Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. К. Нилов, О новых конструкциях в проблеме
Бляшке–Бола, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 11, 125–
144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8320>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:41:37

УДК 514.763.7

Ф. К. Нилов

О новых конструкциях в проблеме Бляшке–Бола

Найдено несколько принципиально новых конструкций гексагональных 3-тканей на основе сочетания квадратичных и линейных семейств окружностей. Они применены для построения пяти новых типов тканей из дуг окружностей, что является продвижением в решении проблемы Бляшке–Бола (1938 г.) о классификации таких тканей. В отличие от многих ранее известных примеров, в доказательствах явно построен параллелизующий диффеоморфизм. Результаты предвараются кратким обзором известных примеров гексагональных 3-тканей и их свойств, а в заключение формулируется несколько гипотез и открытых задач.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: ткани, ткани из окружностей, гексагональное условие замыкания, пучок окружностей, квадратичное семейство окружностей.

DOI: 10.4213/sm8320

§ 1. Введение

В геометрии есть много теорем, в которых некоторые естественные конструкции замыкаются с периодом 6 (см. [1; § 10] и [2; с. 45–46]). Например, классические теоремы Паппа и Брианшона могут быть сформулированы таким образом; мы дадим соответствующие формулировки чуть позже. Многие из подобных теорем о замыкании связаны с общей теорией, которая называется *геометрией тканей*. Эта теория была основана В. Бляшке и его коллегами в 1920-х (см. введение и ссылки в [3; § 18]). С тех пор в этой области был получен целый ряд глубоких результатов (см. ссылки в [4]), но многие естественные вопросы остаются открытыми. В нашей работе мы построим несколько новых типов тканей из окружностей, тем самым получив продвижение в одном из таких открытых вопросов – проблеме Бляшке–Бола.

Приведем формулировки двух наиболее известных теорем о замыкании, непосредственно следующих из классических теорем проективной геометрии Паппа и Брианшона (см., например, [5; § 3], [3; § 18]).

ТЕОРЕМА А (следствие теоремы Паппа). *На плоскости отмечены красная (R), зеленая (G) и синяя (B) точки (рис. 1, а). Окрасим каждую прямую, проходящую ровно через одну из отмеченных точек, в цвет этой точки. Рассмотрим произвольную точку O внутри треугольника RGB . Проведем красную, зеленую и синюю прямые через точку O . На красной прямой возьмем*

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки молодых кандидатов наук (грант № МК-5490.2014.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-12449).

произвольную точку A_1 внутри треугольника RGB . Пусть зеленая прямая через точку A_1 пересекает синюю прямую через точку O в точке A_2 . Зеленая и синяя прямые через точку A_2 уже проведены; проведем красную прямую через точку A_2 . Обозначим точку пересечения полученной красной прямой с зеленой прямой через точку O как A_3 . Продолжая данный процесс, получим точки A_4, A_5, A_6, A_7 . Тогда $A_7 = A_1$.

ТЕОРЕМА В (следствие теоремы Брианшона). Дана окружность вместе с точкой I внутри нее и точкой O снаружи (рис. 1, b). Прямые, проходящие через точку I , окрашены в красный цвет. Лучи с вершинами на данной окружности, касающиеся ее и направленные по часовой стрелке и против часовой стрелки, окрашены в зеленый и синий соответственно. Построим точки $A_1, \dots, A_7$ так же, как в теореме Паппа. Тогда $A_7 = A_1$.

Рис. 1. а – следствие теоремы Паппа; b – следствие теоремы Брианшона; c – теорема Бляшке; d – ткань Паппа, образованная тремя пучками прямых; e – ткань Брианшона, образованная множеством касательных прямых к окружности, посчитанным дважды, и пучком прямых; f – ткань Бляшке, образованная тремя эллиптическими пучками окружностей с вершинами в (R, G) , (G, B) и (B, G) (см. определение пучков в § 1)

В настоящей работе мы рассмотрим общую конструкцию, порождающую теоремы о замыкании с периодом 6, подобные теоремам А и В; например, см. рис. 1, c. В дальнейшем под *дугой окружности* мы имеем в виду либо дугу окружности, либо отрезок прямой, либо луч, либо прямую. При этом мы считаем, что все дуги окружностей не содержат своих концов.

Перед определением гексагональной 3-ткани из дуг окружностей мы дадим следующее вспомогательное определение. Дано множество дуг окружностей

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с концами на границе Ω . Дуги этого множества окрашены в красный, зеленый и синий цвета. Мы будем говорить, что данное множество дуг окружностей обладает *гексагональным свойством*, если выполнены следующие два условия (рис. 2).

Рис. 2. а – условие слоения, б – гексагональное условие замыкания

Условие слоения (рис. 2, а). Для каждой точки $A \in \Omega$ существует ровно одна дуга каждого цвета, проходящая через точку A . Дуги разных цветов либо не пересекаются, либо имеют ровно одну общую точку трансверсального пересечения.

Условие замыкания (рис. 2, б). Рассмотрим произвольную точку $O \in \Omega$. Пусть α_1 , β_1 и γ_1 – красная, зеленая и синяя дуги, проходящие через точку O , соответственно. Рассмотрим произвольную точку $A_1 \in \alpha_1$. Пусть β_2 и γ_2 – зеленая и синяя дуги соответственно, проходящие через A_1 . Обозначим через A_2 точку пересечения β_2 и γ_1 . Рассмотрим красную дугу α_2 , проходящую через A_2 . Обозначим через A_3 точку пересечения α_2 и β_1 . Аналогично определим точки A_4 , A_5 , A_6 и A_7 . *Гексагональное условие замыкания* заключается в том, что если все указанные точки существуют, то $A_7 = A_1$.

Тривиальным примером множества прямых, обладающего гексагональным свойством, являются прямые, параллельные сторонам фиксированного треугольника, окрашенные в красный, зеленый и синий цвета. Пусть теперь каждая такая прямая пересекает некоторую область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ не более чем по одному отрезку; тогда эти отрезки обладают гексагональным свойством. Если вещественный аналитический диффеоморфизм $f: \Omega \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^2$ отображает эти отрезки в дуги окружностей (окрашенных в тот же цвет), то эти дуги обладают гексагональным свойством. Это обстоятельство является мотивировкой для следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Три множества дуг окружностей в области Ω называются *гексагональной 3-тканью из дуг окружностей*, если существует вещественно-аналитический диффеоморфизм $f: \Omega \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^2$, который отображает данные множества дуг в пересечения прямых, параллельных сторонам некоторого треугольника, с областью Ω' , причем каждая такая прямая пересекает Ω' не более чем по одному отрезку (рис. 3).

