Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Авдеев, А. В. Петухов, Сферические действия на многообразиях флагов, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 9, 3–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8322>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 06:13:54

УДК 512.745

Р. С. Авдеев, А. В. Петухов

Сферические действия на многообразиях флагов

Для каждого конечномерного векторного пространства V и каждого многообразия V -флагов X перечисляются все связные редуктивные подгруппы в группе $GL(V)$, действующие сферично на X .

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: алгебраическая группа, многообразие флагов, сферическое многообразие, нильпотентная орбита.

DOI: 10.4213/sm8322

§ 1. Введение

В настоящей работе фиксировано алгебраически замкнутое поле $\mathbb{F}$ характеристики 0, являющееся основным полем для всех рассматриваемых объектов. Символом $\mathbb{F}^\times$ обозначается мультипликативная группа поля $\mathbb{F}$.

Пусть K – связная редуктивная алгебраическая группа, а X – некоторое K -многообразие (т.е. алгебраическое многообразие с регулярным действием группы K). Действие группы K на X , а также само многообразие X , называется *сферическим* (или *K -сферическим*, когда требуется подчеркнуть действующую группу), если X неприводимо и борелевская подгруппа группы K имеет открытую орбиту в X . Всякий конечномерный K -модуль, являющийся сферическим как K -многообразие, называется *сферическим K -модулем*. Сферические многообразия обладают многими замечательными свойствами, обзор которых можно найти, например, в монографии Д. А. Тимашёва [1].

Описание всех сферических многообразий для фиксированной группы K является важной и интересной задачей, в решении которой на настоящий момент достигнуты значительные результаты. Обзор этих результатов также можно найти в монографии [1]. Наряду с упомянутой выше задачей можно рассмотреть и в некотором смысле противоположную задачу: для заданного неприводимого алгебраического многообразия X найти все связные редуктивные алгебраические подгруппы в группе автоморфизмов многообразия X , действующие сферично на X . В настоящей работе эта задача рассматривается в случае, когда X – обобщенное многообразие флагов.

Первый автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 12-01-00704), Университетом Билефельда (Германия, грант SFB701), Программой Oberwolfach Leibniz Fellows Математического института Обервольфаха (Германия) и Фондом Д. Зимина “Династия”. Второй автор поддержан Гостевой программой Математического института Макса Планка (Бонн, Германия).

Обобщенным многообразием флагов будем называть всякое однородное пространство вида G/P , где G – связная редуктивная группа, а P – ее параболическая подгруппа. Многообразие G/P будем называть *тривиальным*, если $P = G$, и *нетривиальным* в противном случае. Следующие факты хорошо известны:

- (1) все обобщенные многообразия флагов фиксированной группы G суть в точности все полные (а также все проективные) однородные пространства группы G ;
- (2) центр группы G действует тривиально на G/P ;
- (3) естественное действие группы G на G/P является сферическим.

Обозначим через $\mathcal{F}(G)$ множество всех (с точностью до G -эквивариантного изоморфизма) нетривиальных обобщенных многообразий флагов фиксированной группы G . Для каждого обобщенного многообразия флагов X обозначим через $\text{Aut } X$ группу его автоморфизмов.

В [2; теорема 7.1] (см. также [3]) описаны группы автоморфизмов всех обобщенных многообразий флагов. Из этого описания следует, что если $X \in \mathcal{F}(G)$, то $\text{Aut } X$ является аффинной алгебраической группой, причем ее связная компонента единицы $(\text{Aut } X)^0$ полупроста и имеет тривиальный центр. Более того, оказывается, что в большинстве случаев (все исключения перечислены в [2; табл. 8], см. также [3; § 2]), в том числе для $G = \text{GL}_n$, естественный гомоморфизм $G \rightarrow (\text{Aut } X)^0$ сюръективен, а его ядро совпадает с центром группы G . В любом случае имеем $X \in \mathcal{F}((\text{Aut } X)^0)$, поэтому задача описания всех сферических действий на обобщенных многообразиях флагов сводится к следующей.

Задача 1.1. Для каждой связной редуктивной алгебраической группы G и каждого многообразия $X \in \mathcal{F}(G)$ перечислить все связные редуктивные подгруппы $K \subset G$, действующие на X сферично.

Поскольку центр группы G действует тривиально на любом многообразии $X \in \mathcal{F}(G)$, при решении задачи 1.1, когда это удобно, группу G без ограничения общности можно считать полупростой.

Основной целью настоящей работы является решение задачи 1.1 в случае $G = \text{GL}_n$ (результаты сформулированы ниже в теоремах 1.6 и 1.7).

Перечислим известные авторам частные случаи, в которых задача 1.1 решена.

1) Группа G и многообразие X произвольны, группа K является подгруппой Леви некоторой параболической подгруппы $Q \subset G$. В этом случае условие K -сферичности многообразия $G/P \in \mathcal{F}(G)$ эквивалентно условию G -сферичности многообразия $G/P \times G/Q$, на котором G действует диагонально (см. лемму 5.4). Все G -сферические многообразия вида $G/P \times G/Q$ классифицированы. В случае максимальных параболических подгрупп P, Q это было сделано П. Литтельманом в [4]. В случаях $G = \text{GL}_n$ и $G = \text{Sp}_{2n}$ классификация вытекает из результатов работ П. Магьяра, Е. Веймана и А. Зелевинского [5] и [6] соответственно. (На самом деле в работах [5] и [6] для указанных групп G решена более общая задача описания всех наборов многообразий $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{F}(G)$, для которых группа G имеет конечное число орбит при диагональном действии

на многообразии $X_1 \times \cdots \times X_k$.) Наконец, в случае произвольной группы G классификация завершена Дж. Стембриджем в [7]. Результаты этой классификации в случае $G = \mathrm{GL}_n$ будут существенно использоваться в настоящей работе и приведены в п. 5.2.

2) Группа G и многообразие X произвольны, группа K является симметрической подгруппой в G (т.е. K – подгруппа неподвижных точек нетривиального инволютивного автоморфизма группы G). В этом случае классификация получена в работе [8].

3) Группа G является особой простой группой, $X = G/P$ для некоторой максимальной параболической подгруппы $P \subset G$, K – максимальная редуктивная подгруппа в G . Этот случай разобран в препринте [9].

Пусть G – произвольная связная редуктивная группа, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie} G$ и $K \subset G$ – произвольная связная редуктивная подгруппа.

Обсудим ключевую идею, используемую в настоящей работе. Пусть $P \subset G$ – параболическая подгруппа, $N \subset P$ – ее унитарный радикал и $\mathfrak{n} = \mathrm{Lie} N$. Рассмотрим присоединенное действие группы G на $\mathfrak{g}$. В силу известного результата Р. Ричардсона (см. [10; предложение 6(c)]) для индуцированного действия $P : \mathfrak{n}$ имеется открытая орбита O_P . Положим

$$\mathcal{N}(G/P) = GO_P \subset \mathfrak{g}. \quad (1.1)$$

Легко видеть, что $\mathcal{N}(G/P)$ – нильпотентная (т.е. содержащая 0 в своем замыкании) G -орбита в $\mathfrak{g}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Два многообразия $X_1, X_2 \in \mathcal{F}(G)$ назовем *ниль-эквивалентными* (обозначение $X_1 \sim X_2$), если $\mathcal{N}(X_1) = \mathcal{N}(X_2)$.

Хорошо известно, что всякая G -орбита в $\mathfrak{g}$ наделена канонической структурой симплектического многообразия. Оказывается (см. теорему 2.6), что условие K -сферичности многообразия $X \in \mathcal{F}(G)$ эквивалентно условию коизотропности (см. определение 2.2) действия $K : \mathcal{N}(X)$ по отношению к симплектической структуре на $\mathcal{N}(X)$. Отсюда моментально вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $X_1, X_2 \in \mathcal{F}(G)$, причем $X_1 \sim X_2$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (a) действие $K : X_1$ является сферическим;
- (b) действие $K : X_2$ является сферическим.

Обозначим через $\llbracket X \rrbracket$ класс ниль-эквивалентности многообразия $X \in \mathcal{F}(G)$. Отношение включения между замыканиями нильпотентных орбит в $\mathfrak{g}$ определяет частичный порядок $\preceq$ на множестве $\mathcal{F}(G)/\sim$ всех классов ниль-эквивалентности: для $X_1, X_2 \in \mathcal{F}(G)$ отношение $\llbracket X_1 \rrbracket \preceq \llbracket X_2 \rrbracket$ (или $\llbracket X_2 \rrbracket \succeq \llbracket X_1 \rrbracket$) имеет место тогда и только тогда, когда орбита $\mathcal{N}(X_1)$ содержится в замыкании орбиты $\mathcal{N}(X_2)$. Мы будем также писать $\llbracket X_1 \rrbracket \prec \llbracket X_2 \rrbracket$ (или $\llbracket X_2 \rrbracket \succ \llbracket X_1 \rrbracket$), если $\llbracket X_1 \rrbracket \preceq \llbracket X_2 \rrbracket$, но $\llbracket X_1 \rrbracket \neq \llbracket X_2 \rrbracket$.

С помощью одного из результатов недавней работы И. В. Лосева [11] в п. 2.4 мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $X_1, X_2 \in \mathcal{F}(G)$, причем $\llbracket X_1 \rrbracket \prec \llbracket X_2 \rrbracket$. Если действие $K : X_2$ является сферическим, то и действие $K : X_1$ является сферическим.

Теоремы 1.3 и 1.4 дают следующий метод решения задачи 1.1: на первом шаге для каждого класса $\llbracket X \rrbracket \in \mathcal{F}(G)/\sim$, являющегося минимальным элементом относительно порядка $\preceq$, найти все связанные редуктивные подгруппы $K \subset G$, действующие сферично на X ; на втором шаге, используя полученные на первом шаге списки подгрупп K , проделать то же самое для всех классов ниль-эквивалентности, находящихся на “следующем уровне” относительно порядка $\preceq$; и т.д.

Напомним, что на множестве $\mathcal{F}(G)$ имеется естественный частичный порядок $\leq$, который можно задать следующим образом. Зафиксируем борелевскую подгруппу $B \subset G$. Пусть $X_1, X_2 \in \mathcal{F}(G)$. Тогда $X_1 = G/P_1$ и $X_2 = G/P_2$, где P_1, P_2 – однозначно определенные параболические подгруппы в G , содержащие B . По определению отношение $X_1 \leq X_2$ (соответственно $X_1 < X_2$) имеет место тогда и только тогда, когда $P_1 \supset P_2$ (соответственно $P_1 \supsetneq P_2$). Легко показать, что для частичного порядка $\leq$ справедлив следующий аналог теоремы 1.4: если $X_1 < X_2$ и действие $K : X_2$ сферично, то действие $K : X_1$ также сферично. Пусть теперь N_i – унипотентный радикал группы P_i , $i = 1, 2$. Тогда из условия $P_1 \supsetneq P_2$ следует, что $N_1 \subsetneq N_2$, откуда легко выводится, что орбита $\mathcal{N}(X_1)$ содержится в замыкании орбиты $\mathcal{N}(X_2)$. Поскольку $\dim \mathcal{N}(X_i) = 2 \dim N_i$ при $i = 1, 2$ (см. [10; предложение 6(b)]), имеем $\mathcal{N}(X_1) \neq \mathcal{N}(X_2)$. Таким образом, если $X_1 < X_2$, то $\llbracket X_1 \rrbracket \prec \llbracket X_2 \rrbracket$. В частности, если $\llbracket X \rrbracket$ – минимальный элемент множества $\mathcal{F}(G)/\sim$ относительно частичного порядка $\preceq$, то X – минимальный элемент множества $\mathcal{F}(G)$ относительно частичного порядка $\leq$.

Отметим, что если G – полупростая группа ранга n , то множество $\mathcal{F}(G)$ содержит ровно n минимальных элементов относительно частичного порядка $\leq$. С другой стороны, используя известные результаты о нильпотентных орбитах в классических алгебрах Ли (см. [12; §§ 5–7]), можно показать, что для простой группы G типа A_n, B_n или C_n множество $\mathcal{F}(G)/\sim$ содержит только один минимальный элемент относительно частичного порядка $\preceq$, а для простой группы G типа D_n ($n \geq 4$) множество $\mathcal{F}(G)/\sim$ содержит два (при $n = 2k + 1$) или три (при $n = 2k$) минимальных элемента относительно частичного порядка $\preceq$. Это показывает, что использование частичного порядка $\preceq$ при решении задачи 1.1 оказывается гораздо более эффективным, чем использование частичного порядка $\leq$.

Перейдем теперь к многообразиям V -флагов – основным объектам, рассматриваемым в настоящей работе. Чтобы зафиксировать удобное для наших целей определение этих многообразий, нам потребуется следующее понятие. *Композицией* натурального числа d называется всякая конечная последовательность натуральных чисел $(a_1, \dots, a_s)$, удовлетворяющая условию

$$a_1 + \dots + a_s = d.$$

Композицию $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s)$ будем называть *тривиальной*, если $s = 1$, и *нетривиальной*, если $s \geq 2$.

Пусть V – конечномерное векторное пространство размерности d , и пусть $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s)$ – композиция числа d . Многообразием V -флагов (или просто многообразием флагов), отвечающим композиции $\mathbf{a}$, будем называть множество наборов $(V_1, \dots, V_s)$ подпространств пространства V , удовлетворяющих следующим условиям:

- (a) $V_1 \subset \dots \subset V_s = V$;
- (b) $\dim V_i/V_{i-1} = a_i$ при $i = 1, \dots, s$ (при этом полагаем $V_0 = \{0\}$).

Отметим, что $\dim V_i = a_1 + \dots + a_i$ при всех $i = 1, \dots, s$.

Многообразие V -флагов, отвечающее композиции $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s)$, мы будем обозначать через $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$. Если композиция $\mathbf{a}$ нетривиальна, то наряду с $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$ будем также использовать обозначение $\mathrm{Fl}(a_1, \dots, a_{s-1}; V)$.

Следующие факты хорошо известны:

(1) всякое многообразие V -флагов X снабжено канонической структурой проективного алгебраического многообразия, при этом естественное действие группы $\mathrm{GL}(V)$ на X является регулярным и транзитивным;

(2) с точностью до $\mathrm{GL}(V)$ -эквивариантного изоморфизма все многообразия V -флагов суть в точности все обобщенные многообразия флагов группы $\mathrm{GL}(V)$.

Имея в виду факт (2), в дальнейшем все понятия и обозначения, введенные для обобщенных многообразий флагов, будем использовать и для многообразий V -флагов.

Легко видеть, что многообразие V -флагов $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$ тривиально (соответственно нетривиально) тогда и только тогда, когда композиция $\mathbf{a}$ тривиальна (соответственно нетривиальна).

При $1 \leq k \leq d$ рассмотрим композицию $\mathbf{c}_k$ числа d , где $\mathbf{c}_k = (k, d - k)$ при $1 \leq k \leq d - 1$ и $\mathbf{c}_d = (d)$. Многообразие $\mathrm{Fl}_{\mathbf{c}_k}(V)$ называется *грассманианом*, для него мы будем использовать собственное обозначение $\mathrm{Gr}_k(V)$. Точки этого многообразия находятся во взаимно однозначном соответствии с k -мерными подпространствами пространства V ; при этом точку, соответствующую подпространству $W \subset V$, будем обозначать через $[W]$. Легко видеть, что $\mathrm{Gr}_d(V)$ состоит из единственной точки $[V]$, а $\mathrm{Gr}_1(V)$ есть не что иное, как проективное пространство $\mathbb{P}(V)$.

В настоящей работе мы реализуем обсуждавшийся выше общий метод решения задачи 1.1 при $G = \mathrm{GL}(V)$. В этом случае хорошо известно, как устроены отображение из множества $\mathcal{F}(\mathrm{GL}(V))$ во множество нильпотентных орбит в $\mathfrak{gl}(V)$, а также частичный порядок на последнем множестве (подробности см. в § 3). В частности, справедливо следующее предложение (см. следствие 3.5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – две композиции числа d . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (a) многообразия $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$ и $\mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V)$ ниль-эквивалентны;
- (b) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ получаются друг из друга перестановкой элементов (в частности, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ содержат одинаковое число элементов).

С учетом теоремы 1.3 из предложения 1.5 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – две композиции числа d , получающиеся друг из друга перестановкой элементов, и пусть $K \subset \mathrm{GL}(V)$ – произвольная связная редуктивная подгруппа. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (а) действие $K : \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$ является сферическим;
- (б) действие $K : \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V)$ является сферическим.

Теорема 1.6 сводит задачу описания всех сферических действий на многообразиях V -флагов к случаю многообразий $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$, для которых композиция $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s)$ удовлетворяет неравенствам $a_1 \leq \dots \leq a_s$.

Легко видеть, что K -сферичность многообразия $\mathbb{P}(V)$ эквивалентна сферичности $(K \times \mathbb{F}^\times)$ -модуля V , где $\mathbb{F}^\times$ действует на V скалярными преобразованиями. Следовательно, описание всех сферических действий на $\mathbb{P}(V)$ является тривиальным следствием известной классификации сферических модулей, полученной в работах [13]–[15]. (Эта классификация играет одну из ключевых ролей в настоящей работе и приведена в п. 5.1.) Поскольку $\mathbb{P}(V) = \mathrm{Gr}_1(V)$, для завершения описания всех сферических действий на многообразиях V -флагов достаточно ограничиться такими многообразиями $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$, для которых композиция $\mathbf{a}$ нетривиальна и отлична от $(1, d-1)$.

Прежде чем сформулировать основной результат настоящей работы, введем еще одно понятие и несколько обозначений.

Пусть K_1, K_2 – связные редуктивные группы, и пусть заданы K_1 -модуль U_1 и K_2 -модуль U_2 . Рассмотрим соответствующие представления

$$\rho_1 : K_1 \rightarrow \mathrm{GL}(U_1), \quad \rho_2 : K_2 \rightarrow \mathrm{GL}(U_2).$$

Следуя Ф. Кнопу (см. [16; § 5]), будем говорить, что пары (K_1, U_1) и (K_2, U_2) геометрически эквивалентны, если существует изоморфизм $U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$, отождествляющий группы $\rho_1(K_1) \subset \mathrm{GL}(U_1)$ и $\rho_2(K_2) \subset \mathrm{GL}(U_2)$. Иными словами, пары (K_1, U_1) и (K_2, U_2) геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда они определяют одну и ту же линейную группу. Например, всякая пара (K, U) геометрически эквивалентна паре (K, U^*) (где U^* – K -модуль, двойственный к U), пара $(\mathrm{SL}_2, S^2\mathbb{F}^2)$ геометрически эквивалентна паре $(\mathrm{SO}_3, \mathbb{F}^3)$, а пара $(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2, \mathbb{F}^2 \otimes \mathbb{F}^2)$ геометрически эквивалентна паре $(\mathrm{SO}_4, \mathbb{F}^4)$.

Пусть K – связная редуктивная подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$ и K' – ее коммутант. Обозначим через C связную компоненту единицы центра группы K . Пусть $\mathfrak{X}(C)$ – группа характеров группы C (в аддитивной записи). Рассмотрим пространство V как K -модуль и зафиксируем его разложение $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ в прямую сумму простых K -подмодулей. Для каждого $i = 1, \dots, r$ обозначим через χ_i характер группы C , при помощи которого C действует на V_i .

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1.7. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s)$ – нетривиальная композиция числа d , причем $a_1 \leq \dots \leq a_s$ и $\mathbf{a} \neq (1, d-1)$. Многообразие $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$ является K -сферическим тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (1) пара (K', V) , рассматриваемая с точностью до геометрической эквивалентности, и набор $(a_1, \dots, a_{s-1})$ таковы, как в одном из случаев табл. 1;
- (2) группа C удовлетворяет условиям, перечисленным в четвертом столбце табл. 1.

