Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Сгибнев, Асимптотическое разложение для решения матричного разностного уравнения общего вида, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 12, 141–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8319>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 18:25:45

УДК 517.929.8

М. С. Сгибнев

Асимптотическое разложение для решения матричного разностного уравнения общего вида

Получено асимптотическое разложение для решения неоднородного матричного разностного уравнения общего вида. Рассмотрен случай неограниченных разностей аргументов. Учтено влияние корней характеристического уравнения. Установлена интегральная оценка остатка с полумультипликативным весом в зависимости от полумультипликативного момента свободного члена уравнения.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: матричное разностное уравнение, неограниченное запаздывание, характеристическое уравнение, полумультипликативная функция, асимптотическое поведение, банахова алгебра.

DOI: 10.4213/sm8319

§ 1. Введение

В монографии [1; гл. 1] приведен общий вид разностного уравнения:

$$x(t) = \int_{-\alpha}^0 [d\mu(\theta)] x(t + \theta),$$

где μ – функция ограниченной вариации. В настоящей работе исследуется асимптотика решения неоднородного матричного разностного уравнения общего вида, допускающего *неограниченные* разности аргумента. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$\sum_{j=1}^n \int_0^\infty X_{jm}(t-u) M_{ij}(du) = F_{im}(t), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$i = 1, \dots, n$, $m = 1, \dots, q$, где $X_{im}(t)$, $t > 0$, – неизвестные функции, M_{ij} – известные комплекснозначные меры, сосредоточенные на $[0, \infty)$, и $F_{im}(t)$, $t > 0$, – известные комплексные измеримые функции. Запишем систему (1.1) в матричной форме

$$\int_0^\infty \mathbf{M}(du) \mathbf{X}(t-u) = \mathbf{F}(t), \quad t > 0, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{M} := (M_{ij})$ – матрица размера $n \times n$, а $\mathbf{X}(t) := (X_{im}(t))$, $\mathbf{F}(t) := (F_{im}(t))$ – матрицы размера $n \times q$, общим элементом матрицы $\int_0^\infty \mathbf{M}(du) \mathbf{X}(t-u)$ служит сумма

$$\sum_{j=1}^n \int_0^\infty X_{jm}(t-u) M_{ij}(du).$$

Зададим начальное условие в виде

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{G}(t) = (G_{im}(t)), \quad t \in (-\infty, 0], \quad (1.3)$$

где $G_{im}(t)$ – измеримые функции.

Условимся, что операции перехода к пределу, интегрирования и другие осуществляются над матрицами поэлементно; например, $|\mathbf{F}(t)| := (|F_{im}(t)|)$; аналогичное соглашение относится к неравенствам и теоретико-множественным операциям, в которых участвуют матрицы. Единичную матрицу размера $n \times n$ обозначим через $\mathbf{I}$, а нулевую матрицу произвольного размера – через $\mathbf{0}$. В работе предполагается, что матричная мера $\mathbf{M}$ такова, что матрица $\mathbf{M}(\{0\})$ обратима. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathbf{M}(\{0\}) = \mathbf{I}$ (в противном случае достаточно умножить слева обе части уравнения (1.2) на обратную матрицу $\mathbf{M}^{-1}(\{0\})$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Матричная функция $\mathbf{X}(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, называется *решением задачи* (1.2), (1.3), если она измерима и удовлетворяет уравнению (1.2) п.в. и начальному условию (1.3).

Данная работа посвящена исследованию асимптотики решения $\mathbf{X}(t)$ уравнения (1.2), в котором матричная мера $\mathbf{M}$ удовлетворяет весьма общему условию $(\mathfrak{S})$ (см. начало § 5). Цель исследования состоит в том, чтобы установить связь между асимптотическими свойствами решения $\mathbf{X}(t)$ и свободного члена $\mathbf{F}(t)$. В работе применяются банахово-алгебраические методы асимптотического анализа, ранее не использовавшиеся при изучении уравнений вида (1.2). Получено разложение

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{j=1}^l \mathbf{P}_j(t) e^{-s_j t} + \mathbf{r}(t),$$

где s_j , $j = 1, \dots, l$, – корни характеристического уравнения (см. уравнение (2.2) ниже), $\mathbf{P}_j(t)$, $j = 1, \dots, l$, – однозначно определяемые матрицы полиномов, чьи степени меньше, чем кратности соответствующих корней s_j , а остаток $\mathbf{r}(t)$ “наследует” моментные свойства исходных матричных меры $\mathbf{M}$ и функции $\mathbf{F}(t)$. В § 2 выводится характеристическое уравнение для уравнения (1.2) и приводится конкретный вид искомого асимптотического разложения для решения уравнения (1.2). В § 3 вводятся банаховы алгебры мер, конечных с полумультимпликативным весом. В § 4 приводятся вспомогательные результаты. В § 5 формулируется и доказывается основной результат (теорема 3). В § 6 даны доказательства лемм.

В связи с изучаемой тематикой отметим работы [2], [3], где рассматривались дифференциально-разностные уравнения нейтрального типа, в которых сдвиги аргументов неизвестной функции и ее производных распределены согласно конечным мерам: в [2] изучалось уравнение

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m a_{kj} z^{(j)}(t - h_k) + \sum_{j=0}^m \int_0^h B_j(u) z^{(j)}(t - u) du = f(t), \quad t > 0,$$

в котором $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_n = h$, $a_{kj} \in \mathbb{C}$, $B_j(t) \in L_2(0, h)$, $j = 0, \dots, m$, $k = 0, \dots, n$, а в [3] исследовалось уравнение

$$\sum_{j=0}^m \int_0^h u^{(j)}(t - \theta) d\sigma_j(\theta) = 0, \quad t > h, \quad u(t) = u_0(t), \quad t \in [0, h],$$

где $\sigma_j(\theta)$ – функции ограниченной вариации на $[0, h]$ и $u_0 \in W_2^m(0, h)$. В [2] были получены неулучшаемые (в определенном смысле) оценки норм $\|z\|$ решений $z(t)$ в пространствах Соболева $W_2^m(T - h, T)$ при любом $T > h$, а в [3] даны оценки для нормы $\|u\|$ решения u в пространствах $W_2^m(T, T + h)$ при достаточно больших $T > 0$. Иной подход к изучению асимптотики решений дифференциально-разностных уравнений, основанный на применении банахово-алгебраических методов асимптотического анализа, был предложен в работах [4], [5]. Например, в [5] для решения матричного уравнения

$$\int_0^\infty \mathbf{M}(du) \mathbf{X}'(t - u) + \int_0^\infty \mathbf{N}(du) \mathbf{X}(t - u) = \mathbf{F}(t), \quad t > 0,$$

было получено асимптотическое разложение, в котором остаток – обозначим его снова через $\mathbf{r}(t)$ – “наследует” асимптотические свойства исходной матричной функции $\mathbf{F}(t)$ в следующем смысле.

