \sum_{k>L} |P_{jk}|^2 + \sum_{j=-L}^L \sum_{k<-L} |P_{jk}|^2, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где было использовано равенство

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |P_{jk}|^2 = P_{jj},$$

верное для любого ортогонального проектора. Первая сумма в правой части (2.23) равна

$$t_L^{\pm} := \sum_{j=-L}^L \sum_{k>L} |P_{jk}|^2 = \sum_{j=-\infty}^L \sum_{k>L} |P_{jk}|^2 + \sum_{j<-L} \sum_{k>L} |P_{jk}|^2 = s_L' + s_L''. \quad (2.24)$$

Воспользуемся теперь одним из основных результатов спектрального анализа одномерного оператора Шрёдингера со случайным потенциалом, согласно которому существуют константы $C < \infty$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$\mathbf{E}\{|P_{jk}(\omega)|\} \leq C e^{-\gamma|j-k|} \quad (2.25)$$

(см. недавние обзоры [15], [16]). Эта оценка по существу эквивалентна полной локализации, т.е. чисто точечному характеру спектра и экспоненциальному убыванию всех собственных функций одномерного оператора Шрёдингера со случайным потенциалом.

Как следует из оценки и неравенства $|P_{jk}| \leq 1$, выполненного для всех ортогональных проекторов,

$$\mathbf{E}\{s_L''\} \leq C_1 e^{-\gamma_1 L},$$

где $C_1 < \infty$ и $\gamma_1 > 0$ не зависят от L . Отсюда по лемме Бореля–Кантелли величина s_L'' в (2.24) обращается в нуль с вероятностью 1 при $L \rightarrow \infty$, т.е.

$$t_+^{(L)} = s_L' + o(1), \quad L \rightarrow \infty.$$

Чтобы определить член s_L' в (2.24), вспомним, что $\{P_{jk}(\omega)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ – матрица эргодического оператора $\mathcal{E}_H(\Delta)$. Значит, ее элементы удовлетворяют (1.19) и, в частности, $P_{L-j,k+L}(\omega) = P_{-j,k}(T^L\omega)$, так что мы можем написать

$$s_L' = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |P_{L-j,k+L}|^2 = t_+(T^L\omega),$$

где

$$t_+(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |P_{-j,k}(\omega)|^2. \quad (2.26)$$

Правая часть (2.26) есть ряд неотрицательных измеримых функций, так что он сходится с вероятностью 1, если сходится ряд из математических ожиданий его членов, т.е. если

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}\{|P_{-j,k}|^2\} < \infty.$$

В свою очередь, это следует из (2.25), так что $t_+(\omega)$ в (2.26) есть корректно определенная измеримая функция, и с вероятностью 1

$$t_+^{(L)} = t_+(T^L\omega) + o(1), \quad L \rightarrow \infty. \quad (2.27)$$

Аналогичные рассуждения показывают, что вторая сумма в правой части в (2.23) равна $t_-(T^{-L}\omega) + o(1)$, $L \rightarrow \infty$, с вероятностью 1, где

$$t_-(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |P_{j,-k}(\omega)|^2. \quad (2.28)$$

Покажем, что $t_{\pm}$ не равны нулю тождественно. Предположим противное: пусть $t_+(\omega) = 0$ с вероятностью 1. Тогда согласно (2.26) $P_{-j,k}(\omega) = 0$ с вероятностью 1 для $j = 0, 1, \dots$ и $k = 1, 2, \dots$. Отсюда в силу соотношения $P_{s-j,k+s}(\omega) = P_{-j,k}(T^s\omega)$, выполняющегося для всякого $s \in \mathbb{Z}$ (см. (1.19)), и в силу эрмитовости $\mathcal{E}_H(\Delta) = \{P_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ получаем, что $P_{jk}(\omega) = 0$, $j \neq k$, т.е. спектральный проектор $\mathcal{E}_H(\Delta)$ диагонален. Так как оператор $\mathcal{E}_H(\Delta)$ коммутирует с H , то он является либо нулем, либо тождественным оператором, так что в силу (1.29) $N(\Delta) \in \{0, 1\}$. Последнее соотношение несовместимо с условием (2.20).

Аналогичные рассуждения можно применить к случайной величине t_- из (2.28).

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Рассуждения, доказывающие (2.23), верны для всякого ортогонального проектора в $l^2(\mathbb{Z})$. Вдобавок в силу (1.32) для спектрального проектора (2.22) оператора свертки имеем

$$|P_{jk}| = \frac{|\sin \kappa(j-k)|}{|j-k|}, \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (2.29)$$

где κ определяется a и Δ . В итоге правая часть (2.23) имеет асимптотику $\text{const} \cdot \log |\Lambda|$, $|\Lambda| \rightarrow \infty$. Это дает простой пример появления логарифмических членов в теореме Сегё в случае разрывного символа, неоднократно упоминавшегося выше (см., к примеру, (1.13)).

2.2. Квазипериодические операторы. Здесь мы рассмотрим случай, когда в роли H из (1.25) выступает одномерный дискретный оператор Шрёдингера вида (1.20) с квазипериодическим потенциалом (1.22), интуитивно представляющийся “наименее случайным” эргодическим потенциалом (1.18) (см. комментарии, следующие за (1.22)).

