Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Милованов, О расширении групп преобразований компактных солвмногобразий, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 4, 67–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8323>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 17:24:32

УДК 512.816.5

М. В. Милованов

О расширении групп преобразований компактных солвмногообразий

Указан метод расширения связных односвязных разрешимых групп Ли, действующих транзитивно и локально эффективно на заданном компактном солвмногообразии. В 1973 г. Л. Ауслендером была поставлена проблема описания всех таких групп. Полученные результаты приводят к выводу, что эта проблема вряд ли может иметь исчерпывающее решение.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: разрешимая группа Ли, компактное солвмногообразие, кокасательное расслоение.

DOI: 10.4213/sm8323

§ 1. Введение

Пусть G – связная разрешимая группа Ли и D – ее замкнутая подгруппа. Факторпространство $K = G/D$ называется *солвмногообразием*. Группа G действует на K левыми сдвигами как транзитивная группа преобразований со стационарной подгруппой D . Можно считать, что группа G односвязна, а ее действие на K локально эффективно. Последнее равносильно отсутствию в D связных подгрупп, нормальных в G .

Нас будут интересовать лишь компактные солвмногообразия G/D . В этом случае D называют *равномерной подгруппой* группы G . Компактное солвмногообразие $K = G/D$ однозначно (с точностью до диффеоморфизма) определяется своей фундаментальной группой, изоморфной D/D^0 . Здесь D^0 есть компонента связности единицы подгруппы D .

Известно, что на одном и том же компактном солвмногообразии K могут действовать транзитивно и локально эффективно различные односвязные разрешимые группы Ли. Л. Ауслендером была поставлена проблема описания всех связных односвязных разрешимых групп Ли, действующих транзитивно и локально эффективно на заданном компактном солвмногообразии K (см. [1]). Это равносильно описанию всех пар G_α, D_α таких, что G_α/D_α компактно и $D_\alpha/D_\alpha^0 \cong \Gamma$, где Γ – фундаментальная группа многообразия K . При этом предполагается, что D_α не содержит связных нормальных делителей группы G_α .

В работе [2] указан метод описания всех пар G_α, D_α , у которых подгруппы D_α изоморфны фиксированной группе D . При этом все нужные группы G_α можно выписать в явном виде. Их может быть конечное число или бесконечная счетная последовательность.

Эти результаты обсуждались на семинаре моего учителя академика В. П. Платонова, который обратил внимание автора на задачу описания всех

возможных подгрупп D_α . Настоящая работа тесно связана с этой задачей и посвящается 75-летию Владимира Петровича.

Основной результат этой статьи, анонсированный в [3], сформулирован в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. Пусть G – произвольная односвязная разрешимая группа Ли, действующая транзитивно и локально эффективно на компактном солвмнообразии K , $\dim K > 1$. Тогда G можно расширить до односвязной разрешимой группы Ли $\tilde{G}$, которая также действует на K транзитивно и локально эффективно, причем либо $\dim \tilde{G} = \dim G + 2$, либо $\dim \tilde{G} = \dim G + 4$. Если D и $\tilde{D}$ – стационарные подгруппы G и $\tilde{G}$ для некоторого элемента многообразия K , то пару $\tilde{G}, \tilde{D}$ можно указать явно с помощью пары G, D .

Здесь и в дальнейшем односвязность группы Ли предполагает ее связность. Доказательство теоремы опирается на методику, разработанную в [4].

Результаты этой статьи и работы [2] дают серьезные основания считать, что проблема Ауслендера не имеет удовлетворительного решения – объектов описания для того или иного многообразия K может оказаться необозримо много.

Учитывая объем статьи, кратко опишем ее структуру.

В §2 рассматриваются кокасательные расслоения произвольных аналитических многообразий и их группы Ли преобразований с точки зрения теории симплектических многообразий и гамильтоновой механики. Приводятся некоторые известные и нужные для дальнейшего факты из этой области.

В §3 кратко изложены почти все нужные здесь результаты статьи [4]. Еще один факт из [4] было удобнее привести в §4. Других пересечений эти две работы не имеют.

Как известно, каждая разрешимая алгебра Ли над полем действительных чисел содержит 1-мерный или 2-мерный коммутативный идеал. В §4–6 рассматриваются группы преобразований, алгебры Ли которых имеют 1-мерный идеал.

В §4 с помощью действия такой группы G на многообразии K строится некоторая алгебра Ли $\mathfrak{h}$ из аналитических функций на кокасательном расслоении T^*K относительно скобки Пуассона. Алгебра $\mathfrak{h}$ изоморфна прямой сумме алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G и своего 2-мерного коммутативного идеала.

В §5 показано, что способ построения алгебры функций $\mathfrak{h}$ приводит к изоморфной ей алгебре Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ векторных полей на многообразии K . Поэтому, если $\tilde{G}$ – односвязная группа Ли с алгеброй $\tilde{\mathfrak{g}}$, ее можно рассматривать как группу Ли преобразований K . Группа $\tilde{G}$ и есть искомое расширение группы преобразований G .

В §6 описываются стационарные подгруппы группы $\tilde{G}$ при ее действии на многообразии K . Этим завершается доказательство теоремы для групп преобразований с алгебрами Ли, содержащими 1-мерный идеал.

Расширение групп преобразований многообразия K , алгебры Ли которых обладают 2-мерным коммутативным идеалом, проводится по той же схеме.

В §7 с помощью действия такой группы G на K строится алгебра Ли $\mathfrak{h}$ из аналитических функций на T^*K , которая изоморфна прямой сумме алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G и своего 4-мерного коммутативного идеала.

Пусть $\tilde{G}$ – односвязная группа Ли с алгеброй Ли, изоморфной алгебре функций $\mathfrak{h}$. Способ построения алгебры $\mathfrak{h}$ позволяет рассматривать $\tilde{G}$ как группу Ли преобразований многообразия K , которая и есть искомое расширение группы G . Стационарные подгруппы $\tilde{G}$ описываются в § 8, что и завершает доказательство теоремы.

Цель заключительного § 9 – показать на примере 3-мерного компактного солвмногообразия $K = G/D$ сколь велико и разнообразно может быть множество различных расширений $\tilde{G}$ группы G , которые получаются с помощью разработанного здесь метода.

§ 2. Аналитические многообразия, их кокасательные расслоения и группы Ли преобразований

Пусть K – произвольное n -мерное аналитическое многообразие и $M = T^*K$ – его кокасательное расслоение. Множество M имеет естественную структуру аналитического многообразия размерности $2n$. Точка из M – это 1-форма на касательном пространстве к K в какой-либо точке из K . Выберем на многообразии K произвольную локальную систему координат и точку с координатами $(q_1, \dots, q_n)$. Пусть $v_1, \dots, v_n$ – касательные векторы к координатным кривым в этой точке, а $v_1^*, \dots, v_n^*$ – дуальный базис линейных форм к базису $v_1, \dots, v_n$. Рассмотрим произвольную линейную форму $x \in M$ в точке $(q_1, \dots, q_n)$. Ее можно представить в виде $x = p_1 v_1^* + \dots + p_n v_n^*$, так что x характеризуется набором $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$. В результате на M появляется локальная система координат, а совокупность таких локальных координатных систем превращает M в аналитическое многообразие.

Кокасательное расслоение M имеет естественную симплектическую структуру. В описанных выше локальных координатах эта структура задается формулой

$$\omega^2 = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n.$$

Пусть G – произвольная группа Ли преобразований многообразия K . Если $\varphi(g)$ – диффеоморфизм K , соответствующий элементу $g \in G$, то $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$. Так как каждый диффеоморфизм K переводит 1-формы на K в 1-формы, то $\varphi(g)$ индуцирует диффеоморфизм $\varphi^*(g)$ кокасательного расслоения M . При этом $\varphi^*(g)$ сохраняет симплектическую структуру ω^2 и $\varphi^*(g_1 g_2) = \varphi^*(g_2) \varphi^*(g_1)$. Поэтому $g \mapsto \varphi^*(g^{-1})$ есть представление группы G в группу симплектических диффеоморфизмов многообразия M . Это действие G на M и будет далее рассматриваться.