Если для некоторой подходящей функции сравнения $\sigma(t)$ существует предел $\mathcal{L}(\mathbf{F}) := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{F}(t)/\sigma(t)$, то будет существовать и предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}(t)/\sigma(t)$, который может быть выражен в явном виде через матрицу $\mathcal{L}(\mathbf{F})$.

§ 2. Характеристическое уравнение

Будем предполагать, что все интегралы $\int_0^\infty e^{\gamma t} |F_{im}(t)| dt$ конечны при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\widehat{\mathbf{F}}(s)$ преобразование Лапласа матричной функции $\mathbf{F}(t)$:

$$\widehat{\mathbf{F}}(s) := \int_0^\infty e^{st} \mathbf{F}(t) dt = \left(\int_0^\infty e^{st} F_{im}(t) dt \right), \quad s \in \Pi(\gamma) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta \leq \gamma\}.$$

Для произвольной комплекснозначной меры ν определим ее преобразование Лапласа по формуле

$$\widehat{\nu}(s) := \int_{\mathbb{R}} e^{sx} \nu(dx)$$

для тех значений $s \in \mathbb{C}$, при которых данный интеграл сходится абсолютно относительно полной вариации $|\nu|$ меры ν . Пусть $g(t)$, $t \geq 0$, – комплексная измеримая функция и μ есть σ -конечная комплекснозначная мера на $[0, \infty)$. Определим их свертку как

$$g * \mu(x) := \int_0^x g(x - y) \mu(dy), \quad x \geq 0.$$

Тогда $\widehat{g * \mu}(s) = \widehat{g}(s) \widehat{\mu}(s)$ для соответствующих значений $s \in \mathbb{C}$. Предположим, что

$$|\widehat{\mathbf{M}}|(\gamma) := \int_0^\infty e^{\gamma t} |\mathbf{M}|(dt) < \infty, \quad |\widehat{\mathbf{G}}|(\gamma) := \int_{-\infty}^0 e^{\gamma t} |\mathbf{G}(t)| dt < \infty.$$

Выпишем характеристическое уравнение для уравнения (1.2). Допустим, что уравнение (1.2) имеет решение $\mathbf{X}(t)$, суммируемое с весовой функцией $\exp(\gamma_1 t)$, $t \geq 0$, при некотором $\gamma_1 \leq \gamma$:

$$\int_0^\infty e^{\gamma_1 t} |\mathbf{X}(t)| dt < \infty.$$

Введем обозначение

$$\mathbf{F}_1(t) := \mathbf{1}_{[0, \infty)}(t) \int_t^\infty \mathbf{M}(du) \mathbf{G}(t - u)$$

($\mathbf{1}_A(x)$ – индикаторная функция множества A). Имеем

$$\int_0^\infty e^{\gamma t} |\mathbf{F}_1(t)| dt < \infty$$

(это будет вытекать из леммы 3 при $\varphi(t) := e^{\gamma t}$). Перепишем (1.2) в виде

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbf{M}(du) \mathbf{X}(t - u) &= \int_0^t \mathbf{M}(du) \mathbf{X}(t - u) + \int_t^\infty \mathbf{M}(du) \mathbf{G}(t - u) \\ &= \mathbf{M} * \mathbf{X}(t) + \mathbf{F}_1(t) = \mathbf{F}(t). \end{aligned}$$

Переходя к преобразованиям Лапласа, получаем

$$\widehat{\mathbf{M}}(s) \widehat{\mathbf{X}}(s) = \widehat{\mathbf{F}}(s) - \widehat{\mathbf{F}}_1(s), \quad s \in \Pi(\gamma_1), \quad \widehat{\mathbf{X}}(s) = \widehat{\mathbf{M}}^{-1}(s) [\widehat{\mathbf{F}}(s) - \widehat{\mathbf{F}}_1(s)]. \quad (2.1)$$

Правая часть равенства (2.1) определена в точках полуплоскости $\Pi(\gamma)$, в которых $\det \widehat{\mathbf{M}}(s)$ не обращается в нуль. Назовем уравнение

$$\det \widehat{\mathbf{M}}(s) = 0 \quad (2.2)$$

характеристическим уравнением для (1.2). Корни уравнения (2.2) существенным образом влияют на асимптотику решения $\mathbf{X}(t)$. Будем предполагать, что множество $\mathcal{Z} = \{s_1, s_2, \dots, s_l\}$ корней характеристического уравнения, лежащих в полуплоскости $\Pi(\gamma)$, конечно. Мы не исключаем случая $\mathcal{Z} = \emptyset$. Кратностью корня s_j уравнения (2.2) называется положительное число m_j такое, что

$$\det \widehat{\mathbf{M}}(s) = (s - s_j)^{m_j} g_j(s), \quad g_j(s_j) \neq 0.$$

Вообще говоря, на границе полуплоскости $\Pi(\gamma)$ могут находиться корни нецелой кратности. Мы предполагаем, что все корни из $\mathcal{Z}$ целой кратности. Пусть

$$\int_0^\infty t^{m_j} e^{\operatorname{Re} s_j t} |\mathbf{F}(t)| dt < \infty,$$

где $s_j \in \mathcal{Z}$. Из асимптотического разложения

$$\widehat{\mathbf{M}}^{-1}(s) [\widehat{\mathbf{F}}(s) - \widehat{\mathbf{F}}_1(s)] = \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k \frac{\mathbf{b}_{jk}}{(s - s_j)^k} + o\left(\frac{1}{s - s_j}\right), \quad s \rightarrow s_j, \quad (2.3)$$