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть H – одномерный дискретный оператор Шрёдингера вида (1.20) в $l^2(\mathbb{Z})$ с квазипериодическим потенциалом (1.22), удовлетворяющим (2.1). Предположим, что функция $\mathcal{V}$ в (1.22) имеет $[\beta] + 3$ ограниченных производных и что частота $\alpha \in (0, 1)$ из (1.22) диофантова, т.е. удовлетворяет оценке

$$|\alpha l - m| \geq \frac{C}{l^\beta}, \quad \beta > 1, \quad (2.30)$$

для всякого целого m и всякого натурального l . Тогда для резольвенты $G_\Lambda(\omega) = (H_\Lambda - z)^{-1}$, где H_Λ – ограничение на Λ из (1.3), a z удовлетворяет условию

$$\text{dist}\{z, \sigma(H)\} \geq \eta_0 > 2, \quad (2.31)$$

где $\sigma(H)$ – спектр H , имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sum_{|j| \leq L} (G_\Lambda(\omega))_{jj} &= (2L + 1) \int_{\mathbb{T}} G_{00}(\omega) d\omega \\ &+ r_+(\alpha L + \omega) + r_-(-\alpha L + \omega) + o(1), \quad L \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где $r_\pm$ – непрерывные 1-периодические функции (см. явные формулы в (2.40)).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Диофантовы числа образуют множество полной меры Лебега в $\mathbb{T}$ (см., к примеру, [17; теорема 32]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.6. По лемме 3.5

$$\begin{aligned} \sum_{|j| \leq L} (G_\Lambda(\omega))_{jj} &= \sum_{|j| \leq L} G_{jj}(\omega) - \sum_{|j| \leq L} G_{L,j} G_{j,L+1} (1 + G_{L,L+1})^{-1} \\ &- \sum_{|j| \leq L} G_{-L,j} G_{j,-L-1} (1 + G_{-L,-L-1})^{-1} + O(e^{-2bL}) \\ &= T_1 + T_2 + T_3 + O(e^{-2bL}), \quad L \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Из (1.16), (1.19) и леммы 3.1 следует, что

$$G_{j+L,k+L}(\omega) = G_{jk}(\alpha L + \omega) \quad (2.34)$$

и, в частности, $G_{L,L+1}(\omega) = G_{01}(\alpha L + \omega)$. Вдобавок из (3.1) и (2.34) (ср. (2.27)) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \Lambda} G_{L,j}(\omega) G_{j,L+1}(\omega) &= \sum_{j=-\infty}^L G_{L,j}(\omega) G_{j,L+1}(\omega) + O(e^{-2bL}) \\ &= \sum_{j=-\infty}^0 G_{0j}(\alpha L + \omega) G_{j1}(\alpha L + \omega) + O(e^{-2bL}), \quad L \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, член T_2 в (2.33) имеет вид

$$\begin{aligned} T_2 &= g_+(\alpha L + \omega) + O(e^{-2bL}), \quad L \rightarrow \infty, \\ g_+(\omega) &= (1 - G_{01}(\omega))^{-1} \sum_{j=-\infty}^0 G_{0,j}(\omega) G_{j,1}(\omega), \end{aligned} \quad (2.35)$$

так что T_2 квазипериодичен по L с точностью до экспоненциально малой погрешности.

Член T_3 в правой части (2.33) имеет аналогичную асимптотику:

$$\begin{aligned} T_3 &= g_-(-\alpha L + \omega) + O(e^{-2bL}), \quad L \rightarrow \infty, \\ g_-(\omega) &= (1 - G_{0,-1}(\omega))^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} G_{0,j}(\omega) G_{j,-1}(\omega). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Рассмотрим теперь T_1 в (2.33). По лемме 3.6 G_{00} имеет $[\beta] + 3$ непрерывных производных по $\omega \in \mathbb{T}$. Значит, для соответствующего коэффициента Фурье

$$g_l = \int_{\mathbb{T}} e^{-2\pi i l \omega} G_{00}(\omega) d\omega$$

выполнена оценка

$$|g_l| \leq \frac{C}{|l|^{[\beta]+3}}, \quad |l| \geq 1, \quad (2.37)$$

с некоторым $C < \infty$. Отсюда, написав ряд Фурье по ω для G_{00} , получаем

$$\begin{aligned} T_1 &:= \sum_{j \in \Lambda} G_{jj}(\omega) = (2L+1)g_0 + \sum_{l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} g_l \frac{\sin \pi \alpha l (2L+1)}{\sin \pi \alpha l} e^{2\pi i l \omega} \\ &= (2L+1) \int_{\mathbb{T}} G_{00}(\omega) d\omega + f_+(\alpha L + \omega) - f_-(-\alpha L + \omega), \end{aligned} \quad (2.38)$$

где

$$f_{\pm}(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{g_l}{2i \sin \pi \alpha l} e^{2\pi i l (\omega \pm \alpha/2)}. \quad (2.39)$$

Согласно (2.30) для $l \neq 0$

$$|\sin \pi \alpha l| = |\sin \pi (\alpha l - m)| \geq 2|\alpha l - m| \geq \frac{2C}{|l|^{\beta}},$$

так что (2.37) означает, что ряд Фурье в правой части (2.39) абсолютно сходится и функции $f_{\pm}$ непрерывны. Отсюда и в силу (2.33), (2.35), (2.36) и (2.39) получаем равенство (2.32) с

$$r_{\pm}(\omega) = \pm f_{\pm}(\omega) + g_{\pm}(\omega). \quad (2.40)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. (i) Условия теоремы 2.6 неоптимальны. Не вдаваясь в обсуждения, заметим, что ее результат верен и для неограниченного квазипериодического потенциала

$$v_j = g \operatorname{tg} \pi(\alpha j + \omega).$$

Соответствующее доказательство использует технику, изложенную в [9; гл. 18].

(ii) Рассмотрим в (1.22) случай $\alpha = m/n$ с натуральным n и $0 \leq m < n$, т.е. случай периодического потенциала с периодом n . Заметим, что любой периодический потенциал можно считать эргодическим, рандомизируя исходный отрезок периода по равномерной мере. Так что в (1.22) достаточно рассмотреть $\omega = 0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n$. Теперь члены T_2 и T_3 из (2.33) периодичны по L с точностью до экспоненциально малой погрешности по тем же соображениям, что и в квазипериодическом случае. Для нахождения первого члена T_1 запишем

$$|\Lambda| = 2L + 1 = \nu n + \mu n, \quad \nu = \left\lfloor \frac{|\Lambda|}{n} \right\rfloor \in \mathbb{N}, \quad \mu = \left\{ \frac{|\Lambda|}{n} \right\} \in \mathbb{Q},$$

где μ периодична по $|\Lambda|$ с периодом n . С учетом периодичности диагональных матричных элементов $\{G_{jj}\}$ для $\omega = m/n$ получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \Lambda} G_{jj}(\omega) &= \nu \sum_{j=0}^{n-1} G_{jj}(\omega) + \sum_{j=1}^{\mu n-1} G_{jj}(\omega) \\ &= |\Lambda| n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} G_{00} \left(\frac{j}{n} + \omega \right) + \sum_{j=1}^{\mu n-1} G_{jj}(\omega) - \mu \sum_{j=0}^{n-1} G_{jj}(\omega), \end{aligned}$$

где второй и третий члены в правой части формулы периодичны по $|\Lambda|$ с периодом n , поскольку это свойство есть у μ . Чтобы привести этот результат к виду, подобному квазипериодическому случаю, вспомним, что $\omega = m/n$ для некоторого $m \in [0, n-1]$, и не будем писать ω в первой сумме в правой части. Аналогичные рассуждения применимы к любой периодической последовательности, а не только к (1.22) с $\alpha = m/n$.