Всякая однопараметрическая подгруппа (1-подгруппа) $\gamma(t)$ группы G задает на M фазовый поток, который имеет однозначную функцию Гамильтона h . Если действие $\gamma(t)$ на K имеет в локальных координатах $(q_1, \dots, q_n)$ вид $(q_1, \dots, q_n) \mapsto (q_1(t), \dots, q_n(t))$, где $q_i(t) = \varphi_i(t, q_1, \dots, q_n)$, то гамильтониан h на многообразии M в локальных координатах $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ вычисляется по формуле

$$h(p, q) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(0, q_1, \dots, q_n) p_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial t}(0, q_1, \dots, q_n) p_n. \quad (1)$$

В результате каждому элементу a алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G соответствует гамильтониан h_a на M , отвечающий 1-подгруппе $\gamma(t) = \exp ta$. При этом h_a линейно зависит от a и $h_{[a,b]} = \{h_a, h_b\}$, где $[a, b]$ – коммутатор элементов a и b алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а справа записана скобка Пуассона функций h_a и h_b (см. [5]).

Скобка Пуассона двух функций на M в координатах (p, q) вычисляется по формуле

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}. \quad (2)$$

1-подгруппы $\exp ta$ и $\exp tb$ коммутируют на K тогда и только тогда, когда $\{h_a, h_b\} \equiv 0$.

Пусть на многообразии K определено действие 1-групп $\gamma_1(t), \dots, \gamma_s(t)$, которое индуцирует действие этих групп на многообразии $M = T^*K$. В результате на многообразиях K и M возникают векторные поля $X_1, \dots, X_s$ и $Y_1, \dots, Y_s$ соответственно, причем каждое векторное поле Y_i является гамильтоновым с линейным по импульсам аналитическим гамильтонианом h_i .

Линейная независимость функций $h_1, \dots, h_s$ равносильна линейной независимости векторных полей $Y_1, \dots, Y_s$, а последняя, в свою очередь, равносильна линейной независимости векторных полей $X_1, \dots, X_s$.

§ 3. О некоторых специальных локальных системах координат на компактном солвмногообразии

Пусть G – односвязная разрешимая группа Ли, действующая транзитивно и локально эффективно на компактном солвмногообразии K , $\dim K > 1$. Тогда K можно представить в виде $K = G/D$, где D – некоторая замкнутая подгруппа G , причем G действует на K левыми сдвигами. Группа G содержит такой связный нормальный делитель G_0 коразмерности 1, что $D_0 = D \cap G_0$ – замкнутая подгруппа G_0 и G_0/D_0 – компакт (см. [4]). Если при этом группа G не является нильпотентной, то G_0 содержит нильпотентный радикал N группы G , т.е. максимальный связный нильпотентный нормальный делитель G . Группа G_0 также действует левыми сдвигами на K , но уже не транзитивно. При этом многообразие K расслаивается на орбиты действия G_0 на K . Каждая такая орбита $\mathcal{O}$ гомеоморфна $K_0 = G_0/D_0$. На многообразии K существует аналитическая периодическая кривая $\theta(t)$ периода 1 такая, что каждая орбита $\mathcal{O}$ пересекает эту кривую в единственной точке (см. [4]). Гомеоморфизм $\mathcal{O}$ на K_0 будет устанавливаться с помощью этой точки: если $\mathcal{O}$ пересекает $\theta(t)$ в точке gD , то $gg_0D \mapsto g_0D_0$, $g_0 \in G_0$, есть искомым гомеоморфизм (см. [4]). Если орбита $\mathcal{O}$ пересекает кривую $\theta(t)$ в точке $\theta(q_1)$, мы будем писать $\mathcal{O} = \mathcal{O}(q_1)$.

Положение точки v на многообразии K определяется орбитой $\mathcal{O}$, через нее проходящей, и положением v на этой орбите. Это позволяет ввести в подходящей окрестности V точки v новую локальную систему координат $q_1, q_2, \dots, q_n$. При этом $v = v(q_1, q_2, \dots, q_n)$, если $v \in \mathcal{O}(q_1)$, а образ элемента v при гомеоморфизме $\mathcal{O}(q_1)$ на K_0 имеет координаты $(q_2, \dots, q_n)$ в некоторой локальной системе координат многообразия K_0 . Эта новая система координат согласована со старыми координатными системами многообразия K (см. [4]) и лучше

других приспособлена для наших целей. Именно такими локальными координатами на K мы и будем далее пользоваться.

§ 4. Об одной разрешимой алгебре Ли функций на T^*K

Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_0$ алгебры Ли групп G и G_0 . Так как G_0 – нормальный делитель G , то $\mathfrak{g}_0$ является идеалом алгебры $\mathfrak{g}$.

Если группа G нильпотентна, то из теоремы Энгеля о нильпотентных алгебрах следует, что $\mathfrak{g}_0$ содержит 1-мерный идеал $\mathfrak{l}$ алгебры $\mathfrak{g}$, лежащий в центре $\mathfrak{g}$.

Если группа G не является нильпотентной, то алгебра Ли $\mathfrak{n}$ нильрадикала N группы G содержится в $\mathfrak{g}_0$ и является идеалом алгебры $\mathfrak{g}$. Из теоремы Ли о разрешимых алгебрах следует, что $\mathfrak{n}$ содержит 1-мерный или 2-мерный коммутативный идеал $\mathfrak{l}$ алгебры $\mathfrak{g}$.

В этом параграфе мы ограничимся случаем $\dim \mathfrak{l} = 1$.

Выберем в алгебре $\mathfrak{g}$ такой базис $e_1, \dots, e_n$, что элементы $e_2, \dots, e_n$ образуют базис идеала $\mathfrak{g}_0$, $e_s, \dots, e_n$, $s \geq 1$, – базис идеала $\mathfrak{n}$, а элемент e_n – базис идеала $\mathfrak{l}$. Каждой 1-подгруппе $\gamma_i(t) = \exp te_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, группы G соответствует некоторый аналитический гамильтониан h_i на T^*K . А так как G действует на K локально эффективно, то линейная оболочка $L(h_1, \dots, h_n)$ функций $h_1, \dots, h_n$ образует алгебру Ли относительно скобки Пуассона, изоморфную алгебре $\mathfrak{g}$ (см. § 2). При этом

$$\{h_i, h_n\} = c_i h_n, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где c_i – константы.

Рассмотрим элемент $\cos 2\pi k q_1 \cdot e_n$ идеала $\mathfrak{l}$, зависящий от параметра $q_1 \in \mathbb{R}$, где k – фиксированное натуральное число. Пусть $\gamma(t, q_1) = \exp t(\cos 2\pi k q_1 \cdot e_n)$ – соответствующая 1-подгруппа группы G_0 , зависящая от выбора q_1 . Зададим действие односвязной 1-группы $\gamma_{n+1}(t)$ на многообразии K следующим образом. Группа $\gamma_{n+1}(t)$ оставляет инвариантной каждую орбиту $\mathcal{O}$ (см. § 3), и если $\mathcal{O}$ пересекает кривую $\theta(t)$ в точке $\theta(q_1)$, то $\gamma_{n+1}(t)$ действует на $\mathcal{O}$ как $\gamma(t, q_1)$. Поскольку $\gamma(t, q_1) \subset G_0$ и параметр q_1 определяется орбитой $\mathcal{O}$ с точностью до целого слагаемого, то действие $\gamma_{n+1}(t)$ на K задано корректно.

Покажем, что если h_{n+1} – гамильтониан, отвечающий $\gamma_{n+1}(t)$ на T^*K , то в любой локальной системе координат $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ на T^*K , указанной в § 3,

$$h_{n+1} = \cos 2\pi k q_1 \cdot h_n. \quad (4)$$

Рассмотрим действие $\gamma_{n+1}(t)$ на $\mathcal{O}(q_1)$. Оно совпадает с действием на $\mathcal{O}(q_1)$ 1-подгруппы $\gamma(t, q_1)$. Если последнее записать в виде

$$(q_2, \dots, q_n) \mapsto (q_2(t, q_1), \dots, q_n(t, q_1)),$$

то на K группа $\gamma_{n+1}(t)$ действует так:

$$(q_1, q_2, \dots, q_n) \mapsto (q_1, q_2(t, q_1), \dots, q_n(t, q_1)).$$

Если $h(q_1)$ – гамильтониан, отвечающий 1-подгруппе $\gamma(t, q_1)$ на $T^*\mathcal{O}(q_1)$, то из формулы (1) следует, что h_{n+1} в координатах $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ выражается той же формулой, какой $h(q_1)$ записывается в локальных координатах $(p_2, \dots, p_n, q_2, \dots, q_n)$, т.е.

$$h_{n+1} = h(q_1).$$

Точно так же доказывается, что гамильтониан $h_n(q_1)$, отвечающий $\gamma_n(t)$ на $T^*\mathcal{O}(q_1)$, совпадает с гамильтонианом h_n , отвечающим $\gamma_n(t)$ на T^*K :

$$h_n = h_n(q_1).$$

Поскольку на орбите $\mathcal{O}(q_1)$ функция $\cos 2\pi k q_1$ является константой, имеем (см. § 2)

$$h(q_1) = \cos 2\pi k q_1 \cdot h_n(q_1).$$

В результате

$$h_{n+1} = h(q_1) = \cos 2\pi k q_1 \cdot h_n(q_1) = \cos 2\pi k q_1 \cdot h_n,$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, h_{n+1} зависит от выбора натурального k , т.е. $h_{n+1} = h_{n+1}(k)$.