определим коэффициенты $\mathbf{b}_{jk}$, $k = 1, \dots, m_j$. Заметим, что если $\operatorname{Re} s_j < \gamma$, то сумма $\sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k \mathbf{b}_{jk} / (s - s_j)^k$ – главная часть разложения в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки $s = s_j \in \mathcal{Z}$ матричной аналитической функции $\widehat{\mathbf{M}}^{-1}(s)[\widehat{\mathbf{F}}(s) - \widehat{\mathbf{F}}_1(s)]$. Пусть $\mathcal{E}_j$ – комплекснозначная мера с плотностью $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)e^{-s_j x}$; преобразование Лапласа этой меры равно $\widehat{\mathcal{E}}_j(s) = 1/(s_j - s)$, $\operatorname{Re}(s - s_j) < 0$. Определим по индукции k -кратную свертку $\mathcal{E}_j^{k*}$ меры $\mathcal{E}_j$:

$$\mathcal{E}_j^{1*} := \mathcal{E}_j, \quad \mathcal{E}_j^{(k+1)*} := \mathcal{E}_j^{k*} * \mathcal{E}_j, \quad k \geq 1.$$

Функция $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)x^{k-1}e^{-s_j x}/(k-1)!$ равна плотности меры $\mathcal{E}_j^{k*}$. Выражение

$$\widehat{\mathbf{X}}(s) - \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k \frac{\mathbf{b}_{jk}}{(s - s_j)^k}$$

представляет собой преобразование Лапласа $\widehat{\mathbf{r}}(s)$ матричной функции $\mathbf{r}(t)$ – остатка искомого асимптотического разложения, которое будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{m_j} \mathbf{b}_{jk} \frac{t^{k-1} e^{-s_j t}}{(k-1)!} + \mathbf{r}(t). \quad (2.4)$$

§ 3. Банаховы алгебры мер

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $\varphi(x)$, $x \geq 0$, называется *полумультимпликативной*, если она конечна, положительна, измерима по Борелю и удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) \varphi(y)$, $x, y \geq 0$.

Имеют место соотношения [6; теорема 7.6.1]

$$\gamma := \gamma(\varphi) := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \varphi(x)}{x} = \inf_{x > 0} \frac{\ln \varphi(x)}{x} < \infty. \quad (3.1)$$

В дальнейшем будем рассматривать полумультимпликативные функции $\varphi(x)$, для которых $\gamma(\varphi) > -\infty$. Полумультимпликативные функции, определенные на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$, ограничены на ограниченных интервалах (см. [6; теорема 7.4.1]).

Следующие примеры полумультимпликативных функций иллюстрируют широту понятия полумультимпликативности: $\varphi(x) = (x + 1)^r$, $r > 0$; $\varphi(x) = \exp(cx^\beta)$, где $c > 0$ и $0 < \beta < 1$; $\varphi(x) = \exp(\beta x)$, $\beta \in \mathbb{R}$. В первых двух случаях $\gamma(\varphi) = 0$, в то время как в последнем $\gamma(\varphi) = \beta$. Произведение конечного числа полумультимпликативных функций снова является полумультимпликативной функцией. Кроме того, если $R(x)$, $x \geq 0$, – положительная, начиная с некоторого места неубывающая, правильно меняющаяся на бесконечности функция с неотрицательным показателем β (т.е. $R(tx)/R(x) \rightarrow t^\beta$ для $t > 0$, когда $x \rightarrow \infty$ [7; § VIII.8]), то найдутся полумультимпликативная функция $\varphi(x)$, $x \geq 0$, и число $x_0 \in (0, \infty)$ такие, что $c_1 R(x) \leq \varphi(x) \leq c_2 R(x)$ при всех $x \geq x_0$, где c_1 и c_2 – некоторые положительные постоянные [8; Proposition].

Обозначим через $S(\varphi)$ совокупность комплексных функций множества (мер) ν , определенных и σ -аддитивных на всех ограниченных борелевских подмножествах $[0, \infty)$ таких, что

$$\|\nu\|_\varphi = \int_0^\infty \varphi(x) |\nu|(dx) < \infty,$$

где $|\nu|$ – полная вариация меры ν . *Сверткой* мер ν и κ называется мера

$$\begin{aligned} \nu * \kappa(A) &:= \iint_{\{x+y \in A, x, y \geq 0\}} \nu(dx) \kappa(dy) = \int_0^\infty \nu(A-y) \kappa(dy) \\ &= \int_0^\infty \kappa(A-y) \nu(dy); \end{aligned}$$

здесь A – произвольное ограниченное борелевское подмножество $[0, \infty)$ и множество $A-y$ определяется как $\{x \in \mathbb{R} : x+y \in A\}$. Совокупность $S(\varphi)$ – коммутативная комплексная банахова алгебра относительно нормы $\|\cdot\|_\varphi$ и свертки мер в качестве операции умножения, единицей в $S(\varphi)$ служит атомическая мера δ_0 массы 1, сосредоточенная в нуле (см. [6; § 4.16]).

Пусть $\tilde{S}_{\varphi+}$ – совокупность всех измеримых комплекснозначных функций $f(x)$, $x \geq 0$, таких, что

$$\|f\|_\varphi = \int_0^\infty |f(x)| \varphi(x) dx < \infty.$$

Известно [9; § 18], что $\tilde{S}_{\varphi+}$ – полное нормированное кольцо без единицы, под умножением двух элементов f и g из $\tilde{S}_{\varphi+}$ понимается их свертка $f * g(x)$. Будем отождествлять произвольную абсолютно непрерывную меру f на $[0, \infty)$ с классом эквивалентных функций $f(x)$, $x \geq 0$, каждая из которых может рассматриваться как производная Радона–Никодима этой меры относительно меры Лебега на $[0, \infty)$. Через $S_{\varphi+}$ обозначим банахову алгебру, полученную из $\tilde{S}_{\varphi+}$ присоединением единицы. В данном случае роль формальной единицы e и формальных сумм $\alpha e + f_1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $f_1 \in \tilde{S}_{\varphi+}$, играют мера δ_0 и обычные суммы мер $\alpha \delta_0 + f_1$:

$$(\alpha \delta_0 + f_1)(A) = \alpha \delta_0(A) + \int_A f_1(x) dx,$$

где A – произвольное борелевское подмножество $[0, \infty)$. Будем использовать следующее соглашение: если $f = \alpha \delta_0 + f_1(x) \in S_{\varphi+}$, то $f(dx) := \alpha \delta_0(dx) + f_1(x) dx$. Вместо формального умножения элементов $S_{\varphi+}$ берется обычная свертка мер: если $f = \alpha \delta_0 + f_1(x)$ и $g = \beta \delta_0 + g_1(x)$ – элементы $S_{\varphi+}$, где $f_1(x), g_1(x) \in \tilde{S}_{\varphi+}$, то их свертка – это мера, задаваемая равенством

$$f * g := (\alpha\beta) \delta_0 + \alpha g_1(x) + \beta f_1(x) + f_1 * g_1(x).$$