Таблица 1

№	(K', V)	$(a_1, \dots, a_{s-1})$	Условия на C	Примечание
$s = 2$ (грассманианы)				
1	$(\mathrm{SL}_n, \mathbb{F}^n)$	(k)		$n \geq 4$
2	$(\mathrm{Sp}_{2n}, \mathbb{F}^{2n})$	(k)		$n \geq 2$
3	$(\mathrm{SO}_n, \mathbb{F}^n)$	(k)		$n \geq 4$
4	$(\mathrm{Spin}_7, \mathbb{F}^8)$	(2)		
5	$(\mathrm{Sp}_{2n}, \mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^1)$	(k)		$n \geq 2$
6	$(\mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_m, \mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^m)$	(k)	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $n = m = k$	$n \geq m \geq 1,$ $n + m \geq 4$
7	$(\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{SL}_m, \mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^m)$	(2)	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $m = 2$	$n, m \geq 2$
8	$(\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{SL}_m, \mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^m)$	(3)	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $m \leq 3$	$n, m \geq 2$
9	$(\mathrm{Sp}_4 \times \mathrm{SL}_m, \mathbb{F}^4 \oplus \mathbb{F}^m)$	(k)	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $k = m = 4$	$m, k \geq 4$
10	$(\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_{2m}, \mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^{2m})$	(2)	$\chi_1 \neq \chi_2$	$n \geq m \geq 2$
11	$(\mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_m, \mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^m \oplus \mathbb{F}^1)$	(k)	$\chi_2 - \chi_1, \chi_3 - \chi_1$ лин. нез. при $k = n$ $\chi_2 \neq \chi_3$ при $m \leq k < n$	$n \geq m \geq 1,$ $n \geq 2$
12	$(\mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_m \times \mathrm{SL}_l, \mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^m \oplus \mathbb{F}^l)$	(2)	$\chi_2 - \chi_1, \chi_3 - \chi_1$ лин. нез. при $n = 2$ $\chi_2 \neq \chi_3$ при $n \geq 3, m \leq 2$	$n \geq m \geq l \geq 1,$ $n \geq 2$
13	$(\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{SL}_m \times \mathrm{SL}_l, \mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^m \oplus \mathbb{F}^l)$	(2)	$\chi_2 - \chi_1, \chi_3 - \chi_1$ лин. нез. при $m \leq 2$ $\chi_1 \neq \chi_3$ при $m \geq 3, l \leq 2$	$n \geq 2,$ $m \geq l \geq 1$
14	$(\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_{2m} \times \mathrm{SL}_l, \mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^{2m} \oplus \mathbb{F}^l)$	(2)	$\chi_2 - \chi_1, \chi_3 - \chi_1$ лин. нез. при $l \leq 2$ $\chi_1 \neq \chi_2$ при $l \geq 3$	$n \geq m \geq 2,$ $l \geq 1$
15	$(\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_{2m} \times \mathrm{Sp}_{2l}, \mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^{2m} \oplus \mathbb{F}^{2l})$	(2)	$\chi_2 - \chi_1, \chi_3 - \chi_1$ лин. нез.	$n \geq m \geq l \geq 2$
$s \geq 3$				
16	$(\mathrm{SL}_n, \mathbb{F}^n)$	$(a_1, \dots, a_{s-1})$		$n \geq 3$
17	$(\mathrm{Sp}_{2n}, \mathbb{F}^{2n})$	$(1, a_2)$		$n \geq 2$
18	$(\mathrm{Sp}_{2n}, \mathbb{F}^{2n})$	$(1, 1, 1)$		$n \geq 2$
19	$(\mathrm{SL}_n, \mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^1)$	$(a_1, \dots, a_{s-1})$	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $s = n + 1$	$n \geq 2$
20	$(\mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_m, \mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^m)$	$(1, a_2)$	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $n = 1 + a_2$	$n \geq m \geq 2$
21	$(\mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_2, \mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^2)$	(a_1, a_2)	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $n = 4, a_1 = a_2 = 2$	$n \geq 4,$ $a_1 \geq 2$
22	$(\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{SL}_m, \mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^m)$	$(1, 1)$	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $m \leq 2$	$n \geq 2,$ $m \geq 1$
23	$(\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_{2m}, \mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^{2m})$	$(1, 1)$	$\chi_1 \neq \chi_2$	$n \geq m \geq 2$

Теорема 1.7 является объединением теорем 6.1 и 6.5–6.7.

Поясним обозначения и соглашения, используемые в табл. 1. В каждом случае предполагается, что i -й множитель группы K' действует на i -м прямом слагаемом пространства V . При этом подразумевается, что группа типа SL_q (соответственно Sp_{2q} , SO_q) естественным образом действует на $\mathbb{F}^q$ (соответственно на $\mathbb{F}^{2q}$, $\mathbb{F}^q$). В строке 4 группа Spin_7 действует на $\mathbb{F}^8$ посредством спинорного представления. Если в третьем столбце описание набора $(a_1, \dots, a_{s-1})$ содержит параметры, то эти параметры могут принимать любые допустимые значения (т.е. такие, для которых $a_1 \leq \dots \leq a_s$ и $\mathbf{a} \neq (1, d-1)$). В частности, в случаях из строк 16 и 19 допускается любая композиция $\mathbf{a}$, удовлетворяющая указанным ограничениям. Пустые ячейки в четвертом столбце означают, что никаких условий на C нет, т.е. характеры $\chi_1, \dots, \chi_r$ могут быть произвольными. Сокращение “лин. нез.” означает “линейно независимы в $\mathfrak{X}(C)$ ”.

В основе доказательства теоремы 1.7 лежит анализ частичного порядка $\preceq$ на множестве $\mathcal{F}(\mathrm{GL}(V))/\sim$. Отправной точкой при этом служат следующие факты:

- (1) если $X \in \mathcal{F}(\mathrm{GL}(V))$, то $\llbracket X \rrbracket \succcurlyeq \llbracket \mathbb{P}(V) \rrbracket$;
- (2) если $X \in \mathcal{F}(\mathrm{GL}(V))$, $\llbracket X \rrbracket \neq \llbracket \mathbb{P}(V) \rrbracket$ и $d \geq 4$, то $\llbracket X \rrbracket \succcurlyeq \llbracket \mathrm{Gr}_2(V) \rrbracket$.

Ввиду теоремы 1.4 из фактов (1) и (2) вытекают следующие утверждения, справедливые для любого нетривиального многообразия V -флагов X и любой связной редуктивной подгруппы $K \subset \mathrm{GL}(V)$:

- (1') если X является K -сферическим многообразием, то и $\mathbb{P}(V)$ является K -сферическим многообразием (см. предложение 3.7);
- (2') если X является K -сферическим многообразием, $\llbracket X \rrbracket \neq \llbracket \mathbb{P}(V) \rrbracket$ и $d \geq 4$, то $\mathrm{Gr}_2(V)$ является K -сферическим многообразием (см. предложение 3.9).

Утверждение (1') означает, что для K -сферичности нетривиального многообразия V -флагов необходимо, чтобы пространство V было сферическим $(K \times \mathbb{F}^\times)$ -модулем, где $\mathbb{F}^\times$ действует на V скалярными преобразованиями (см. следствие 3.8). Из утверждения (2') вытекает, что первым шагом на пути доказательства теоремы 1.7 является описание всех сферических действий на многообразии $\mathrm{Gr}_2(V)$.

Отметим, что утверждение (1') было фактически доказано в [17; теорема 5.8] при помощи изложенных в настоящей работе идей.

Список подгрупп в $\mathrm{GL}(V)$, действующих сферично на $\mathrm{Gr}_2(V)$ (см. теоремы 6.1 и 6.5), оказывается существенно короче списка подгрупп, действующих сферично на $\mathbb{P}(V)$. Это обстоятельство облегчает дальнейшие рассмотрения и позволяет завершить описание всех сферических действий на нетривиальных многообразиях V -флагов, не являющихся ниль-эквивалентными $\mathbb{P}(V)$ и $\mathrm{Gr}_2(V)$ (см. теоремы 6.6 и 6.7).

Настоящая работа организована следующим образом. В § 2 мы напоминаем некоторые сведения о пуассоновых и симплектических многообразиях и затем с их помощью доказываем критерий K -сферичности обобщенного многообразия флагов X в терминах действия $K : \mathcal{N}(X)$ (из этого критерия вытекает теорема 1.3). Параграф завершается доказательством теоремы 1.4. В § 3 мы изучаем отношение ниль-эквивалентности и частичный порядок на классах

ниль-эквивалентности в случае $G = \mathrm{GL}(V)$. Также мы обсуждаем наглядную интерпретацию этого частичного порядка в терминах диаграмм Юнга. В § 4 собраны все вспомогательные утверждения, которые нам потребуются при доказательстве теоремы 1.7. В § 5 приводятся две известные классификации, которые будут использоваться в доказательстве теоремы 1.7: первая из них – это классификация сферических модулей, вторая – классификация подгрупп Леви в $\mathrm{GL}(V)$, действующих сферично на многообразиях V -флагов. Доказательство теоремы 1.7 осуществляется в § 6. Наконец, в § 7 вынесены доказательства некоторых утверждений из § 4, представляющие наибольшую трудность с технической точки зрения.

Авторы выражают благодарность Э.Б. Винбергу и И.Б. Пенкову за полезные обсуждения, а также рецензенту за тщательное прочтение предыдущей версии работы и ценные замечания.

Основные обозначения и соглашения. В данной работе все рассматриваемые многообразия, группы и подгруппы предполагаются алгебраическими. Все топологические термины относятся к топологии Зарисского. Алгебры Ли групп, обозначенных прописными латинскими буквами, обозначаются соответствующими строчными готическими буквами. Все рассматриваемые алгебры (кроме алгебр Ли) предполагаются ассоциативными, коммутативными и содержащими единицу. Все рассматриваемые векторные пространства предполагаются конечномерными.

Пусть V – векторное пространство. *Симплектической формой* на V будем называть всякую невырожденную кососимметричную билинейную форму на V . Если Ω – фиксированная симплектическая форма на V , то для каждого подпространства $W \subset V$ символом $W^\perp$ будем обозначать косоортогональное дополнение к W относительно формы Ω .

Все обозначения и соглашения, используемые в табл. 1, будут использоваться и во всех остальных таблицах, присутствующих в настоящей работе.

Список обозначений:

$|X|$ – мощность конечного множества X ;

V^* – пространство линейных функций на векторном пространстве V ;

S^2V – симметрический квадрат векторного пространства V ;

$\wedge^2V$ – внешний квадрат векторного пространства V ;

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ – линейная оболочка векторов $v_1, \dots, v_m$ векторного пространства V ;

$G : X$ – действие группы G на многообразии X ;

G_x – стабилизатор точки $x \in X$ при действии $G : X$;

G' – коммутант группы G ;

G^0 – связная компонента единицы группы G ;

$\mathfrak{X}(G)$ – группа характеров группы G (в аддитивной записи);

$\mathrm{S}(\mathrm{L}_n \times \mathrm{L}_m)$ – подгруппа в GL_{n+m} , равная $(\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_m) \cap \mathrm{SL}_{n+m}$;

$\bar{Y}$ – замыкание подмножества Y многообразия X ;

$\mathrm{rk} G$ – ранг редуктивной группы G , т.е. размерность ее максимального тора;

X^{reg} – множество гладких точек многообразия X ;

$\mathbb{F}[X]$ – алгебра регулярных функций на многообразии X ;

$\mathbb{F}(X)$ – поле рациональных функций на многообразии X ;

A^G – алгебра инвариантов действия группы G на алгебре A ;

$\text{Quot } A$ – поле частных алгебры A без делителей нуля;

$\text{Spec } A$ – спектр конечно порожденной алгебры A без нильпотентов, т.е. такое аффинное алгебраическое многообразие, алгебра регулярных функций которого изоморфна A ;

$T_x X$ – касательное пространство к многообразию X в точке x ;

$T_x^* X = (T_x X)^*$ – кокасательное пространство к многообразию X в точке x ;

$T^* X$ – кокасательное расслоение многообразия X ;

$P^\top$ – транспонированная матрица для матрицы P .

§ 2. Обобщенные многообразия флагов и нильпотентные орбиты

На протяжении этого параграфа будем считать фиксированными произвольную связную редуктивную группу G и произвольную связную редуктивную подгруппу $K \subset G$.

2.1. Пуассоновы и симплектические многообразия. В этом пункте собраны все необходимые сведения о пуассоновых и симплектических многообразиях. Приводимая здесь информация почерпнута из [18; §§ II.1–II.3].

Алгебра A называется *алгеброй Пуассона*, если она снабжена билинейной антикоммутативной операцией $\{ \cdot, \cdot \}: A \times A \rightarrow A$ (называемой *скобкой Пуассона*), удовлетворяющей тождествам

$$\begin{aligned} \{f, gh\} &= \{f, g\}h + \{f, h\}g \quad (\text{тождество Лейбница}), \\ \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} &= 0 \quad (\text{тождество Якоби}) \end{aligned}$$

для любых элементов $f, g, h \in A$.

Неприводимое многообразие M называется *пуассоновым*, если его структурный пучок надлен структурой пучка алгебр Пуассона. Отметим, что структура пуассонова многообразия на M однозначно определяется скобкой Пуассона, индуцированной в поле $\mathbb{F}(M)$.

Гладкое неприводимое многообразие M называется *симплектическим*, если на M задана невырожденная замкнутая 2-форма ω (называемая *структурной 2-формой*).

Пусть M – пуассоново многообразие. Тогда на M^{reg} существует единственное поле бивекторов $\mathcal{B}$, обладающее следующим свойством:

$$\{f, g\} = \mathcal{B}(df, dg) \tag{2.1}$$

для любых функций $f, g \in \mathbb{F}(M)$. Бивектор $\mathcal{B}$ называется *бивектором Пуассона*. Если $\mathcal{B}$ невырожден в каждой точке некоторого непустого открытого подмножества $Z \subset M^{\text{reg}}$, то 2-форма $\omega = (\mathcal{B}^\top)^{-1}$ (формула связывает матрицы 2-формы ω и бивектора $\mathcal{B}$ в двойственных базисах пространств $T_p^* M$ и $T_p M$ для каждой точки $p \in M$) определяет на Z симплектическую структуру.

Наоборот, если M – симплектическое многообразие со структурной 2-формой ω , то бивектор $\mathcal{B} = (\omega^\top)^{-1}$ определяет на M структуру пуассонова многообразия по формуле (2.1), так что всякое симплектическое многообразие является пуассоновым.

Морфизм $\varphi: M \rightarrow M'$ пуассоновых многообразий называется *пуассоновым*, если для каждого открытого подмножества $U \subset M'$ соответствующий гомоморфизм $\varphi^*: \mathbb{F}[U] \rightarrow \mathbb{F}[\varphi^{-1}(U)]$ является гомоморфизмом алгебр Пуассона. Если φ сюръективен, то φ является пуассоновым тогда и только тогда, когда прямой образ бивектора Пуассона на M совпадает с бивектором Пуассона на M' . В частности, если $\varphi: M \rightarrow M'$ – пуассонов морфизм симплектических многообразий, являющийся накрытием, то обратный образ структурной 2-формы на M' совпадает со структурной 2-формой на M .

Пространство $\mathfrak{g}^*$ наделено естественной структурой пуассонова многообразия. В силу тождества Лейбница эта структура однозначно определяется заданием скобки Пуассона на линейных функциях, т.е. на пространстве $(\mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g}$. Для $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ полагают $\{\xi, \eta\} = [\xi, \eta]$.

Хорошо известно, что если O – произвольная G -орбита в $\mathfrak{g}^*$, то ограничение бивектора Пуассона на O корректно определено и невырожденно, ввиду чего на O индуцируется симплектическая структура. Эта симплектическая структура задается 2-формой ω_O , определяемой в точке $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ по формуле

$$\omega_O(\text{ad}^*(\xi)\alpha, \text{ad}^*(\eta)\alpha) = \alpha([\xi, \eta]),$$

где $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ и ad^* – коприсоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$. Форма ω_O называется *формой Костанта–Кириллова*.

Пусть X – гладкое неприводимое многообразие. Тогда его кокасательное расслоение

$$T^*X = \{(x, p) \mid x \in X, p \in T_x^*X\}$$

также является гладким неприводимым многообразием. На T^*X имеется каноническая структура симплектического многообразия. Структурная 2-форма ω_X может быть представлена в виде $\omega_X = -d\theta$, где θ – 1-форма, определяемая следующим образом. Пусть $\pi: T^*X \rightarrow X$ – каноническая проекция и $d\pi$ – ее дифференциал. Пусть ξ – касательный вектор к T^*X в точке (x, p) . Тогда $\theta(\xi) = p(d\pi(\xi))$.

2.2. Некоторые свойства симплектических G -многообразий. Пусть X – гладкое неприводимое G -многообразие. Действие $G: X$ естественным образом индуцирует действие $G: T^*X$, сохраняющее структурную 2-форму ω_X .

Пусть $\mathcal{V}(X)$ – алгебра Ли векторных полей на X . Действие группы G на X определяет гомоморфизм алгебр Ли $\tau_X: \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{V}(X)$, сопоставляющий каждому элементу $\xi \in \mathfrak{g}$ соответствующее поле скоростей на X . Для всех $\xi \in \mathfrak{g}$ и $x \in X$ обозначим через ξx значение поля $\tau_X(\xi)$ в точке $x \in X$.

Отображение $\Phi: T^*X \rightarrow \mathfrak{g}^*$, заданное формулой

$$(x, p) \mapsto [\xi \mapsto p(\xi x)], \quad \text{где } x \in X, p \in T_x^*X, \xi \in \mathfrak{g},$$

называется *отображением моментов*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 (см. [18; п. II.2.3, предложение 2]). *Отображение Φ является G -эквивариантным морфизмом пуассоновых многообразий.*

Пусть V – векторное пространство с заданной на нем симплектической формой Ω . Подпространство $W \subset V$ называется *изотропным*, если ограничение формы Ω на W тождественно равно нулю, и *коизотропным*, если его косоортгональное дополнение изотропно.

Пусть M – симплектическое многообразие со структурной 2-формой ω . Гладкое неприводимое локально замкнутое подмногообразие $Z \subset M$ называется *коизотропным*, если подпространство $T_z Z$ коизотропно в $T_z M$ для каждой точки $z \in Z$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Действие $G : M$, сохраняющее структурную 2-форму ω , называется *коизотропным*, если орбита общего положения для этого действия коизотропна.

Следующая теорема вытекает из [19; теорема 7.1]; см. также [18; п. II.3.4, теорема 2, следствие 1].

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть X – гладкое неприводимое G -многообразие. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (a) *действие $G : X$ сферично;*
- (b) *действие $G : T^*X$ коизотропно.*

Подмножество A' алгебры Пуассона A называется *коммукативным относительно скобки Пуассона*, если $\{f, g\} = 0$ для всех $f, g \in A'$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4 (см. [18; § II.3.2, предложение 5]). *Пусть M – симплектическое G -многообразие, причем структурная 2-форма G -инвариантна. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (a) *действие $G : M$ коизотропно;*
- (b) *поле $\mathbb{F}(M)^G$ коммукативно относительно скобки Пуассона.*

2.3. Критерий K -сферичности обобщенного многообразия флагов.

Основным результатом этого пункта является теорема 2.6.

Мы будем отождествлять пространства $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ при помощи формы следа произведения двух линейных операторов в фиксированном точном линейном представлении алгебры $\mathfrak{g}$.