Рис. 3. Определение гексагональной 3-ткани

Отметим, что существует следующее эквивалентное определение гексагональной 3-ткани (см., например, [6; §§ 1, 2]). Три семейства гладких кривых в области Ω называются 3-тканью, если для них выполнено условие слоения. 3-ткань называется *гексагональной*, если для кривых этой ткани выполнено гексагональное условие замыкания. Таким образом, если три семейства дуг окружностей обладают гексагональным свойством, то эти семейства дуг образуют гексагональную 3-ткань. В дальнейшем мы будем рассматривать только гексагональные 3-ткани из дуг окружностей и для краткости будем иногда называть их просто тканями.

Будем говорить, что три множества окружностей *содержат гексагональную 3-ткань*, если их подходящим образом выбранные дуги (возможно, пустые) являются гексагональной 3-тканью в подходящей области. При этом мы позволяем каким-то двум из этих множеств совпадать; это значит, что мы выбираем две непересекающиеся дуги из каждой окружности такого множества. В последнем случае будем говорить, что данное множество *посчитано дважды*; см. рис. 4 и теорему Брианшона, сформулированную выше. Отметим, что гексагональную 3-ткань из окружностей можно определить сразу, не определяя ткань из дуг окружностей (см., например, [7]). Однако определение ткани из дуг окружностей нам также будет полезно; см. замечание 1.

Рис. 4. Множество касательных прямых к окружности, посчитанное дважды. Из каждой касательной прямой к окружности выбраны два непересекающихся луча

Например, следующие множества окружностей содержат гексагональную 3-ткань (см. [5; с. 19–20] и рис. 1).

(а) *Ткань Паппа*: три множества прямых, проходящих через три различные точки R , G и B соответственно.

(б) *Ткань Брианшона*: множество касательных прямых к конике, посчитанное дважды, и множество прямых, проходящих через фиксированную точку.

(с) *Ткань Бляшке*: множество окружностей, проходящих через точки R и G , множество окружностей, проходящих через точки G и B , и множество окружностей, проходящих через точки B и G .

Гексагональные 3-ткани из дуг окружностей крайне редки; найти пример такой ткани – редкая удача.

В 1938 г. В. Бляшке и Г. Бол поставили следующую проблему, которая на данный момент остается открытой.

ПРОБЛЕМА БЛЯШКЕ–БОЛА (см. [5; с. 31]). *Найти все гексагональные 3-ткани из дуг окружностей.*

Кратко изложим все продвижения в решении данной проблемы к настоящему моменту; мы дадим точные формулировки всех известных результатов о таких тканях в § 3. Все гексагональные 3-ткани из прямолинейных отрезков были описаны Х. Графом и Р. Зауэром в [5]. Все гексагональные 3-ткани из окружностей, принадлежащих одной связке, были описаны О. Фолком и К. Штрубекером. Класс тканей из окружностей, порожденных однопараметрическими группами преобразований Мёбиуса, был рассмотрен В. Вундерлихом в [8]. Мы дадим элементарную переформулировку его результата; см. теорему 2 ниже. Крайне нетривиальный пример тканей из окружностей, дважды касающихся циклики, был найден В. Вундерлихом в [8]. В течение многих десятилетий не было новых примеров гексагональных 3-тканей из дуг окружностей, за исключением нескольких тканей, образованных пучками окружностей, найденных В. Б. Лазаревой, Р. С. Балабановой и Х. Эрдоганом (см. [7]). Недавно в работе В. Б. Лазаревой и А. М. Шелехова [7] была получена классификация всех гексагональных 3-тканей, образованных пучками окружностей.

Рис. 5. а – гексагональная 3-ткань из дуг окружностей на циклике Дарбу [4]; б – поверхность $z = xy(y - x)$ содержит ткань из коник, которые в действительности являются изотропными окружностями (см. задачу 4)

Ткани из дуг окружностей на всех поверхностях, отличных от плоскости или сферы, классифицированы в недавней работе [4]. Н. Луббес доказал, что всякая поверхность в трехмерном пространстве, содержащая ≥ 3 окружностей через каждую точку, является циклидой Дарбу, и ткани на таких поверхностях

были классифицированы в [4] (рис. 5, а). Известно множество примеров тканей из коник (см., например, рис. 5, b, [9] и ссылки в [4]).

Работа организована следующим образом. В §2 сформулируем основные результаты работы (теорема 1). В §3 приведем обзор известных результатов о тканях из дуг окружностей на плоскости и дадим элементарную переформулировку (теорема 2) одной из ранее известных конструкций (пример Вундерлиха, 1938 г.). В §4 докажем теорему 1. В §5 сформулируем некоторые нерешенные вопросы.

§ 2. Формулировка основных результатов

Основные результаты работы формулируются в теореме 1. В ней фигурируют пучки прямых, окружностей и окружности, дважды касающиеся коник.

Рис. 6. Пучок окружностей: а – эллиптический; б – параболический; с – гиперболический

Пусть $c_1(x, y) = 0$ и $c_2(x, y) = 0$ – уравнения степени 2 или 1 двух различных окружностей c_1 и c_2 соответственно. *Пучком окружностей* называется множество всех окружностей, имеющих уравнение вида $\alpha c_1(x, y) + \beta c_2(x, y) = 0$, где α и β – вещественные числа, не обращающиеся в нуль одновременно. Таким образом, *пучком прямых* является множество всех прямых, проходящих через фиксированную точку (*вершину пучка*) или параллельных фиксированной прямой. Если c_1 и c_2 являются окружностями с двумя различными общими точками (*вершинами пучка*), то все окружности пучка проходят через эти точки и пучок называется *эллиптическим* (рис. 6, а). Если окружности c_1 и c_2 касаются (точка касания называется *вершиной пучка*), то каждая окружность пучка касается c_1 и c_2 в одной и той же точке и пучок называется *параболическим* (рис. 6, б). Если окружности c_1 и c_2 не имеют общих точек, то пучок называется *гиперболическим* (рис. 6, с). Любой гиперболический пучок содержит “окружности”, вырождающиеся в точки (выделенные точки на рис. 6, с). Они называются *предельными точками* пучка. Пучок пересекающихся (соответственно параллельных) прямых рассматривается как эллиптический (соответственно параболический) пучок окружностей. Пусть $c_1(x, y) = 0$, $c_2(x, y) = 0$ и $c_3(x, y) = 0$ – три окружности, не принадлежащие одному пучку. *Связкой окружностей* называется множество всех окружностей, имеющих уравнения вида $\alpha c_1(x, y) + \beta c_2(x, y) + \gamma c_3(x, y) = 0$. *Общей коникой* мы называем либо эллипс, отличный от окружности, либо гиперболу.