(iii) Доказательство асимптотик из (2.35) и (2.36) приложимо к любому эргодическому потенциалу. Таким образом, в общем случае для резольвенты одномерного оператора Шрёдингера с эргодическим потенциалом получаем (ср. (2.21))

$$\sum_{|j| \leq L} (G_{\Lambda}(\omega))_{jj} = \sum_{|j| \leq L} G_{jj}(\omega) + g_{+}(T^L \omega) + g_{-}(T^{-L} \omega) + O(e^{-2bL}), \quad L \rightarrow \infty, \quad (2.41)$$

где $g_{\pm}$ имеют вид (2.35) и (2.36). Более того, главный член асимптотики первого члена в правой части (2.41) при $L \rightarrow \infty$ тоже оказывается всегда одним

и тем же; он равен $(2L + 1)\mathbf{E}\{G_{00}(\omega)\}$ по эргодической теореме. Что касается второго члена, то он есть либо $O(L^{1/2})$ для случайного потенциала (см. теоремы 2.1 и 2.2), либо $O(1)$ для квазипериодического потенциала (см. (2.38)). В частности, если потенциал нулевой, то G – оператор свертки с символом $\hat{a}(p) = (2 \cos 2\pi p - z)^{-1}$. Так что естественно ожидать, что правая часть (2.41) совпадает с производной по z от правой части в формуле Сегё (1.10), в которой $\{l_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ – коэффициенты Фурье $\log \hat{a}(p)$. Стандартными, но несколько утомительными вычислениями можно показать, что это действительно имеет место.

(iv) Основным ингредиентом доказательства теоремы 2.4 для случайного оператора Шрёдингера является оценка (2.25). Аналогичная оценка верна для ряда почти периодических операторов и тесно связана с чисто точечным характером их спектра так же, как и для случайных операторов (см. теорему 2.4). Эта оценка имеет место, если почти периодический потенциал имеет диофантову (см. (2.30)) и достаточно большую амплитуду (см. [14], [18], [9]). Таким образом, результат теоремы 2.4 верен и для таких квазипериодических операторов, что свидетельствует о достаточно высокой степени общности асимптотики (2.21), а именно об ограниченности величины (1.24) для некоторых разрывных символов и операторов Шрёдингера с чисто точечным спектром. С другой стороны, абсолютно непрерывная компонента спектра, типичная для одномерных операторов Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом малой амплитуды, часто оказывается нигде не плотной (канторовой). Поэтому и в силу результатов из [19] можно предполагать, что в этом случае рост правой части в (2.23) может быть весьма близок к линейному. Заметим, что для ортогональных проекторов в $l^2(\mathbb{Z})$ правая часть есть $o(|\Lambda|)$, $|\Lambda| \rightarrow \infty$.

§ 3. Вспомогательные результаты

Начнем со следующей леммы.

ЛЕММА 3.1. Пусть H – одномерный оператор Шрёдингера (1.20) с независимым одинаково распределенным случайным потенциалом, и пусть G и L определены, как в (2.2) и (2.17). Допустим, что выполнено (2.6). Тогда:

(i) существуют $C < \infty$ и $b > 0$, зависящие только от ε из (2.6), для которых

$$|G_{jk}| \leq C e^{-b|j-k|}, \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (3.1)$$

$$|L_{jk}| \leq C e^{-b|j-k|}, \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad x < 0; \quad (3.2)$$

(ii) для любого натурального числа P имеют место представления

$$G_{jj} = G_{jj}^P + R_{jj}^P, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3.3)$$

$$L_{jj} = L_{jj}^P + \hat{R}_{jj}^P, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3.4)$$

с G_{jj}^P и L_{jj}^P , зависящими только от $\{v_k\}_{|j-k| \leq P}$ (т.е. измеримыми относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{j-P}^{j+P}$, порожденной $\{v_k\}_{|j-k| \leq P}$), и

$$|G_{jj}^P| \leq C, \quad |R_{jj}^P| \leq Ce^{-bP}, \quad (3.5)$$

$$|L_{jj}^P| \leq C, \quad |\hat{R}_{jj}^P| \leq Ce^{-bP}. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпишем ряд Неймана–Лиувилля для G :

$$G_{jk} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l ((V-x)^{-1}(H_0(V-x)^{-1})^l)_{jk}. \quad (3.7)$$

Учитывая, что $\|H_0\| \leq 2$ и

$$\|(V-x)^{-1}\| \leq (\text{dist}\{x, [-V_0, V_0]\})^{-1} \leq \|x - V_0\|^{-1},$$

мы видим, что этот ряд сходится, поскольку в силу (2.6)

$$|((V-x)^{-1}(H_0(V-x)^{-1})^l)_{jk}| \leq \|((V-x)^{-1}(H_0(V-x)^{-1})^l)\| \leq \varepsilon^l.$$

Вдобавок $(V-z)^{-1}$ – оператор умножения и $(H_0)_{jk}$ отличен от нуля только при $|j-k|=1$, так что член $((V-z)^{-1}(H_0(V-z)^{-1})^l)_{jk}$ ряда (3.7) будет ненулевым только при $l \geq |j-k|$, т.е. ряд начинается с $l = |j-k|$ и мажорируется числом $\varepsilon^{|j-k|}(1-\varepsilon)^{-1}$. Это эквивалентно (3.1) с

$$C = (1-\varepsilon)^{-1}, \quad \varepsilon = e^{-b}. \quad (3.8)$$

Аналогичным образом, первые P членов ряда (3.7) содержат $(V_t - z)^{-1}$ с $|j-t| \leq P$ и сумма членов от $l=0$ до $l=P-1$ ограничена числом $(1-\varepsilon)^{-1}$, а сумма членов от $l=P$ до $l=\infty$ ограничена числом $\varepsilon^P(1-\varepsilon)^{-1}$. Обозначив через $G_{jj}^P(z)$ первую сумму и через $R_{jj}^P(z)$ вторую и используя (3.8), получим (3.3) и (3.5).