Пусть $P \subset G$ – параболическая подгруппа и N – ее унипотентный радикал. Напомним, что в § 1 была определена нильпотентная G -орбита $\mathcal{N}(G/P) \subset \mathfrak{g}$; см. (1.1). Положим $o = eP \in G/P$. Пусть $\Phi_P : T^*(G/P) \rightarrow \mathfrak{g}$ – отображение моментов, отвечающее естественному действию $G : G/P$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Образ отображения Φ_P совпадает с замыканием орбиты $\mathcal{N}(G/P)$. Кроме того, отображение Φ_P конечно над $\mathcal{N}(G/P)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом отождествлений $T_o^*(G/P) \simeq (\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \simeq \mathfrak{n}$ из [18; п. II.2.3, пример 5] следует, что $\Phi_P(T_o^*(G/P)) = \mathfrak{n}$. Отсюда ввиду G -эквивариантности отображения Φ_P (см. предложение 2.1) мы получаем, что образ Φ_P совпадает с подмножеством $G\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ и, в частности, неприводим.

В силу [10; предложение 6(b)] множество $G\mathfrak{n}$ замкнуто в $\mathfrak{g}$ и имеет размерность $2 \dim \mathfrak{n}$. Из определения орбиты $\mathcal{N}(G/P)$ следует, что она плотна в $G\mathfrak{n}$, откуда $\dim \mathcal{N}(G/P) = \dim T^*(G/P)$. Последнее означает, что отображение Φ_P конечно над $\mathcal{N}(G/P)$.

ТЕОРЕМА 2.6. *Следующие условия эквивалентны:*

- (а) действие $K : G/P$ сферично;
- (б) действие $K : \mathcal{N}(G/P)$ коизотропно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2.5 подмножество $U = \Phi_P^{-1}(\mathcal{N}(G/P))$ открыто в $T^*(G/P)$, причем отображение $\Phi_P|_U : U \rightarrow \mathcal{N}(G/P)$ является накрытием. Из предложения 2.1 вытекает, что $\Phi_P|_U$ есть G -эквивариантный пуассонов морфизм симплектических многообразий, поэтому обратный образ структурной 2-формы на $\mathcal{N}(G/P)$ совпадает со структурной 2-формой на U . Следовательно, действие $K : \mathcal{N}(G/P)$ коизотропно тогда и только тогда, когда действие $K : U$ коизотропно или, эквивалентно, когда действие $K : T^*(G/P)$ коизотропно. Ввиду теоремы 2.3 последнее имеет место тогда и только тогда, когда действие $K : G/P$ сферично.

2.4. Доказательство теоремы 1.4. В силу теоремы 2.6 доказательство теоремы 1.4 сводится к доказательству следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. *Пусть O_1, O_2 – две нильпотентные G -орбиты в $\mathfrak{g}$, для которых $O_1 \subset \overline{O_2}$. Если действие $K : O_2$ коизотропно, то и действие $K : O_1$ коизотропно.*

Для доказательства этого предложения нам потребуются приводимые ниже лемма 2.8 и предложение 2.9.

ЛЕММА 2.8 (см. [20; предложение 1.2]). *Для всякой G -орбиты $O \subset \mathfrak{g}$ алгебра $\mathbb{F}[O]$ является целым замыканием алгебры $\mathbb{F}[O]$ в поле $\mathbb{F}(O)$. В частности, $\mathbb{F}[O]$ целозамкнута.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. *Для всякой G -орбиты $O \subset \mathfrak{g}$ имеет место равенство $\mathbb{F}(O)^K = \text{Quot}(\mathbb{F}[O]^K)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.8 следует, что многообразие $\text{Spec } \mathbb{F}[O]$ нормально. Требуемый результат теперь вытекает из [11; следствие 3.4.1] и [11; теорема 1.2.4, часть 1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.7. Пусть действие $K : O_2$ коизотропно. Тогда по предложению 2.4 поле $\mathbb{F}(O_2)^K$ коммутативно относительно скобки Пуассона. Следовательно, алгебра $\mathbb{F}[\overline{O_2}]^K$ также коммутативна относительно скобки Пуассона. Рассмотрим отображение ограничения $\mathbb{F}[\overline{O_2}]^K \rightarrow \mathbb{F}[\overline{O_1}]^K$. Оно сюръективно и является гомоморфизмом K -модулей, поэтому образ алгебры $\mathbb{F}[\overline{O_2}]^K$ совпадает с алгеброй $\mathbb{F}[\overline{O_1}]^K$. Значит, последняя алгебра коммутативна относительно скобки Пуассона. Покажем, что алгебра $\mathbb{F}[O_1]^K$ тоже коммутативна относительно скобки Пуассона. Пусть $f \in \mathbb{F}[O_1]^K$ – произвольный элемент. Из леммы 2.8 вытекает, что f удовлетворяет уравнению вида

$$f^n + c_{n-1}f^{n-1} + \cdots + c_1f + c_0 = 0, \quad (2.2)$$

где $n \geq 1$ и $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{F}[\overline{O}_1]$. Применив оператор “усреднения по K ” (он же оператор Рейнольдса; см. [21; п. 3.4]), мы можем считать, что $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{F}[\overline{O}_1]^K$. Кроме того, будем считать, что число n минимально среди всех уравнений вида (2.2). Для произвольного элемента $g \in \mathbb{F}[\overline{O}_1]^K$ имеем $\{c_i, g\} = 0$ при всех $i = 0, \dots, n-1$, поэтому, взяв от обеих частей равенства (2.2) скобку Пуассона с элементом g , получим

$$(nf^{n-1} + (n-1)c_{n-1}f^{n-2} + \dots + c_1)\{f, g\} = 0.$$

В силу минимальности n выражение $nf^{n-1} + (n-1)c_{n-1}f^{n-2} + \dots + c_1$ отлично от нуля, поэтому $\{f, g\} = 0$. Следовательно, $\{\mathbb{F}[O_1]^K, \mathbb{F}[\overline{O}_1]^K\} = 0$. Применив то же рассуждение к произвольному элементу $g \in \mathbb{F}[O_1]^K$, снова получим $\{f, g\} = 0$, поэтому алгебра $\mathbb{F}[O_1]^K$ коммутативна относительно скобки Пуассона. Тогда из предложения 2.9 вытекает, что поле $\mathbb{F}(O_1)^K$ тоже коммутативно относительно скобки Пуассона. Применив предложение 2.4, получаем, что действие $K : O_1$ коизотропно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.10. В случае $G = \mathrm{GL}_n$ (или $G = \mathrm{SL}_n$) доказательство предложения 2.7 упрощается. А именно, как доказано в работе [22], в этом случае замыкание всякой G -орбиты в $\mathfrak{g}$ нормально. Отсюда с учетом леммы 2.8 получаем $\mathbb{F}[O_1] = \mathbb{F}[\overline{O}_1]$, а значит, $\mathbb{F}[O_1]^K = \mathbb{F}[\overline{O}_1]^K$.

§ 3. Частичный порядок на множестве классов ниль-эквивалентности многообразий V -флагов

На протяжении этого параграфа будем считать фиксированным векторное пространство V размерности d .

3.1. Нильпотентные орбиты в $\mathfrak{gl}(V)$. Композиция $(a_1, \dots, a_s)$ числа d называется *разбиением*, если выполнены неравенства $a_1 \geq \dots \geq a_s$.

Следующий факт хорошо известен.

ТЕОРЕМА 3.1. *Имеется взаимно однозначное соответствие между нильпотентными орбитами в алгебре $\mathfrak{gl}(V)$ и разбиениями числа d . При этом орбита, отвечающая разбиению $(a_1, \dots, a_s)$, состоит из всех матриц, в жордановой нормальной форме которых на диагонали стоят нули, а размеры блоков с точностью до перестановки равны $a_1, \dots, a_s$.*

Для каждого разбиения $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s)$ числа d обозначим через $O_{\mathbf{a}}$ соответствующую нильпотентную орбиту в $\mathfrak{gl}(V)$.

На множестве всех разбиений числа d введем частичный порядок следующим образом. Для двух разбиений $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_t)$ будем писать $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$ (или $\mathbf{b} \succeq \mathbf{a}$), если

$$a_1 + \dots + a_i \leq b_1 + \dots + b_i \quad \text{для всех } i = 1, \dots, d$$

(в этой формуле мы полагаем $a_j = 0$ при $j > s$ и $b_j = 0$ при $j > t$).

ТЕОРЕМА 3.2 (см. [12; теорема 6.2.5]). Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – два разбиения числа d . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (a) $O_{\mathbf{a}} \subset \overline{O_{\mathbf{b}}}$;
- (b) $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$.

3.2. Соответствие между многообразиями V -флагов и нильпотентными орбитами в $\mathfrak{gl}(V)$. Для каждой композиции $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s)$ числа d определено двойственное ей разбиение $\mathbf{a}^\top = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_t)$ числа d по следующему правилу:

$$\hat{a}_i = |\{j \mid a_j \geq i\}|, \quad i = 1, \dots, t.$$

Очевидно, что если $\mathbf{b}$ – композиция числа d , получающаяся из $\mathbf{a}$ перестановкой элементов, то $\mathbf{a}^\top = \mathbf{b}^\top$. Кроме того, нетрудно убедиться, что операция $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}^\top$ является инволюцией на множестве разбиений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3 (см. [12; лемма 6.3.1]). Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – два разбиения числа d . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (a) $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$;
- (b) $\mathbf{a}^\top \succeq \mathbf{b}^\top$.

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s)$ – произвольная композиция числа d . Обозначим через $\mathbf{a}^\natural$ разбиение числа d , получающееся из $\mathbf{a}$ упорядочением элементов по невозрастанию.

Зафиксируем базис $e_1, \dots, e_d$ пространства V . Пусть $P_{\mathbf{a}}$ – параболическая подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$, являющаяся стабилизатором точки $(V_1, \dots, V_s) \in \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$, где $V_i = \langle e_1, \dots, e_{a_1 + \dots + a_i} \rangle$ при $i = 1, \dots, s$. Легко видеть, что в базисе $e_1, \dots, e_d$ группа $P_{\mathbf{a}}$ состоит из всех блочных верхнетреугольных матриц, у которых размеры диагональных блоков равны $a_1, \dots, a_s$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Справедливо равенство $\mathcal{N}(\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)) = O_{\mathbf{a}^\top}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathbf{c} = \mathbf{a}^\natural$. Легко видеть, что подгруппы Леви групп $P_{\mathbf{a}}$ и $P_{\mathbf{c}}$ сопряжены в $\mathrm{GL}(V)$. Тогда из [23; теорема 2.7] (см. также [12; теорема 7.1.3]) вытекает, что $\mathcal{N}(\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)) = \mathcal{N}(\mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V))$. Далее, в силу [24; § 2.2, теорема] (см. также [12; теорема 7.2.3]) имеем $\mathcal{N}(\mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)) = O_{\mathbf{c}^\top}$, откуда с учетом условия $\mathbf{a}^\top = \mathbf{c}^\top$ получаем $\mathcal{N}(\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)) = O_{\mathbf{a}^\top}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – две композиции числа d . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (a) $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) \sim \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V)$;
- (b) $\mathbf{a}^\natural = \mathbf{b}^\natural$.

Доказательство вытекает из предложения 3.4 и того факта, что $\mathbf{a}^\top = \mathbf{b}^\top$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}^\natural = \mathbf{b}^\natural$.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – две композиции числа d . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (a) $[\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)] \preceq [\mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V)]$;
- (b) $\mathbf{a}^\top \preceq \mathbf{b}^\top$;
- (c) $\mathbf{a}^\natural \succeq \mathbf{b}^\natural$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (а) и (b) вытекает из теоремы 3.2 и предложения 3.4. Эквивалентность условий (b) и (с) вытекает из предложения 3.3.

3.3. Диаграммы Юнга многообразий V -флагов. С каждым разбиением $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s)$ свяжем выровненную по левому краю диаграмму Юнга $YD(\mathbf{a})$, в которой i -я строка снизу содержит a_i клеток. Каждому многообразию $Fl_{\mathbf{a}}(V)$ сопоставим диаграмму Юнга $YD(\mathbf{a}^\natural)$. В качестве примера на рис. 1 приведены диаграммы Юнга для некоторых многообразий $\mathbb{F}^6$ -флагов.

Рис. 1

Частичный порядок на множестве классов ниль-эквивалентности многообразий V -флагов допускает наглядную интерпретацию в терминах диаграмм Юнга. А именно, пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – две композиции числа d . Тогда согласно следствию 3.6 условие $\llbracket Fl_{\mathbf{a}}(V) \rrbracket \preceq \llbracket Fl_{\mathbf{b}}(V) \rrbracket$ равносильно тому, что $\mathbf{a}^\natural \succeq \mathbf{b}^\natural$. В соответствии с приведенным в п. 3.1 описанием частичного порядка на множестве разбиений последнее можно проинтерпретировать следующим образом: диаграмма $YD(\mathbf{a}^\natural)$ может быть получена из диаграммы $YD(\mathbf{b}^\natural)$ *осыпанием*, т.е. перемещением квадратиков с верхних этажей на нижние. Например, с помощью этой интерпретации легко построить диаграмму Хассе для частичного порядка на множестве классов ниль-эквивалентности многообразий $\mathbb{F}^6$ -флагов, указанных на рис. 1. Эта диаграмма изображена на рис. 2.

Рис. 2

3.4. Необходимые условия сферичности действий на многообразиях V -флагов. Пусть $K \subset GL(V)$ – связная редуктивная подгруппа. В этом пункте, используя изложенное в пп. 3.2, 3.3 описание частичного порядка на множестве $\mathcal{F}(GL(V))/\sim$, мы получим два необходимых условия K -сферичности для многообразий V -флагов (см. предложения 3.7 и 3.9). Эти условия станут отправными пунктами при доказательстве теоремы 1.7.

Пусть $\mathbf{a}$ – нетривиальная композиция числа d .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7 (см. также [17; теорема 5.8]). *Если многообразие $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$ является K -сферическим, то и многообразие $\mathbb{P}(V)$ является K -сферическим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\mathbb{P}(V) = \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V)$, где $\mathbf{b} = (1, d-1)$. Так как $\mathbf{a} \neq (d)$, то $\mathbf{b}^{\natural} \succcurlyeq \mathbf{a}^{\natural}$, откуда в силу следствия 3.6 получаем $[\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)] \succcurlyeq [\mathbb{P}(V)]$. Остается применить теорему 1.4.

СЛЕДСТВИЕ 3.8. *Если многообразие $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$ является K -сферическим, то пространство V является сферическим $(K \times \mathbb{F}^{\times})$ -модулем (где $\mathbb{F}^{\times}$ действует на V скалярными преобразованиями).*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. *Если многообразие $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$ является K -сферическим, $[\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)] \neq [\mathbb{P}(V)]$ и $d \geq 4$, то многообразие $\mathrm{Gr}_2(V)$ является K -сферическим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\mathrm{Gr}_2(V) = \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V)$, где $\mathbf{b} = (2, d-2)$. Так как $d \geq 4$, то $\mathbf{b}^{\natural} = (d-2, 2)$. Далее, по условию композиция $\mathbf{a}^{\natural}$ отлична от (d) и $(d-1, 1)$. Последнее означает, что $\mathbf{b}^{\natural} \succcurlyeq \mathbf{a}^{\natural}$, откуда в силу следствия 3.6 получаем $[\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)] \succcurlyeq [\mathrm{Gr}_2(V)]$. Доказательство завершается применением теоремы 1.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.10. При $d = 3$ имеем $\mathrm{Gr}_2(V) \sim \mathbb{P}(V)$.

§ 4. Инструментарий

В этом параграфе собраны все вспомогательные утверждения, которые нам потребуются для доказательства теоремы 1.7.

4.1. Сферические многообразия и сферические подгруппы. Пусть K – связная редуктивная группа, B – ее борелевская подгруппа и X – сферическое K -многообразие. Следующее предложение хорошо известно, для удобства читателя мы приводим его вместе с доказательством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Справедливо неравенство*

$$\dim K + \mathrm{rk} K \geq 2 \dim X. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку группа B имеет открытую орбиту в X , справедливо неравенство $\dim B \geq \dim X$. Для завершения доказательства остается заметить, что $2 \dim B = \dim K + \mathrm{rk} K$.

Далее в работе нам понадобится следующее понятие. Подгруппа $H \subset K$ называется *сферической*, если однородное пространство K/H является сферическим K -многообразием. Легко видеть, что сферичность подгруппы H эквивалентна сферичности подгруппы H^0 .

4.2. Однородные расслоения. Пусть G – некоторая группа, H – ее подгруппа и X – некоторое G -многообразие. Предположим, что имеется сюръективный G -эквивариантный морфизм $\varphi: X \rightarrow G/H$. Обозначим через Y слой морфизма φ над точкой $o = eH$. Очевидно, Y является H -многообразием. В этой ситуации мы будем говорить, что X является *однородным расслоением над G/H со слоем Y* (или просто *однородным расслоением над G/H*).

Из G -эквивариантности морфизма φ вытекают следующие факты:

- (1) всякая G -орбита в X пересекает Y ;
- (2) для $g \in G$ и $y \in Y$ условие $gy \in Y$ выполнено тогда и только тогда, когда $g \in H$.

Из фактов (1) и (2) следует, что для всякой G -орбиты $O \subset X$ пересечение $O \cap Y$ непусто и является H -орбитой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Отображение $\iota: O \mapsto O \cap Y$ является биекцией между G -орбитами в X и H -орбитами в Y . Более того, для каждой G -орбиты $O \subset X$ выполнено равенство $\dim O - \dim(O \cap Y) = \dim X - \dim Y = \dim G/H$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что обратным к ι является отображение, переводящее произвольную H -орбиту $Y_0 \subset Y$ в G -орбиту $GY_0 \subset X$. Теперь рассмотрим произвольную G -орбиту $O \subset X$ и произвольную точку $y \in O \cap Y$. Воспользовавшись фактом (2), мы получаем $G_y \subset H$, откуда $O \simeq G/G_y$ и $O \cap Y \simeq H/G_y$. Следовательно, $\dim O - \dim O \cap Y = \dim G - \dim H$. Поскольку все слои морфизма φ изоморфны Y (все они являются G -сдвигами слоя Y), имеем $\dim X - \dim Y = \dim G/H$, откуда следует требуемое равенство.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Многообразие X обладает открытой G -орбитой тогда и только тогда, когда многообразие Y обладает открытой H -орбитой.*

4.3. Дополнительные сведения о многообразиях V -флагов. Пусть V – векторное пространство размерности d , и пусть $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s)$ – нетривиальная композиция числа d . Положим $m = a_1 + \dots + a_{s-1} = d - a_s$. Рассмотрим векторное пространство

$$U = \underbrace{V \oplus \dots \oplus V}_m \simeq V \otimes \mathbb{F}^m.$$

Естественная структура $(\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}_m)$ -модуля на $V \otimes \mathbb{F}^m$ переносится на U , при этом $\mathrm{GL}(V)$ действует на U диагонально, а действие группы GL_m на U задается формулой

$$(g, (v_1, \dots, v_m)) \mapsto (v_1, \dots, v_m)g^\top,$$

где $g \in \mathrm{GL}_m$ и $(v_1, \dots, v_m) \in U$.

Рассмотрим открытое подмножество $U_0 \subset U$, состоящее из линейно независимых наборов векторов $(v_1, \dots, v_m)$. Очевидно, что подмножество U_0 является $(\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}_m)$ -инвариантным. Имеется естественное $\mathrm{GL}(V)$ -эквивариантное сюръективное отображение

$$\rho: U_0 \rightarrow \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V),$$

переводящее набор векторов $u = (v_1, \dots, v_m) \in U_0$ в набор подпространств $\rho(u) = (V_1, \dots, V_s)$, где $V_i = \langle v_1, \dots, v_{a_1 + \dots + a_i} \rangle$ при $i = 1, \dots, s-1$ и $V_s = V$.