ТЕОРЕМА 1 (рис. 7). *Следующие множества окружностей содержат гексагональную 3-ткань из дуг окружностей:*

- (а) касательные прямые к окружности, посчитанные дважды, и параболический пучок окружностей с вершиной в центре данной окружности;
- (б) касательные прямые к общей конике, посчитанные дважды, и гиперболический пучок окружностей с предельными точками в фокусах коники;
- (с) касательные прямые к общей конике, посчитанные один раз, пучок прямых с вершиной в фокусе коники и окружности, дважды касающиеся данной коники, центры которых лежат на малой оси коники;
- (д) касательные прямые к параболе, посчитанные дважды, и гиперболический пучок окружностей с предельными точками в фокусе и произвольной точкой на директрисе;
- (е) окружности, дважды касающиеся эллипса с эксцентриситетом $1/\sqrt{2}$, посчитанные дважды, такие, что их центры лежат на главной оси эллипса, и эллиптический пучок окружностей с вершинами в фокусах эллипса.

Рис. 7. Новые примеры тканей из дуг окружностей на плоскости

Доказательство теоремы 1 основано на использовании евклидовых свойств коник, в том числе *изогонального*, *педального* и *оптического*. Доказательство носит конструктивный характер; в отличие от многих известных примеров, в которых вычисляется кривизна ткани или проверяется гексагональное условие замыкания, в пп. (b)–(e) теоремы 1 приведен явный параллелизующий диффеоморфизм, фигурирующий в определении гексагональной 3-ткани; п. (a) получен как предельный случай п. (b).

§ 3. Известные примеры гексагональных 3-тканей

В этом параграфе мы дадим точные формулировки всех известных примеров гексагональных 3-тканей из дуг окружностей на плоскости. Три множества окружностей называются *трансверсальными*, если для каждой точки

некоторой области можно выбрать три окружности из разных множеств, пересекающихся трансверсально в этой точке. Несмотря на то, что мы всегда рассматриваем вещественные дуги окружностей, в теореме 2, теореме Вундерлиха 2 и теореме Лазаревой–Шелехова мы будем использовать некоторые дополнительные комплексные точки или окружности (мы опустим их формальные определения, поскольку они не используются в доказательстве основных результатов).

Пусть $F(a, b, c)$ – однородный полином степени 3. Множество прямых $ax + by + c = 0$ таких, что $F(a, b, c) = 0$, называется *множеством прямых, касающихся кривой класса 3*. В общем случае эти прямые касаются одной алгебраической кривой, двойственной к кубике.

Следующая теорема характеризует все гексагональные 3-ткани из прямолинейных отрезков.

ТЕОРЕМА ГРАФА–ЗАУЭРА (см. [5; § 3]). *Если прямые, касающиеся кривой класса 3, посчитанные трижды, являются трансверсальными, то они содержат гексагональную 3-ткань (рис. 8, а). Обратно, каждая гексагональная 3-ткань из прямолинейных отрезков содержится в таком множестве прямых.*

Рис. 8. Гексагональная 3-ткань: а – из прямых, касающихся дельтоиды, которая является частным случаем кривой класса 3; б – из дуг окружностей, порожденная однопараметрической группой поворотов; с – из дуг окружностей, дважды касающихся циклики

В частном случае, когда указанный выше полином $F(a, b, c)$ является приводимым, мы получаем либо ткань Паппа, либо ткань Брианшона.

Следующая теорема характеризует все гексагональные 3-ткани из дуг окружностей, принадлежащих одной связке. Приведенная ниже формулировка принадлежит К. Штрубекеру, несколько ранее аналитическое описание этих же тканей было получено О. Фолком. *Отображением Дарбу* называется композиция центральной проекции плоскости в пространстве на сферу и стереографической проекции этой сферы на плоскость. А. Г. Хованский доказал, что отображения Дарбу являются единственными отображениями, переводящими все прямолинейные отрезки в дуги окружностей (см. ссылку в [10; с. 562]).

ТЕОРЕМА ФОЛКА–ШТРУБЕКЕРА (см. [11]). *Образом любой гексагональной 3-ткани из прямолинейных отрезков при отображении Дарбу является гексагональная 3-ткань из дуг окружностей. Обратно, любая гексагональная 3-ткань из дуг окружностей, принадлежащих одной связке, может быть получена таким образом.*

В. Вундерлих рассматривал следующий пример гексагональной 3-ткани из дуг окружностей.

ТЕОРЕМА ВУНДЕРЛИХА 1 (см. [8]). *Пусть две окружности ω_1 и ω_2 на плоскости имеют общую точку O трансверсального пересечения. Рассмотрим однопараметрическую группу $\mathcal{M}_t$ преобразований Мёбиуса на плоскости такую, что каждая ее орбита является либо окружностью, либо точкой. Предположим, что орбита точки O пересекает трансверсально ω_1 и ω_2 . Тогда окружности $\{\mathcal{M}_t(\omega_1)\}$, $\{\mathcal{M}_t(\omega_2)\}$ и орбиты $\mathcal{M}_t$ содержат гексагональную 3-ткань (рис. 8, b).*

Дадим следующую элементарную переформулировку теоремы Вундерлиха 1 (доказательство эквивалентности приведено в конце этого параграфа).

Множеством Аполлония двух данных окружностей называется семейство окружностей, касающихся обеих этих окружностей. Множеством Аполлония данного пучка окружностей называется либо множество Аполлония двух различных (возможно, комплексных или нулевых) окружностей из этого пучка, либо параболический пучок с вершиной в вершине данного пучка, либо гиперболический пучок с предельными точками в вершинах данного пучка.