Если $f = \alpha \delta_0 + f_1(x) \in S_{\varphi+}$, где $f_1(x) \in \tilde{S}_{\varphi+}$, то полагаем $\|f\|_\varphi := |\alpha| + \|f_1\|_\varphi$. Преобразование Лапласа $\hat{f}(s)$ элемента $f = \alpha \delta_0 + f_1(x) \in S_{\varphi+}$ имеет вид

$$\hat{f}(s) = \alpha + \int_0^\infty e^{sx} f_1(x) dx = \int_0^\infty e^{sx} f(dx);$$

интеграл абсолютно сходится в полуплоскости $\Pi(\gamma)$ в силу (3.1). Через $|f|$ обозначим полную вариацию меры f :

$$|f|(dx) := |\alpha| \delta_0(dx) + |f_1(x)| dx.$$

§ 4. Вспомогательные результаты

Нам понадобятся теоремы о преобразованиях Лапласа элементов введенных банаховых алгебр. Для удобства ссылок приведем две теоремы, доказанные в [10].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi(x)$, $x \geq 0$, – полумультимпликативная функция такая, что $\varphi(t)/\exp(\gamma t)$, $t \geq 0$, – неубывающая функция. Предположим, что $f \in S_{\varphi+}$ и $\hat{f}(s_0) = 0$, $\operatorname{Re} s_0 < \gamma$. Положим $h(s) := \hat{f}(s)/(s - s_0)$, $s \in \Pi(\gamma)$, определяя $h(s)$ в точке s_0 по непрерывности:

$$h(s_0) := \int_0^\infty x \exp(s_0 x) f(dx).$$

Тогда функция $h(s)$, $s \in \Pi(\gamma)$, – преобразование Лапласа $\hat{g}(s)$ некоторой функции $g \in \tilde{S}_{\varphi+}$.

Если же корень уравнения $\hat{f}(s) = 0$ лежит на границе полуплоскости $\Pi(\gamma)$, то справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi(x)$, $x \geq 0$, – полумультимпликативная функция такая, что $\varphi(t)/\exp(\gamma t)$, $t \geq 0$, – неубывающая функция. Образует новую полумультимпликативную функцию $\psi(x) := (1+x)\varphi(x)$, $x \geq 0$. Пусть $f \in S_{\psi+}$ и $\hat{f}(s_0) = 0$ при $\operatorname{Re} s_0 = \gamma$. Положим $h(s) := \hat{f}(s)/(s - s_0)$, $s \in \Pi(\gamma)$, определяя $h(s)$ в точке s_0 по непрерывности:

$$h(s_0) := \int_0^\infty x \exp(s_0 x) f(dx).$$

Тогда функция $h(s)$, $s \in \Pi(\gamma)$, – преобразование Лапласа $\hat{g}(s)$ некоторой функции $g \in \tilde{S}_{\varphi+}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 за исключением, возможно, равенства $\hat{f}(s_0) = 0$. Положим

$$T(s_0)f(x) := \int_x^\infty e^{-s_0(x-y)} f(dy), \quad x \geq 0.$$

Тогда $T(s_0)f(x) = T(s_0)f_0(x)$, $x \geq 0$, где элемент $f_0 := f - \hat{f}(s_0)\delta_0 \in S_{\varphi+}$ удовлетворяет условиям теоремы 1, и мы получаем в общем случае, что

$$T(s_0)f \in \tilde{S}_{\varphi+}, \quad \{T(s_0)f\}^\wedge(s) = \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(s_0)}{s - s_0}, \quad s \in \Pi(\gamma).$$

Аналогичное замечание имеет место применительно к теореме 2.

§ 5. Основной результат

Для произвольной меры μ обозначим через μ_c ее абсолютно непрерывную компоненту относительно меры Лебега, а через μ_s – ее сингулярную часть: $\mu_s := \mu - \mu_c$, т.е. $\mu_s = \mu_d + \mu_{\text{с}}$, где μ_d – дискретная компонента меры μ , а $\mu_{\text{с}}$ – ее сингулярная компонента в обычном смысле. Пусть $\mathbf{A}$ – числовая матрица размера $n \times n$ и $\sigma(\mathbf{A})$ – совокупность всех ее собственных значений. Число $\varrho(\mathbf{A}) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\}$ называется *спектральным радиусом* матрицы $\mathbf{A}$. Нам потребуется следующее условие, относящееся к сингулярности сужения $\mathbf{M}_0 := \mathbf{M}|_{(0,\infty)}$ матричной меры $\mathbf{M}$ на $(0, \infty)$:

$$\varrho \left[\int_0^\infty e^{\gamma x} |(\mathbf{M}_0)_s|(dx) \right] < 1. \quad (\mathfrak{S})$$

Заметим, что если матричная мера $\mathbf{M}_0$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, то условие $(\mathfrak{S})$ выполняется.

Нам понадобятся следующие леммы, доказательства которых будут проведены в § 6.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathbf{A}(\theta)$ – скалярная матрица, элементы которой зависят от параметра $\theta \in \Theta$ и не превосходят по абсолютной величине соответствующих элементов скалярной матрицы $\mathbf{A}_0$: $\sup_{\theta \in \Theta} |\mathbf{A}(\theta)| \leq \mathbf{A}_0$. Предположим, что $\varrho(\mathbf{A}_0) < 1$. Тогда

$$\Delta = \inf_{\theta \in \Theta} |\det[1 - \mathbf{A}(\theta)]| > 0.$$

ЛЕММА 2. Предположим, что выполнено условие $(\mathfrak{S})$, и пусть

$$\int_0^\infty e^{\xi x} |\mathbf{M}|(dx) < \infty$$

при некотором $\xi > \gamma$. Тогда множество $\mathcal{Z}$ корней характеристического уравнения (2.2), лежащих в полуплоскости $\Pi(\gamma)$, конечно: $\mathcal{Z} = \{s_1, \dots, s_l\}$.