Пусть $e_1, \dots, e_m$ – стандартный базис в пространстве $\mathbb{F}^m$. Обозначим через $Q_{\mathbf{a}}$ подгруппу в GL_m , сохраняющую каждое из подпространств

$$\langle e_1, \dots, e_{a_1 + \dots + a_i} \rangle, \quad i = 1, \dots, s-1.$$

Легко видеть, что слоями отображения ρ являются в точности орбиты группы $Q_{\mathbf{a}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть $G \subset \mathrm{GL}(V)$ – произвольная подгруппа и $\mathbf{a}$ – нетривиальная композиция числа d . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (а) группа G имеет открытую орбиту в $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$;
- (б) группа $G \times Q_{\mathbf{a}}$ имеет открытую орбиту в $V \otimes \mathbb{F}^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что наличие открытой G -орбиты в $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}$ эквивалентно наличию открытой $(G \times Q_{\mathbf{a}})$ -орбиты в U_0 . Последнее вытекает из того, что слои отображения ρ – это в точности орбиты группы $Q_{\mathbf{a}}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть $K \subset \mathrm{GL}(V)$ – связная редуктивная подгруппа и

$$\mathbf{a}(m) = (\underbrace{1, \dots, 1}_m, d - m),$$

где $0 < m < d$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (а) многообразие $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}(m)}(V)$ является K -сферическим;
- (б) пространство $V \otimes \mathbb{F}^m$ является сферическим $(K \times \mathrm{GL}_m)$ -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что группа $Q_{\mathbf{a}(m)}$ есть не что иное, как борелевская подгруппа в GL_m . Остается применить предложение 4.4, взяв в качестве G борелевскую подгруппу в K .

Следующий результат является также частным случаем леммы 1 в [25].

СЛЕДСТВИЕ 4.6. Пусть $0 < m < d$ и $K \subset \mathrm{GL}(V)$ – произвольная подгруппа. Предположим, что для естественного действия группы $K \times \mathrm{GL}_m$ на $V \otimes \mathbb{F}^m$ имеется точка $z \in V \otimes \mathbb{F}^m$ со стабилизатором H , орбита которой открыта. Тогда для действия группы K на $\mathrm{Gr}_m(V)$ орбита точки $\rho(z)$ открыта, а стабилизатор $K_{\rho(z)}$ равен $p(H)$, где $p: K \times \mathrm{GL}_m \rightarrow K$ – проекция на первый сомножитель. Более того, $p(H) \simeq H$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Из сказанного в этом пункте следует, что для произвольной нетривиальной композиции $\mathbf{a}$ числа d многообразие $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$ является геометрическим фактором многообразия U_0 по действию группы $Q_{\mathbf{a}}$; см. [21; п. 4.2 и теорема 4.2].

4.4. Сферичность некоторых действий на грассманианах. Следующие частные случаи сферических действий на грассманианах хорошо известны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. При $n \geq 2$ и $1 \leq m \leq 2n - 1$ действие группы Sp_{2n} на многообразии $\mathrm{Gr}_m(\mathbb{F}^{2n})$ является сферическим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.9. При $n \geq 3$ и $1 \leq m \leq n - 1$ действие группы SO_n на многообразии $\mathrm{Gr}_m(\mathbb{F}^n)$ является сферическим.

Доказательства предложений 4.8 и 4.9 можно найти, например, в [8; § 5.2] и [8; § 5.1] соответственно.

4.5. Метод проверки сферичности некоторых действий. Пусть K – связная редуктивная группа, B – ее борелевская подгруппа и X – сферическое K -многообразие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.10. Будем говорить, что точка $x \in X$ и связная редуктивная подгруппа $L \subset K_x$ обладают свойством (P), если орбита Kx открыта в X и для всякой пары (Z, φ) , где Z – неприводимое K -многообразие, а $\varphi: Z \rightarrow X$ – сюръективный K -эквивариантный морфизм с неприводимым слоем над x , следующие два условия эквивалентны:

- (1) многообразие Z является K -сферическим;
- (2) многообразие $\varphi^{-1}(x) \subset Z$ является L -сферическим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.11. Пусть точка $x \in X$ и связная редуктивная подгруппа $L \subset K_x$ таковы, что орбита Bx открыта в X и B_x^0 – борелевская подгруппа в L . Тогда точка x и подгруппа L обладают свойством (P).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Z – произвольное неприводимое K -многообразие и $\varphi: Z \rightarrow X$ – сюръективный K -эквивариантный морфизм с неприводимым слоем над x . Поскольку орбита Bx открыта в X , множество $Z_0 = \varphi^{-1}(Bx)$ открыто в Z и является однородным расслоением над Bx . По следствию 4.3 наличие в Z_0 открытой B -орбиты эквивалентно наличию в $\varphi^{-1}(x)$ открытой B_x -орбиты. Поскольку B_x^0 – борелевская подгруппа в L , последнее условие эквивалентно сферичности действия $L: \varphi^{-1}(x)$.

Следующая теорема вытекает из результатов работы Д. И. Панюшева [26].

ТЕОРЕМА 4.12. Для всякого сферического K -многообразия X существуют точка $x \in X$ и связная редуктивная подгруппа $L \subset K_x$, обладающие свойством (P).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [26; теорема 1] следует, что существуют такая точка $x \in X$ и такая связная редуктивная подгруппа $L \subset K_x$, что орбита Bx открыта в X и B_x^0 – борелевская подгруппа в L . Тогда по предложению 4.11 точка x и подгруппа L обладают свойством (P).

В оставшейся части этого пункта мы найдем явно точку $x \in X$ и связную редуктивную подгруппу $L \subset K_x$, которые обладают свойством (P), в следующих двух случаях:

- (1) $K = \mathrm{SL}_n$, $X = \mathrm{Gr}_m(\mathbb{F}^n)$, где $n \geq 2$ и $1 \leq m \leq n - 1$;
- (2) $K = \mathrm{Sp}_{2n}$, $X = \mathrm{Gr}_m(\mathbb{F}^{2n})$, где $n \geq 2$ и $1 \leq m \leq 2n - 1$.

Явный вид точки x и группы L в этих случаях будет многократно использоваться в § 6. Случаю (1) соответствует предложение 4.13, случаю (2) при $m = 2k$ соответствуют предложение 4.14 и следствие 4.15, случаю (2) при $m = 2k + 1$ соответствуют предложение 4.16 и следствие 4.17. Предложения 4.13, 4.14 и 4.16 являются наиболее технически сложными утверждениями в настоящей работе, поэтому их доказательства вынесены в приложение (§ 7).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.13. Пусть $n \geq 2$, $1 \leq m \leq n - 1$, $V = \mathbb{F}^n$, $K = \mathrm{SL}_n$ и $X = \mathrm{Gr}_m(V)$. Тогда существуют точка $[W] \in X$ и связная редуктивная подгруппа $L \subset K_{[W]}$, удовлетворяющие следующим условиям:

- (1) точка $[W]$ и подгруппа $L \subset K$ обладают свойством (P);
- (2) $L \simeq \mathrm{S}(\mathrm{L}_m \times \mathrm{L}_{n-m})$;
- (3) пара (L, W) геометрически эквивалентна паре $(\mathrm{GL}_m, \mathbb{F}^m)$;
- (4) пара (L, V) геометрически эквивалентна паре $(\mathrm{S}(\mathrm{L}_m \times \mathrm{L}_{n-m}), \mathbb{F}^n)$.

Доказательство см. в § 7.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.14. Пусть $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n/2$, $V = \mathbb{F}^{2n}$, $K = \mathrm{Sp}_{2n}$ и $X = \mathrm{Gr}_{2k}(V)$. Тогда существуют точка $[W] \in X$ и связная редуктивная подгруппа $L \subset K_{[W]}$, удовлетворяющие следующим условиям:

- (1) точка $[W]$ и подгруппа $L \subset K$ обладают свойством (P);
- (2) $L = L_1 \times \cdots \times L_k \times L_{k+1}$, где $L_i \simeq \mathrm{SL}_2$ при $i = 1, \dots, k$ и $L_{k+1} \simeq \mathrm{Sp}_{2n-4k}$;
- (3) имеется разложение $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ в прямую сумму L -модулей, причем:

$$(3.1) \dim W_i = 2 \text{ при } i = 1, \dots, k;$$

(3.2) при каждом $i = 1, \dots, k$ группа L_i действует тривиально на всех слагаемых W_j , где $j \neq i$;

(3.3) при каждом $i = 1, \dots, k$ пара (L_i, W_i) геометрически эквивалентна паре $(\mathrm{SL}_2, \mathbb{F}^2)$;

- (4) имеется разложение $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \oplus V_{k+1}$ в прямую сумму L -модулей, причем:

$$(4.1) \dim V_i = 4 \text{ при } i = 1, \dots, k \text{ и } \dim V_{k+1} = 2n - 4k;$$

(4.2) при каждом $i = 1, \dots, k+1$ группа L_i действует тривиально на всех слагаемых V_j , где $j \neq i$;

(4.3) при каждом $i = 1, \dots, k$ пара (L_i, V_i) геометрически эквивалентна паре $(\mathrm{SL}_2, \mathbb{F}^2 \oplus \mathbb{F}^2)$, где SL_2 действует диагонально, а пара (L_{k+1}, V_{k+1}) геометрически эквивалентна паре $(\mathrm{Sp}_{2n-4k}, \mathbb{F}^{2n-4k})$.

(При $n = 2k$ следует считать, что группа L_{k+1} и пространство V_{k+1} тривиальны.)

Доказательство см. в § 7.

СЛЕДСТВИЕ 4.15. В условиях и обозначениях предложения 4.14 предположим, что точка $[W] \in \mathrm{Gr}_{2k}(V)$ и группа $L \subset K_{[W]}$ удовлетворяют условиям (1)–(4). Тогда для многообразия $\mathrm{Gr}_{2n-2k}(V)$ точка $[W^\perp]$ и группа L обладают свойством (P), причем пара $(L, W^\perp)$ геометрически эквивалентна паре $(L, W \oplus V_{k+1})$, где L действует диагонально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ω – симплектическая форма на V , инвариантная относительно K . Имеется естественный K -эквивариантный изоморфизм $\mathrm{Gr}_{2k}(V) \simeq \mathrm{Gr}_{2n-2k}(V)$, сопоставляющий каждому $2k$ -мерному подпространству в V его косоортогональное дополнение относительно формы Ω . Отсюда с учетом условия (1) вытекает, что точка $[W^\perp]$ и группа L обладают свойством (P). Далее, поскольку K -орбита точки $[W]$ открыта в $\mathrm{Gr}_{2k}(V)$, ограничение формы Ω на подпространство W невырожденно. Значит, $V = W \oplus W^\perp$, что ввиду условий (3) и (4) однозначно определяет структуру L -модуля на $W^\perp$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.16. Пусть $n \geq 2$, $1 \leq k \leq (n-1)/2$, $V = \mathbb{F}^{2n}$, $K = \mathrm{Sp}_{2n}$ и $X = \mathrm{Gr}_{2k+1}(V)$. Тогда существуют точка $[W] \in X$ и связная редуктивная подгруппа $L \subset K_{[W]}$, удовлетворяющие следующим условиям:

- (1) точка $[W]$ и подгруппа $L \subset K$ обладают свойством (P);
- (2) $L = L_0 \times L_1 \times \cdots \times L_k \times L_{k+1}$, где $L_0 \simeq \mathbb{F}^\times$, $L_i \simeq \mathrm{SL}_2$ при $i = 1, \dots, k$ и $L_{k+1} \simeq \mathrm{Sp}_{2n-4k-2}$;

(3) *имеется разложение $W = W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ в прямую сумму L -модулей, причем:*

(3.1) $\dim W_0 = 1$ и $\dim W_i = 2$ при $i = 1, \dots, k$;

(3.2) *при каждом $i = 0, 1, \dots, k$ группа L_i действует тривиально на всех слагаемых W_j , где $j \neq i$;*

(3.3) *пара (L_0, W_0) геометрически эквивалентна паре $(\mathbb{F}^\times, \mathbb{F}^1)$, и при каждом $i = 1, \dots, k$ пара (L_i, W_i) геометрически эквивалентна паре $(\mathrm{SL}_2, \mathbb{F}^2)$;*

(4) *имеется разложение $V = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_k \oplus V_{k+1}$ в прямую сумму L -модулей, причем:*

(4.1) $\dim V_0 = 2$, $\dim V_i = 4$ при $i = 1, \dots, k$ и $\dim V_{k+1} = 2n - 4k - 2$;

(4.2) *при каждом $i = 0, 1, \dots, k + 1$ группа L_i действует тривиально на всех слагаемых V_j , где $j \neq i$;*

(4.3) *пара (L_0, V_0) геометрически эквивалентна паре $(\mathbb{F}^\times, \mathbb{F}^1 \oplus \mathbb{F}^1)$ с действием по формуле $(t, (x_1, x_2)) \mapsto (tx_1, t^{-1}x_2)$, при каждом $i = 1, \dots, k$ пара (L_i, V_i) геометрически эквивалентна паре $(\mathrm{SL}_2, \mathbb{F}^2 \oplus \mathbb{F}^2)$ с диагональным действием группы SL_2 , а пара (L_{k+1}, V_{k+1}) геометрически эквивалентна паре $(\mathrm{Sp}_{2n-4k-2}, \mathbb{F}^{2n-4k-2})$.*

(При $n = 2k + 1$ следует считать, что группа L_{k+1} и пространство V_{k+1} тривиальны.)

Доказательство см. в § 7.

СЛЕДСТВИЕ 4.17. *В условиях и обозначениях предложения 4.16 предположим, что точка $[W] \in \mathrm{Gr}_{2k+1}(V)$ и группа $L \subset K_{[W]}$ удовлетворяют условиям (1)–(4). Тогда для многообразия $\mathrm{Gr}_{2n-2k-1}(V)$ точка $[W^\perp]$ и группа L обладают свойством (P), причем пара $(L, W^\perp)$ геометрически эквивалентна паре $(L, W \oplus V_{k+1})$, где L действует диагонально.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ω – симплектическая форма на V , инвариантная относительно K . Имеется естественный K -эквивариантный изоморфизм $\mathrm{Gr}_{2k+1}(V) \simeq \mathrm{Gr}_{2n-2k-1}(V)$, сопоставляющий каждому $(2k + 1)$ -мерному подпространству в V его косоортогональное дополнение относительно формы Ω . Отсюда с учетом условия (1) вытекает, что точка $[W^\perp]$ и группа L обладают свойством (P). Далее, поскольку K -орбита точки $[W]$ открыта в $\mathrm{Gr}_{2k+1}(V)$, ограничение формы Ω на подпространство W имеет ранг $2k$. Следовательно, $\dim(W \cap W^\perp) = 1$, откуда ввиду условия (4) получаем $W \cap W^\perp = W_0$. Теперь структура L -модуля на $W^\perp$ однозначно определяется из условий (3) и (4).

4.6. Некоторые условия сферичности действий на многообразиях V -флагов. Пусть K – связная редуктивная группа, V – некоторый K -модуль и $V = V_1 \oplus V_2$ – его разложение в прямую сумму двух (не обязательно простых) нетривиальных K -подмодулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.18. *Пусть $1 \leq k \leq \dim V_1$, $Z = \mathrm{Gr}_k(V)$ и $X = \mathrm{Gr}_k(V_1)$.*

(а) *Предположим, что Z является K -сферическим многообразием. Тогда и X является K -сферическим многообразием.*

- (b) *Предположим, что X является K -сферическим многообразием. Пусть точка $[W_0] \in X$ и связная редуктивная подгруппа $L \subset K_{[W_0]}$ обладают свойством (P). Тогда следующие условия эквивалентны:*
- (1) *многообразие Z является K -сферическим;*
 - (2) *пространство $W_0^* \otimes V_2$ является сферическим L -модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через p проекцию пространства V на подпространство V_1 вдоль V_2 . Пусть $Z_0 \subset Z$ – открытое K -инвариантное подмножество, состоящее из точек $[U]$ со свойством $\dim p(U) = k$. Проекция p индуцирует сюръективный K -эквивариантный морфизм $\varphi: Z_0 \rightarrow X$. Для каждой точки $[W] \in X$ слой $\varphi^{-1}([W])$ состоит из таких точек $[U]$, для которых $p(U) = W$, откуда

$$\varphi^{-1}([W]) \simeq \operatorname{Hom}(W, V_2) \simeq W^* \otimes V_2.$$

Легко видеть, что из K -сферичности многообразия Z_0 вытекает K -сферичность многообразия X , что доказывает пункт (a). Для завершения доказательства пункта (b) остается воспользоваться свойством (P) для точки $[W_0]$ и группы L .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.19. Легко видеть, что X реализуется как K -инвариантное подмногообразие в Z . Тогда предложение 4.18(a) вытекает также из следующего хорошо известного факта: всякое неприводимое K -инвариантное подмногообразие сферического K -многообразия является сферическим (см., например, [1; предложение 15.14]).

СЛЕДСТВИЕ 4.20. Пусть $k = \dim V_1$ и $Z = \operatorname{Gr}_k(V)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) *многообразие Z является K -сферическим;*
- (2) *пространство $V_1^* \otimes V_2$ является сферическим K -модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемой ситуации многообразие X состоит из одной точки $[V_1]$. Очевидно, что эта точка вместе с группой K обладают свойством (P).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.21. Предположим, что $\dim V \geq 4$ и многообразие $Z = \operatorname{Gr}_2(V)$ является K -сферическим. Тогда пространство $V_2 \otimes \mathbb{F}^2$ является сферическим $(K \times \operatorname{GL}_2)$ -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $\dim V_1 \geq 2$. Положим $X = \operatorname{Gr}_2(V_1)$. Применив предложение 4.18(a), мы получаем, что X – сферическое K -многообразие. По теореме 4.12 существуют точка $x \in X$ и связная редуктивная подгруппа $L \subset K_x$, обладающие свойством (P). Тогда по предложению 4.18(b) пространство $V_2 \otimes \mathbb{F}^2$ является сферическим L -модулем, а значит, и сферическим $(K \times \operatorname{GL}_2)$ -модулем.

Теперь рассмотрим случай $\dim V_1 = 1$. Тогда $\dim V_2 \geq 3$. Для каждого двумерного подпространства $W \subset V$ положим $W_1 = W \cap V_2$ и обозначим через W_2 проекцию W на V_2 вдоль V_1 .