ТЕОРЕМА 2. *Если пучок окружностей и два множества Аполлония этого пучка трансверсальны, то они содержат гексагональную 3-ткань.*

Следующий пример ткани из дуг окружностей является, пожалуй, самым нетривиальным.

Цикликой называется кривая, заданная уравнением вида

$$a(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)(bx + cy) + Q(x, y) = 0, \quad (1)$$

где a, b, c – постоянные и $Q(x, y)$ – полином степени не больше 2, не равные тождественно нулю. Отметим, что коника, улитка Паскаля и овал Декарта являются частными случаями циклики.

Мы будем говорить, что окружность *касается* циклики, если эта окружность имеет либо вещественную точку касания с цикликой, либо комплексную, либо проходит через особую точку циклики. Окружности, дважды касающиеся циклики, естественным образом разбиваются на ≤ 4 семейства: центры окружностей каждого семейства лежат на конике или прямой (см. [4; замечание 16]).

ТЕОРЕМА ВУНДЕРЛИХА 2 (см. [8]). *Если три различные семейства окружностей, дважды касающихся одной циклики, трансверсальны, то они содержат гексагональную 3-ткань (рис. 8, c).*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что подходящим образом выбранные дуги окружностей в предыдущей теореме образуют гексагональную 3-ткань во всей области между овалами циклики (см. рис. 8, c). Целые окружности рассматриваемых семейств не являются гексагональной 3-тканью в этой области. Таким

образом, за счет подходящего выбора дуг удается расширить область определения ткани.

В 1953 г. В. Бляшке поставил задачу описания всех троек пучков окружностей, содержащих ткани. Этот частный случай проблемы Бляшке–Бола подробно разбирался в работе [7].

ТЕОРЕМА ЛАЗАРЕВОЙ–ШЕЛЕХОВА (см. [7]). *Следующие пучки окружностей содержат гексагональную 3-ткань:*

- (a) (О. Фолк, К. Штрубекер) *три пучка, принадлежащие одной связке;*
- (b) (В. Б. Лазарева) *три гиперболических пучка с общей мнимой окружностью такие, что в каждом пучке есть окружность, ортогональная всем окружностям из двух других пучков;*
- (c) (В. Б. Лазарева) *два эллиптических пучка и один гиперболический пучок с общей вещественной окружностью такие, что в каждом пучке есть окружность, ортогональная всем окружностям из двух других пучков;*
- (d) (Р. С. Балабанова) *два ортогональных пучка и третий пучок, имеющий общую окружность с каждым из ортогональных пучков;*
- (e) (Р. С. Балабанова) *два ортогональных параболических пучка и один гиперболический пучок; одна из предельных точек гиперболического пучка совпадает с общей вершиной параболических пучков;*
- (f) (В. Бляшке) *три эллиптических пучка окружностей с вершинами (A, B) , (B, C) и (C, A) ;*
- (g) (Х. Эрдоган) *два эллиптических пучка с вершинами (A, B) и (B, C) и гиперболический пучок с предельными точками в A и C ;*
- (h) (В. Б. Лазарева) *два параболических пучка и эллиптический пучок, вершины которого совпадают с вершинами параболических пучков;*
- (i) (Х. Эрдоган) *эллиптический пучок с вершинами в A и B , гиперболический пучок с предельными точками в B и C и параболический пучок с вершиной A такие, что общая окружность эллиптического и гиперболического пучков ортогональна окружности, проходящей через точки A , B и C .*

Иных гексагональных 3-тканей из дуг окружностей, принадлежащих трем пучкам, кроме перечисленных выше, не существует.

Как мы видим, наши примеры (a)–(e) гексагональных 3-тканей из дуг окружностей в теореме 1 действительно являются новыми (табл. 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ УСЛОВИЙ ТЕОРЕМЫ ВУНДЕРЛИХА 1 И ТЕОРЕМЫ 2. Хорошо известно, что любая однопараметрическая группа преобразований Мёбиуса сопряжена однопараметрической группе либо растяжений, либо поворотов, либо параллельных переносов, либо локсодромических преобразований (см. [12; гл. 8, § 3]).

Орбиты однопараметрической группы локсодромических преобразований не являются дугами окружностей. Поэтому достаточно рассмотреть следующие три случая.

Случай 1. $\mathcal{M}_t$ сопряжена однопараметрической группе растяжений.

Орбиты этой группы являются дугами окружностей, принадлежащих одному эллиптическому пучку. Легко проверить, что для каждой из окружностей ω_i , где $i = 1, 2$, есть только следующие три возможности:

Таблица 1

Известные примеры	Отличие от новых примеров
Теоремы Графа–Зауэра и Фолка–Штрубекера	Окружности в каждом из примеров (а)–(е) теоремы 1 не принадлежат одной связке
Теорема 2, (а)	Теорема 1, (а): прямые, касающиеся окружности, не принадлежат данному параболическому пучку; теорема 1, (b)–(е): одно из семейств окружностей огибает конику, отличную от окружности
Теорема Вундерлиха 2	Огибающая всех окружностей в примерах (а)–(е) теоремы 1 не является цикликой
Теорема Лазаревой–Шелехова	Окружности в каждом из примеров (а)–(е) теоремы 1 не принадлежат 3-пучкам

- 1) существуют две различные (возможно, комплексные) окружности из этого пучка, касающиеся окружности ω_i ;
- 2) окружность ω_i проходит через вершину пучка;
- 3) окружность ω_i принадлежит гиперболическому пучку с предельными точками в вершинах пучка.

Если окружность ω_i проходит через вершину пучка, то ее образами под действием группы $\mathcal{M}_t$ являются окружности, принадлежащие одному параболическому пучку с той же вершиной. Если окружность ω_i принадлежит гиперболическому пучку с предельными точками в вершинах пучка, то ее образами под действием группы $\mathcal{M}_t$ являются окружности, принадлежащие этому гиперболическому пучку. Иначе образами окружности ω_i являются окружности, касающиеся двух различных (возможно, комплексных) фиксированных окружностей из пучка.

Случай 2. $\mathcal{M}_t$ сопряжена однопараметрической группе поворотов.