Доказательства (3.2), (3.4) и (3.6) сводятся к этому результату с учетом (2.19). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Оценка (3.1) весьма простая и грубая. Более тонкие оценки см. в [20].

ЛЕММА 3.3. Пусть $\{G_{jj}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ – последовательность, определенная в (2.2), где G – резольвента одномерного оператора Шрёдингера (1.20) с независимым одинаково распределенным случайным потенциалом, удовлетворяющим (2.1) и (2.6). Тогда:

(i) если

$$G_{jj}^\circ := G_{jj} - \mathbf{E}\{G_{jj}\}, \quad (3.9)$$

а

$$C_{j-k} = \mathbf{E}\{G_{jj}^\circ G_{kk}^\circ\} \quad (3.10)$$

– ковариация $\{G_{jj}\}_{j \in \mathbb{Z}}$, то существуют $C < \infty$ и $b > 0$, для которых

$$|C_{j-k}| \leq Ce^{-b|j-k|}, \quad (3.11)$$

(ii) если

$$\gamma_\Lambda = \sum_{j \in \Lambda} G_{jj}, \quad (3.12)$$

а

$$\mathbf{Var}\{|\Lambda|^{-1/2}\gamma_\Lambda\} := |\Lambda|^{-1}\mathbf{E}\{|\gamma_\Lambda - \mathbf{E}\{\gamma_\Lambda\}|^2\} \quad (3.13)$$

– соответствующая дисперсия, то

$$\sigma^2 := \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \mathbf{Var}\{|\Lambda|^{-1/2}\gamma_\Lambda\} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} C_j \in (0, \infty); \quad (3.14)$$

(iii) случайная величина

$$|\Lambda|^{-1/2}(\gamma_\Lambda - \mathbf{E}\{\gamma_\Lambda\})$$

сходится по распределению к гауссовской случайной величине с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) То, что ковариация зависит от разности $j - k$, следует из того, что для точек с $\text{dist}\{x, \sigma(H)\} > 0$ (см. (2.9) и (2.8)) последовательность $\{G_{jj}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ эргодическая. С помощью леммы 3.1 и формул (3.3)–(3.5) с $P = |j - k|/3$ мы получаем, что соответствующие $(G_{jj}^P)^\circ$ и $(G_{kk}^P)^\circ$ являются независимыми случайными величинами с нулевым математическим ожиданием, так что

$$\mathbf{E}\{(G_{jj}^\circ G_{kk}^\circ)\} = \mathbf{E}\{(G_{jj}^P)^\circ (R_{kk}^P)^\circ\} + \mathbf{E}\{(R_{jj}^P)^\circ (G_{kk}^P)^\circ\} + \mathbf{E}\{(R_{jj}^P)^\circ (R_{kk}^P)^\circ\}.$$

Теперь из (3.3)–(3.5) можно вывести (3.11) с $C = 12(1 - \varepsilon)^{-2}$ и $e^{-b} = \varepsilon^{1/3}$.

(ii) Выражение для σ^2 из (3.14) и неравенство $\sigma^2 < \infty$ следуют из (3.12) и (3.9)–(3.13). Покажем, что σ^2 положительно.

Сначала заметим, что σ^2 – вещественно аналитическая функция x вне спектра H . Кроме того, легко получить асимптотику

$$G_{jj} = -x^{-1} + v_j x^{-2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

которая вместе с (3.9), (3.10) и (3.13) дает

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}\{v_0\}x^{-4}(1 + O(x^{-1})), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Мы видим, что существует такое $x_1 \in (0, \infty)$, что $\sigma^2 > 0$ при $|x| \geq x_1$ и у σ^2 может быть конечное число нулей при $|x| \in (x_0, x_1)$, $x_0 = 2(V_0 + 1)$ (см. (2.6)).

Теперь покажем, что σ^2 строго положительна при всех $|x| \geq x_0 > \text{dist}(x, \sigma(H))$. Нам будет удобно рассматривать

$$\tau_\Lambda := \text{Tr } G_\Lambda \quad (3.15)$$

вместо γ_Λ из (3.12). В самом деле, из (2.12), (2.14) и (3.9)–(3.13) получаем, что

$$|\Lambda|^{-1}\mathbf{Var}\{\gamma_\Lambda\} - |\Lambda|^{-1}\mathbf{Var}\{\tau_\Lambda\} = O(|\Lambda|^{-1/2}), \quad |\Lambda| \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

Для анализа $\mathbf{Var}\{\tau_\Lambda\}$ воспользуемся мартингальным подходом в его простейшем варианте (см., к примеру, [21; предложение 18.1.1]), согласно которому если $\{X_j\}_{j=-L}^L$ – случайные величины, $\Phi: \mathbb{R}^{2L+1} \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченная функция и $\Psi = \Phi(X_{-L}, X_{-L+1}, \dots, X_L)$, то

$$\mathbf{Var}\{\Psi\} := \mathbf{E}\{|\Psi - \mathbf{E}\{\Psi\}|^2\} = \sum_{l=-L}^L \mathbf{E}\{|\Psi^{(l)} - \Psi^{(l+1)}|^2\}, \quad (3.17)$$

где

$$\Psi^{(l)} = \mathbf{E}\{\Psi | \mathcal{F}_l^L\}, \quad \Psi^{(-L)} = \Psi, \quad \Psi^{(L+1)} = \mathbf{E}\{\Psi\}, \quad (3.18)$$

а $\mathcal{F}_a^b$ – σ -алгебра, порожденная $\{X_j\}_{a \leq j \leq b}$.