ЛЕММА 3. Пусть $\varphi(t)$, $t \geq 0$, – полумультипликативная функция такая, что $\varphi(t)/\exp(\gamma t)$, $t \geq 0$, – неубывающая функция, а функция $g(t)$, $t \leq 0$, такая, что

$$\int_{-\infty}^0 e^{\gamma t} |g(t)| dt < \infty$$

при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$. Пусть $\mu \in S(\varphi)$. Обозначим через $f_1(t)$, $t \geq 0$, сужение функции $\int_t^\infty g(t-u) \mu(du)$ на $[0, \infty)$. Тогда $f_1 \in \tilde{S}_\varphi$.

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 3. Предположим, что $\varphi(t)$, $t \geq 0$, – полумультипликативная функция такая, что $\varphi(t)/\exp(\gamma t)$, $t \geq 0$, – неубывающая функция, и выполнено условие $(\mathfrak{S})$. Допустим, что множество $\mathcal{Z}$ всех корней характеристического уравнения (2.2), лежащих в полуплоскости $\Pi(\gamma)$, конечно: $\mathcal{Z} = \{s_1, \dots, s_l\}$. Обозначим через $m_1, \dots, m_l$ кратности корней $s_1, \dots, s_l$ соответственно. Положим N равным максимальной кратности корней этого уравнения, лежащих на прямой $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s = r_+(\varphi)\}$ ($N = 0$ означает, что таких корней на

указанной прямой не имеется). Пусть $\mathbf{M}$ есть σ -конечная комплекснозначная матричная мера на $[0, \infty)$ такая, что

$$\int_0^\infty x^{2N} \varphi(x) |\mathbf{M}|(dx) < \infty,$$

и пусть матричная функция $\mathbf{G}(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^0 e^{\gamma t} |\mathbf{G}(t)| dt < \infty.$$

Предположим, что

$$\int_0^\infty (1+t)^N \varphi(t) |\mathbf{F}(t)| dt < \infty. \quad (5.1)$$

Тогда для решения $\mathbf{X}(t)$ уравнения (1.2) с начальным условием (1.3) справедливо разложение (2.4), в котором остаток $\mathbf{r}$ удовлетворяет соотношению

$$\int_0^\infty \varphi(t) |\mathbf{r}(t)| dt < \infty. \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образует систему функций $\varphi_k(t) := (1+t)^k \varphi(t)$, $t \geq 0$, $k = 0, \dots, N$. Прежде всего заметим, что если мера $|\mathbf{M}|$ имеет конечный экспоненциальный момент с показателем $\xi > \gamma$, то по лемме 2 множество $\mathcal{Z}$ конечно; при этом указанная мера будет конечна с полумультипликативной весовой функцией $\varphi_{2N}(t)$ в силу свойства (3.1). Полумультипликативные функции $\varphi_k(t)$ можно продолжить на всю прямую с сохранением свойства полумультипликативности, полагая $\varphi_k(t) := \exp(\gamma t)$, $t < 0$. Поэтому функции $\varphi_k(t)$ ограничены на ограниченных интервалах. Очевидно, $\gamma(\varphi_k) = \gamma(\varphi)$ при всех k . Выберем $\sigma > \gamma$. Положим $p := \sum_{j=1}^l m_j$ и

$$v(s) := \frac{\det \widehat{\mathbf{M}}(s)(s - \sigma)^p}{\prod_{j=1}^l (s - s_j)^{m_j}}, \quad s \in \Pi(\gamma),$$

доопределив значения $v(s)$ в точках $s_1, \dots, s_l$ по непрерывности. Покажем, что функция $v(s)$, $s \in \Pi(\gamma)$, – преобразование Лапласа $\widehat{V}(s)$ некоторой меры $V \in S(\varphi_N)$. Разлагая рациональную функцию на простые дроби, получаем

$$v(s) = \det \widehat{\mathbf{M}}(s) \left\{ 1 + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{jk}}{(s - s_j)^k} \right\},$$

где c_{jk} – константы. Из условия $\mathbf{M} \in S(\varphi_{2N})$ вытекает, что $u(s) := \det \widehat{\mathbf{M}}(s)$ – преобразование Лапласа некоторой меры $U \in S(\varphi_{2N})$, так как $u(s)$ – линейная комбинация произведений из n сомножителей, являющихся элементами матрицы $\widehat{\mathbf{M}}(s)$. Если $\operatorname{Re} s_j < \gamma$, то по теореме 1 выражение $u(s)/(s - s_j)^k$ является преобразованием Лапласа абсолютно непрерывной меры $T(s_j)^k U$, принадлежащей банаховой алгебре $S(\varphi_{2N})$. Если же $\operatorname{Re} s_j = \gamma$, то по теореме 2 $T(s_j)^k U \in S(\varphi_{2N-k})$. Подытоживая, видим, что $v(s) = \widehat{V}(s)$, где $V \in S(\varphi_N)$. Мере V можно представить в виде $V = U + V_1$, где мера V_1 абсолютно непрерывна. Теперь покажем, что элемент V обратим в $S(\varphi_N)$, т.е. найдется элемент

$V^{-1} \in S(\varphi_N)$ такой, что $V * V^{-1} = \delta_0$. Пусть $\mathcal{M}$ – пространство максимальных идеалов алгебры $S(\varphi_N)$. Из теории банаховых алгебр (нормированных колец) известно [9; гл. I, § 4], что каждый максимальный идеал $M \in \mathcal{M}$ порождает некоторый гомоморфизм $h: S(\varphi_N) \rightarrow \mathbb{C}$ и M – ядро этого гомоморфизма. Такой гомоморфизм определяется единственным образом. Действительно, пусть h_1 и h_2 – гомоморфизмы, порождаемые одним и тем же максимальным идеалом M . Выберем произвольно $\nu_0 \in S(\varphi_N)$. Положим $\nu_1 := \nu_0 - h_1(\nu_0)\delta_0$ и $\nu_2 := \nu_0 - h_2(\nu_0)\delta_0$. Тогда $\nu_1, \nu_2 \in M$. Следовательно,

$$0 = h_2(\nu_1) = h_2(\nu_0) - h_1(\nu_0)h_2(\delta_0) = h_2(\nu_0) - h_1(\nu_0),$$

т.е. $h_1 = h_2$. Обозначим через $\nu(M)$ значение h на $\nu \in S(\varphi_N)$. Элемент $\nu \in S(\varphi_N)$ имеет обратный элемент тогда и только тогда, когда ν не принадлежит никакому максимальному идеалу $M \in \mathcal{M}$. Иными словами, ν обратим тогда и только тогда, когда $\nu(M) \neq 0$ при любом $M \in \mathcal{M}$.