Орбитами группы являются дуги окружностей, принадлежащих одному гиперболическому пучку. Образами каждой из окружностей ω_i , где $i = 1, 2$, являются окружности, касающиеся двух различных (возможно, нулевых) фиксированных окружностей из пучка.

Случай 3. $\mathcal{M}_t$ сопряжена однопараметрической группе параллельных переносов.

Орбитами группы являются дуги окружностей, принадлежащих одному параболическому пучку. Если окружность ω_i , где $i = 1, 2$, проходит через вершину пучка, то образами окружности ω_i являются окружности, принадлежащие одному параболическому пучку с той же вершиной. Если окружность ω_i не проходит через вершину пучка, то образами ω_i являются окружности, касающиеся двух различных фиксированных окружностей из пучка.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Для каждого из пп. (b)–(е) теоремы 1 мы построим вещественно-аналитический диффеоморфизм $f: \Omega \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^2$, который отображает пересечения

окружностей из данных множеств с некоторой областью Ω в отрезки прямых $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $x + y = \text{const}$. В доказательствах мы будем использовать евклидовы свойства конических сечений, в том числе изогональное, педальное и оптическое свойства. Пункт (а) является предельным случаем п. (b).

Нам потребуются понятия левой и правой касательных прямых из точки к конике. Пусть даны точка и коника. Рассмотрим прямую, проходящую через точку и не пересекающую конику. Начнем поворачивать эту прямую против часовой стрелки. Предположим, что найдутся два момента, когда эта прямая либо касается коники, либо является ее асимптотой. Мы будем называть эту прямую в первый и второй моменты (если такие моменты существуют) *левой* и *правой* касательными прямыми соответственно. Если точка лежит на конике, то по определению левая и правая прямые совпадают с обычной касательной прямой.

Обозначим через $d(X, \lambda)$ расстояние от точки X до прямой λ . Через $\angle(\alpha, \beta) \in [0, \pi)$ мы обозначим ориентированный угол между прямыми α и β .

(а) Это утверждение является предельным случаем теоремы 1, (b), в котором фокусы коники стремятся друг к другу. Данная коника стремится к окружности. Гиперболический пучок окружностей с предельными точками в фокусах стремится к параболическому пучку окружностей с вершиной в центре окружности. Таким образом, п. (а) следует из п. (b), поскольку условие слоения с очевидностью выполнено и гексагональное условие замыкания сохраняется при предельном переходе. Теорема 1, (а) доказана по модулю теоремы 1, (b).

(b) Обозначим через γ данную конику. Обозначим через F_1 и F_2 фокусы γ . Рассмотрим подходящую окрестность U такую, что для любой точки $A \in U$ левая и правая касательные прямые $\alpha(A)$ и $\beta(A)$ к конике γ , проходящие через A , и окружность $\omega(A)$ из данного пучка, проходящая через A , существуют и пересекаются трансверсально.

Рис. 9. К доказательству леммы 1

ЛЕММА 1. Для фиксированной окружности ω из данного пучка отношение $d(F_1, \alpha(A))/d(F_2, \beta(A))$ не зависит от точки $A \in \omega \cap U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через P ортогональную проекцию F_1 на прямую $\alpha(A)$. Обозначим через Q ортогональную проекцию F_2 на прямую $\beta(A)$ (рис. 9).

По изогональному свойству коник (см. [13; § 1.4]) мы имеем $\angle PAF_1 = \angle F_2AQ$. Таким образом, прямоугольные треугольники F_1AP и F_2AQ подобны. Согласно хорошо известной геометрической характеристике гиперболического пучка (см. [13; теорема 2.12]) отношение $|F_1A|/|F_2A|$ не зависит от точки A , лежащей на окружности γ из пучка с предельными точками F_1 и F_2 . Следовательно,

$$\frac{d(F_1, \alpha(A))}{d(F_2, \beta(A))} = \frac{|F_1P|}{|F_2Q|} = \frac{|F_1A|}{|F_2A|} = \text{const.}$$

Лемма доказана.

Рассмотрим отображение $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что для любой точки $A \in U$

$$f(A) := (\ln\{d(F_1, \alpha(A))\}, -\ln\{d(F_2, \beta(A))\}).$$

Рассмотрим подобласть (которая по-прежнему обозначается через U), в которой дифференциал f ненулевой. Из леммы 1 следует, что f отображает пересечения левых касательных к γ , правых касательных к γ и окружностей из данного пучка с U в отрезки прямых $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $x + y = \text{const}$. В частности, три трансверсальные кривые $\alpha(A)$, $\beta(A)$ и $\omega(A)$ имеют трансверсальные f -образы. Поэтому дифференциал отображения f в U является невырожденным, поскольку он ненулевой. Таким образом, ограничение отображения f на подходящую подобласть $\Omega \subset U$ является диффеоморфизмом. Теорема 1, (b) доказана.

(с) Обозначим через γ данную конику. Обозначим через F_1 данный фокус γ . Для каждой точки A обозначим через $\alpha(A)$ прямую, принадлежащую данному пучку и проходящую через A . Обозначим через $\beta(A)$ левую касательную прямую к γ , проходящую через A .

Рассмотрим интервал $(\phi_1, \phi_2) \subset [0, \pi)$ такой, что для любого $\phi \in (\phi_1, \phi_2)$ существует точка T на конике γ , для которой $\angle(\alpha(T), \beta(T)) = \phi$. Рассмотрим подходящую область U такую, что для любой точки $A \in U$ существуют $\alpha(A)$, $\beta(A)$ и $\angle(\alpha(A), \beta(A)) \in (\phi_1, \phi_2)$.

ЛЕММА 2. *Множество всех точек $A \in U$, для которых $\angle(\alpha(A), \beta(A)) = \phi$, где $\phi \in (\phi_1, \phi_2)$ – фиксированный угол, является дугой окружности, дважды касающейся коники γ , такой, что центр этой окружности лежит на малой оси коники.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через P проекцию фокуса F_1 на прямую $\beta(A)$ (рис. 10, а). По педальному свойству коник (см. [1; § 11.8]) проекции фокуса F_1 коники γ на касательные прямые к γ лежат на одной окружности ω_0 . Центр окружности ω_0 совпадает с центром коники.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{|F_1A|}{|F_1P|} &= \frac{1}{\sin \angle(\alpha(A), \beta(A))} = \frac{1}{|\sin \phi|}, \\ \angle(F_1P, F_1A) &= \frac{\pi}{2} - \angle(\alpha(A), \beta(A)) = \frac{\pi}{2} - \phi. \end{aligned}$$

Рис. 10. К доказательству леммы 2

Образом окружности ω_0 под действием композиции поворота против часовой стрелки относительно точки F_1 на угол $\pi/2 - \phi$ и гомотетии с центром F_1 и коэффициентом растяжения $1/|\sin \phi|$ является окружность ω . Очевидно, что искомым геометрическим местом точек является $\omega \cap U$.