Пусть $Z_0 \subset Z$ – открытое K -инвариантное подмножество, состоящее из точек $[W]$, для которых $\dim W_1 = 1$ и $\dim W_2 = 2$. Легко видеть, что морфизм

$$Z_0 \rightarrow \operatorname{Fl}(1, 1; V_2), \quad [W] \mapsto (W_1, W_2, V_2)$$

сюръективен и K -эквивариантен, вследствие чего из K -сферичности многообразия $\mathrm{Gr}_2(V)$ вытекает K -сферичность многообразия $\mathrm{Fl}(1, 1; V_2)$. Тогда по следствию 4.5 пространство $V_2 \otimes \mathbb{F}^2$ является сферическим $(K \times \mathrm{GL}_2)$ -модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.22. Пусть $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 1$, $k_1 + k_2 \leq \dim V_1$. Положим $Z = \mathrm{Fl}(k_1, k_2; V)$, $X = \mathrm{Gr}_{k_1+k_2}(V_1)$ и предположим, что X является K -сферическим многообразием. Пусть точка $[W_0] \in X$ и связная редуктивная подгруппа $L \subset K_{[W_0]}$ обладают свойством (Р). Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) многообразие Z является K -сферическим;
- (2) многообразие $(W_0^* \otimes V_2) \times \mathrm{Gr}_{k_1}(W_0)$ является L -сферическим (L действует диагонально).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p – проекция пространства V на подпространство V_1 вдоль V_2 . Пусть $Z_0 \subset Z$ – открытое K -инвариантное подмножество, состоящее из всех точек $(U_1, U_2, V) \in Z$, для которых $\dim p(U_2) = k_1 + k_2$. Проекция p индуцирует сюръективный K -эквивариантный морфизм $\varphi: Z_0 \rightarrow X$, переводящий точку (U_1, U_2, V) в $p(U_2)$. Для каждой точки $[W] \in X$ слой $\varphi^{-1}([W])$ изоморфен

$$\mathrm{Hom}(W, V_2) \times \mathrm{Gr}_{k_1}(W) \simeq (W^* \otimes V_2) \times \mathrm{Gr}_{k_1}(W).$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться свойством (Р) для точки $[W_0]$ и группы L .

§ 5. Известные классификации, используемые в работе

5.1. Классификация сферических модулей. В этом пункте приводится классификация сферических модулей, полученная в работах [13]–[15].

Пусть K – связная редуктивная группа и C – связная компонента единицы ее центра. Для всякого простого K -модуля V рассмотрим характер $\chi \in \mathfrak{X}(C)$, при помощи которого C действует на V .

ТЕОРЕМА 5.1 (см. [13; теорема 3]). Простой K -модуль V является сферическим тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (1) с точностью до геометрической эквивалентности пара (K', V) содержится в табл. 2;
- (2) группа C удовлетворяет условиям, перечисленным в четвертом столбце табл. 2.

Дадим некоторые комментарии и пояснения к табл. 2. В строках 3–8 ограничения в столбце “Примечание” наложены во избежание совпадений (с точностью до геометрической эквивалентности) соответствующих K' -модулей с K' -модулями, отвечающими другим строкам. В строках 10 и 11 группа K' действует на V посредством спинорного представления. В строке 12 группа K' действует на V посредством (любого из двух) полуспинорного представления. Наконец, в строках 13 и 14 группа K' действует на V посредством точного представления минимальной размерности.

Таблица 2

№	K'	V	Условия на C	Примечание
1	SL_n	$\mathbb{F}^n$	$\chi \neq 0$ при $n = 1$	$n \geq 1$
2	SO_n	$\mathbb{F}^n$	$\chi \neq 0$	$n \geq 3$
3	Sp_{2n}	$\mathbb{F}^{2n}$		$n \geq 2$
4	SL_n	$S^2\mathbb{F}^n$	$\chi \neq 0$	$n \geq 3$
5	SL_n	$\wedge^2\mathbb{F}^n$	$\chi \neq 0$ при $n = 2k$	$n \geq 5$
6	$SL_n \times SL_m$	$\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^m$	$\chi \neq 0$ при $n = m$	$n, m \geq 2,$ $n + m \geq 5$
7	$SL_2 \times Sp_{2n}$	$\mathbb{F}^2 \otimes \mathbb{F}^{2n}$	$\chi \neq 0$	$n \geq 2$
8	$SL_3 \times Sp_{2n}$	$\mathbb{F}^3 \otimes \mathbb{F}^{2n}$	$\chi \neq 0$	$n \geq 2$
9	$SL_n \times Sp_4$	$\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^4$	$\chi \neq 0$ при $n = 4$	$n \geq 4$
10	$Spin_7$	$\mathbb{F}^8$	$\chi \neq 0$	
11	$Spin_9$	$\mathbb{F}^{16}$	$\chi \neq 0$	
12	$Spin_{10}$	$\mathbb{F}^{16}$		
13	G_2	$\mathbb{F}^7$	$\chi \neq 0$	
14	E_6	$\mathbb{F}^{27}$	$\chi \neq 0$	

Назовем K -модуль V *разложимым*, если существуют связные редуктивные группы K_1, K_2 , а также K_1 -модуль V_1 и K_2 -модуль V_2 , для которых пара (K, V) геометрически эквивалентна паре $(K_1 \times K_2, V_1 \oplus V_2)$. Отметим, что в данной ситуации $V_1 \oplus V_2$ является сферическим $(K_1 \times K_2)$ -модулем тогда и только тогда, когда V_1 является сферическим K_1 -модулем, а V_2 является сферическим K_2 -модулем. Если K -модуль V не является разложимым, то мы будем его называть *неразложимым*. Будем говорить, что K -модуль V является *строго неразложимым*, если V является неразложимым K' -модулем. Очевидно, что всякий простой K -модуль является строго неразложимым.

Пусть V – некоторый K -модуль и $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ – его разложение в прямую сумму простых K -подмодулей. Для каждого $i = 1, \dots, r$ обозначим через χ_i характер группы C , при помощи которого C действует в пространстве V_i .

ТЕОРЕМА 5.2 (см. [14], [15]). *Во введенных выше обозначениях предположим, что V не является простым K -модулем. Тогда V является строго неразложимым сферическим K -модулем в том и только том случае, когда $r = 2$ и выполнены следующие условия:*

- (1) *с точностью до геометрической эквивалентности пара (K', V) содержится в табл. 3;*
- (2) *группа C удовлетворяет условиям, перечисленным в третьем столбце табл. 3.*

ТАБЛИЦА 3

№	(K', V)	Условия на C	Примечание
1	$\begin{array}{c} \text{SL}_n \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^n \end{array}$	$\frac{\chi_1, \chi_2 \text{ лин. нез. при } n = 2}{\chi_1 \neq \chi_2 \text{ при } n \geq 3}$	$n \geq 2$
2	$\begin{array}{c} \text{SL}_n \\ \swarrow \quad \searrow \\ (\mathbb{F}^n)^* \oplus \mathbb{F}^n \end{array}$	$\chi_1 \neq -\chi_2$	$n \geq 3$
3	$\begin{array}{c} \text{SL}_n \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathbb{F}^n \oplus \wedge^2 \mathbb{F}^n \end{array}$	$\frac{\chi_2 \neq 0 \text{ при } n = 2k}{\chi_1 \neq -\frac{n-1}{2}\chi_2 \text{ при } n = 2k+1}$	$n \geq 4$
4	$\begin{array}{c} \text{SL}_n \\ \swarrow \quad \searrow \\ (\mathbb{F}^n)^* \oplus \wedge^2 \mathbb{F}^n \end{array}$	$\frac{\chi_2 \neq 0 \text{ при } n = 2k}{\chi_1 \neq \frac{n-1}{2}\chi_2 \text{ при } n = 2k+1}$	$n \geq 4$
5	$\begin{array}{c} \text{SL}_n \times \text{SL}_m \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \mathbb{F}^n \oplus (\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^m) \end{array}$	$\frac{\chi_1 \neq 0 \text{ при } n \leq m-1}{\chi_1, \chi_2 \text{ лин. нез. при } n = m, m+1}$ $\chi_1 \neq \chi_2 \text{ при } n \geq m+2$	$n, m \geq 2$
6	$\begin{array}{c} \text{SL}_n \times \text{SL}_m \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ (\mathbb{F}^n)^* \oplus (\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^m) \end{array}$	$\frac{\chi_1 \neq 0 \text{ при } n \leq m-1}{\chi_1, \chi_2 \text{ лин. нез. при } n = m, m+1}$ $\chi_1 \neq -\chi_2 \text{ при } n \geq m+2$	$n \geq 3, m \geq 2$
7	$\begin{array}{c} \text{SL}_2 \times \text{Sp}_{2n} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathbb{F}^2 \oplus (\mathbb{F}^2 \otimes \mathbb{F}^{2n}) \end{array}$	$\chi_1, \chi_2 \text{ лин. нез.}$	$n \geq 2$
8	$\begin{array}{c} \text{SL}_n \times \text{SL}_2 \times \text{SL}_m \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ (\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^2) \oplus (\mathbb{F}^2 \otimes \mathbb{F}^m) \end{array}$	$\frac{\chi_1, \chi_2 \text{ лин. нез. при } n = m = 2}{\chi_2 \neq 0 \text{ при } n \geq 3 \text{ и } m = 2}$	$n \geq m \geq 2$
9	$\begin{array}{c} \text{SL}_n \times \text{SL}_2 \times \text{Sp}_{2m} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ (\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^2) \oplus (\mathbb{F}^2 \otimes \mathbb{F}^{2m}) \end{array}$	$\frac{\chi_1, \chi_2 \text{ лин. нез. при } n = 2}{\chi_2 \neq 0 \text{ при } n \geq 3}$	$n, m \geq 2$
10	$\begin{array}{c} \text{Sp}_{2n} \times \text{SL}_2 \times \text{Sp}_{2m} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ (\mathbb{F}^{2n} \otimes \mathbb{F}^2) \oplus (\mathbb{F}^2 \otimes \mathbb{F}^{2m}) \end{array}$	$\chi_1, \chi_2 \text{ лин. нез.}$	$n \geq m \geq 2$
11	$\begin{array}{c} \text{Sp}_{2n} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^{2n} \end{array}$	$\chi_1, \chi_2 \text{ лин. нез.}$	$n \geq 2$
12	$\begin{array}{c} \text{Spin}_8 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathbb{F}_+^8 \oplus \mathbb{F}_-^8 \end{array}$	$\chi_1, \chi_2 \text{ лин. нез.}$	

Поясним некоторые обозначения в табл. 3. Во втором столбце пара (K', V) размещена в двух уровнях: K' – в верхнем и V – в нижнем. При этом каждый

множитель группы K' действует диагонально на тех компонентах пространства V , с которыми он соединен. В строке 12 символами $\mathbb{F}_{\pm}^8$ обозначены пространства двух полуспинорных представлений группы Spin_8 .

Пусть V – некоторый K -модуль, для которого пара (K', V) с точностью до геометрической эквивалентности содержится в одной из таблиц – табл. 2 или табл. 3. Используя данные, содержащиеся в столбце “Условия на C ”, свяжем с V мультимножество (т.е. множество, в котором учитываются кратности элементов) $I(V)$, состоящее из нескольких характеров группы C , следующим образом:

- (1) $I(V) = \emptyset$, если условий на C нет;
- (2) $I(V) = \{\psi_1 - \psi_2\}$, если условие на C имеет вид “ $\psi_1 \neq \psi_2$ ” для некоторых $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{X}(C)$;
- (3) $I(V) = \{\chi_1, \chi_2\}$, если условие на C имеет вид “ χ_1, χ_2 лин. нез.”.

Тогда условие сферичности K -модуля V эквивалентно тому, что все характеры из $I(V)$ линейно независимы в $\mathfrak{X}(C)$.

Пусть V – произвольный K -модуль. Легко видеть, что существуют разложение $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_p$ в прямую сумму K -подмодулей (не обязательно простых) и связные полупростые нормальные подгруппы $K_1, \dots, K_p \subset K'$ (допускается, что некоторые из них тривиальны) со следующими свойствами:

- (1) W_i – строго неразложимый K -модуль при всех $i = 1, \dots, p$;
- (2) пара (K', V) геометрически эквивалентна паре

$$(K_1 \times \dots \times K_p, W_1 \oplus \dots \oplus W_p).$$

Приводимая ниже теорема дает критерий сферичности K -модуля V . Она является переформулировкой теоремы 7 работы [14]; см. также [15; теорема 2.6].

ТЕОРЕМА 5.3. *Во введенных выше обозначениях V является сферическим K -модулем тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- (1) W_i является сферическим K -модулем при всех $i = 1, \dots, p$;
- (2) все $|I(W_1)| + \dots + |I(W_p)|$ характеров, входящих в мультимножество $I(W_1) \cup \dots \cup I(W_p)$, линейно независимы в $\mathfrak{X}(C)$.

5.2. Классификация подгрупп Леви в $\text{GL}(V)$, действующих сферично на многообразиях V -флагов. Пусть G – произвольная связная редуктивная группа, $P, Q \subset G$ – параболические подгруппы и K – подгруппа Леви в P .

Следующая лемма известна специалистам, для удобства читателя мы приводим ее вместе с доказательством.

ЛЕММА 5.4. *Следующие условия эквивалентны:*

- (а) многообразие G/Q является K -сферическим;
- (б) многообразие $G/P \times G/Q$ является сферическим относительно диагонального действия группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что в группе G существует такая борелевская подгруппа B , что выполнены следующие условия:

- (1) множество BP открыто в G ;
- (2) группа $B_K = B \cap P$ является борелевской подгруппой в K .

Для действия $B : G/P$ группа B_K является в точности стабилизатором точки $o = eP$, а орбита $O = Bo \simeq B/B_K$ открыта. Рассмотрим в $G/P \times G/Q$ открытое подмножество $O \times G/Q$. Оно является однородным расслоением над B/B_K со слоем G/Q ; см. п. 4.2. Применяя следствие 4.3, мы находим, что наличие открытой B -орбиты в $O \times G/Q$ эквивалентно наличию открытой B_K -орбиты в G/Q , откуда и следует доказываемое утверждение.

Как уже упоминалось в § 1, имеется полная классификация всех G -сферических многообразий вида $G/P \times G/Q$. Ниже, используя лемму 5.4, мы переформулируем результаты этой классификации в случае $G = \mathrm{GL}(V)$ и тем самым перечислим все случаи, когда подгруппа Леви $K \subset \mathrm{GL}(V)$ действует сферично на многообразии V -флагов $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$ (см. теорему 5.5).

Пусть V – векторное пространство размерности d , а $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$ – нетривиальная композиция числа d , причем $d_1 \leq \dots \leq d_r$. Зафиксируем разложение

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$$

в прямую сумму подпространств, где $\dim V_i = d_i$ при всех $i = 1, \dots, r$. Положим

$$K_{\mathbf{d}} = \mathrm{GL}(V_1) \times \dots \times \mathrm{GL}(V_r) \subset \mathrm{GL}(V).$$

Обозначим через Q стабилизатор в группе $\mathrm{GL}(V)$ точки

$$(V_1, V_1 \oplus V_2, \dots, V_1 \oplus \dots \oplus V_r) \in \mathrm{Fl}_{\mathbf{d}}(V).$$

Ясно, что Q – параболическая подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$ и что $K_{\mathbf{d}}$ – подгруппа Леви в Q . Хорошо известно, что всякая подгруппа Леви в $\mathrm{GL}(V)$ сопряжена одной из подгрупп вида $K_{\mathbf{d}}$.

Следующая теорема вытекает из результатов работы [5]; см. также [7; следствие 1.3.A].

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s)$ – нетривиальная композиция числа d , причем $a_1 \leq \dots \leq a_s$. Многообразие $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$ является $K_{\mathbf{d}}$ -сферическим тогда и только тогда, когда пара композиций $(\mathbf{d}, \mathbf{a})$ содержится в табл. 4.

ТАБЛИЦА 4

№	$\mathbf{d}$	$\mathbf{a}$
1	(d_1, d_2)	(a_1, a_2)
2	$(2, d_2)$	(a_1, a_2, a_3)
3	(d_1, d_2, d_3)	$(2, a_2)$
4	(d_1, d_2)	$(1, a_2, a_3)$
5	$(1, d_2, d_3)$	(a_1, a_2)
6	$(1, d_2)$	$(a_1, \dots, a_s)$
7	$(d_1, \dots, d_r)$	$(1, a_2)$

§ 6. Доказательство теоремы 1.7

Мы разобьем доказательство теоремы 1.7 на несколько шагов. Как следует из предложения 3.9, первым шагом на пути доказательства теоремы 1.7 является описание всех сферических действий на многообразии $\mathrm{Gr}_2(V)$. Этому посвящены п. 6.1 (в случае простого K -модуля V) и п. 6.2 (в случае непростого K -модуля V). На следующем шаге мы классифицируем все сферические действия на произвольных грассманианах; см. п. 6.3. Наконец, в п. 6.4 мы перечисляем все сферические действия на многообразиях V -флагов, не являющихся грассманианами.

Напомним, что в формулировке теоремы 1.7 участвуют следующие объекты:

V – векторное пространство размерности d ;

K – связная редуктивная подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$;

C – связная компонента единицы центра группы K .

Далее, имеется разложение

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r \quad (6.1)$$

в прямую сумму простых K -подмодулей, причем для каждого $i = 1, \dots, r$ группа C действует в пространстве V_i при помощи характера χ_i .

Зафиксируем до конца этого параграфа все упомянутые выше объекты и обозначения.

6.1. Сферические действия на $\mathrm{Gr}_2(V)$ в случае простого K -модуля V . Целью этого пункта является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть $d \geq 4$ и V – простой K -модуль. Многообразие $\mathrm{Gr}_2(V)$ является K -сферическим тогда и только тогда, когда пара (K', V) с точностью до геометрической эквивалентности содержится в табл. 5.*

Таблица 5

№	K'	V	Примечание
1	SL_n	$\mathbb{F}^n$	$n \geq 4$
2	Sp_{2n}	$\mathbb{F}^{2n}$	$n \geq 2$
3	SO_n	$\mathbb{F}^n$	$n \geq 4$
4	Spin_7	$\mathbb{F}^8$	

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что, поскольку V – простой K -модуль, центр группы K действует тривиально на $\mathrm{Gr}_2(V)$. Поэтому многообразие $\mathrm{Gr}_2(V)$ является K -сферическим тогда и только тогда, когда оно является K' -сферическим.

Если $\mathrm{Gr}_2(V)$ – сферическое K' -многообразие, то в силу следствия 3.8 пространство V является сферическим $(K' \times \mathbb{F}^\times)$ -модулем. Тогда из теоремы 5.1 вытекает, что пара (K', V) с точностью до геометрической эквивалентности содержится в табл. 2.

Как уже упоминалось в § 1, всякое многообразие флагов группы SL_n является сферическим. Поэтому для всякого $n \geq 4$ многообразие $Gr_2(\mathbb{F}^n)$ является SL_n -сферическим.

Многообразие $Gr_2(\mathbb{F}^{2n})$ является Sp_{2n} -сферическим при $n \geq 2$ по предложению 4.8.

Многообразие $Gr_2(\mathbb{F}^n)$ является SO_n -сферическим при $n \geq 4$ по предложению 4.9.

Покажем, что многообразие $Gr_2(\mathbb{F}^8)$ является $Spin_7$ -сферическим. Известно (см. [25; табл. 6, строка 4] или [27; § 5, предложение 26]), что при естественном действии группы $Spin_7 \times GL_2$ в пространстве $\mathbb{F}^8 \otimes \mathbb{F}^2$ имеется открытая орбита, причем алгебра Ли стабилизатора любой точки этой орбиты изоморфна $\mathfrak{gl}_3$. Применив следствие 4.6, мы находим, что при действии группы $Spin_7$ на $Gr_2(\mathbb{F}^8)$ имеется открытая орбита O , причем алгебра Ли стабилизатора любой точки $x \in O$ по-прежнему изоморфна $\mathfrak{gl}_3$. Отсюда следует, что связная компонента единицы стабилизатора любой точки $x \in O$ изоморфна GL_3 . Хорошо известно (см., например, [28; табл. 1]), что GL_3 – сферическая подгруппа в $Spin_7$.

Теперь докажем, что многообразие $Gr_2(V)$ не является K' -сферическим для пар (K', V) в строках 4–9, 11–14 табл. 2.