Хорошо известно, что любое конечное подмножество последовательности $\{\cos 2\pi k q_1\}$ образует линейно независимую систему функций. В силу формулы (4) аналогичное утверждение справедливо также и для последовательности $\{h_{n+1}(k)\}$. Так как линейная оболочка $L(h_1, \dots, h_n)$ образует n -мерное линейное пространство, то последовательность $\{h_{n+1}(k)\}$ содержит не более n функций, содержащихся в $L(h_1, \dots, h_n)$. Это означает, что найдется такой номер k_0 , что при $k > k_0$ функция $h_{n+1}(k)$ не содержится в $L(h_1, \dots, h_n)$. Именно такие значения k мы и будем далее рассматривать.

Посмотрим, какую алгебру Ли $\mathfrak{h}$ порождают функции $h_1, \dots, h_n, h_{n+1}$ с помощью скобки Пуассона.

Прежде всего уточним некоторые детали (см. [4; § 2–3]).

Если группа G не является нильпотентной, то существуют такая 1-подгруппа $\gamma(t)$ из G и такая аналитическая кривая $n(t)$ из нильрадикала N группы G , что $G = \gamma(t) \cdot G_0$ – полупрямое произведение, а периодическая кривая $\theta(t)$ на многообразии $K = G/D$ имеет вид $\theta(t) = \gamma(t)n(t)D$. Если положить $g(t) = \gamma(t)n(t)$, то $\theta(t) = g(t)D$. Дополнительно потребуем, чтобы элемент e_1 породил 1-подгруппу $\gamma(t)$: $\gamma_1(t) = \exp t e_1 = \gamma(t)$.

Если же группа G нильпотентна, то $\theta(t) = \gamma(t)D$, т.е. $n(t) = e$.

С учетом сказанного проверим, что гамильтониан h_1 имеет вид

$$h_1 = p_1 + \alpha_2(q_1, \dots, q_n)p_2 + \dots + \alpha_n(q_1, \dots, q_n)p_n, \quad (5)$$

а гамильтонианы $h_2, \dots, h_n$ не зависят от p_1 .

Рассмотрим элемент $v = v(q_1, q_2, \dots, q_n) \in K$, так что $v = g(q_1)g_0D$, где $g_0 \in G_0$, и если $u = g_0D_0$, то $u \in K_0$ и $u = u(q_2, \dots, q_n)$. Подействовав на v левым сдвигом на $\gamma_1(t)$, получим элемент $\gamma_1(t)g(q_1)g_0D = \gamma(t)g(q_1)g_0D$. Поскольку $g(q_1) = \gamma(q_1)n(q_1)$ и $n(q_1) \in G_0$, то

$$\begin{aligned} \gamma(t)g(q_1)g_0 &= \gamma(q_1 + t)n(q_1)g_0 = \gamma(q_1 + t)n(q_1 + t)n^{-1}(q_1 + t)n(q_1)g_0 \\ &= g(q_1 + t)n^{-1}(q_1 + t)n(q_1)g_0 = g(q_1 + t)g'_0, \end{aligned}$$

где $g'_0 = n^{-1}(q_1 + t)n(q_1)g_0 \in G_0$. Таким образом, под действием $\gamma_1(t)$

$$g(q_1)g_0D \mapsto g(q_1 + t)g'_0D.$$

Это означает, что при достаточно малых t действие $\gamma_1(t)$ на K представляется в виде

$$(q_1, q_2, \dots, q_n) \mapsto (q_1 + t, q_2(t), \dots, q_n(t)).$$

Применяя формулу (1), находим, что гамильтониан h_1 имеет вид (5).

Поддействуем теперь на v левым сдвигом на $\gamma_i(t)$, $i = 2, \dots, n$. Получим элемент $\gamma_i(t)g(q_1)g_0D = g(q_1)(g(q_1)^{-1}\gamma_i(t)g(q_1))g_0D$. Так как $\gamma_i(t) \in G_0$ и G_0 является нормальным делителем группы G , то $g(q_1)^{-1}\gamma_i(t)g(q_1) \in G_0$. Таким образом, при левом сдвиге на $\gamma_i(t)$

$$g(q_1)g_0D \mapsto g(q_1)g'_0(t)D,$$

где $g'_0(t) = (g(q_1)^{-1}\gamma_i(t)g(q_1))g_0 \in G_0$. Следовательно, при достаточно малых t действие $\gamma_i(t)$ на K , $i = 2, \dots, n$, имеет вид

$$(q_1, q_2, \dots, q_n) \mapsto (q_1, q_2(t), \dots, q_n(t)).$$

Применяя формулу (1), приходим к выводу, что гамильтониан h_i не зависит от p_1 , т.е.

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_1} = 0, \quad i = 2, \dots, n. \quad (6)$$

Вычислим скобки Пуассона $\{h_1, h_{n+1}\}$, $\dots$, $\{h_n, h_{n+1}\}$, пользуясь формулой (2):

$$\begin{aligned} \{h_1, h_{n+1}\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_{n+1}}{\partial p_i} \frac{\partial h_1}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{n+1}}{\partial q_i} \frac{\partial h_1}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial h_{n+1}}{\partial p_1} \frac{\partial h_1}{\partial q_1} - \frac{\partial h_{n+1}}{\partial q_1} \frac{\partial h_1}{\partial p_1} \right) \\ &\quad + \sum_{i=2}^n \frac{\partial h_{n+1}}{\partial p_i} \frac{\partial h_1}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{n+1}}{\partial q_i} \frac{\partial h_1}{\partial p_i} \\ &\stackrel{\text{см. (4), (6)}}{=} \left(0 \frac{\partial h_1}{\partial q_1} - \left(-2\pi k \sin 2\pi k q_1 \cdot h_n + \cos 2\pi k q_1 \cdot \frac{\partial h_n}{\partial q_1} \right) \frac{\partial h_1}{\partial p_1} \right) \\ &\quad + \cos 2\pi k q_1 \left(\sum_{i=2}^n \frac{\partial h_n}{\partial p_i} \frac{\partial h_1}{\partial q_i} - \frac{\partial h_n}{\partial q_i} \frac{\partial h_1}{\partial p_i} \right) \stackrel{\text{см. (5)}}{=} 2\pi k \sin 2\pi k q_1 \cdot h_n \\ &\quad + \cos 2\pi k q_1 \left[\left(0 \frac{\partial h_1}{\partial q_1} - \frac{\partial h_n}{\partial q_1} \frac{\partial h_1}{\partial p_1} \right) + \sum_{i=2}^n \frac{\partial h_n}{\partial p_i} \frac{\partial h_1}{\partial q_i} - \frac{\partial h_n}{\partial q_i} \frac{\partial h_1}{\partial p_i} \right] \\ &\stackrel{\text{см. (6)}}{=} 2\pi k (\sin 2\pi k q_1 \cdot h_n) + \cos 2\pi k q_1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_n}{\partial p_i} \frac{\partial h_1}{\partial q_i} - \frac{\partial h_n}{\partial q_i} \frac{\partial h_1}{\partial p_i} \\ &= 2\pi k (\sin 2\pi k q_1 \cdot h_n) + \cos 2\pi k q_1 \{h_1, h_n\} \\ &\stackrel{\text{см. (3)}}{=} 2\pi k (\sin 2\pi k q_1 \cdot h_n) + c_1 (\cos 2\pi k q_1 \cdot h_n). \end{aligned}$$