Докажем, что ω дважды касается γ и что центр ω лежит на малой оси γ . Обозначим через O_γ центр γ и через O_ω центр ω (рис. 10, б). Поскольку $\phi \in (\phi_1, \phi_2)$, то существует точка $T \in \gamma$ такая, что $\angle(\alpha(T), \beta(T)) = \phi$. Обозначим через F_2 другой фокус коники γ . Поскольку ω является образом ω_0 относительно указанной выше композиции, мы имеем $\angle F_1 O_\gamma O_\omega = \angle F_1 P A = \pi/2$ и $\phi = \angle F_1 A P = \angle F_1 O_\omega O_\gamma$. Таким образом, точка O_ω лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $F_1 F_2$, $\angle(F_1 F_2, F_1 O_\omega) = \angle(F_2 O_\omega, F_2 F_1)$, $\angle F_1 O_\omega F_2 = 2\phi$. Из построения точки T и оптического свойства коник (см. [13; § 1.3]) мы имеем $\phi = \angle(T F_1, \beta(T)) = \angle(\beta(T), T F_2)$. Таким образом, $\angle(O_\omega F_1, O_\omega F_2) = \angle(T F_1, T F_2)$. Поэтому точки F_1, O_ω, F_2 и T лежат на одной окружности. Поскольку $\angle(F_1 F_2, F_1 O_\omega) = \angle(F_2 O_\omega, F_2 F_1)$ и точки F_1, O_ω, F_2 и T лежат на одной окружности, мы имеем $\angle(T O_\omega, T F_1) = \angle(T F_2, T O_\omega)$. Таким образом, прямая $O_\omega T$ перпендикулярна $\beta(T)$. Следовательно, $\beta(T)$ является касательной прямой к ω в точке T . Значит, точка T является точкой касания ω и γ . Поскольку центр окружности ω лежит на малой оси γ , то точка T' , симметричная точке T относительно этой оси, является второй точкой касания ω и γ . Таким образом, ω и γ дважды касаются и центр ω лежит на малой оси γ .

Обозначим через $\omega(A)$ множество всех точек $X \in U$ таких, что

$$\angle(\alpha(X), \beta(X)) = \angle(\alpha(A), \beta(A)).$$

Обозначим через λ главную ось коники γ .

Рассмотрим отображение $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что для каждой точки $A \in U$

$$f(A) := (\angle(\alpha(A), \lambda), \angle(\lambda, \beta(A))).$$

Рассмотрим подобласть (которая по-прежнему обозначается через U), в которой f непрерывно, дифференциал f ненулевой и для любой точки $A \in U$

кривые $\alpha(A)$, $\beta(A)$ и $\omega(A)$ являются трансверсальными. Из леммы 2 следует, что f отображает пересечения прямых из данного пучка, левых касательных к γ и рассматриваемых окружностей, дважды касающихся γ , с U в отрезки прямых $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $x + y = \text{const}$. В частности, три трансверсальные кривые $\alpha(A)$, $\beta(A)$ и $\omega(A)$ имеют трансверсальные f -образы. Поэтому дифференциал отображения f в U является невырожденным, поскольку он ненулевой. Таким образом, ограничение отображения f на подходящую подобласть $\Omega \subset U$ является диффеоморфизмом. Теорема 1, (с) доказана.

(d) Обозначим через γ данную параболу. Обозначим через F и δ фокус и директрису данной параболы. Рассмотрим гиперболический пучок с предельными точками в F и $L \in \delta$. Обозначим через U подходящую область такую, что для каждой точки $A \in U$ левая и правая касательные прямые $\alpha(A)$ и $\beta(A)$ к параболе и окружность $\omega(A)$ из пучка, проходящая через A , существуют и пересекаются трансверсально.

Рис. 11. К доказательству леммы 3

Рассмотрим прямую, проходящую через точку F и перпендикулярную $\alpha(A)$ (рис. 11). Обозначим через P точку пересечения этой прямой и δ . Рассмотрим прямую, проходящую через F и перпендикулярную $\beta(A)$. Обозначим через Q точку пересечения этой прямой и δ .

Введем обозначения

$$s(A) := \frac{|PL| \cdot |\cos \angle(\alpha(A), \delta)|}{|FP|}, \quad t(A) := \frac{|QL| \cdot |\cos \angle(\delta, \beta(A))|}{|FQ|}.$$

ЛЕММА 3. Для фиксированной окружности ω из пучка произведение $s(A) \cdot t(A)$ не зависит от точки $A \in \omega \cap U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно известному свойству параболы точка A является центром окружности, описанной вокруг $\triangle FPQ$ (см. [13; лемма 1.2]).

Значит, $|AF| = |AP| = |AQ| = R$, где R – радиус окружности, описанной вокруг $\triangle FPQ$.

По теореме синусов

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{|FP|}{|\sin \angle(QF, QP)|} = \frac{|FP|}{|\cos \angle(\delta, \beta(A))|}, \\ 2R &= \frac{|FQ|}{|\sin \angle(PQ, PF)|} = \frac{|FQ|}{|\cos \angle(\alpha(A), \delta)|}. \end{aligned}$$

Согласно известному свойству степени точки относительно окружности мы имеем $|AL|^2 = R^2 - |PL| \cdot |QL|$. Тогда

$$\begin{aligned} s(A) \cdot t(A) &= \left(\frac{|PL| \cdot |\cos \angle(\alpha(A), \delta)|}{|FP|} \right) \cdot \left(\frac{|QL| \cdot |\cos \angle(\delta, \beta(A))|}{|FQ|} \right) \\ &= \frac{|PL| \cdot |QL|}{4R^2} = \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{|AL|}{|AF|} \right)^2 \right) = \text{const}, \end{aligned}$$

где четвертое равенство следует из геометрической характеристики гиперболического пучка окружностей (см. доказательство теоремы 1, (b)).