Взяв $X_j = v_j$, $|j| \leq L$ и $\Phi = \tau_\Lambda$, получаем равенство

$$|\Lambda|^{-1} \mathbf{Var}\{\tau_\Lambda\} = |\Lambda|^{-1} \sum_{l=-L}^L \mathbf{E}\{|\mathcal{M}_\Lambda^{(l)}|^2\}, \quad \mathcal{M}_\Lambda^{(l)} := \tau_\Lambda^{(l)} - \tau_\Lambda^{(l+1)}, \quad (3.19)$$

где

$$\tau_\Lambda^{(l)} = \mathbf{E}\{\tau_\Lambda | \mathcal{F}_l^L\}, \quad \tau_\Lambda^{(-L)} = \tau_\Lambda, \quad \tau_\Lambda^{(L+1)} = \mathbf{E}\{\tau_\Lambda\}. \quad (3.20)$$

Теперь проанализируем зависимость $\tau_\Lambda^{(l)}$ от v_l . Для этого воспользуемся просто получаемой формулой для разности резольвент G_0 и G пары самосопряженных операторов A_0 и $A_0 + vP$, где $v \in \mathbb{R}$, а P – ортогональный проектор на единичный вектор e :

$$G = G_0 - vG_0PG_0(1 + v(G_0e, e))^{-1}, \quad (3.21)$$

так что

$$\mathrm{Tr} G = \mathrm{Tr} G_0 - v(G_0^2e, e)(1 + v(G_0e, e))^{-1}. \quad (3.22)$$

В качестве A_0 возьмем $H|_{v_l=0}$, в качестве v возьмем v_l и возьмем вектор e_l из канонического базиса в $l^2(\mathbb{Z})$ в качестве e . Положим

$$G_\Lambda|_{v_l=0} = \mathcal{G}_l; \quad (3.23)$$

тогда из (3.21), (3.22) и (3.15) мы получим

$$(G_\Lambda)_{jk} = (\mathcal{G}_l)_{jk} - v_l(\mathcal{G}_l)_{jl}(\mathcal{G}_l)_{lk}(1 + v_l(\mathcal{G}_l)_{ll})^{-1}, \quad (3.24)$$

$$\tau_\Lambda = \mathrm{Tr} \mathcal{G}_l - \frac{v_l(\mathcal{G}_l^2)_{ll}}{1 + v_l(\mathcal{G}_l)_{ll}}. \quad (3.25)$$

Так как $\mathcal{F}_{l+1}^L$ и σ -алгебра $\mathcal{F}_l^l$, порожденная v_l , независимы, а $\mathcal{G}_l$ не зависит от v_l , из (3.25) получаем равенства

$$\begin{aligned} \tau_\Lambda^{(l)} &:= \mathbf{E}\{\tau_\Lambda | \mathcal{F}_l^L\} = \mathbf{E}\{\mathrm{Tr} \mathcal{G}_l | \mathcal{F}_{l+1}^L\} - \int \mathbf{E}\left\{\frac{v'_l(\mathcal{G}_l^2)_{ll}}{1 + v'_l(\mathcal{G}_l)_{ll}} \middle| \mathcal{F}_{l+1}^L\right\} F(dv'_l), \\ \tau_\Lambda^{(l+1)} &:= \mathbf{E}\{\tau_\Lambda | \mathcal{F}_{l+1}^L\} = \mathbf{E}\{\mathrm{Tr} \mathcal{G}_l | \mathcal{F}_{l+1}^L\} - \mathbf{E}\left\{\frac{v_l(\mathcal{G}_l^2)_{ll}}{1 + v_l(\mathcal{G}_l)_{ll}} \middle| \mathcal{F}_{l+1}^L\right\}, \end{aligned}$$

где F – распределение вероятностей всех $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Отсюда и из (3.19) получаем

$$\mathcal{M}_\Lambda^{(l)} = \mathbf{E}\left\{\frac{v_l(\mathcal{G}_l^2)_{ll}}{1 + v_l(\mathcal{G}_l)_{ll}} - \int \frac{v'_l(\mathcal{G}_l^2)_{ll}}{1 + v'_l(\mathcal{G}_l)_{ll}} F(dv'_l) \middle| \mathcal{F}_{l+1}^L\right\}. \quad (3.26)$$

Поскольку $\mathcal{G}_l$ в (3.23) не зависит от $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z} \setminus \Lambda}$, в этом выражении $\mathcal{F}_{l+1}^L$ можно заменить на $\mathcal{F}_{l+1}^\infty$. Вспомним вдобавок, что в этом доказательстве мы использовали резольвенту G_Λ из (2.3) оператора H_Λ на конечном интервале (1.3). Как следует из (2.9), (2.10), (3.1), в формулах выше и, в частности, в (3.26) G_Λ можно заменить на G из (2.2) с погрешностью, стремящейся к нулю при $\Lambda \rightarrow \infty$, что с вероятностью 1 дает нам

$$\mathcal{M}_\Lambda^{(l)} = \mathcal{M}^{(l)} + o(1), \quad \Lambda \rightarrow \infty,$$

где

$$\mathcal{M}^{(l)} = -\mathbf{E} \left\{ \frac{v_l(G_l^2)_{ll}}{1 + v_l(G_l)_{ll}} - \int \frac{v'_l(G_l^2)_{ll}}{1 + v'_l(G_l)_{ll}} F(dv'_l) \middle| \mathcal{F}_{l+1}^\infty \right\}, \quad (3.27)$$

$G_l = G|_{v_l=0}$, а G – резольвента в бесконечном интервале (2.2). Теперь в силу (3.16) мы можем записать равенство

$$\sigma^2 = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} |\Lambda|^{-1} \mathbf{Var}\{\gamma_\Lambda\} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} |\Lambda|^{-1} \sum_{l=-L}^L \mathbf{E}\{|\mathcal{M}^{(l)}|^2\}. \quad (3.28)$$

Заметим, что последовательность $\{\mathcal{M}^{(l)}\}_{l \in \mathbb{Z}}$ из (3.27) эргодическая. Это легко получить с помощью тождества (см. (3.24), (3.25))

$$\frac{v_l(G_l^2)_{ll}}{1 + v_l(G_l)_{ll}} = \frac{v_l(G^2)_{ll}}{1 - v_l(G)_{ll}} \quad (3.29)$$

и общих определений (1.17) и (1.19). Указанное тождество легко вывести из аналога формулы (3.24) для резольвент на бесконечном интервале $G_l = G|_{v_l}$ и G .