Если положить

$$h_{n+2} = \sin 2\pi k q_1 \cdot h_n, \quad (7)$$

то окончательно получаем

$$\{h_1, h_{n+1}\} = c_1 h_{n+1} + 2\pi k h_{n+2}. \quad (8)$$

Так как $h_2, \dots, h_n$ и h_{n+1} не зависят от p_1 , то при $2 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} \{h_j, h_{n+1}\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_{n+1}}{\partial p_i} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{n+1}}{\partial q_i} \frac{\partial h_j}{\partial p_i} = \sum_{i=2}^n \frac{\partial h_{n+1}}{\partial p_i} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{n+1}}{\partial q_i} \frac{\partial h_j}{\partial p_i} \\ &\stackrel{\text{см. (4)}}{=} \cos 2\pi k q_1 \sum_{i=2}^n \frac{\partial h_n}{\partial p_i} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} - \frac{\partial h_n}{\partial q_i} \frac{\partial h_j}{\partial p_i} \\ &= \cos 2\pi k q_1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_n}{\partial p_i} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} - \frac{\partial h_n}{\partial q_i} \frac{\partial h_j}{\partial p_i} = \cos 2\pi k q_1 \cdot \{h_j, h_n\} \\ &\stackrel{\text{см. (3)}}{=} \cos 2\pi k q_1 \cdot (c_j h_n) = c_j (\cos 2\pi k q_1 \cdot h_n) = c_j h_{n+1}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\{h_j, h_{n+1}\} = c_j h_{n+1}, \quad j = 2, \dots, n. \quad (9)$$

Из (8) следует, что алгебра Ли $\mathfrak{h}$, порожденная функциями $h_1, \dots, h_n, h_{n+1}$, должна содержать функцию h_{n+2} .

Следующее равенство доказывается аналогично равенству (8):

$$\{h_1, h_{n+2}\} = -2\pi k h_{n+1} + c_1 h_{n+2}. \quad (10)$$

Равенства

$$\{h_j, h_{n+2}\} = c_j h_{n+2}, \quad j = 2, \dots, n, \quad (11)$$

доказываются аналогично равенствам (9). Наконец,

$$\{h_{n+1}, h_{n+2}\} = 0, \quad (12)$$

так как h_{n+1}, h_{n+2} не зависят от p_1 и

$$\begin{aligned} \{h_{n+1}, h_{n+2}\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_{n+2}}{\partial p_i} \frac{\partial h_{n+1}}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{n+2}}{\partial q_i} \frac{\partial h_{n+1}}{\partial p_i} \\ &= \sum_{i=2}^n \frac{\partial h_{n+2}}{\partial p_i} \frac{\partial h_{n+1}}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{n+2}}{\partial q_i} \frac{\partial h_{n+1}}{\partial p_i} \\ &= \sin 2\pi k q_1 \cos 2\pi k q_1 \sum_{i=2}^n \frac{\partial h_n}{\partial p_i} \frac{\partial h_n}{\partial q_i} - \frac{\partial h_n}{\partial q_i} \frac{\partial h_n}{\partial p_i} = 0. \end{aligned}$$

Равенства (8)–(12) означают, что алгебра $\mathfrak{h}$ является линейной оболочкой функций $h_1, \dots, h_n, h_{n+1}, h_{n+2}$. При этом

$$\mathfrak{w} = L(h_{n+1}, h_{n+2})$$

– двумерный коммутативный идеал алгебры $\mathfrak{h}$. Поскольку функции h_{n+1}, h_{n+2} зависят от выбора параметра k , то и идеал $\mathfrak{w}$ зависит от k : $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}(k) = \mathfrak{w}_k$.

Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varphi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}/\mathfrak{w}$. Так как $\varphi(\mathfrak{h}) = \varphi(L(h_1, \dots, h_n))$, то $\varphi(\mathfrak{h})$ – разрешимая алгебра Ли. А поскольку $\ker \varphi = \mathfrak{w}$ – коммутативный идеал $\mathfrak{h}$, то и алгебра $\mathfrak{h}$ разрешима.

Нам понадобится следующая лемма, элементарное доказательство которой мы опускаем.

ЛЕММА. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерное подпространство векторного пространства V . Пусть V содержит бесконечную последовательность векторов

$$v_1, u_1, v_2, u_2, \dots, v_k, u_k, \dots,$$

любая конечная часть которой линейно независима. Тогда существует лишь конечное число номеров $k \in \mathbb{N}$, для которых линейная оболочка $\mathfrak{w}_k$ векторов v_k, u_k имеет с $\mathfrak{g}$ ненулевое пересечение.

Сравнивая функции $h_{n+1} = \cos 2\pi k q_1 \cdot h_n$ и $h_{n+2} = \sin 2\pi k q_1 \cdot h_n$, нетрудно понять, что h_{n+2} – гамильтониан, отвечающий односвязной 1-группе преобразований $\gamma_{n+2}(t)$ многообразия K , которая действует на произвольной орбите $\mathcal{O}(q_1)$ из K как $\exp t(\sin 2\pi k q_1 \cdot e_n)$. Обе функции h_{n+1}, h_{n+2} определены на всем многообразии $M = T^*K$ и зависят от выбора параметра k , т.е. $h_{n+1} = h_{n+1}(k)$, $h_{n+2} = h_{n+2}(k)$.

Обозначим через V линейное пространство аналитических функций на M . Рассмотрим бесконечную последовательность элементов V

$$h_{n+1}(1), h_{n+2}(1), \dots, h_{n+1}(k), h_{n+2}(k), \dots$$

Любая конечная часть последовательности функций $\{\cos 2\pi k x, \sin 2\pi k x\}$, $k \in \mathbb{N}$, на $\mathbb{R}$ линейно независима. Это же верно и для последовательности функций $\{\cos 2\pi k q_1 \cdot h_n, \sin 2\pi k q_1 \cdot h_n\}$, $k \in \mathbb{N}$, на M . Если $\mathfrak{w}_k = L(h_{n+1}(k), h_{n+2}(k))$, то из леммы следует существование такого номера k_0 , что при всех $k > k_0$ алгебра $\mathfrak{h}$ есть прямая сумма своей подалгебры $\mathfrak{g}$ и идеала $\mathfrak{w}_k$. При этом

$$\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} + 2.$$

Именно такие k и будут далее рассматриваться.

§ 5. Расширение группы преобразований компактного солвмногообразия K в случае $\dim \mathfrak{l} = 1$

В § 4 было рассмотрено действие 1-групп $\gamma_1(t), \dots, \gamma_{n+2}(t)$ на солвмногообразии K , которое индуцирует действие этих групп на многообразии $M = T^*K$. В результате на многообразиях K и M возникают векторные поля $X_1, \dots, X_{n+2}$ и $Y_1, \dots, Y_{n+2}$ соответственно, причем каждое векторное поле Y_i является гамильтоновым с гамильтонианом h_i .

Как известно (см. § 2), линейная независимость функций $h_1, \dots, h_{n+2}$ равносильна линейной независимости векторных полей $Y_1, \dots, Y_{n+2}$, а последняя – линейной независимости векторных полей $X_1, \dots, X_{n+2}$. При этом скобке Пуассона $\{h_i, h_j\}$ функций h_i и h_j соответствует векторное поле на многообразии M , равное коммутатору $[Y_i, Y_j]$ векторных полей Y_i и Y_j (см. [5; § 40]).

Рассмотрим естественную проекцию $\pi: M \rightarrow K$, ставящую в соответствие каждой 1-форме на TK_x точку x . Легко видеть, что $d\pi \cdot Y_i = X_i$, т.е. поля Y_i и X_i являются π -связанными. При этом (см. [6; гл. 1, предложение 3.3]) имеет место $d\pi \cdot [Y_i, Y_j] = [X_i, X_j]$.

Все это означает, что поскольку линейная оболочка $\mathfrak{h}$ функций $h_1, \dots, h_{n+2}$ образует $(n+2)$ -мерную алгебру Ли относительно скобки Пуассона, то и линейная оболочка полей $X_1, \dots, X_{n+2}$ является алгеброй Ли относительно коммутирования векторных полей, причем эти две алгебры Ли изоморфны.

Итак, линейная оболочка аналитических векторных полей $X_1, \dots, X_{n+2}$ на компактном многообразии K образует $(n+2)$ -мерную алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$, изоморфную алгебре $\mathfrak{h}$. Обозначим через $\tilde{G}$ односвязную группу Ли с алгеброй Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$. Тогда $\tilde{G}$ можно рассматривать как группу Ли преобразований многообразия K , содержащую в качестве подгруппы группу преобразований G (см. [7]). Так как $\dim \tilde{G} = \dim \tilde{\mathfrak{g}}$, то $\tilde{G}$ действует на K локально эффективно. Из включения $G \subseteq \tilde{G}$ и транзитивности действия G на K вытекает транзитивность действия $\tilde{G}$.