Рассмотрим отображение $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что для каждой точки $A \in U$

$$f(A) := (\ln s(A), \ln t(A)).$$

Рассмотрим подобласть (которая по-прежнему обозначается через U), в которой дифференциал f ненулевой. Из леммы 3 следует, что f отображает пересечения левых касательных к γ , правых касательных к γ и окружностей из рассматриваемого пучка с U в отрезки прямых $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $x + y = \text{const}$. В частности, три трансверсальные кривые $\alpha(A)$, $\beta(A)$ и $\omega(A)$ имеют трансверсальные f -образы. Поэтому дифференциал отображения f в U является невырожденным. Таким образом, ограничение отображения f на подходящую подобласть $\Omega \subset U$ является диффеоморфизмом. Теорема 1, (d) доказана.

(е) Обозначим через γ данный эллипс. Обозначим через F_1 , F_2 и O_γ фокусы и центр γ . Рассмотрим эллиптический пучок окружностей с вершинами F_1 и F_2 . Рассмотрим декартову систему координат такую, что O_γ является началом координат и прямая, содержащая главную ось λ , является осью Ox . Без ограничения общности положим, что малая ось γ имеет длину 2. Пусть некоторая окружность с центром на главной оси λ дважды касается γ . Прямая, проходящая через точки касания, делит эту окружность на две дуги: левую касательную дугу окружности и правую касательную дугу окружности.

Пусть U – подходящая область такая, что для любой точки $A \in U$ левая и правая касательные дуги $\alpha(A)$ и $\beta(A)$ к γ и окружность $\omega(A)$ из данного пучка, проходящая через A , пересекаются трансверсально, центр O_α окружности, содержащей $\alpha(A)$, лежит слева от O_γ , центр O_β окружности, содержащей $\beta(A)$, лежит справа от O_γ и также $s(A) > t(A)$, где $s(A) := |O_\alpha O_\gamma|$ и $t(A) := |O_\beta O_\gamma|$.

ЛЕММА 4. Для фиксированной окружности ω произведение

$$\frac{1 - s^2(A)}{s^2(A)} \cdot \frac{1 - t^2(A)}{t^2(A)}$$

не зависит от точки $A \in \omega \cap U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P и Q – точки на окружностях, содержащих $\alpha(A)$ и $\beta(A)$ соответственно, такие, что $O_\alpha P$ и $O_\beta Q$ перпендикулярны λ . Рассмотрим окружность ω_0 такую, что малая ось эллипса γ является диаметром ω_0 . Поскольку эксцентриситет эллипса γ равен $1/\sqrt{2}$, то его фокусы F_1 и F_2 лежат на ω_0 (рис. 12).

Рис. 12. К доказательству леммы 4

ЛЕММА 5. Точки P и Q лежат на окружности ω_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем, что для любой точки $Y \in \omega_0$ окружность ω с центром в точке X , которая является проекцией точки Y на прямую λ , и радиусом $|XY|$ дважды касается γ . Пусть точка X имеет координаты $(a, 0)$. Тогда $|XY| = \sqrt{1 - a^2}$. Поэтому окружность ω имеет уравнение $(x - a)^2 + y^2 = 1 - a^2$. Мы можем переписать это уравнение в виде $g(x, y, a) = 0$, где $g(x, y, a) = (x - a)^2 + y^2 + a^2 - 1$. Вычислим огибающую этого семейства окружностей. Хорошо известно, что уравнение огибающей семейства $g(x, y, a) = 0$ может быть получено из системы

$$g(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial a} g(x, y, a) = 0$$

исключением переменной a . Мы имеем $(\partial/\partial a)g(x, y, a) = -2x + 4a$. Из второго уравнения системы мы имеем $a = x/2$. Подставляя $a = x/2$ в первое уравнение системы, мы получаем, что огибающая имеет уравнение $x^2/2 + y^2 = 1$. Это уравнение эллипса γ . Значит, окружность ω касается γ . Поскольку центр ω лежит на главной оси, ω дважды касается γ .

Продолжим доказательство леммы 4. Далее обозначаем $s(A)$ и $t(A)$ просто через s и t .

Из леммы 5 следует, что $|AO_\alpha| = |PO_\alpha| = \sqrt{1 - s^2}$ и $|AO_\beta| = |QO_\beta| = \sqrt{1 - t^2}$. Пусть R – проекция точки A на прямую λ . Тогда

$$|RO_\alpha|^2 - |RO_\beta|^2 = |AO_\alpha|^2 - |AO_\beta|^2 = t^2 - s^2.$$

Поскольку $|O_\alpha O_\beta| = s + t$, мы получаем, что $|RO_\alpha| = t$ и $|RO_\beta| = s$.

Значит,

$$|AR| = \sqrt{O_\alpha A^2 - O_\alpha R^2} = \sqrt{O_\alpha P^2 - O_\alpha R^2} = \sqrt{1 - s^2 - t^2},$$

$$|F_1 R| = 1 - s + t, \quad |F_2 R| = 1 + s - t.$$

Таким образом,

$$|F_1 A|^2 = 1 - s^2 - t^2 + (1 - s + t)^2 = 2(1 + (t - s) - st),$$

$$|F_2 A|^2 = 1 - s^2 - t^2 + (1 + s - t)^2 = 2(1 + (s - t) - st).$$

Для каждой точки $A \in \omega \cap U$ имеем $\angle F_1 A F_2 = \text{const}$. По теореме косинусов получаем

$$\begin{aligned} \cos \angle F_1 A F_2 &= \frac{|F_1 F_2|^2 - |F_1 A|^2 - |F_2 A|^2}{2|F_1 A| \cdot |F_2 A|} \\ &= \frac{4 - 2(1 + (t - s) - st) - 2(1 + (s - t) - st)}{\sqrt{4(1 + (t - s) - st) \cdot (1 + (s - t) - st)}} = \frac{2st}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - t^2)}}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\frac{1 - s^2(A)}{s^2(A)} \cdot \frac{1 - t^2(A)}{t^2(A)} = \frac{4}{\cos^2 \angle F_1 A F_2} = \text{const}.$$

Лемма 4 доказана.