Пространство $\mathcal{M}$ разбивается на два множества: $\mathcal{M}_1$ – множество максимальных идеалов, не содержащих совокупности $L(\varphi_N)$ всех абсолютно непрерывных мер из $S(\varphi_N)$, и $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1$. Если $M \in \mathcal{M}_1$, то порожденный им гомоморфизм имеет вид $h(\nu) = \widehat{\nu}(s_0)$, где $s_0 \in \Pi(\gamma)$. В этом случае $M = \{\nu \in S(\varphi_N) : \widehat{\nu}(s_0) = 0\}$ [6; гл. IV, § 4]. Если $M \in \mathcal{M}_2$, то $\nu(M) = 0$ для любого $\nu \in L(\varphi_N)$. Пусть M_0 – максимальный идеал в $S(\varphi_N)$ такой, что соответствующий ему гомоморфизм имеет вид $h(\nu) = \nu(\{0\})$, $\nu \in S(\varphi_N)$. Положим $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_2 \setminus \{M_0\}$. Покажем, что $V(M) \neq 0$ для любого $M \in \mathcal{M}$, тем самым мы установим существование обратного элемента $V^{-1} \in S(\varphi_N)$. Если $M \in \mathcal{M}_1$, то при некотором $s_0 \in \Pi(\gamma)$ имеем $V(M) = \widehat{V}(s_0) \neq 0$ по построению. Для M_0

$$\begin{aligned} V(M_0) &= U(M_0) = U(\{0\}) = \lim_{s \rightarrow -\infty} u(s) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \det \widehat{\mathbf{M}}(s) \\ &= \det \left[\lim_{s \rightarrow -\infty} \widehat{\mathbf{M}}(s) \right] = \det [\mathbf{M}(\{0\})] = \det \mathbf{I} = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Пусть теперь $M \in \mathcal{M}_3$. Очевидно, что $V(M) = U(M)$. По теореме о строении произвольного гомоморфизма $h: S(\varphi_N) \rightarrow \mathbb{C}$ (см. [11; теорема 1 и замечание 3])

$$h(\nu) = \int_0^\infty \chi(x, \nu) \exp(\beta x) \nu(dx), \quad \nu \in S(\varphi_N), \quad (5.3)$$

где β – вещественное число такое, что $\beta \leq \gamma$, а функция $\chi(x, \nu)$ двух переменных $x \in [0, \infty)$ и $\nu \in S(\varphi_N)$ имеет обобщенный характер, из свойств которого нам потребуется лишь следующее: $|\nu| - \text{ess sup}_{x \in [0, \infty)} |\chi(x, \nu)| \leq 1$. Справедливы очевидные равенства

$$\mathbf{M}(M) = [\mathbf{M}(\{0\})\delta_0 + \mathbf{M}_0](M) = \mathbf{M}(\{0\}) + \mathbf{M}_0(M) = \mathbf{I} + \mathbf{M}_0(M).$$

Покажем, что $\varrho[\mathbf{M}_0(M)] < 1$, откуда будет вытекать, что матрица $\mathbf{M}(M)$ обратима, т.е. $U(M) = \det \mathbf{M}(M) \neq 0$. Имеем (см. (5.3))

$$\mathbf{M}_0(M) = (\mathbf{M}_0)_s(M) = \left(\int_0^\infty \chi(x, [(\mathbf{M}_0)_{ij}]_s) \exp(\beta x) [(\mathbf{M}_0)_{ij}]_s(dx) \right).$$

Матрица справа по модулю не превосходит матрицы $\int_0^\infty e^{\gamma x} |(\mathbf{M}_0)_s|(dx)$, которую обозначим через $\mathbf{C}$. Поэтому $\varrho[\mathbf{M}_0(M)] \leq \varrho(\mathbf{C}) < 1$ согласно теореме 8.1.18

из [12] и условию $(\mathfrak{S})$. Неравенство $\varrho[\mathbf{M}_0(M)] < 1$ установлено. Таким образом, $V(M) \neq 0$ для любого $M \in \mathcal{M}_3$ и, по доказанному ранее, $V(M) \neq 0$ при всех $M \in \mathcal{M}$, что влечет за собой обратимость элемента $V \in S(\varphi_N)$.

Рассмотрим теперь вспомогательную матрицу

$$\mathbf{q}(s) := \frac{\prod_{j=1}^l (s - s_j)^{m_j}}{(s - \sigma)^p} \widehat{\mathbf{M}}^{-1}(s), \quad s \in \Pi(\gamma) \setminus \mathcal{L}. \quad (5.4)$$

Покажем, что она является матрицей преобразований Лапласа некоторой матрицы $\mathfrak{Q}$ мер из $S(\varphi_N)$. Присоединенная матрица $\widehat{\mathbf{M}}(s)^\vee$ является матрицей преобразований Лапласа для некоторой матрицы, скажем, $\mathfrak{D}$ мер из $S(\varphi_N)$. Представим $\mathbf{q}(s)$ в виде

$$\mathbf{q}(s) = \frac{\prod_{j=1}^l (s - s_j)^{m_j}}{(s - \sigma)^p} \frac{\widehat{\mathbf{M}}(s)^\vee}{\det \widehat{\mathbf{M}}(s)} = \frac{\widehat{\mathbf{M}}(s)^\vee}{v(s)}.$$

Таким образом, $\mathbf{q}(s)$ – матрица преобразований Лапласа для матрицы мер

$$\mathfrak{Q} = (\mathfrak{Q}_{ij}) := V^{-1} * \mathfrak{D} \in S(\varphi_N).$$

Завершим доказательство теоремы 3. Имеем (см. (2.1))