Таким образом, слагаемые в (3.28) не зависят от l , и для предельной дисперсии (3.14) получается представление

$$\sigma^2 := \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} |\Lambda|^{-1} \mathbf{Var}\{\gamma_\Lambda\} = \mathbf{E}\{|\mathcal{M}^{(0)}|^2\}. \quad (3.30)$$

Теперь допустим, что правая часть этой формулы равна нулю. Тогда $\mathcal{M}^{(0)} = 0$ с вероятностью 1 и, в частности,

$$\mathbf{E} \left\{ \frac{v_0(G_0^2)_{00}}{1 + v_0(G_0)_{00}} \middle| \mathcal{F}_1^\infty \right\} = \mathbf{E} \left\{ \int \frac{v'_0(G_0^2)_{00}}{1 + v'_0(G_0)_{00}} F(dv'_0) \middle| \mathcal{F}_1^\infty \right\} \quad (3.31)$$

для почти всех v_0 из носителя F . Зафиксируем событие из $\mathcal{F}_1^\infty$. Учитывая, что случайный потенциал $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ненулевой, мы видим, что это равенство возможно, только если левая часть не зависит от v_0 при фиксированных $(G_0)_{00}$ и $(G_0^2)_{00}$ (напомним, что $G_0 = G|_{v_0}$ не зависит от v_0). Обозначим левую часть (3.31) для фиксированных $(G_0)_{00}$ и $(G_0^2)_{00}$ через $f(v_0)$; тогда

$$f'(v_0) = \mathbf{E} \left\{ \frac{(G_0^2)_{00}}{(1 + v_0(G_0)_{00})^2} \middle| \mathcal{F}_1^\infty \right\} = \mathbf{E} \left\{ \frac{(G^2)_{00}}{(1 - v_0 G_{00})^2} \middle| \mathcal{F}_1^\infty \right\}, \quad (3.32)$$

где в последнем равенстве использовано тождество (3.29).

С учетом (2.1), (2.9), (2.6) имеем

$$(1 - v_0 G_{00}) \geq 1 - V_0 |G_{00}| \geq (2 - \varepsilon) \varepsilon^{-1} > 0. \quad (3.33)$$

Кроме того, как следует из спектральной теоремы, если $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ – разложение единицы оператора H из (1.20), то с вероятностью 1

$$(G^2)_{00} = \int \frac{(\mathcal{E}_H)(d\lambda)_{00}}{(\lambda - x)^2} > 0, \quad (3.34)$$

поскольку с вероятностью 1 полная вариация меры $(\mathcal{E}_H)_{00}$ равна 1 (можно также использовать (1.29)). Значит, равенство $f'(v_0) = 0$ невозможно, что доказывает утверждение (ii) леммы.

(iii) Для доказательства этого утверждения используем теорему 18.6.3 из [22], согласно которой если $\{X_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – соответствующее вероятностное пространство, T – автоморфизм сдвига (1.15) в Ω (т.е. $X_{j+1} = TX_j$, $j \in \mathbb{Z}$), а Y_0 – измеримая функция на этом пространстве, то для эргодической последовательности $Y_j(\omega) = Y_0(T^j \omega)$, $j \in \mathbb{Z}$, $\omega \in \Omega$ (ср. (1.18)), выполнена центральная предельная теорема, если Y_0 ограничена и удовлетворяет условию

$$\sum_{P=1}^{\infty} \mathbf{E}\{|Y_0 - \mathbf{E}\{Y_0 \mid \mathcal{F}_{-P}^P\}|\} < \infty, \quad (3.35)$$

где $\mathcal{F}_{-P}^P$ – σ -алгебра, порожденная $\{X_j\}_{|j| \leq P}$. Возьмем в качестве $\{X_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ независимую одинаково распределенную последовательность $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ из (1.20), а в качестве Y_0 возьмем G_{00} с x , удовлетворяющим (2.6) (заметим, что, поскольку G – эргодический оператор, выполнено равенство $G_{jj}(\omega) = G_{00}(T^j \omega)$). Для проверки (3.35) воспользуемся леммой 3.1 с $P = [k/2]$, которая дает оценку

$$|G_{00} - \mathbf{E}\{G_{00} \mid \mathcal{F}_{-P}^P\}| \leq |R_{00}^P - \mathbf{E}\{G_{00} \mid \mathcal{F}_{-P}^P\}| \leq 2Ce^{-bP/2}, \quad (3.36)$$

обеспечивающую (3.35).

Лемма 3.3 доказана.

ЛЕММА 3.4. Пусть $\{L_{jj}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ – последовательность, определенная в (2.17), где H – одномерный оператор Шрёдингера (1.20) с независимым одинаково распределенным случайным потенциалом, удовлетворяющим условиям теоремы 2.2. Тогда:

(i) если

$$L_{jj}^{\circ} := L_{jj} - \mathbf{E}\{L_{jj}\}, \quad (3.37)$$

а

$$D_{j-k} = \mathbf{E}\{L_{jj}^{\circ} L_{kk}^{\circ}\} \quad (3.38)$$

– ковариация $\{L_{jj}\}_{j \in \mathbb{Z}}$, то существуют $C < \infty$ и $b > 0$, для которых

$$|D_{j-k}| \leq Ce^{-b|j-k|}; \quad (3.39)$$

(ii) если

$$\hat{\gamma}_{\Lambda} = \sum_{j \in \Lambda} L_{jj}, \quad (3.40)$$

a

$$\mathbf{Var}\{|\Lambda|^{-1/2}\widehat{\gamma}_\Lambda\} := |\Lambda|^{-1}\mathbf{E}\{|\widehat{\gamma}_\Lambda - \mathbf{E}\{\widehat{\gamma}_\Lambda\}|^2\} \quad (3.41)$$

– соответствующая дисперсия, то

$$\widehat{\sigma}^2 := \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \mathbf{Var}\{|\Lambda|^{-1/2}\widehat{\gamma}_\Lambda\} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} D_j > 0; \quad (3.42)$$

(iii) если выполнено (2.6), то случайная величина

$$|\Lambda|^{-1/2}(\widehat{\gamma}_\Lambda - \mathbf{E}\{\widehat{\gamma}_\Lambda\})$$

сходится по распределению к гауссовской случайной величине с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\widehat{\sigma}^2 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем схему доказательства леммы 3.3 и те же обозначения, что и в том доказательстве.