Поскольку алгебра $\mathfrak{h}$ разрешима и $\dim \mathfrak{h} = n+2$, заключаем, что группа $\tilde{G}$ разрешима и $\dim \tilde{G} = n+2$, так что $\tilde{G}$ – искомое расширение группы преобразований G .

Если алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ группы $\tilde{G}$ отождествить с алгеброй функций $\mathfrak{h}$, то (см. § 4) $\tilde{\mathfrak{g}}$ есть прямая сумма подалгебры $\mathfrak{g}$ и коммутативного идеала $\mathfrak{w} = L(h_{n+1}, h_{n+2})$. Так как группа $\tilde{G}$ разрешима и односвязна, все ее аналитические подгруппы односвязны (см. [8]). Поэтому подалгебре $\mathfrak{g}$ соответствует аналитическая подгруппа группы $\tilde{G}$, которую можно отождествить с G . Что касается идеала $\mathfrak{w}$, то ему соответствует коммутативный нормальный делитель группы $\tilde{G}$, который мы отождествим с $\mathfrak{w}$ как с векторной группой. Покажем, что

$$\tilde{G} = G \cdot \mathfrak{w}$$

– полупрямое произведение. Это утверждение непосредственно вытекает из следующей общей леммы, доказательство которой фактически содержится в работе [8].

ЛЕММА. Пусть G – односвязная разрешимая группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Предположим, что алгебра $\mathfrak{g}$ разложена в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ своей подалгебры $\mathfrak{g}_1$ и идеала $\mathfrak{g}_2$. Пусть G_1 и G_2 – аналитические подгруппы группы G с алгебрами Ли $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$, так что G_2 – нормальный делитель G . Тогда $G = G_1 \cdot G_2$ – полупрямое произведение. В частности, $G_1 \cap G_2 = \{e\}$.

Переход от группы G к ее расширению $\tilde{G}$ опирался на существование у алгебры $\mathfrak{g}$ одномерного идеала $\mathfrak{l}$. Можно было бы попробовать тем же способом расширить группу $\tilde{G}$. В связи с этим полезно отметить, что двумерный идеал $\mathfrak{w}$ алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ не содержит одномерных идеалов $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Действительно, из формул (8) и (10) следует, что в алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$ ограничение $\text{ad } h_1$ на идеал $\mathfrak{w}$ имеет в его базисе h_{n+1}, h_{n+2} матрицу

$$\begin{bmatrix} c_1 & -2\pi k \\ 2\pi k & c_1 \end{bmatrix}$$

с характеристическим многочленом

$$(x - c_1)^2 + 4\pi^2 k^2,$$

который не имеет действительных корней, поскольку $k \neq 0$. Это означает, что $\mathfrak{w}$ не содержит одномерных инвариантных относительно $\text{ad } h_1$ подпространств, а потому и одномерных идеалов алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$.

§ 6. О стационарной подгруппе расширенной группы преобразований $\tilde{G}$ в случае $\dim \mathfrak{l} = 1$

Пусть x – элемент K со стационарной подгруппой D в группе G . И пусть $\tilde{D}$ – его стационарная подгруппа в $\tilde{G}$. Так как $G \subset \tilde{G}$, то $D \subset \tilde{D}$ и $D^0 \subset \tilde{D}^0$, где D^0 и $\tilde{D}^0$ – компоненты связности единицы D и $\tilde{D}$. Поскольку $\dim \tilde{G} = \dim G + 2$ и

$$\dim K = \dim G - \dim D^0 = \dim \tilde{G} - \dim \tilde{D}^0,$$

имеем

$$\dim \tilde{D}^0 = \dim D^0 + 2.$$

Если $x \in \mathcal{O}(q_1^0)$, то рассмотрим следующие 1-подгруппы группы G :

$$\exp t(\cos 2\pi k q_1^0 \cdot e_n), \quad \exp t(\sin 2\pi k q_1^0 \cdot e_n).$$

И пусть $\gamma_{n+1}(t)$ и $\gamma_{n+2}(t)$ – уже известные нам 1-подгруппы $\tilde{G}$, которые действуют на произвольной орбите $\mathcal{O}(q_1)$ как $\exp t(\cos 2\pi k q_1 \cdot e_n)$ и $\exp t(\sin 2\pi k q_1 \cdot e_n)$ соответственно. Все четыре подгруппы попарно коммутируют, и можно говорить об 1-подгруппах

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{n+1}(t) &= \gamma_{n+1}(t) \cdot \exp -t(\cos 2\pi k q_1^0 \cdot e_n), \\ \tilde{\gamma}_{n+2}(t) &= \gamma_{n+2}(t) \cdot \exp -t(\sin 2\pi k q_1^0 \cdot e_n) \end{aligned}$$

группы $\tilde{G}$. Подгруппы $\tilde{\gamma}_{n+1}(t)$, $\tilde{\gamma}_{n+2}(t)$ оставляют инвариантной каждую орбиту $\mathcal{O}(q_1)$ и действуют на ней как

$$\exp t((\cos 2\pi k q_1 - \cos 2\pi k q_1^0) \cdot e_n), \quad \exp t((\sin 2\pi k q_1 - \sin 2\pi k q_1^0) \cdot e_n)$$

соответственно. Так как на орбите $\mathcal{O}(q_1^0)$ обе подгруппы $\tilde{\gamma}_{n+1}(t)$, $\tilde{\gamma}_{n+2}(t)$ действуют тривиально и $x \in \mathcal{O}(q_1^0)$, то $\tilde{\gamma}_{n+1}(t)$ и $\tilde{\gamma}_{n+2}(t)$ принадлежат стационарной подгруппе $\tilde{D}$ группы $\tilde{G}$ элемента x .

Ясно, что D^0 и $\tilde{D}^0$ – замкнутые аналитические подгруппы в $\tilde{G}$. Обозначим их алгебры Ли через $\mathfrak{d}$ и $\tilde{\mathfrak{d}}$. Так как $D^0 \subset \tilde{D}^0$, то $\mathfrak{d} \subset \tilde{\mathfrak{d}}$ и при этом

$$\dim \tilde{\mathfrak{d}} = \dim \mathfrak{d} + 2.$$

Мы знаем (см. § 5), что если алгебру $\tilde{\mathfrak{g}}$ группы $\tilde{G}$ отождествить с алгеброй функций $\mathfrak{h}$, то $\tilde{\mathfrak{g}}$ есть прямая сумма подалгебры $\mathfrak{g} = L(h_1, \dots, h_n)$ и коммутативного идеала $\mathfrak{w} = L(h_{n+1}, h_{n+2})$:

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{w}.$$

При этом 1-подгруппы $\tilde{\gamma}_{n+1}(t)$, $\tilde{\gamma}_{n+2}(t)$ определяются элементами v_1 , v_2 алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ вида

$$v_1 = h_{n+1} - \lambda_1 h_n, \quad v_2 = h_{n+2} - \lambda_2 h_n,$$

где $\lambda_1 = \cos 2\pi k q_1^0$, $\lambda_2 = \sin 2\pi k q_1^0$. Обе 1-подгруппы коммутируют друг с другом, так что $\mathfrak{v} = L(v_1, v_2)$ – коммутативная подалгебра алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Проверим, что $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{v} = \{0\}$. Пусть $v \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{v}$. Так как $v \in \mathfrak{v}$, то

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1(h_{n+1} - \lambda_1 h_n) + \alpha_2(h_{n+2} - \lambda_2 h_n) \\ &= (\alpha_1 h_{n+1} + \alpha_2 h_{n+2}) - (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2) h_n, \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha_1 h_{n+1} + \alpha_2 h_{n+2} = v + (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2) h_n.$$

Так как $v \in \mathfrak{g}$ и $h_n \in \mathfrak{g}$, то $\alpha_1 h_{n+1} + \alpha_2 h_{n+2} \in \mathfrak{g}$. С другой стороны, очевидно, $\alpha_1 h_{n+1} + \alpha_2 h_{n+2} \in \mathfrak{w}$. Поскольку $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{w} = \{0\}$, имеем $\alpha_1 h_{n+1} + \alpha_2 h_{n+2} = 0$. Но h_{n+1} и h_{n+2} образуют базис $\mathfrak{w}$, так что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и $v = 0$. Значит, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{v} = \{0\}$.