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{X}}(s) &= \widehat{\mathbf{M}}^{-1}(s) [\widehat{\mathbf{F}}(s) - \widehat{\mathbf{F}}_1(s)] = \frac{(s - \sigma)^p}{\prod_{j=1}^l (s - s_j)^{m_j}} \mathbf{q}(s) [\widehat{\mathbf{F}}(s) - \widehat{\mathbf{F}}_1(s)] \\ &= \left[1 + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{jk}}{(s - s_j)^k} \right] \mathbf{q}(s) [\widehat{\mathbf{F}}(s) - \widehat{\mathbf{F}}_1(s)]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Положим

$$\mathfrak{W} := \mathfrak{Q} * [\mathbf{F} - \mathbf{F}_1]. \quad (5.6)$$

Тогда $\widehat{\mathfrak{W}}(s) = \mathbf{q}(s) [\widehat{\mathbf{F}}(s) - \widehat{\mathbf{F}}_1(s)]$. По предположению $\mathbf{F} \in S(\varphi_N)$ (см. (5.1)). Согласно лемме 3 $\mathbf{F}_1 \in S(\varphi_{2N})$. Из (5.6) выводим, что $\mathfrak{W} \in S(\varphi_N)$. Перепишем (5.5) в виде

$$\widehat{\mathbf{X}}(s) = \left[1 + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{jk}}{(s - s_j)^k} \right] \widehat{\mathfrak{W}}(s)$$

и осуществим следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\mathfrak{W}}(s)}{(s - s_j)^k} &= \frac{\widehat{\mathfrak{W}}(s_j)}{(s - s_j)^k} + \frac{\widehat{\mathfrak{W}}(s) - \widehat{\mathfrak{W}}(s_j)}{(s - s_j)^k} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\mathfrak{w}_{i,j}(s_j)}{(s - s_j)^{k-i}} + \mathfrak{w}_{k,j}(s), \\ \mathfrak{w}_{0,j}(s) &:= \widehat{\mathfrak{W}}(s), \quad \mathfrak{w}_{i,j}(s) := \frac{\mathfrak{w}_{i-1,j}(s) - \mathfrak{w}_{i-1,j}(s_j)}{s - s_j}, \quad i = 1, \dots, m_j. \end{aligned}$$

Если $\operatorname{Re} s_j < \gamma$, то по теореме 1 $\mathfrak{w}_{p,j}(s)$ является преобразованием Лапласа меры $\mathfrak{W}_{i,j} := T^i(s_j) \mathfrak{W} \in S(\varphi_N)$. Если же $\operatorname{Re} s_j = \gamma$, то по теореме 2 $\mathfrak{w}_{i,j}(s)$ является преобразованием Лапласа меры $T^i(s_j) \mathfrak{W} \in S(\varphi_{N-i}) \subset S(\varphi)$. В итоге в силу единственности разложения (2.3) получаем

$$\widehat{\mathbf{X}}(s) = \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{q_j} (-1)^k \frac{\mathbf{B}_{jk}}{(s - s_j)^k} + \widehat{\mathfrak{W}}(s) + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} \widehat{\mathfrak{W}}_{k,j}(s). \quad (5.7)$$

Из сказанного выше ясно, что функция

$$\widehat{\mathbf{r}}(s) := \widehat{\mathfrak{W}}(s) + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} \widehat{\mathfrak{W}}_{k,j}(s), \quad s \in \Pi(\gamma),$$

– преобразование Лапласа некоторой матрицы мер $\mathbf{r} \in S(\varphi)$ (это равносильно (5.2)), причем элементы матрицы $\mathbf{r}$ – абсолютно непрерывные меры, поскольку в предшествующих рассуждениях $\mathfrak{W}$ – матрица абсолютно непрерывных мер (см. (5.4) и (5.6)), а применение операторов $T(s_j)^k$ к мерам дает абсолютно непрерывные меры. Теперь, чтобы получить искомое асимптотическое разложение (2.4), нам осталось перейти в равенстве (5.7) от преобразований Лапласа к прообразам. Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\mathscr{L} = \emptyset$ и $\mathbf{G}(t) \equiv 0$. В этом случае при доказательстве теоремы 3 не применяются теоремы 1, 2 и лемма 3, и, следовательно, можно опустить требование $\varphi(t)/\exp(\gamma t) \uparrow$ в формулировке теоремы 3.

§ 6. Доказательства лемм

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Допустим противное: $\Delta = 0$. Пусть последовательность $\{\theta_n\}$ такова, что $\det[\mathbf{I} - \mathbf{A}(\theta_n)] \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда найдутся подпоследовательность $\{\theta_{n_k}\}$ и скалярная матрица $\mathbf{A}$ такие, что $\mathbf{A}(\theta_{n_k}) \rightarrow \mathbf{A}$ при $k \rightarrow \infty$. Известно (см. [13; § 7.2]), что собственные значения матрицы непрерывно зависят от ее элементов. Следовательно, спектральный радиус матрицы также непрерывно зависит от ее элементов. Поэтому

$$\varrho(\mathbf{A}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varrho[\mathbf{A}(\theta_{n_k})] \leq \varrho(\mathbf{A}_0) < 1;$$

здесь мы воспользовались известным свойством спектрального радиуса матрицы:

$$|\mathbf{B}| \leq \mathbf{A} \implies \varrho(\mathbf{B}) \leq \varrho(\mathbf{A})$$

[12; теорема 8.1.18]. Таким образом, единица не может быть собственным значением матрицы $\mathbf{A}$. В силу непрерывной зависимости определителя матрицы от ее элементов имеем

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \det[\mathbf{I} - \mathbf{A}(\theta_{n_k})] = \det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Рассуждаем от противного. Допустим, что существует бесконечная последовательность различных точек $s_k \in \Pi(\gamma)$ такая, что $\det \widehat{\mathbf{M}}(s_k) = 0$. Последовательность $\{s_k\}$ стремится к 0, поскольку иначе $\{s_k\}$ имела бы предельную точку $s_0 \in \Pi(\gamma)$ и функция $\det \widehat{\mathbf{M}}(s)$, аналитическая во внутренности $\mathring{\Pi}(\xi) \supset \Pi(\gamma)$ полуплоскости $\Pi(\xi)$, равнялась бы тождественно нулю по теореме единственности [14; гл. 3, § 6, п. 1]. Имеем

$$\widehat{\mathbf{M}}(s) = \mathbf{I} + \int_0^\infty e^{sx} \mathbf{M}_c(dx) + \int_{0+}^\infty e^{sx} \mathbf{M}_s(dx).$$