(i) Для доказательства воспользуемся (2.19), (3.2), (3.4) и (3.6) вместо (3.1), (3.3) и (3.5).

(ii) Почти дословно повторяя рассуждения из доказательства (3.20), получим

$$|\Lambda|^{-1}\mathbf{Var}\{\widehat{\tau}_\Lambda\} = |\Lambda|^{-1} \sum_{l=-L}^L \mathbf{E}\{|\widehat{\mathcal{M}}_\Lambda^{(l)}|^2\}, \quad \widehat{\mathcal{M}}_\Lambda^{(l)} := \widehat{\tau}_\Lambda^{(l)} - \widehat{\tau}_\Lambda^{(l+1)},$$

где $\widehat{\tau}_\Lambda = \text{Tr } L_\Lambda$ (ср. (3.15)) и

$$\widehat{\tau}_\Lambda^{(l)} = \mathbf{E}\{\widehat{\tau}_\Lambda | \mathcal{F}_l^L\}, \quad \widehat{\tau}_\Lambda^{(-L)} = \widehat{\tau}_\Lambda, \quad \widehat{\tau}_\Lambda^{(L+1)} = \mathbf{E}\{\widehat{\tau}_\Lambda\}.$$

Теперь вместо (3.22) имеем

$$\text{Tr} \log(H_\Lambda - x) = \log \text{Det}(H_\Lambda - x) = \log \text{Det}(H_\Lambda|_{v_l=0} - x) + \log(1 + v_l(\mathcal{G}_l)_{ll}),$$

где $\mathcal{G}_l$ было определено в (3.23). Это дает аналог формул (3.3) и (3.27):

$$\widehat{\sigma}^2 := \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} |\Lambda|^{-1}\mathbf{Var}\{\widehat{\gamma}_\Lambda\} = \mathbf{E}\{|\widehat{\mathcal{M}}^{(0)}|^2\}, \quad (3.43)$$

где (ср. (3.27) с $l = 0$)

$$\widehat{\mathcal{M}}^{(0)} = -\mathbf{E}\left\{\log(1 + v_0(G_0)_{00}) - \int \log(1 + v'_0(G_0)_{00})F(dv'_0) \Big| \mathcal{F}_1^\infty\right\}.$$

Теперь допустим, что правая часть в (3.43) равна нулю. Тогда $\widehat{\mathcal{M}}^{(0)} = 0$ с вероятностью 1. Рассуждения, приведенные после формулы (3.31), показывают, что $\log(1 + v_0(G_0)_{00})$ не зависит от v_0 . С другой стороны, в силу (3.22) производная от этого выражения равна

$$\frac{\partial}{\partial v_0} \log(1 + v_0(G_0)_{00}) = \frac{(G_0)_{00}}{1 + v_0(G_0)_{00}} = G_{00},$$

и из спектральной теоремы (ср. (3.34)) получаем

$$G_{00} = \int \frac{(\mathcal{E}_H(d\lambda))_{00}}{(\lambda - x)} > 0,$$

так как по условию теоремы 2.2 x лежит слева от спектра H , а полная вариация меры $(\mathcal{E}_H)_{00}$ равна 1 с вероятностью 1. Значит, $\log(1 + v_0(G_0)_{00})$ строго возрастает по v_0 . Полученное противоречие доказывает утверждение (ii) леммы.

(iii) Для доказательства снова обратимся к теореме 18.6.3 из [22], согласно которой надо проверить условие (3.35) для $Y = L_{00}$. Оно проверяется непосредственно с использованием (2.19) и (3.36).

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. Пусть H – оператор Шрёдингера (1.20), H_Λ – его ограничение на промежуток Λ из (1.3), а $\{G_{jk}(z)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ и $\{(G_\Lambda(z))_{jk}\}_{j,k \in \Lambda}$ – соответствующие резольвенты, причем выполнено (2.31). Тогда для всех $j \in \Lambda$ и $b > 0$ из (3.1) верно соотношение

$$(G_\Lambda(z))_{jj} = G_{jj} - G_{L,j}G_{j,L+1}(1 + G_{L,L+1})^{-1} - G_{-L,j}G_{j,-L-1}(1 + G_{-L,-L-1})^{-1} + O(e^{-2bL}), \quad L \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.10) и (2.11) следует, что

$$(G_\Lambda(z))_{jk} = G_{jk} - G_{j,L+1}(G_\Lambda)_{L,k} + G_{j,-L-1}(G_\Lambda)_{-L,k}, \quad j, k \in \Lambda. \quad (3.44)$$

Взяв в этой формуле $j = L$, получим равенство

$$(G_\Lambda(z))_{Lk} = G_{L,k}(1 + G_{L,L+1})^{-1} + G_{L,-L-1}(1 + G_{L,L+1})^{-1}(G_\Lambda)_{-L,k}, \quad k \in \Lambda.$$

Теперь из (2.31), (3.1) и условий леммы вытекает, что второй член в правой части есть $O(e^{-2bL})$, т.е.

$$(G_\Lambda(z))_{L,k} = G_{L,k}(1 + G_{L,L+1})^{-1} + O(e^{-2bL}), \quad L \rightarrow \infty. \quad (3.45)$$