Вернемся к алгебре $\tilde{\mathfrak{d}}$ и ее подалгебре $\mathfrak{d}$. Так как 1-подгруппы $\tilde{\gamma}_{n+1}(t)$ и $\tilde{\gamma}_{n+2}(t)$ содержатся в $\tilde{D}^0$, то $v_1, v_2 \in \tilde{\mathfrak{d}}$ и $\mathfrak{v} = L(v_1, v_2) \subset \tilde{\mathfrak{d}}$. При этом $\mathfrak{d} \cap \mathfrak{v} = \{0\}$ в силу того, что $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{v} = \{0\}$. Поскольку $\mathfrak{d} \subset \tilde{\mathfrak{d}}$ и $\dim \tilde{\mathfrak{d}} = \dim \mathfrak{d} + 2$, это означает, что $\tilde{\mathfrak{d}}$ есть прямая сумма своих подалгебр $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{v}$:

$$\tilde{\mathfrak{d}} = \mathfrak{d} + \mathfrak{v}.$$

Покажем, что $[\mathfrak{d}, \mathfrak{v}] = 0$. Очевидно, что в таком случае $\mathfrak{v}$ – идеал алгебры $\tilde{\mathfrak{d}}$.

Мы знаем (см. § 4), что так как $[h_i, h_n] = c_i h_n$, $i = 2, \dots, n$,

$$[h_i, h_{n+1}] = c_i h_{n+1}, \quad [h_i, h_{n+2}] = c_i h_{n+2}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Поэтому

$$[h_i, v_1] = c_i v_1, \quad [h_i, v_2] = c_i v_2, \quad i = 2, \dots, n.$$

Так как идеал $\mathfrak{l}$ алгебры $\mathfrak{g}$ содержится в ее нильрадикале $\mathfrak{n}$ и h_n – базис $\mathfrak{l}$, то из нильпотентности $\mathfrak{n}$ следует, что $[h, h_n] = 0$ для любого $h \in \mathfrak{n}$. А поскольку $h_s, \dots, h_n$ составляют базис $\mathfrak{n}$ (см. § 4), имеем $[h_i, h_n] = 0$ при $s \leq i \leq n$. Таким образом, $c_i = 0$ при $s \leq i \leq n$ и, следовательно,

$$[h_i, v_1] = 0, \quad [h_i, v_2] = 0, \quad s \leq i \leq n.$$

Это означает, что

$$[\mathfrak{n}, \mathfrak{v}] = 0.$$

Так как по основной теореме Мостова (см. [9]) алгебра Ли $\mathfrak{d}$ группы D^0 должна содержаться в нильрадикале $\mathfrak{n}$ алгебры $\mathfrak{g}$, то и $[\mathfrak{d}, \mathfrak{v}] = 0$.

Идеалу $\mathfrak{v}$ алгебры $\tilde{\mathfrak{d}}$ соответствует коммутативный связный нормальный делитель группы $\tilde{D}^0$, который мы отождествим с $\mathfrak{v}$ как с векторной группой. Так как алгебра $\tilde{\mathfrak{d}}$ есть прямая сумма $\tilde{\mathfrak{d}} = \mathfrak{d} + \mathfrak{v}$ подалгебры $\mathfrak{d}$ и идеала $\mathfrak{v}$, причем $[\mathfrak{d}, \mathfrak{v}] = 0$, то из леммы (см. § 5) следует, что

$$\tilde{D}^0 = D^0 \times \mathfrak{v}$$

– прямое произведение.

Обозначим через $\tilde{D}'$ группу, порожденную подгруппами D и $\tilde{D}^0$ группы $\tilde{G}$. Покажем, что $\tilde{D}'$ – замкнутая подгруппа $\tilde{G}$.

Так как $\tilde{D}^0$ есть компонента связности единицы подгруппы $\tilde{D}$, то $\tilde{D}^0$ – нормальный делитель $\tilde{D}$. А поскольку $D \subset \tilde{D}$, подгруппа D нормализует $\tilde{D}^0$. Поэтому

$$\tilde{D}' = \{g \in \tilde{G} \mid g = d \cdot g_0, d \in D, g_0 \in \tilde{D}^0\}.$$

Так как $\tilde{D}^0 = D^0 \times \mathfrak{v}$ – прямое произведение, то элемент g_0 можно записать в виде $g_0 = d_0 \cdot v$, где $d_0 \in D^0$, $v \in \mathfrak{v}$. Поэтому $g = d \cdot g_0 = d(d_0 \cdot v) = (dd_0) \cdot v$. Но $D^0 \subset D$, так что $dd_0 \in D$. В результате

$$\tilde{D}' = \{g \in \tilde{G} \mid g = d \cdot v, d \in D, v \in \mathfrak{v}\}.$$

Имеем следующую цепочку включений:

$$\tilde{D}^0 \subset \tilde{D}' \subset \tilde{D} \subset \tilde{G}.$$

Топология на $\tilde{D}$ индуцирована топологией $\tilde{G}$: открытое подмножество из $\tilde{D}$ есть пересечение $\tilde{D}$ и некоторого открытого подмножества из $\tilde{G}$. Поскольку $\tilde{D}^0$ – компонента связности единицы в $\tilde{D}$, все другие компоненты связности из $\tilde{D}$ есть смежные классы $\tilde{D}$ по $\tilde{D}^0$. Каждая компонента связности в $\tilde{D}$ одновременно замкнута и открыта в $\tilde{D}$.

Рассмотрим факторпространство $\tilde{G}/\tilde{D}^0$ и естественное отображение $\pi: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}/\tilde{D}^0$. Как известно, π непрерывно и открыто. При этом

$$\pi(\tilde{D}') \subset \pi(\tilde{D}) \subset \pi(\tilde{G}).$$

Покажем, что $\pi(\tilde{D})$ – дискретное подмножество в $\pi(\tilde{G})$. Это означает, что для любого элемента из $\pi(\tilde{D})$ найдется такая его окрестность U в $\pi(\tilde{G})$, что пересечение $\pi(\tilde{D}) \cap U$ состоит только из этого элемента.

Возьмем, например, элемент $\pi(e) = \pi(\tilde{D}^0)$. Так как $\tilde{D}^0$ – открытое подмножество $\tilde{D}$, найдется открытое подмножество $\tilde{U}$ в $\tilde{G}$, для которого $\tilde{D} \cap \tilde{U} = \tilde{D}^0$. Из открытости отображения π следует, что $U = \pi(\tilde{U})$ есть окрестность элемента $\pi(e)$ в $\pi(\tilde{G})$. Покажем, что $U \cap \pi(\tilde{D}) = \pi(e)$.

Пусть $\pi(g) \in U$ для некоторого $g \in \tilde{D}$. Тогда $\pi(g) = \pi(x)$ для подходящего элемента $x \in \tilde{U}$. Это означает, что $x \in g\tilde{D}^0 \subset \tilde{D}$ и, следовательно, $x \in \tilde{D} \cap \tilde{U} = \tilde{D}^0$, откуда $\pi(g) = \pi(x) = \pi(e)$. Таким образом, $U \cap \pi(\tilde{D}) = \pi(e)$. Тем самым дискретность $\pi(\tilde{D})$ в $\pi(\tilde{G})$ доказана.

Так как $\pi(\tilde{D})$ дискретно в $\pi(\tilde{G})$, то любое подмножество $\pi(\tilde{D})$ замкнуто в $\pi(\tilde{G})$. А поскольку $\tilde{D}' = \pi^{-1}(\pi(\tilde{D}'))$ в силу включения $\tilde{D}^0 \subset \tilde{D}'$, то из непрерывности отображения π следует, что $\tilde{D}'$ – замкнутая подгруппа группы $\tilde{G}$.

Покажем теперь, что $\tilde{D}' \cap G = D$.

Так как $D \subset \tilde{D}'$ и $D \subset G$, то $D \subset \tilde{D}' \cap G$. Для доказательства обратного включения рассмотрим произвольный элемент $g \in \tilde{D}' \cap G$. Так как $g \in \tilde{D}'$, то $g = d \cdot v$, где $d \in D$, $v \in \mathfrak{v}$, откуда $v = d^{-1}g$. С другой стороны, $g \in G$ и $d \in D \subset G$, так что $v = d^{-1}g \in G$ и, следовательно, $v \in G \cap \mathfrak{v}$. Если будет установлено, что $G \cap \mathfrak{v} = \{e\}$, то $v = e$ и $g = d \in D$, т.е. $\tilde{D}' \cap G \subset D$.