Рассмотрим отображение $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что для каждой точки $A \in U$

$$f(A) := \left(\ln \frac{1 - s^2(A)}{s^2(A)}, \ln \frac{1 - t^2(A)}{t^2(A)} \right).$$

Рассмотрим подобласть (которая по-прежнему обозначается через U), в которой дифференциал f ненулевой. Из леммы 4 следует, что f отображает пересечения левых касательных дуг к γ , правых касательных дуг к γ и окружностей из рассматриваемого пучка с U в отрезки прямых $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $x + y = \text{const}$. В частности, три трансверсальные кривые $\alpha(A)$, $\beta(A)$ и $\omega(A)$ имеют трансверсальные f -образы. Поэтому дифференциал отображения f в U является невырожденным. Таким образом, ограничение отображения f на подходящую подобласть $\Omega \subset U$ является диффеоморфизмом. Теорема 1, (е) доказана.

§ 5. Нерешенные задачи

Следующие открытые задачи могут послужить предварительным шагом для решения проблемы Бляшке–Бола.

Задача 1 (задача о мутации тканей). Доказать, что в теореме 1, (b) гиперболический пучок можно заменить на эллиптический, вершины которого совпадают с предельными точками исходного пучка, и что аналогичная замена невозможна для теоремы 1, (d) (рис. 13).

Рациональным кубическим семейством окружностей называется множество окружностей $a(t)(x^2 + y^2) + b(t)x + c(t)y + d(t) = 0$, где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ – полиномы степени ≤ 3 .

Рис. 13. К задаче 1

ЗАДАЧА 2 (рациональные кубические семейства). Доказать, что множество окружностей

$$(1 - t^3)(x^2 + y^2) + 2(1 + t)x + 2(t^2 + t^3)y - 1 - t^3 = 0,$$

где $t \in \mathbb{R}$, посчитанное трижды, содержит гексагональную 3-ткань. Найти все рациональные кубические семейства окружностей, содержащие гексагональную 3-ткань.

Легко видеть, что примеры тканей в задаче 1 и задаче 2 не являются частными случаями примеров, рассмотренных в §§ 1, 2.

ЗАДАЧА 3 (задача о дополнении; А. А. Заславский и И. И. Богданов, частное сообщение). Даны два множества прямых

$$x = \text{const}, \quad y = \text{const}.$$

Найти все множества окружностей, которые вместе с данными множествами содержат гексагональную 3-ткань.

Последняя задача происходит из трехмерной изотропной геометрии (см. ссылки в [4]). *Изотропной окружностью* называется либо парабола с осью, параллельной Oz , либо эллипс, проекция которого на плоскость Oxy является окружностью. *Изотропной плоскостью* называется плоскость, параллельная оси Oz . *Изотропной сферой* называется параболоид вращения, ось которого параллельна Oz .

ЗАДАЧА 4 (ткани из изотропных окружностей). Найти все гексагональные 3-ткани из изотропных окружностей на изотропной плоскости и на всех поверхностях, отличных от плоскостей и изотропных сфер (см. рис. 5, b).

Автор благодарен М. Б. Скопенкову за мотивацию и постоянное внимание к работе, рецензенту, О. Н. Карпенкову, В. Ю. Протасову, С. Л. Табачникову, В. А. Тиморину и А. М. Шелехову за многочисленные ценные замечания.

Список литературы

- [1] А. В. Акопян, *Геометрия в картинках*, МЦНМО, М., 2011, 130 с.; англ. пер.: А. V. Akopyan, *Geometry in figures*, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2011, 128 pp.
- [2] A. Hráskó, “Poncelet-type problems, an elementary approach”, *Elem. Math.*, **55**:2 (2000), 45–62.
- [3] D. Fuchs, S. Tabachnikov, *Mathematical omnibus*, Thirty lectures on classical mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, xvi+463 pp.
- [4] H. Pottmann, Ling Shi, M. Skopenkov, “Darboux cyclides and webs from circles”, *Comput. Aided Geom. Design*, **29**:1 (2012), 77–97.
- [5] W. Blaschke, G. Bol, *Geometrie der Gewebe. Topologische Fragen der Differentialgeometrie*, Grundlehren Math. Wiss., **49**, J. Springer, Berlin, 1938, viii+339 pp.
- [6] В. Бляшке, *Введение в геометрию тканей*, Физматлит, М., 1959, 144 с.; пер. с нем.: W. Blaschke, *Einführung in die Geometrie der Waben*, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1955, 108 pp.
- [7] В. Б. Лазарева, А. М. Шелехов, “О триангуляциях плоскости пучками коник”, *Матем. сб.*, **198**:11 (2007), 107–134; англ. пер.: V. B. Lazareva, A. M. Shelekhov, “On triangulations of the plane by pencils of conics”, *Sb. Math.*, **198**:11 (2007), 1637–1663.
- [8] W. Wunderlich, “Über ein besonderes Dreiecksnetz aus Kreisen”, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien*, **147** (1938), 385–399.
- [9] В. Б. Лазарева, А. М. Шелехов, “О триангуляциях плоскости пучками коник. II”, *Матем. сб.*, **204**:6 (2013), 93–134; англ. пер.: V. B. Lazareva, A. M. Shelekhov, “On triangulations of the plane by pencils of conics. II”, *Sb. Math.*, **204**:6 (2013), 869–909.
- [10] А. Г. Хованский, “Выпрямление окружностей”, *Сиб. матем. журн.*, **21**:4 (1980), 221–226; англ. пер.: A. G. Khovanskii, “Rectification of circles”, *Sib. Math. J.*, **21**:6 (1981), 649–652.
- [11] K. Strubecker, “Über eine Klasse spezieller Dreiecksnetze aus Kreisen”, *Monaths. Math. Phys.*, **39**:1 (1932), 395–398.
- [12] J. L. Coolidge, *A treatise on the circle and the sphere*, Clarendon Press, Oxford, 1916, 603 pp.
- [13] А. В. Акопян, А. А. Заславский, *Геометрические свойства кривых второго порядка*, МЦНМО, М., 2007, 136 с.; англ. пер.: A. V. Akopyan, A. A. Zaslavsky, *Geometry of conics*, Math. World, **26**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, viii+134 pp.

Фёдор Константинович Нилов
(Fedor K. Nilov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: nilovfk@gmail.com

Поступила в редакцию
26.12.2013 и 28.08.2014