По лемме Римана–Лебега второе слагаемое в правой части стремится к нулевой матрице при $s \rightarrow \infty$, $s \in \Pi(\gamma)$. Пусть $\mathbf{1}$ – матрица размера $n \times n$, все элементы которой равны 1. Выберем $\beta > 0$ так, чтобы при $|s| \geq \beta$

$$\left| \int_0^\infty e^{sx} \mathbf{M}_c(dx) \right| \leq \delta \mathbf{1}.$$

Согласно условию (С) спектральный радиус третьего слагаемого меньше единицы:

$$\varrho \left[\int_{0+}^\infty e^{sx} \mathbf{M}_s(dx) \right] \leq \varrho \left[\int_{0+}^\infty e^{\gamma x} |\mathbf{M}_s|(dx) \right] =: \varrho < 1.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $\varrho + \varepsilon < 1$. Выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы

$$\varrho \left[\int_{0+}^\infty e^{\gamma x} |\mathbf{M}_s|(dx) + \delta \mathbf{1} \right] < \varrho + \varepsilon.$$

Это возможно в силу непрерывной зависимости спектрального радиуса матрицы от ее элементов. Полагая $\theta = s$, $\Theta = \Pi(\gamma) \cap \{s \in \mathbb{C} : |s| \geq \beta\}$,

$$\mathbf{A}(s) = - \int_{0+}^\infty e^{sx} \mathbf{M}(dx), \quad \mathbf{A}_0 = \int_{0+}^\infty e^{\gamma x} |\mathbf{M}_s|(dx) + \delta \mathbf{1}$$

в лемме 1, приходим к соотношению

$$|\det \widehat{\mathbf{M}}(s)| \geq \Delta > 0$$

при всех $s \in \Pi(\gamma) \cap \{s \in \mathbb{C} : |s| \geq \beta\}$, что приводит к противоречию с предположением $\det \widehat{\mathbf{M}}(s_k) = 0$. Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Продолжим функцию $\varphi(x)$ с сохранением полумультипликативности на всю прямую $\mathbb{R}$ равенством $\varphi(x) := \exp(\gamma x)$, $x < 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi(x) |f_1(x)| dx &= \int_0^\infty \varphi(x) \left| \int_x^\infty g(x-u) \mu(du) \right| dx \\ &\leq \int_0^\infty \int_x^\infty \varphi(x-u) |g(x-u)| \varphi(u) |\mu|(du) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{\gamma v} |g(v)| dv \int_0^\infty \varphi(u) |\mu|(du) < \infty. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Список литературы

- [1] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984, 423 с.; пер. с англ.: J. Hale, *Theory of functional differential equations*, 2nd ed., Appl. Math. Sci., **3**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1977, x+365 pp.
- [2] В. В. Власов, С. А. Иванов, “Оценки решений неоднородных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа”, *Изв. вузов. Матем.*, 2006, № 3, 24–30; англ. пер.: V. V. Vlasov, S. A. Ivanov, “Estimates for solutions of nonhomogeneous differential-difference equations of neutral type”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **50:3** (2006), 22–28.

- [3] А. А. Лесных, “Оценки решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа”, *Матем. заметки*, **81**:4 (2007), 569–585; англ. пер.: А. А. Lesnykh, “Estimates of the solutions of difference-differential equations of neutral type”, *Math. Notes*, **81**:4 (2007), 503–517.
- [4] М. С. Сгибнев, “Асимптотическое разложение для решения дифференциально-разностного уравнения общего вида”, *Дифференц. уравнения*, **50**:3 (2014), 327–338; англ. пер.: M. S. Sgibnev, “Asymptotic expansion of the solution of a differential-difference equation of general form”, *Differ. Equ.*, **50**:3 (2014), 323–334.
- [5] М. С. Сгибнев, “Поведение на бесконечности решения матричного дифференциально-разностного уравнения”, *Сиб. матем. журн.*, **55**:3 (2014), 650–665; англ. пер.: M. S. Sgibnev, “Behavior at infinity of a solution to a matrix differential-difference equation”, *Siberian Math. J.*, **55**:3 (2014), 530–543.
- [6] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962, 829 с.; пер. с англ.: E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, rev. ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1957, xii+808 pp.
- [7] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, М., 1967, 752 с.; пер. с англ.: W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, v. II, John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1966, xviii+636 pp.
- [8] M. S. Sgibnev, “Submultiplicative moments of the supremum of a random walk with negative drift”, *Statist. Probab. Lett.*, **32**:4 (1997), 337–383.
- [9] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, *Коммутативные нормированные кольца*, Физматгиз, М., 1960, 315 с.; англ. пер.: I. Gelfand, D. Raikov, G. Shilov, *Commutative normed rings*, Chelsea Publishing Co., New York, 1964, 306 pp.
- [10] М. С. Сгибнев, “Асимптотика решений интегро-дифференциального и интегрального уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **42**:9 (2006), 1222–1232; англ. пер.: M. S. Sgibnev, “Asymptotics of solutions of an integro-differential and an integral equation”, *Differ. Equ.*, **42**:9 (2006), 1291–1301.
- [11] Б. А. Рогозин, М. С. Сгибнев, “Банаховы алгебры мер на прямой”, *Сиб. матем. журн.*, **21**:2 (1980), 160–169; англ. пер.: B. A. Rogozin, M. S. Sgibnev, “Banach algebras of measures on the line”, *Siberian Math. J.*, **21**:2 (1980), 265–273.
- [12] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989, 656 с.; пер. с англ.: R. A. Horn, Ch. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985, xiii+561 pp.
- [13] П. Ланкастер, *Теория матриц*, 2-е изд., Наука, М., 1982, 270 с.; пер. с англ.: P. Lancaster, *Theory of matrices*, Academic Press, New York–London, 1969, xii+316 pp.
- [14] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*, т. 1, 2-е изд., Наука, М., 1967, 486 с.

Михаил Сергеевич Сгибнев
(Mikhail S. Sgibnev)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: sgibnev@math.nsc.ru

Поступила в редакцию
27.12.2013 и 18.08.2014