Применив предложение 4.1, мы получаем следующее необходимое условие K' -сферичности многообразия $Gr_2(V)$:

$$\dim K' + \operatorname{rk} K' \geq 4d - 8. \quad (6.2)$$

Непосредственная проверка показывает, что неравенство (6.2) не выполнено для пар (K', V) из строк 4, 5, 11–14 табл. 2.

ЛЕММА 6.2. Пусть L – связная редуктивная подгруппа в $SL_n \times SL_m$, где $n \geq m \geq 2$. В этом случае многообразие $Gr_2(\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^m)$ является L -сферическим тогда и только тогда, когда $n = m = 2$ и $L = SL_2 \times SL_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n = m = 2$ и $L = SL_2 \times SL_2$, то пара $(L, \mathbb{F}^2 \otimes \mathbb{F}^2)$ геометрически эквивалентна паре $(SO_4, \mathbb{F}^4)$. По предложению 4.9 группа SO_4 действует сферично на $Gr_2(\mathbb{F}^4)$.

Теперь докажем, что L -сферичность многообразия $Gr_2(\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^m)$ может иметь место только при $n = m = 2$. Очевидно, что если многообразие $Gr_2(\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^m)$ является L -сферическим, то оно является и $(SL_n \times SL_m)$ -сферическим. Поэтому требуемое утверждение достаточно доказать в случае $L = SL_n \times SL_m$.

Дальнейшее рассмотрение разобьем на два случая.

Случай 1. $n > 2m$. Покажем, что в этом случае многообразие $Gr_2(\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^m)$ не является $(SL_n \times SL_m)$ -сферическим. При $k = n, m$ обозначим через T_k группу всех верхнетреугольных матриц в GL_k и положим $B_k = T_k \cap SL_k$, так что B_k – борелевская подгруппа в SL_k . В силу предложения 4.4 достаточно доказать, что в пространстве $W = \mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^m \otimes \mathbb{F}^2$ нет открытой орбиты для действия группы $B_n \times B_m \times GL_2$, или, эквивалентно, для действия группы $T_n \times T_m \times SL_2$. В свою очередь последнее будет выполнено, если мы докажем, что коразмерность орбиты общего положения для действия $T_n \times T_m$ на W не меньше 4.

Реализуем W как множество пар $(n \times m)$ -матриц. Тогда действие $T_n \times T_m : W$ описывается формулой $((T, U), (P, Q)) \mapsto (TPU^\top, TQU^\top)$, где $(T, U) \in T_n \times T_m$, $(P, Q) \in W$. Несложно проверить, что действием группы $T_n \times T_m$ пару (P, Q) из подходящего открытого подмножества в W можно привести к однозначно определенному каноническому виду (P', Q') , где

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad Q' = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ 1 & * & 1 & \\ & & & * \end{pmatrix}.$$

(Каждая из матриц P', Q' разбита на три блока: верхний состоит из $n - 2m$ верхних строк, средний – из m следующих строк и нижний – из m последних строк.) Отсюда следует, что коразмерность $(T_n \times T_m)$ -орбиты общего положения в W равна $m^2 + (m - 1)(m - 2)/2 \geq m^2 \geq 4$, что и требовалось.

Случай 2. $m \leq n \leq 2m$. Пусть $n = 2m - l$, где $0 \leq l \leq m$. Если многообразие $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^m)$ является $(\mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_m)$ -сферическим, то, применив неравенство (6.2), получим неравенство

$$(2m - l)^2 - 1 + m^2 - 1 + (2m - l) - 1 + m - 1 \geq 4(2m - l)m - 8,$$

которое после преобразований приобретает вид

$$3m^2 - 3m - 4 \leq l^2 - l. \quad (6.3)$$

Поскольку $0 \leq l \leq m$, из неравенства (6.3) вытекает, что $3m^2 - 3m - 4 \leq m^2$, откуда $2m^2 - 3m - 4 \leq 0$ и, следовательно, $m = 2$. Тогда $l = 0, 1$ или $l = 2$, но первые два случая отпадают в силу неравенства (6.3). Таким образом, $l = 2$, т.е. $n = 2$.

Осталось показать, что если $L \subset \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$ – собственная подгруппа, то действие $L : \mathrm{Gr}_2(\mathbb{F}^2 \otimes \mathbb{F}^2)$ не является сферическим. Действительно, в этом случае имеем $\mathrm{rk} L \leq 2$ и $\dim L \leq 5$, поэтому неравенство (6.2) не выполнено.

Лемма доказана.

Из леммы 6.2 незамедлительно вытекает, что многообразие $\mathrm{Gr}_2(V)$ не является K' -сферическим для пар (K', V) в строках 6–9 табл. 2, чем и завершается доказательство теоремы 6.1.

6.2. Сферические действия на $\mathrm{Gr}_2(V)$ в случае непростого K -модуля V . В этом пункте считаем, что $r \geq 2$. Основным результатом пункта является теорема 6.5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. *Предположим, что $\mathrm{Gr}_2(V)$ – сферическое K -многообразие. Тогда для всякого $i = 1, \dots, r$ пара (K', V_i) геометрически эквивалентна либо $(\mathrm{SL}_n, \mathbb{F}^n)$ ($n \geq 1$), либо $(\mathrm{Sp}_{2n}, \mathbb{F}^{2n})$ ($n \geq 2$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 4.21 для всякого $i = 1, \dots, r$ пространство $V_i \otimes \mathbb{F}^2$ является сферическим $(K \times \mathrm{GL}_2)$ -модулем. Доказательство завершается применением теоремы 5.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. *Предположим, что $\mathrm{Gr}_2(V)$ – сферическое K -многообразие. Тогда всякая простая нормальная подгруппа в K' действует нетривиально не более чем на одном слагаемом разложения (6.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует простая нормальная подгруппа $K_0 \subset K'$, действующая нетривиально на двух различных слагаемых разложения (6.1). Без ограничения общности будем считать, что K_0 действует нетривиально на V_1 и V_2 . (Заметим, что при этом $\dim V_1 \geq 2$ и $\dim V_2 \geq 2$.) Применив предложение 4.18(а), получаем, что многообразие $\mathrm{Gr}_2(V_1 \oplus V_2)$ является K -сферическим. Воспользовавшись предложением 6.3, находим, что пара $(K', V_1 \oplus V_2)$ с точностью до геометрической эквивалентности содержится в табл. 6, где во всех случаях предполагается, что K' действует диагонально на V_1 и V_2 .

ТАБЛИЦА 6

№	K'	V_1	V_2	Примечание
1	SL_n	$\mathbb{F}^n$	$\mathbb{F}^n$	$n \geq 2$
2	SL_n	$\mathbb{F}^n$	$(\mathbb{F}^n)^*$	$n \geq 3$
3	Sp_{2n}	$\mathbb{F}^{2n}$	$\mathbb{F}^{2n}$	$n \geq 2$

В каждом случае из табл. 6 положим $Z = \mathrm{Gr}_2(V_1 \oplus V_2)$, $X = \mathrm{Gr}_2(V_1)$ и покажем, что многообразие Z не является K -сферическим. Для этого мы рассмотрим все три случая по отдельности.

Случай 1. Если $n = 2$, то по следствию 4.20 условие K -сферичности многообразия Z эквивалентно условию сферичности $(C \times K')$ -модуля $V_1^* \otimes V_2$, где K действует диагонально, а C действует умножением на характер $\chi_2 - \chi_1$. Отсюда следует, что пространство $\mathbb{F}^2 \otimes \mathbb{F}^2$ является сферическим $(\mathrm{SL}_2 \times \mathbb{F}^\times)$ -модулем, где SL_2 действует диагонально, а $\mathbb{F}^\times$ действует скалярно. Последнее неверно, поскольку указанный модуль не удовлетворяет неравенству (4.1).

Далее считаем, что $n \geq 3$. Применив предложение 4.13 к многообразию X и затем предложение 4.18(b) к многообразиям Z и X , мы находим точку $[W] \in X$ и группу $L \subset (K')_{[W]}$ со следующими свойствами:

- (1) $L \simeq \mathrm{S}(\mathrm{L}_2 \times \mathrm{L}_{n-2})$;
- (2) пара (L, W) геометрически эквивалентна паре $(\mathrm{GL}_2, \mathbb{F}^2)$;
- (3) пара (L, V_2) геометрически эквивалентна паре $(\mathrm{S}(\mathrm{L}_2 \times \mathrm{L}_{n-2}), \mathbb{F}^2 \oplus \mathbb{F}^{n-2})$;
- (4) K -сферичность многообразия Z эквивалентна сферичности $(C \times L)$ -модуля $W^* \otimes V_2$, где L действует диагонально, а C действует умножением на характер $\chi_2 - \chi_1$.

С учетом изоморфизмов SL_2 -модулей $(\mathbb{F}^2)^* \simeq \mathbb{F}^2$ и $\mathbb{F}^2 \otimes \mathbb{F}^2 \simeq \mathrm{S}^2\mathbb{F}^2 \oplus \mathbb{F}^1$ из сферичности $(C \times L)$ -модуля $W^* \otimes V_2$ выводим, что пространство

$$\mathrm{S}^2\mathbb{F}^2 \oplus (\mathbb{F}^2 \otimes \mathbb{F}^{n-2})$$

является сферическим $(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_{n-2} \times (\mathbb{F}^\times)^2)$ -модулем, где SL_2 действует диагонально на $\mathrm{S}^2\mathbb{F}^2$ и $\mathbb{F}^2$, SL_{n-2} действует на $\mathbb{F}^{n-2}$, а $(\mathbb{F}^\times)^2$ действует скалярно на каждом из прямых слагаемых. По теореме 5.2 указанный модуль не является сферическим.

Случай 2. Рассуждая аналогично случаю 1 при $n \geq 3$, из условия K -сферичности многообразия Z мы выводим, что пространство

$$\mathrm{S}^2\mathbb{F}^2 \oplus (\mathbb{F}^2 \otimes (\mathbb{F}^{n-2})^*)$$

является сферическим $(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_{n-2} \times (\mathbb{F}^\times)^2)$ -модулем, где SL_2 действует диагонально на $\mathrm{S}^2\mathbb{F}^2$ и $\mathbb{F}^2$, SL_{n-2} действует на $(\mathbb{F}^{n-2})^*$, а $(\mathbb{F}^\times)^2$ действует скалярно на каждом из прямых слагаемых. По теореме 5.2 указанный модуль не является сферическим.

Случай 3. Если многообразие Z является K -сферическим, то Z является и $(C \times \mathrm{SL}_{2n})$ -сферическим (где SL_{2n} действует на $V_1 \oplus V_2$ диагонально). Как было показано в случае 1, последнее неверно.

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть $d \geq 4$ и $r \geq 2$. Многообразие $\mathrm{Gr}_2(V)$ является K -сферическим тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (1) с точностью до геометрической эквивалентности пара (K', V) содержится в табл. 7;
- (2) группа C удовлетворяет условиям, перечисленным в четвертом столбце табл. 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $U = V_2 \oplus \dots \oplus V_r$. Пусть K_1 – образ группы K' в $\mathrm{GL}(V_1)$, а K_2 – ее образ в $\mathrm{GL}(U)$.

Если многообразие $\mathrm{Gr}_2(V)$ является сферическим относительно действия группы K , то оно является сферическим и относительно действия группы $\mathrm{GL}(V_1) \times \dots \times \mathrm{GL}(V_r)$. Тогда из теоремы 5.5 вытекает, что $r \leq 3$. Применяя предложения 6.3 и 6.4, мы находим, что пара (K', V) с точностью до геометрической эквивалентности содержится в табл. 7. Дальнейшие рассуждения в каждом из случаев табл. 7 однотипны; ключевые моменты рассуждений собраны в табл. 8. Сначала, применив нужную комбинацию утверждений 4.13, 4.14, 4.18(b) и 4.20 (см. столбец “Ссылки”) к многообразиям $Z = \mathrm{Gr}_2(V)$ и $X = \mathrm{Gr}_2(V_1)$, мы находим связную редуктивную подгруппу $L \subset K$ и L -модуль R со следующим свойством: Z является сферическим K -многообразием тогда и только тогда, когда R является сферическим L -модулем. Затем сферичность L -модуля R проверяется по теоремам 5.1 и 5.2. Так как группа C действует тривиально на X , то $C \subset L$. Поэтому для описания действия $L : R$ достаточно описать действия $(L \cap K') : R$ и $C : R$. Во всех случаях имеем $L \cap K' = M \times K_2$ для некоторой подгруппы $M \subset K_1$. При этом $R = W^* \otimes U$, где M действует на W^* , а K_2 действует на U . С точностью до геометрической

ТАБЛИЦА 7

№	K'	V	Условия на C	Примечание
1	$SL_n \times SL_m$	$\mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^m$	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $n = m = 2$	$n \geq m \geq 1,$ $n + m \geq 4$
2	$Sp_{2n} \times SL_m$	$\mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^m$	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $m = 2$	$n \geq 2, m \geq 1$
3	$Sp_{2n} \times Sp_{2m}$	$\mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^{2m}$	$\chi_1 \neq \chi_2$	$n \geq m \geq 2$
4	$SL_n \times SL_m \times SL_l$	$\mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^m \oplus \mathbb{F}^l$	$\chi_2 - \chi_1, \chi_3 - \chi_1$ лин. нез. при $n = 2$ $\chi_2 \neq \chi_3$ при $n \geq 3, m \leq 2$	$n \geq m \geq l \geq 1,$ $n \geq 2$
5	$Sp_{2n} \times SL_m \times SL_l$	$\mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^m \oplus \mathbb{F}^l$	$\chi_2 - \chi_1, \chi_3 - \chi_1$ лин. нез. при $m \leq 2$ $\chi_1 \neq \chi_3$ при $m \geq 3, l \leq 2$	$n \geq 2,$ $m \geq l \geq 1$
6	$Sp_{2n} \times Sp_{2m} \times SL_l$	$\mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^{2m} \oplus \mathbb{F}^l$	$\chi_2 - \chi_1, \chi_3 - \chi_1$ лин. нез. при $l \leq 2$ $\chi_1 \neq \chi_2$ при $l \geq 3$	$n \geq m \geq 2,$ $l \geq 1$
7	$Sp_{2n} \times Sp_{2m} \times Sp_{2l}$	$\mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^{2m} \oplus \mathbb{F}^{2l}$	$\chi_1 - \chi_2, \chi_1 - \chi_3$ лин. нез.	$n \geq m \geq l \geq 2$

ТАБЛИЦА 8

Случай	Ссылки	(M, W)
1, $n = m = 2$	4.20	$(SL_2, \mathbb{F}^2)$
1, $n \geq 3$	4.13 , 4.18(b)	$(GL_2, \mathbb{F}^2)$
2	4.14 , 4.18(b)	$(SL_2, \mathbb{F}^2)$
3	4.14 , 4.18(b)	$(SL_2, \mathbb{F}^2)$
4, $n = 2$	4.20	$(SL_2, \mathbb{F}^2)$
4, $n \geq 3$	4.13 , 4.18(b)	$(GL_2, \mathbb{F}^2)$
5	4.14 , 4.18(b)	$(SL_2, \mathbb{F}^2)$
6	4.14 , 4.18(b)	$(SL_2, \mathbb{F}^2)$
7	4.14 , 4.18(b)	$(SL_2, \mathbb{F}^2)$

эквивалентности пара (M, W) для каждого случая указана в третьем столбце табл. 8. Группа C действует на W так же, как и на V_1 , а ее действие на U совпадает с исходным.

6.3. Сферические действия на грассманианах. В этом пункте мы завершим описание сферических действий на грассманианах, начатое в пп. 6.1, 6.2. Основным результатом пункта является

ТЕОРЕМА 6.6. Пусть $d \geq 6$ и $3 \leq k \leq d/2$. Многообразие $\text{Gr}_k(V)$ является K -сферическим тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (1) с точностью до геометрической эквивалентности пара (K', V) содержится в табл. 9;
- (2) число k удовлетворяет условиям, перечисленным в четвертом столбце табл. 9;
- (3) группа C удовлетворяет условиям, перечисленным в пятом столбце табл. 9.

ТАБЛИЦА 9

№	K'	V	Условия на k	Условия на C	Примечание
1	SL_n	$\mathbb{F}^n$			$n \geq 6$
2	Sp_{2n}	$\mathbb{F}^{2n}$			$n \geq 3$
3	SO_n	$\mathbb{F}^n$			$n \geq 6$
4	$\text{SL}_n \times \text{SL}_m$	$\mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^m$		$\chi_1 \neq \chi_2$ при $n = m = k$	$n \geq m$, $n + m \geq 6$
5	Sp_{2n}	$\mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^1$			$n \geq 3$
6	$\text{Sp}_{2n} \times \text{SL}_m$	$\mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^m$	$k = 3$	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $m \leq 3$	$n, m \geq 2$
7	$\text{Sp}_4 \times \text{SL}_m$	$\mathbb{F}^4 \oplus \mathbb{F}^m$	$k \geq 4$	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $k = m = 4$	$m \geq 4$
8	$\text{SL}_n \times \text{SL}_m$	$\mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^m \oplus \mathbb{F}^1$		$\chi_2 - \chi_1, \chi_3 - \chi_1$ лин. нез. при $k = n$ $\chi_2 \neq \chi_3$ при $m \leq k < n$	$n \geq m \geq 1$, $n + m \geq 5$

В четвертом столбце табл. 9 пустые ячейки означают, что k может быть любым числом, удовлетворяющим неравенствам $3 \leq k \leq d/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.6. Сначала рассмотрим случай $r = 1$, т.е. когда V – простой K -модуль. В этой ситуации центр группы K действует тривиально на $\text{Gr}_k(V)$, и поэтому многообразие $\text{Gr}_k(V)$ является K -сферическим тогда и только тогда, когда оно является K' -сферическим.

Если многообразие $\text{Gr}_k(V)$ является K' -сферическим, то в силу предложения 3.9 и теоремы 6.1 пара (K', V) с точностью до геометрической эквивалентности содержится в табл. 5.

Так как всякое многообразие флагов группы SL_n является SL_n -сферическим, то и $\text{Gr}_k(\mathbb{F}^n)$ таково.

При $n \geq 3$ и $3 \leq k \leq n$ многообразие $\text{Gr}_k(\mathbb{F}^{2n})$ является Sp_{2n} -сферическим по предложению 4.8.

При $n \geq 6$ и $3 \leq k \leq n/2$ многообразие $\text{Gr}_k(\mathbb{F}^n)$ является SO_n -сферическим по предложению 4.9.

При $3 \leq k \leq 4$ многообразие $\text{Gr}_k(\mathbb{F}^8)$ не является Spin_7 -сферическим, потому что в этом случае не выполнено неравенство (4.1).

Теперь рассмотрим случай $r \geq 2$. По предложению 3.9 из K -сферичности многообразия $\text{Gr}_k(V)$ следует K -сферичность многообразия $\text{Gr}_2(V)$. Применяя теоремы 6.5 и 5.5, мы находим, что с точностью до геометрической эквивалентности пара (K', V) содержится в табл. 10.