Итак, равенство $\tilde{D}' \cap G = D$ будет доказано, если убедиться, что $G \cap \mathfrak{v} = \{e\}$. Покажем, что это действительно так.

Мы знаем, что

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{g}} &= L(h_1, \dots, h_n, h_{n+1}, h_{n+2}), & \mathfrak{g} &= L(h_1, \dots, h_n), \\ \mathfrak{l} &= L(h_n), & \mathfrak{w} &= L(h_{n+1}, h_{n+2}).\end{aligned}$$

Пусть

$$\mathfrak{a} = L(h_n, h_{n+1}, h_{n+2}).$$

Тогда $\mathfrak{a}$ – коммутативный идеал алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{a} = \mathfrak{l} + \mathfrak{w}$ – прямая сумма. Очевидно, $\mathfrak{a}$ содержит подалгебру $\mathfrak{v} = L(v_1, v_2)$.

Так как группа $\tilde{G}$ односвязна, идеалу $\mathfrak{a}$ алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ соответствует в $\tilde{G}$ односвязный коммутативный нормальный делитель, который мы будем отождествлять с $\mathfrak{a}$ и обозначать той же буквой $\mathfrak{a}$, рассматривая идеал $\mathfrak{a}$ как группу по сложению. Аналитические подгруппы группы $\mathfrak{a}$, соответствующие подалгебрам $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{w}$ и $\mathfrak{v}$, будут отождествляться с $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{v}$ и обозначаться теми же буквами. В этих обозначениях можно говорить о прямом произведении

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{l} \times \mathfrak{w},$$

содержащем подгруппу $\mathfrak{v}$.

Пусть теперь $g \in G \cap \mathfrak{v}$. Так как $g \in \mathfrak{v}$ и $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{a}$, то $g = x \cdot y$, где $x \in \mathfrak{l}$, $y \in \mathfrak{w}$, откуда $y = x^{-1} \cdot g$. С другой стороны, $g \in G$ и $x \in \mathfrak{l} \subset G$, откуда $y \in G$. Поскольку $\tilde{G} = G \cdot \mathfrak{w}$ – полупрямое произведение (см. § 5), имеем $G \cap \mathfrak{w} = \{e\}$, так что $y = e$ и $g = x$, $x \in \mathfrak{l}$.

Итак, $g \in \mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ и в то же время $g \in \mathfrak{v}$. Так как мы уже знаем, что $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{v} = \{0\}$, то $g = 0$ или, в мультипликативных обозначениях, $g = e$. Это доказывает, что $G \cap \mathfrak{v} = \{e\}$.

Рассмотрим факторпространство $\tilde{K} = \tilde{G}/\tilde{D}'$. Группа $\tilde{G}$ действует на $\tilde{K}$ левыми сдвигами, а вместе с ней и ее подгруппа G . При этом $\tilde{D}'$ и $\tilde{D}' \cap G = D$ – стационарные подгруппы $\tilde{G}$ и G соответственно для смежного класса $\tilde{D}' \in \tilde{G}/\tilde{D}'$. Покажем, что действие группы G на $\tilde{K}$ транзитивно.

Нам опять понадобятся коммутативный идеал $\mathfrak{a} = L(h_n, h_{n+1}, h_{n+2})$ алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ и его подалгебры $\mathfrak{l} = L(h_n)$, $\mathfrak{w} = L(h_{n+1}, h_{n+2})$ и $\mathfrak{v} = L(v_1, v_2)$. Все они будут отождествляться с соответствующими аналитическими подгруппами в $\tilde{G}$. При этом вместо прямой суммы $\mathfrak{a} = \mathfrak{l} + \mathfrak{w}$ можно говорить о прямом произведении $\mathfrak{a} = \mathfrak{l} \times \mathfrak{w}$.

Выше было доказано, что $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{v} = \{0\}$. Поскольку $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$, имеем $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{v} = \{0\}$, откуда, с учетом размерности $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{v}$, следует, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{l} + \mathfrak{v}$ – прямая сумма или $\mathfrak{a} = \mathfrak{l} \times \mathfrak{v}$ – прямое произведение.

Пусть $\tilde{g}_1 \tilde{D}'$ и $\tilde{g}_2 \tilde{D}'$ – два произвольных элемента $\tilde{K}$, $\tilde{g}_i \in \tilde{G}$. Проверим, что найдется элемент $g \in G$, для которого $g \tilde{g}_1 \tilde{D}' = \tilde{g}_2 \tilde{D}'$. Последнее равенство равносильно утверждению, что у смежных классов $g \tilde{g}_1 \tilde{D}'$ и $\tilde{g}_2 \tilde{D}'$ есть общий элемент.

Поскольку

$$\tilde{D}' = \{g \in \tilde{G} \mid g = d \cdot v, d \in D, v \in \mathfrak{v}\},$$

требуется доказать, что для любых $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in \tilde{G}$ найдутся такие элементы $g \in G$, $d \in D$ и $v \in \mathfrak{v}$, что

$$g\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2 dv. \quad (13)$$

Так как $\tilde{G} = G \cdot \mathfrak{w}$ – полупрямое произведение, то

$$\tilde{g}_1 = g_1 \cdot w_1, \quad \tilde{g}_2 = g_2 \cdot w_2, \quad (14)$$

где $g_i \in G$, $w_i \in \mathfrak{w}$. Поэтому равенство (13) можно переписать так:

$$gg_1w_1 = g_2w_2dv. \quad (15)$$

В равенстве (15) элементы g_1, g_2, w_1, w_2 указаны, а элементы g, d, v подлежат определению.

Попробуем ограничиться случаем $d = e$. При этом равенство (15) принимает вид

$$gg_1w_1 = g_2w_2v. \quad (16)$$

Поскольку $\mathfrak{w} \subset \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a} = \mathfrak{l} \times \mathfrak{v}$, имеем

$$w_1 = p_1 \cdot v_1, \quad w_2 = p_2 \cdot v_2, \quad (17)$$

где $p_i \in \mathfrak{l}$, $v_i \in \mathfrak{v}$. В результате равенство (16) переписывается в виде

$$gg_1p_1v_1 = g_2p_2v_2v. \quad (18)$$

Равенство (18) будет выполняться, если

$$\begin{cases} gg_1p_1 = g_2p_2, \\ v_1 = v_2v, \end{cases}$$

откуда

$$g = g_2p_2p_1^{-1}g_1^{-1}, \quad v = v_2^{-1}v_1.$$

Так как $g_i \in G$ и $p_i \in \mathfrak{l} \subset G$, то $g \in G$. Так как $v_i \in \mathfrak{v}$, то $v \in \mathfrak{v}$.

Таким образом, в качестве искомым элементов g, d и v можно взять

$$g = g_2p_2p_1^{-1}g_1^{-1}, \quad d = e, \quad v = v_2^{-1}v_1,$$

где элементы g_i, p_i, v_i однозначно определяются разложениями (14) и (17).

Транзитивность действия G на $\tilde{K}$ доказана.

Итак, группа G действует транзитивно на многообразии $\tilde{K} = \tilde{G}/\tilde{D}'$ со стационарной подгруппой D относительно одного из элементов $\tilde{K}$. Следовательно, $\tilde{K}$ гомеоморфно многообразию $K = G/D$.

Таким образом, на многообразии K определено транзитивное и локально эффективное действие односвязной разрешимой группы Ли $\tilde{G}$ размерности $\dim G + 2$ и указан элемент $x \in K$, для которого стационарными подгруппами $\tilde{G}$ и G являются $\tilde{D}'$ и D соответственно. При этом пара $\tilde{G}, \tilde{D}'$ явно строится с помощью пары G, D , и можно считать, что $\tilde{D} = \tilde{D}'$. Это завершает доказательство теоремы в случае $\dim \mathfrak{l} = 1$.

§ 7. Об одной разрешимой алгебре Ли функций на T^*K в случае $\dim \mathfrak{l} = 2$

Случай $\dim \mathfrak{l} = 2$ (см. § 4) приводит к расширению $\tilde{G}$ группы G , для которого $\dim \tilde{G} = \dim G + 4$. Схема исследования аналогична той, которая использовалась в случае $\dim \mathfrak{l} = 1$ (см. § 4–6).