Аналогично рассматривается третий член в правой части (3.44), что дает (3.45) с $-L$ и $-(L+1)$ вместо L и $L+1$. Подставляя эти асимптотики в (3.44), получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 3.6. В условиях теоремы 2.6 матричный элемент G_{00} из (2.2) имеет $[\beta] + 3$ непрерывных производных по ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{V}^{(p)}$, $p = 0, 1, \dots, [\beta] + 3$, оператор умножения в $l^2(\mathbb{Z})$, заданный последовательностью

$$\{v_j^{(p)}\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad v_j^{(p)} = \frac{\partial^p}{\partial \omega^p} \mathcal{V}(\alpha j + \omega).$$

В силу условия теоремы 2.6

$$\|\mathcal{V}^{(p)}\| = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^{(p)}| \leq \max_{\omega \in \mathbb{T}} |\mathcal{V}(\omega)| := v^{(p)}.$$

Теперь, используя резольвентное тождество, (2.31) и неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \omega} G_{00}(\omega) = -(G\mathcal{V}^{(1)}G)_{00} \leq v^{(1)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |G_{j0}|^2 = v^{(1)} (G^2)_{00} \leq \frac{q^{(1)}}{\text{dist}^2(z, \sigma(H))}.$$

Для старших производных рассуждения аналогичны. Лемма доказана.

Список литературы

- [1] A. Böttcher, B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1990, 512 pp.
- [2] P. Deift, A. Its, I. Krasovsky, “Toeplitz matrices and Toeplitz determinants under the impetus of the Ising model: some history and some recent results”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **66**:9 (2013), 1360–1438.
- [3] B. Simon, *Szegő’s theorem and its descendants. Spectral theory for L^2 perturbations of orthogonal polynomials*, M. B. Porter Lectures, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2011, xii+650 pp.
- [4] U. Grenander, G. Szegő, *Töplitz forms and their applications*, California Monographs in Mathematical Sciences, Univ. of California Press, Berkeley–Los Angeles, 1958, vii+245 pp.
- [5] H. Widom, “Szegő expansions for operators with smooth or nonsmooth symbol”, *Operator theory: operator algebras and applications*, Part 1 (Durham, NH, 1988), Proc. Sympos. Pure Math., **51**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, 599–615.
- [6] A. V. Sobolev, *Pseudodifferential operators with discontinuous symbols: Widom’s conjecture*, Mem. Amer. Math. Soc., **222**, no. 1043, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, vi+104 pp.
- [7] H. Widom, “On a class of integral operators with discontinuous symbol”, *Toeplitz centennial* (Tel Aviv, 1981), Operator Theory: Adv. Appl., **4**, Birkhäuser, Basel–Boston, Mass., 1982, 477–500.
- [8] А. В. Соболев, “Квазиклассическая асимптотика псевдодифференциальных операторов с разрывными символами: гипотеза Видома”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:4 (2010), 86–90; англ. пер.: A. V. Sobolev, “Quasi-classical asymptotics for pseudodifferential operators with discontinuous symbols: Widom’s conjecture”, *Funct. Anal. Appl.*, **44**:4 (2010), 313–317; arXiv: 1004.2576.
- [9] L. Pastur, A. Figotin, *Spectra of random and almost-periodic operators*, Grundlehren Math. Wiss., **297**, Springer-Verlag, Berlin, 1992, viii+587 pp.
- [10] А. Я. Резникова, “Центральная предельная теорема для спектра случайных матриц Якоби”, *ТВП*, **25**:3 (1980), 513–522; англ. пер.: A. Ya. Reznikova, “The central limit theorem for the spectrum of random Jacobi matrices”, *Theory Probab. Appl.*, **25**:3 (1981), 504–513.
- [11] A. Ya. Reznikova, “Limit theorems for the spectra of 1D random Schrödinger operator”, *Random Oper. Stochastic Equations*, **12**:3 (2004), 235–254.
- [12] Y. Imry, Shang-Keng Ma, “Random-field instability of the ordered state of continuous symmetry”, *Phys. Rev. Lett.*, **35** (1975), 1399–1401.
- [13] J. Cardy, *Scaling and renormalization in statistical physics*, Cambridge Lecture Notes Phys., **5**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, xviii+238 pp.
- [14] S. Jitomirskaya, “Ergodic Schrödinger operators (on one foot)”, *Spectral theory and mathematical physics: a Festschrift in honor of Barry Simon’s 60th birthday*, Proc. Sympos. Pure Math., **76**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 613–647.

- [15] F. Germinet, A. Taarabt, “Spectral properties of dynamical localization for Schrödinger operators”, *Rev. Math. Phys.*, **25**:9 (2013), 1350016, 28 pp.
- [16] G. Stolz, “An introduction to the mathematics of Anderson localization”, *Entropy and the quantum II*, Contemp. Math., **552**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, 71–108; arXiv:1104.2317.
- [17] А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, 3-е изд., Физматгиз, М., 1961, 112 с.; англ. пер.: А. Ya. Khinchin, *Continued fractions*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1997, xii+95 pp.
- [18] S. Jitomirskaya, H. Krüger, “Exponential dynamical localization for the almost Mathieu operator”, *Comm. Math. Phys.*, **322**:3 (2013), 877–882.
- [19] S. Farkas, Z. Zimborás, “On the sharpness of the zero–entropy–density conjecture”, *J. Math. Phys.*, **46**:12 (2005), 123301, 8 pp.
- [20] W. Kirsch, “An invitation to random Schrödinger operators”, *Random Schrödinger operators*, Panor. Synthèses, **25**, Soc. Math. France, Paris, 2008, 1–119.
- [21] L. Pastur, M. Shcherbina, *Eigenvalue distribution of large random matrices*, Math. Surveys Monogr., **171**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, xiv+632 pp.
- [22] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, М., 1965, 524 с.; англ. пер.: I. A. Ibragimov, Yu. V. Linnik, *Independent and stationary sequences of random variables*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1971, 443 pp.

Вернер Кирш
(Werner Kirsch)

University of Hagen, Hagen, Germany

E-mail: werner.kirsch@fernuni-hagen.de

Поступила в редакцию
24.12.2013 и 23.07.2014

Леонид Андреевич Пастур
(Leonid A. Pastur)

Физико-технический институт низких температур

им. Б. И. Веркина, НАН Украины, г. Харьков,

Украина

E-mail: pastur@ilt.kharkov.ua