ТАБЛИЦА 10

№	K'	V	Примечание
1	$\text{SL}_n \times \text{SL}_m$	$\mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^m$	$n \geq m \geq 1, n + m \geq 6$
2	$\text{Sp}_{2n} \times \text{SL}_m$	$\mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^m$	$n \geq 2, m \geq 1, 2n + m \geq 6$
3	$\text{Sp}_{2n} \times \text{Sp}_{2m}$	$\mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^{2m}$	$n \geq m \geq 2$
4	$\text{SL}_n \times \text{SL}_m$	$\mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^m \oplus \mathbb{F}^1$	$n \geq m \geq 1, n + m \geq 5$
5	$\text{Sp}_{2n} \times \text{SL}_m$	$\mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^m \oplus \mathbb{F}^1$	$n \geq 2, m \geq 1$
6	$\text{Sp}_{2n} \times \text{Sp}_{2m}$	$\mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^{2m} \oplus \mathbb{F}^1$	$n \geq m \geq 2$

ТАБЛИЦА 11

№	(K_1, V_1)	Ссылки	(M, W)
1	$(\text{SL}_n, \mathbb{F}^n),$ $k = n$	4.20	$(\text{SL}_n, \mathbb{F}^n)$
2	$(\text{SL}_n, \mathbb{F}^n),$ $k < n$	4.13, 4.18(b)	$(\text{GL}_k, \mathbb{F}^k)$
3	$(\text{Sp}_{2n}, \mathbb{F}^{2n}),$ $k \leq n, k = 2l$	4.14, 4.18(b)	$(\underbrace{\text{SL}_2 \times \dots \times \text{SL}_2}_l, \underbrace{\mathbb{F}^2 \oplus \dots \oplus \mathbb{F}^2}_l)$
4	$(\text{Sp}_{2n}, \mathbb{F}^{2n}),$ $k \leq n, k = 2l + 1$	4.16, 4.18(b)	$(\mathbb{F}^\times \times \underbrace{\text{SL}_2 \times \dots \times \text{SL}_2}_l, \mathbb{F}^1 \oplus \underbrace{\mathbb{F}^2 \oplus \dots \oplus \mathbb{F}^2}_l)$
5	$(\text{Sp}_{2n}, \mathbb{F}^{2n}),$ $n < k < 2n,$ $2n - k = 2l$	4.15, 4.18(b)	$(\underbrace{\text{SL}_2 \times \dots \times \text{SL}_2}_l \times \text{Sp}_{2n-4l},$ $\underbrace{\mathbb{F}^2 \oplus \dots \oplus \mathbb{F}^2}_l \oplus \mathbb{F}^{2n-4l})$
6	$(\text{Sp}_{2n}, \mathbb{F}^{2n}),$ $n < k < 2n,$ $2n - k = 2l + 1$	4.17, 4.18(b)	$(\mathbb{F}^\times \times \underbrace{\text{SL}_2 \times \dots \times \text{SL}_2}_l \times \text{Sp}_{2n-4l-2},$ $\mathbb{F}^1 \oplus \underbrace{\mathbb{F}^2 \oplus \dots \oplus \mathbb{F}^2}_l \oplus \mathbb{F}^{2n-4l-2})$
7	$(\text{Sp}_{2n}, \mathbb{F}^{2n}),$ $k = 2n$	4.20	$(\text{Sp}_{2n}, \mathbb{F}^{2n})$

В каждом случае из табл. 10 обозначим через K_1 (соответственно K_2) первый (соответственно второй) множитель группы K' . Также положим

$$U = V_2 \oplus \cdots \oplus V_r.$$

С точностью до изменения порядка множителей группы K (вместе с одновременной перестановкой первого и второго слагаемых пространства V) для пары (K_1, V_1) реализуется по меньшей мере один из случаев, перечисленных во втором столбце табл. 11. Во всех этих случаях дальнейшие рассуждения однотипны. Сначала, применив нужную комбинацию утверждений 4.13–4.18, 4.20 (см. третий столбец в табл. 11) к многообразиям $Z = \mathrm{Gr}_k(V)$ и $X = \mathrm{Gr}_k(V_1)$, мы находим связную редуктивную подгруппу $L \subset K$ и L -модуль R со следующим свойством: Z является сферическим K -многообразием тогда и только тогда, когда R является сферическим L -модулем. Затем сферичность L -модуля R проверяется по теоремам 5.1, 5.2 и 5.3. Так как группа C действует тривиально на X , то $C \subset L$. Поэтому для описания действия $L : R$ достаточно описать действия $(L \cap K') : R$ и $C : R$. Во всех случаях имеем $L \cap K' = M \times K_2$ для некоторой подгруппы $M \subset K_1$. При этом $R = W^* \otimes U$, где M действует на W^* , а K_2 действует на U . С точностью до геометрической эквивалентности пара (M, W) для каждого случая указана в четвертом столбце табл. 11. Группа C действует на W так же, как и на V_1 , а ее действие на U совпадает с исходным.

6.4. Завершение классификации. В этом пункте мы классифицируем все сферические действия на многообразиях V -флагов, не являющихся грассманианами (см. теорему 6.7). Тем самым мы завершим доказательство теоремы 1.7.

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s)$ – композиция числа d , причем $a_1 \leq \dots \leq a_s$ и $s \geq 3$ (последнее в точности означает, что многообразие $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$ не является грассманианом).

ТЕОРЕМА 6.7. *Многообразие $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)$ является K -сферическим тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- (1) пара (K', V) , рассматриваемая с точностью до геометрической эквивалентности, и набор $(a_1, \dots, a_{s-1})$ таковы, как в одном из случаев табл. 12;
- (2) группа C удовлетворяет условиям, перечисленным в пятом столбце табл. 12.

Для доказательства теоремы 6.7 нам потребуются несколько вспомогательных утверждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.8. *Пусть $n \geq 3$, $V = \mathbb{F}^{2n}$, $K = \mathrm{Sp}_{2n}$ и $2 \leq k \leq n-1$. Тогда многообразие $\mathrm{Fl}(1, k; V)$ является K -сферическим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Z = \mathrm{Fl}(1, k; V)$, $X = \mathbb{P}(V)$ и рассмотрим естественный K -эквивариантный морфизм $\varphi : Z \rightarrow X$. Воспользовавшись предложением 4.16 и затем определением 4.10, мы находим, что существуют такая

ТАБЛИЦА 12

№	K'	V	$(a_1, \dots, a_{s-1})$	Условия на C	Примечание
1	SL_n	$\mathbb{F}^n$	$(a_1, \dots, a_{s-1})$		$n \geq 3$
2	Sp_{2n}	$\mathbb{F}^{2n}$	$(1, a_2)$		$n \geq 2$
3	Sp_{2n}	$\mathbb{F}^{2n}$	$(1, 1, 1)$		$n \geq 2$
4	SL_n	$\mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^1$	$(a_1, \dots, a_{s-1})$	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $s = n + 1$	$n \geq 2$
5	$\mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_m$	$\mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^m$	$(1, a_2)$	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $n = 1 + a_2$	$n \geq m \geq 2$
6	$\mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_2$	$\mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^2$	(a_1, a_2)	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $n = 4$ и $a_1 = a_2 = 2$	$n \geq 4,$ $a_1 \geq 2$
7	$\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{SL}_m$	$\mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^m$	$(1, 1)$	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $m \leq 2$	$n \geq 2,$ $m \geq 1$
8	$\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_{2m}$	$\mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^{2m}$	$(1, 1)$	$\chi_1 \neq \chi_2$	$n \geq m \geq 2$

точка $[W] \in X$ и такая связная редуктивная подгруппа $L \subset K_{[W]}$, что выполнены следующие условия:

- (1) пара $(L, V/W)$ геометрически эквивалентна паре $(\mathbb{F}^\times \times \mathrm{Sp}_{2n-2}, \mathbb{F}^1 \oplus \mathbb{F}^{2n-2})$;
- (2) K -сферичность многообразия Z эквивалентна L -сферичности многообразия $\varphi^{-1}([W]) \simeq \mathrm{Gr}_k(V/W)$.

По теоремам 6.5 и 6.6 многообразие $\mathrm{Gr}_k(V/W)$ является L -сферическим, чем и завершается доказательство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.9. Пусть $n \geq 3$, $V = \mathbb{F}^{2n}$ и $K = \mathrm{Sp}_{2n}$. Тогда многообразие $\mathrm{Fl}(2, 2; V)$ не является K -сферическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Z = \mathrm{Fl}(2, 2; V)$, $X = \mathrm{Gr}_2(V)$ и рассмотрим естественный K -эквивариантный морфизм $\varphi: Z \rightarrow X$. Применив предложение 4.14 и приняв во внимание определение 4.10, мы находим, что существуют точка $[W] \in X$ и связная редуктивная подгруппа $L \subset K_{[W]}$, для которых выполнены следующие условия:

- (1) пара $(L, V/W)$ геометрически эквивалентна паре

$$(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Sp}_{2n-4}, \mathbb{F}^2 \oplus \mathbb{F}^{2n-4});$$

- (2) K -сферичность многообразия Z эквивалентна L -сферичности многообразия $\varphi^{-1}([W]) \simeq \mathrm{Gr}_2(V/W)$.

По теореме 6.5 многообразие $\mathrm{Gr}_2(V/W)$ не является L -сферическим, чем и завершается доказательство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.10. Пусть $n \geq 2$, $m \geq 1$, $V_1 = \mathbb{F}^{2n}$, $V_2 = \mathbb{F}^m$, $V = V_1 \oplus V_2$, $K_1 = \mathrm{Sp}_{2n}$, $K_2 = \mathrm{GL}_m$ и $K = K_1 \times K_2$. Тогда многообразие $\mathrm{Fl}(1, 2; V)$ не является K -сферическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Z = \mathrm{Fl}(1, 2; V)$ и $X = \mathrm{Gr}_3(V_1)$. Применив предложение 4.16 (при $n \geq 3$) или следствие 4.17 (при $n = 2$) к многообразию X и затем предложение 4.22 к многообразиям Z и X , мы находим, что

существуют точка $[W] \in X$ и связная редуктивная подгруппа $L \subset K_{[W]}$ со следующими свойствами:

- (1) $L = L_1 \times K_2$, где $L_1 \subset K_1$;
- (2) $L_1 \simeq \mathbb{F}^\times \times \mathrm{SL}_2$ при $2 \leq n \leq 3$ и $L_1 \simeq \mathbb{F}^\times \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Sp}_{2n-6}$ при $n \geq 4$;
- (3) пара (L_1, W) геометрически эквивалентна паре $(\mathbb{F}^\times \times \mathrm{SL}_2, \mathbb{F}^1 \oplus \mathbb{F}^2)$;
- (4) K -сферичность многообразия Z эквивалентна L -сферичности многообразия $(W^* \otimes V_2) \times \mathbb{P}(W)$, где L_1 действует диагонально на W^* и $\mathbb{P}(W)$, а K_2 действует на V_2 .

Легко видеть, что L -сферичность многообразия $(W^* \otimes V_2) \times \mathbb{P}(W)$ эквивалентна сферичности $(L_1 \times K_2 \times \mathbb{F}^\times)$ -модуля $(W^* \otimes V_2) \oplus W$, где L_1 действует диагонально на W^* и W , K_2 действует на V_2 , а $\mathbb{F}^\times$ скалярно действует на слагаемом W . Применяя теорему 5.2, мы получаем, что указанный модуль не является сферическим, чем и завершается доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.7. На протяжении доказательства мы будем без лишних пояснений пользоваться описанием частичного порядка $\preceq$ на множестве $\mathcal{F}(\mathrm{GL}(V))/\sim$ (см. следствие 3.6, а также п. 3.3) и теоремой 1.4.

Поскольку многообразие $\mathrm{Fl}_a(V)$ не является грассманианом, имеем

$$[\mathrm{Fl}_a(V)] \succ [\mathrm{Fl}(1, 1; V)].$$

Поэтому из K -сферичности многообразия $\mathrm{Fl}_a(V)$ следует K -сферичность многообразия $\mathrm{Fl}(1, 1; V)$. Следующее предложение дает полную классификацию пар (K, V) , для которых K действует сферично на $\mathrm{Fl}(1, 1; V)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.11. *При $d \geq 3$ многообразие $\mathrm{Fl}(1, 1; V)$ является K -сферическим тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- (1) *с точностью до геометрической эквивалентности пара (K', V) содержится в табл. 13;*
- (2) *группа C удовлетворяет условиям, перечисленным в четвертом столбце табл. 13.*

ТАБЛИЦА 13

№	K'	V	Условия на C	Примечание
1	SL_n	$\mathbb{F}^n$		$n \geq 3$
2	Sp_{2n}	$\mathbb{F}^{2n}$		$n \geq 2$
3	SL_n	$\mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^1$	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $n = 2$	$n \geq 2$
4	$\mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_m$	$\mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^m$	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $n = m = 2$	$n \geq m \geq 2$
5	$\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{SL}_m$	$\mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^m$	$\chi_1 \neq \chi_2$ при $m \leq 2$	$n \geq 2, m \geq 1$
6	$\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_{2m}$	$\mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^{2m}$	$\chi_1 \neq \chi_2$	$n, m \geq 2$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 4.5 действие $K : \mathrm{Fl}(1, 1; V)$ является сферическим тогда и только тогда, когда пространство $V \otimes \mathbb{F}^2$ является сферическим $(K \times \mathrm{GL}_2)$ -модулем. Требуемый результат теперь вытекает из теорем 5.1 и 5.2.

Ввиду предложения 6.11 для завершения доказательства теоремы 6.7 остается в каждом случае из табл. 13 найти все K -сферические многообразия V -флагов X с условием $\llbracket X \rrbracket \succ \llbracket \text{Fl}(1, 1; V) \rrbracket$. Далее мы рассмотрим каждый из этих случаев по отдельности.

Случай 1. $K' = \text{SL}_n, V = \mathbb{F}^n$. Имеем $\llbracket X \rrbracket \preccurlyeq \llbracket \text{Fl}_{\mathbf{b}}(V) \rrbracket$, где $\mathbf{b} = (1, \dots, 1)$. По следствию 4.5 и теореме 5.1 многообразие $\text{Fl}_{\mathbf{b}}(V)$ является K -сферическим, поэтому и X является K -сферическим.

Случай 2. $K' = \text{Sp}_{2n}, V = \mathbb{F}^{2n}$. Если $s = 3$ и $a_1 = 1$, то X является K -сферическим по предложению 6.8. Если $s = 3$ и $a_1 \geq 2$, то $\llbracket X \rrbracket \succcurlyeq \llbracket \text{Fl}(2, 2; V) \rrbracket$, и тогда X не является K -сферическим по предложению 6.9. Если $s = 4$ и $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, то X является K -сферическим по следствию 4.5 и теореме 5.1. Если $s = 4$ и $a_3 \geq 2$, то $\llbracket X \rrbracket \succcurlyeq \llbracket \text{Fl}(2, 2; V) \rrbracket$, и тогда X не является K -сферическим по предложению 6.9. Далее считаем, что $s \geq 5$. Тогда $\llbracket X \rrbracket \succcurlyeq \llbracket \text{Fl}(1, 1, 1, 1; V) \rrbracket$. Многообразие $\text{Fl}(1, 1, 1, 1; V)$ не является K -сферическим по следствию 4.5 и теореме 5.1, поэтому и X не является K -сферическим.

Случай 3. $K' = \text{SL}_n, V = \mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^1$. Если $s = n + 1$, т.е. $\mathbf{a} = (1, \dots, 1)$, то по следствию 4.5 и теореме 5.2 многообразие X является K -сферическим при условии $\chi_1 \neq \chi_2$. Далее считаем, что $s \leq n$. Тогда $\llbracket X \rrbracket \preccurlyeq \llbracket \text{Fl}_{\mathbf{b}}(V) \rrbracket$, где $\mathbf{b} = (1, \dots, 1, 2)$. По следствию 4.5 и теореме 5.2 многообразие $\text{Fl}_{\mathbf{b}}(V)$ является K' -сферическим, поэтому X является K -сферическим.

Случай 4. $K' = \text{SL}_n \times \text{SL}_m, V = \mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^m, n \geq m \geq 2$. Положим $K_1 = \text{SL}_n, K_2 = \text{SL}_m, V_1 = \mathbb{F}^n, V_2 = \mathbb{F}^m$. Если $s \geq 4$, то $\llbracket X \rrbracket \succcurlyeq \llbracket \text{Fl}(1, 1, 1; V) \rrbracket$. По следствию 4.5 и теореме 5.2 многообразие $\text{Fl}(1, 1, 1; V)$ не является K -сферическим, поэтому и X не является K -сферическим. Далее будем считать, что $s = 3$. Положим $k = a_1 + a_2$. Рассмотрим следующие два подслучая: $a_1 = 1$ и $a_1 \geq 2$.

Подслучай 4.1. $a_1 = 1$. Тогда $k \leq n$. В силу предложений 4.13 и 4.22 существуют точка $[W] \in \text{Gr}_k(V_1)$ и подгруппа $L \subset (K_1)_{[W]}$ со следующими свойствами:

(1) пара (L, W) геометрически эквивалентна паре $(\text{GL}_k, \mathbb{F}^k)$ при $k < n$ и паре $(\text{SL}_k, \mathbb{F}^k)$ при $k = n$;

(2) K -сферичность многообразия X эквивалентна $(C \times L \times K_2)$ -сферичности многообразия $(W^* \otimes V_2) \times \mathbb{P}(W)$, где L действует диагонально на W^* и W , K_2 действует на V_2 , а C действует на W^* , V_2 и W умножением на характер $-\chi_1, \chi_2$ и χ_1 соответственно.

Из свойства (2) следует, что K -сферичность многообразия X эквивалентна сферичности $(C \times L \times K_2 \times \mathbb{F}^\times)$ -модуля $(W^* \otimes V_2) \oplus W$, где C, L и K_2 действуют так же, как описано в (2), а $\mathbb{F}^\times$ скалярно действует на слагаемом W . Применяя теорему 5.2, мы находим, что указанный модуль не сферичен при $k = n, \chi_1 = \chi_2$ и сферичен во всех остальных случаях.

Подслучай 4.2. $a_1 \geq 2$. По теореме 5.5 из K -сферичности многообразия X следует, что $t = 2$. Тогда $k \leq n$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = 2$ и $n = 4$. В силу предложений 4.13 и 4.22 существуют точка $[W] \in \text{Gr}_k(V_1)$ и подгруппа $L \subset (K_1)_{[W]}$ со следующими свойствами:

(1) пара (L, W) геометрически эквивалентна паре $(\text{GL}_k, \mathbb{F}^k)$ при $k < n$ и паре $(\text{SL}_k, \mathbb{F}^k)$ при $k = n$;

(2) K -сферичность многообразия X эквивалентна $(C \times L \times K_2)$ -сферичности многообразия $Y = (W^* \otimes V_2) \times \text{Gr}_{a_1}(W)$, где L действует диагонально на W^* и $\text{Gr}_{a_1}(W)$, K_2 действует на V_2 , а C действует на W^* и V_2 умножением на характер $-\chi_1$ и χ_2 соответственно.

Применив предложение 4.13 к многообразию $\text{Gr}_{a_1}(W)$ и затем рассмотрев естественную проекцию $Y \rightarrow \text{Gr}_{a_1}(W)$, мы находим, что существует подгруппа $L_1 \subset L$ со следующими свойствами:

(1) пара (L_1, W) геометрически эквивалентна паре $(\text{GL}_{a_1} \times \text{GL}_{a_2}, \mathbb{F}^{a_1} \oplus \mathbb{F}^{a_2})$ при $k < n$ и паре $(\text{S}(\text{L}_{a_1} \times \text{L}_{a_2}), \mathbb{F}^{a_1} \oplus \mathbb{F}^{a_2})$ при $k = n$;

(2) $(C \times L \times K_2)$ -сферичность многообразия Y эквивалентна сферичности $(C \times L_1 \times K_2)$ -модуля $W^* \otimes V_2$, на котором C и K_2 действуют так же, как описано выше, а L_1 действует на W^* .

По теореме 5.2 указанный модуль не сферичен при $k = n$, $\chi_1 = \chi_2$ и сферичен во всех остальных случаях.

Случай 5. $K' = \text{Sp}_{2n} \times \text{SL}_m$, $V = \mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^m$, $n \geq 2$, $m \geq 1$. Из условия $\llbracket X \rrbracket \succ \llbracket \text{Fl}(1, 1; V) \rrbracket$ вытекает, что $\llbracket X \rrbracket \succ \llbracket \text{Fl}(1, 2; V) \rrbracket$. Многообразие $\text{Fl}(1, 2; V)$ не является K -сферическим по предложению 6.10, поэтому и X не является K -сферическим.

Случай 6. $K' = \text{Sp}_{2n} \times \text{Sp}_{2m}$, $V = \mathbb{F}^{2n} \oplus \mathbb{F}^{2m}$, $n \geq m \geq 2$. Если X является K -сферическим, то X является и $(\text{Sp}_{2n} \times \text{SL}_{2m})$ -сферическим. Как было показано в случае 5, последнее неверно.

Доказательство теоремы 6.7, а вместе с ней и теоремы 1.7 завершено.

§ 7. Приложение. Доказательства предложений 4.13, 4.14 и 4.16

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.13. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис в V . Положим $W = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$ и $W' = \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle$. Обозначим через L подгруппу в K , сохраняющую каждое из подпространств W и W' . Легко видеть, что точка $[W] \in X$ и группа $L \subset K_{[W]}$ удовлетворяют условиям (2)–(4). Осталось показать, что условие (1) также выполняется.

При каждом $i = 1, \dots, n$ введем подпространство $V_i = \langle e_n, \dots, e_{n-i+1} \rangle \subset V$. Стабилизатор в K флага $(V_1, \dots, V_n)$ является борелевской подгруппой в K , мы обозначим ее через B . Несложно проверить, что группа $B_{[W]}$ является борелевской подгруппой в L .

Вычисления показывают, что $\dim B_{[W]} = n(n+1)/2 - k(n-m) - 1$, откуда

$$\dim B[W] = \dim B - \dim B_{[W]} = m(n-m) = \dim X,$$

поэтому орбита $B[W]$ открыта в X .

Применяя предложение 4.11 к группам K , B , L и точке $[W]$, убеждаемся в справедливости условия (1).

При доказательстве предложений 4.14 и 4.16 нам понадобится следующее понятие.

Пусть U – конечномерное векторное пространство с заданной на нем симплектической формой Ω , и пусть $\dim U = 2m$. Базис $e_1, \dots, e_{2m}$ пространства U

назовем *стандартным*, если в этом базисе матрица формы Ω имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.14. Пусть Ω – симплектическая форма в V , сохраняемая группой K . Зафиксируем разложение в косоортогональную прямую сумму

$$V = W \oplus W' \oplus R,$$

где $\dim W = \dim W' = 2k$, $\dim R = 2n - 4k$ и ограничение формы Ω на каждое из подпространств W, W', R невырожденно. Пусть $e_1, \dots, e_{2k}$ – стандартный базис в W , а $e'_1, \dots, e'_{2k}$ – стандартный базис в W' . Если $n > 2k$ (т.е. R нетривиально), то зафиксируем в R линейно независимый набор векторов $r_1, \dots, r_{n-2k}$, порождающий максимальное изотропное подпространство в R . При каждом $i = 1, \dots, k$ введем двумерные подпространства

$$W_i = \langle e_{2i-1}, e_{2i} \rangle \subset W, \quad W'_i = \langle e'_{2i-1}, e'_{2i} \rangle \subset W'.$$

При каждом $i = 1, \dots, 2k$ положим $f_i = e_i + (-1)^i e'_i$. Если $n > 2k$, то при каждом $j = 1, \dots, n - 2k$ положим $f_{2k+j} = r_j$. При каждом $i = 1, \dots, n$ введем подпространство $F_i = \langle f_1, \dots, f_i \rangle \subset V$. Прямая проверка показывает, что $\Omega(f_i, f_j) = 0$ для всех $i, j = 1, \dots, n$, поэтому F_n – максимальное изотропное подпространство в V . Следовательно, стабилизатор в K изотропного флага $(F_1, \dots, F_n)$ является борелевской подгруппой в K , мы обозначим ее через B .

Положим $H = K_{[W]}$. Ясно, что группа H сохраняет подпространство $W^\perp = W' \oplus R$.

Положим $V_i = W_i \oplus W'_i$ при $i = 1, \dots, k$ и $V_{k+1} = R$. Тогда

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k \oplus V_{k+1}. \quad (7.1)$$

Определим группу L как стабилизатор в H флага $(F_2, F_4, \dots, F_{2k})$. При каждом $i = 1, \dots, k$ из L -инвариантности подпространства F_i вытекает L -инвариантность его проекций на W и $W^\perp$, поэтому оба подпространства

$$W_1 \oplus \dots \oplus W_i, \quad W'_1 \oplus \dots \oplus W'_i$$

инвариантны относительно L . Отсюда следует, что группа L сохраняет каждое из подпространств $W_1, \dots, W_k$ и $W'_1, \dots, W'_k$, а тогда она сохраняет каждое из подпространств $V_1, \dots, V_k, V_{k+1}$. Наконец, при каждом $i = 1, \dots, k$ из L -инвариантности подпространств V_i и F_i вытекает L -инвариантность подпространства $V_i \cap F_i = \langle f_{2i-1}, f_{2i} \rangle$.

Для каждого $i = 1, \dots, k$, $k+1$ обозначим через L_i подгруппу в L , состоящую из преобразований, действующих тривиально на всех слагаемых разложения (7.1), кроме V_i . Тогда $L = L_1 \times \dots \times L_k \times L_{k+1}$.

При фиксированном $i \in \{1, \dots, k\}$ из L -инвариантности подпространства $\langle f_{2i-1}, f_{2i} \rangle$ вытекает, что группа L_i действует на прямой сумме $W_i \oplus W'_i$ диагонально, преобразуя одинаковым образом базисы (e_{2i-1}, e_{2i}) и $(-e'_{2i-1}, e'_{2i})$. Следовательно, $L_i \simeq \mathrm{SL}_2$, а пара (L_i, V_i) геометрически эквивалентна паре $(\mathrm{SL}_2, \mathbb{F}^2 \oplus \mathbb{F}^2)$ с диагональным действием группы SL_2 .

Приведенные выше рассуждения показывают, что точка $[W] \in X$ и группа $L \subset K_{[W]}$ удовлетворяют условиям (2)–(4). Теперь докажем, что условие (1) также выполняется.

Покажем, что группа $B_{[W]} = H \cap B = L \cap B$ является борелевской подгруппой в L . Легко видеть, что $B_{[W]} = B_1 \times \dots \times B_k \times B_{k+1}$, где $B_i = B \cap L_i$ для всех $i = 1, \dots, k, k+1$. При каждом $i = 1, \dots, k$ группа B_i является стабилизатором в L_i прямой $\langle f_{2i-1} \rangle$, а группа B_{k+1} является стабилизатором в L_{k+1} максимального изотропного флага

$$(\langle r_1 \rangle, \langle r_1, r_2 \rangle, \dots, \langle r_1, r_2, \dots, r_{n-2k} \rangle)$$

в пространстве V_{k+1} . Отсюда выводится, что при всех $i = 1, \dots, k, k+1$ группа B_i является борелевской подгруппой в L_i , поэтому $B_{[W]}$ – борелевская подгруппа в L .

Вычисления показывают, что $\dim B_{[W]} = (n - 2k)^2 + n$, откуда

$$\dim B[W] = \dim B - \dim B_{[W]} = n^2 - (n - 2k)^2 = 2k(2n - 2k) = \dim X,$$

поэтому орбита $B[W]$ открыта в X .

Применяя предложение 4.11 к группам K, B, L и точке $[W]$, мы убеждаемся в справедливости условия (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.16. Пусть Ω – симплектическая форма в V , сохраняемая группой K . Зафиксируем разложение в косоортогональную прямую сумму

$$V = U_0 \oplus U \oplus U' \oplus R,$$

где $\dim U_0 = 2$, $\dim U = \dim U' = 2k$, $\dim R = 2n - 4k - 2$ и ограничение формы Ω на каждое из подпространств U_0, U, U', R невырожденно. Выберем в U_0 стандартный базис e_0, e'_0 , в U – стандартный базис $e_1, \dots, e_{2k}$, а в U' – стандартный базис $e'_1, \dots, e'_{2k}$. Если $n > 2k + 1$ (т.е. R нетривиально), то зафиксируем в R линейно независимый набор векторов $r_1, \dots, r_{n-2k-1}$, порождающий максимальное изотропное подпространство в R . Положим $W_0 = \langle e_0 \rangle$ и при каждом $i = 1, \dots, k$ введем двумерные подпространства

$$W_i = \langle e_{2i-1}, e_{2i} \rangle \subset U, \quad W'_i = \langle e'_{2i-1}, e'_{2i} \rangle \subset U'.$$

Положим $f_0 = e'_0$. Далее, при каждом $i = 1, \dots, 2k$ положим $f_i = e_i + (-1)^i e'_i$. Наконец, если $n > 2k + 1$, то при каждом $j = 1, \dots, n - 2k - 1$ положим $f_{2k+j} = r_j$. При каждом $i = 0, 1, \dots, n - 1$ введем подпространство $F_i = \langle f_0, \dots, f_i \rangle \subset V$. Прямая проверка показывает, что $\Omega(f_i, f_j) = 0$ для всех $i, j = 0, \dots, n - 1$, поэтому F_n – максимальное изотропное подпространство в V . Следовательно, стабилизатор в K изотропного флага $(F_0, \dots, F_{n-1})$ является борелевской подгруппой в K , мы обозначим ее через B .

Положим $W = W_0 \oplus U$ и $H = K_{[W]}$.

Пусть $V_0 = U_0$, $V_i = W_i \oplus W'_i$ при $i = 1, \dots, k$ и $V_{k+1} = R$. Тогда

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_k \oplus V_{k+1}. \quad (7.2)$$

Определим группу L как стабилизатор в H флага $(F_0, F_2, F_4, \dots, F_{2k})$.

Из L -инвариантности подпространств W и $\langle e'_0 \rangle = F_0$ вытекает L -инвариантность подпространства $\langle e'_0 \rangle \oplus W = U_0 \oplus U$, а значит, и его косоортогонального дополнения $(U_0 \oplus U)^\perp = U' \oplus R$. Таким образом, пространство V допускает разложение $V = \langle e'_0 \rangle \oplus W \oplus (U' \oplus R)$ в прямую сумму трех L -инвариантных подпространств.

При каждом $i = 1, \dots, k$ из L -инвариантности подпространства F_i вытекает L -инвариантность его проекций на W (вдоль $\langle e'_0 \rangle \oplus U' \oplus R$) и $U' \oplus R$ (вдоль $\langle e'_0 \rangle \oplus W$), поэтому оба подпространства

$$W_1 \oplus \dots \oplus W_i, \quad W'_1 \oplus \dots \oplus W'_i$$

инвариантны относительно L . Отсюда следует, что группа L сохраняет каждое из подпространств $W_1, \dots, W_k$ и $W'_1, \dots, W'_k$, а тогда она сохраняет подпространство W_0 и каждое из подпространств $V_0, V_1, \dots, V_k, V_{k+1}$. Наконец, при каждом $i = 1, \dots, k$ из L -инвариантности подпространств V_i и F_i вытекает L -инвариантность подпространства $V_i \cap F_i = \langle f_{2i-1}, f_{2i} \rangle$.

Для каждого $i = 0, 1, \dots, k, k+1$ обозначим через L_i подгруппу в L , состоящую из преобразований, действующих тривиально на всех слагаемых разложения (7.2), кроме V_i . Тогда $L = L_0 \times L_1 \times \dots \times L_k \times L_{k+1}$.

Поскольку группа L сохраняет каждое из двух одномерных подпространств $W_0 = \langle e_0 \rangle$ и $\langle e'_0 \rangle$, группа L_0 действует на прямой сумме $\langle e_0 \rangle \oplus \langle e'_0 \rangle$ диагонально, умножая e_0 и e'_0 на взаимно обратные числа. Следовательно, $L_0 \simeq \mathbb{F}^\times$ и пара (L_0, V_0) геометрически эквивалентна паре $(\mathbb{F}^\times, \mathbb{F}^1 \oplus \mathbb{F}^1)$ с действием $(t, (x_1, x_2)) \mapsto (tx_1, t^{-1}x_2)$. Далее, при фиксированном $i \in \{1, \dots, k\}$ из L^* -инвариантности подпространства $\langle f_{2i-1}, f_{2i} \rangle$ вытекает, что группа L_i действует на прямой сумме $W_i \oplus W'_i$ диагонально, преобразуя одинаковым образом базисы (e_{2i-1}, e_{2i}) и $(-e'_{2i-1}, e'_{2i})$. Следовательно, $L_i \simeq \text{SL}_2$, а пара (L_i, V_i) геометрически эквивалентна паре $(\text{SL}_2, \mathbb{F}^2 \oplus \mathbb{F}^2)$ с диагональным действием группы SL_2 .

Приведенные выше рассуждения показывают, что точка $[W] \in X$ и группа $L \subset K_{[W]}$ удовлетворяют условиям (2)–(4). Теперь докажем, что условие (1) также выполняется.

Покажем, что группа $B_{[W]} = H \cap B = L \cap B$ является борелевской подгруппой в L . Легко видеть, что $B_{[W]} = B_0 \times B_1 \times \dots \times B_k \times B_{k+1}$, где $B_i = B \cap L_i$ для всех $i = 1, \dots, k, k+1$. Очевидно, что $B_0 = L_0$. Далее, при каждом $i = 1, \dots, k$ группа B_i является стабилизатором в L_i прямой $\langle f_{2i-1} \rangle$, а группа B_{k+1} является стабилизатором в L_{k+1} максимального изотропного флага

$$(\langle r_1 \rangle, \langle r_1, r_2 \rangle, \dots, \langle r_1, r_2, \dots, r_{n-2k-1} \rangle)$$

в пространстве V_{k+1} . Отсюда выводится, что при всех $i = 0, 1, \dots, k, k+1$ группа B_i является борелевской подгруппой в L_i , поэтому $B_{[W]}$ – борелевская подгруппа в L .

Вычисления показывают, что $\dim B_{[W]} = (n - 2k - 1)^2 + n$, откуда

$$\begin{aligned}\dim B[W] &= \dim B - \dim B_{[W]} \\ &= n^2 - (n - 2k - 1)^2 = (2k + 1)(2n - 2k - 1) = \dim X,\end{aligned}$$

поэтому орбита $B[W]$ открыта в X .

Применяя предложение 4.11 к группам K , B , L и точке $[W]$, мы убеждаемся в справедливости условия (1).

Список литературы

- [1] D. A. Timashev, *Homogeneous spaces and equivariant embeddings*, Encyclopaedia Math. Sci., **138**, Springer, Heidelberg, 2011, xxii+253 pp.
- [2] А. Л. Онищик, “Отношения включения между транзитивными компактными группами преобразований”, Тр. ММО, **11**, ГИФМЛ, М., 1962, 199–242.
- [3] M. Demazure, “Automorphismes et déformations des variétés de Borel”, *Invent. Math.*, **39**:2 (1977), 179–186.
- [4] P. Littelmann, “On spherical double cones”, *J. Algebra*, **166**:1 (1994), 142–157.
- [5] P. Magyar, J. Weyman, A. Zelevinsky, “Multiple flag varieties of finite type”, *Adv. Math.*, **141**:1 (1999), 97–118.
- [6] P. Magyar, J. Weyman, A. Zelevinsky, “Symplectic multiple flag varieties of finite type”, *J. Algebra*, **230**:1 (2000), 245–265.
- [7] J. R. Stembridge, “Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters”, *Represent. Theory*, **7** (2003), 404–439 (electronic).
- [8] X. He, K. Nishiyama, H. Ochiai, Y. Oshima, “On orbits in double flag varieties for symmetric pairs”, *Transform. Groups*, **18**:4 (2013), 1091–1136.
- [9] B. Niemann, *Spherical affine cones in exceptional cases and related branching rules*, 2011, arXiv: 1111.3823.
- [10] R. W. Richardson, Jr., “Conjugacy classes in parabolic subgroups of semisimple algebraic groups”, *Bull. London Math. Soc.*, **6**:1 (1974), 21–24.
- [11] I. V. Losev, “Algebraic Hamiltonian actions”, *Math. Z.*, **263**:3 (2009), 685–723.
- [12] D. H. Collingwood, W. M. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold Math. Ser., Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993, xiv+186 pp.
- [13] V. G. Кас, “Some remarks on nilpotent orbits”, *J. Algebra*, **64**:1 (1980), 190–213.
- [14] C. Benson, G. Ratcliff, “A classification of multiplicity free actions”, *J. Algebra*, **181**:1 (1996), 152–186.
- [15] A. S. Leahy, “A classification of multiplicity free representations”, *J. Lie Theory*, **8**:2 (1998), 367–391.
- [16] F. Knop, “Some remarks on multiplicity free spaces”, *Representation theories and algebraic geometry* (Montreal, PQ, 1997), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **514**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, 301–317.
- [17] A. V. Petukhov, “Bounded reductive subalgebras of $\mathfrak{sl}_n$ ”, *Transform. Groups*, **16**:4 (2011), 1173–1182.
- [18] Э. Б. Винберг, “Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия”, *УМН*, **56**:1(337) (2001), 3–62; англ. пер.: E. B. Vinberg, “Commutative homogeneous spaces and co-isotropic symplectic actions”, *Russian Math. Surveys*, **56**:1 (2001), 1–60.
- [19] F. Knop, “Weylgruppe und Momentabbildung”, *Invent. Math.*, **99**:1 (1990), 1–23.

- [20] R. Brylinski, B. Kostant, “Nilpotent orbits, normality, and Hamiltonian group actions”, *J. Amer. Math. Soc.*, **7**:2 (1994), 269–298.
- [21] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, “Теория инвариантов”, *Алгебраическая геометрия* – 4, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **55**, ВИНТИ, М., 1989, 137–309; англ. пер.: V. L. Popov, E. B. Vinberg, “Invariant theory”, *Algebraic geometry. IV. Linear algebraic groups, invariant theory*, Encyclopaedia Math. Sci., **55**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 123–284.
- [22] H. Kraft, C. Procesi, “Closures of conjugacy classes of matrices are normal”, *Invent. Math.*, **53**:3 (1979), 227–247.
- [23] D. S. Johnston, R. W. Richardson, “Conjugacy classes in parabolic subgroups of semisimple algebraic groups. II”, *Bull. London Math. Soc.*, **9**:3 (1977), 245–250.
- [24] H. Kraft, “Parametrisierung von Konjugationsklassen in $\mathfrak{sl}_n$ ”, *Math. Ann.*, **234**:3 (1978), 209–220.
- [25] А. Г. Элашвили, “Стационарные подалгебры точек общего положения для неприводимых линейных групп Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **6**:2 (1972), 65–78; англ. пер.: A. G. Èlashvili, “Stationary subalgebras of points of the common state for irreducible linear Lie groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **6**:2 (1972), 139–148.
- [26] D. I. Panyushev, “Complexity and rank of homogeneous spaces”, *Geom. Dedicata*, **34**:3 (1990), 249–269.
- [27] M. Sato, T. Kimura, “A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants”, *Nagoya Math. J.*, **65** (1977), 1–155.
- [28] M. Krämer, “Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen”, *Compositio Math.*, **38**:2 (1979), 129–153.

Роман Сергеевич Авдеев

(Roman S. Avdeev)

Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”, г. Москва;

Московский институт открытого образования

E-mail: suselr@yandex.ru

Поступила в редакцию

05.01.2014 и 21.06.2014

Алексей Владимирович Петухов

(Alexey V. Petukhov)

Институт проблем передачи информации

им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва

E-mail: alex-2@yandex.ru