Переходя к случаю $\dim \mathfrak{l} = 2$, мы можем считать, что группа G не является нильпотентной.

Выберем в алгебре $\mathfrak{g}$ группы G такой базис $e_1, \dots, e_n$, что элементы $e_2, \dots, e_n$ образуют базис идеала $\mathfrak{g}_0$, $e_s, \dots, e_n$, $s > 1$, – базис нильрадикала $\mathfrak{n}$ алгебры $\mathfrak{g}$, e_{n-1}, e_n – базис идеала $\mathfrak{l}$. И пусть $\gamma_i(t) = \exp te_i$, а h_i – соответствующий гамильтониан на T^*K , $i = 1, \dots, n$. Тогда линейная оболочка $L(h_1, \dots, h_n)$ образует алгебру Ли относительно скобки Пуассона, изоморфную алгебре $\mathfrak{g}$ (см. § 2). При этом

$$\{h_i, h_{n-1}\} = c_{in-1}^{n-1} h_{n-1} + c_{in-1}^n h_n, \quad \{h_i, h_n\} = c_{in}^{n-1} h_{n-1} + c_{in}^n h_n, \quad (19)$$

где c_{ij}^k – константы, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим следующие четыре элемента идеала $\mathfrak{l}$, зависящие от параметра $q_1 \in \mathbb{R}$ и фиксированного натурального k :

$$\cos 2\pi k q_1 \cdot e_{n-1}, \quad \sin 2\pi k q_1 \cdot e_{n-1}, \quad \cos 2\pi k q_1 \cdot e_n, \quad \sin 2\pi k q_1 \cdot e_n.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1}(t, q_1) &= \exp t(\cos 2\pi k q_1 \cdot e_{n-1}), & \gamma_{n+2}(t, q_1) &= \exp t(\sin 2\pi k q_1 \cdot e_{n-1}), \\ \gamma_{n+3}(t, q_1) &= \exp t(\cos 2\pi k q_1 \cdot e_n), & \gamma_{n+4}(t, q_1) &= \exp t(\sin 2\pi k q_1 \cdot e_n) \end{aligned}$$

– соответствующие 1-подгруппы группы G_0 , зависящие от выбора q_1 . Зададим действие односвязных 1-групп $\gamma_{n+1}(t), \dots, \gamma_{n+4}(t)$ на многообразии K следующим образом. Группа $\gamma_{n+i}(t)$, $i = 1, \dots, 4$, оставляет инвариантной каждую орбиту $\mathcal{O}$, и если $\mathcal{O}$ пересекает кривую $\theta(t)$ в точке $\theta(q_1)$, то $\gamma_{n+i}(t)$ действует на $\mathcal{O}$ как $\gamma_{n+i}(t, q_1)$. Поскольку $\gamma_{n+i}(t, q_1) \subset G_0$, а параметр q_1 определяется орбитой $\mathcal{O}$ с точностью до целого слагаемого, то действие $\gamma_{n+i}(t)$ на K определено корректно.

Как и в случае $\dim \mathfrak{l} = 1$, доказывается, что если h_{n+i} – гамильтониан, отвечающий $\gamma_{n+i}(t)$ на T^*K , $i = 1, \dots, 4$, то в любой локальной системе координат $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ многообразия T^*K , описанной в § 3,

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= \cos 2\pi k q_1 \cdot h_{n-1}, & h_{n+2} &= \sin 2\pi k q_1 \cdot h_{n-1}, \\ h_{n+3} &= \cos 2\pi k q_1 \cdot h_n, & h_{n+4} &= \sin 2\pi k q_1 \cdot h_n. \end{aligned} \quad (20)$$

Очевидно, функции $h_{n+1}, \dots, h_{n+4}$ зависят от выбора k , так что

$$h_{n+1} = h_{n+1}(k), \quad \dots, \quad h_{n+4} = h_{n+4}(k).$$

Пусть

$$\mathfrak{w}_k = L(h_{n+1}(k), \dots, h_{n+4}(k)), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

ЛЕММА 1. Для любого натурального k_0 найдется такое натуральное $k > k_0$, что $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{w}_k = \{0\}$, если считать, что $\mathfrak{g} = L(h_1, \dots, h_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассуждать от противного. Предположим, что $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{w}_k \neq \{0\}$ для всякого $k > k_0$. Рассмотрим подпространства

$$\mathfrak{w}_k, \mathfrak{w}_{2k}, \dots, \mathfrak{w}_{(n+1)k},$$

где $n = \dim \mathfrak{g}$. Каждое из них имеет с $\mathfrak{g}$ непустое пересечение, так что для всех i существуют ненулевые $w_{ik} \in \mathfrak{w}_{ik}$, лежащие в $\mathfrak{g}$. Поскольку $\dim \mathfrak{g} = n$, то система из $n + 1$ векторов

$$w_k, w_{2k}, \dots, w_{(n+1)k}$$

алгебры $\mathfrak{g}$ должна быть линейно зависимой. Поэтому найдутся коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$, не все равные нулю, для которых

$$\lambda_1 w_k + \lambda_2 w_{2k} + \dots + \lambda_{n+1} w_{(n+1)k} = 0.$$

Конечно, эти коэффициенты зависят от выбора k , т.е.

$$\lambda_i = \lambda_i(k).$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(k) w_{ik} = 0. \quad (21)$$

Поскольку $w_{ik} \in \mathfrak{w}_{ik}$,

$$\begin{aligned} w_{ik} &= \alpha_1(ik)h_{n+1}(ik) + \dots + \alpha_4(ik)h_{n+4}(ik) \\ &= (\alpha_1(ik) \cos 2\pi ikq_1 + \alpha_2(ik) \sin 2\pi ikq_1)h_{n-1} \\ &\quad + (\alpha_3(ik) \cos 2\pi ikq_1 + \alpha_4(ik) \sin 2\pi ikq_1)h_n. \end{aligned}$$

Поэтому равенство (21) принимает вид

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(k) (\alpha_1(ik) \cos 2\pi ikq_1 + \alpha_2(ik) \sin 2\pi ikq_1) \right] h_{n-1} \\ &+ \left[\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(k) (\alpha_3(ik) \cos 2\pi ikq_1 + \alpha_4(ik) \sin 2\pi ikq_1) \right] h_n = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Если в равенстве (22) квадратные скобки обозначить через $\mu_1(q_1, k)$ и $\mu_2(q_1, k)$, то оно запишется в виде

$$\mu_1(q_1, k)h_{n-1} + \mu_2(q_1, k)h_n = 0. \quad (23)$$

Легко видеть, что функции $\mu_1(q_1, k)$, $\mu_2(q_1, k)$ имеют период $1/k$ по переменной q_1 .

Равенство (23) справедливо для любого натурального $k > k_0$. Пусть k_1 и k_2 – два произвольных значения такого k . Тогда функции h_{n-1} и h_n удовлетворяют следующей системе из двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} \mu_1(q_1, k_1)h_{n-1} + \mu_2(q_1, k_1)h_n = 0, \\ \mu_1(q_1, k_2)h_{n-1} + \mu_2(q_1, k_2)h_n = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Определитель d этой системы должен быть тождественно равен нулю, иначе $h_{n-1} \equiv 0$ и $h_n \equiv 0$, что неверно. Таким образом,

$$\mu_1(q_1, k_1)\mu_2(q_1, k_2) - \mu_1(q_1, k_2)\mu_2(q_1, k_1) \equiv 0. \quad (25)$$

Поскольку любая конечная часть последовательности $\{\cos 2\pi k q_1, \sin 2\pi k q_1\}$, $k \in \mathbb{N}$, линейно независима, то функции $\mu_i(q_1, k)$ не равны тождественно нулю. Поэтому найдется отрезок $[a, b]$, на котором $\mu_2(q_1, k_1)$ и $\mu_2(q_1, k_2)$ не принимают нулевых значений. Из тождества (25) следует, что при всех $q_1 \in [a, b]$

$$\frac{\mu_1(q_1, k_1)}{\mu_2(q_1, k_1)} = \frac{\mu_1(q_1, k_2)}{\mu_2(q_1, k_2)}.$$

Положим

$$f(q_1, k) = \frac{\mu_1(q_1, k)}{\mu_2(q_1, k)}.$$

Тогда при всех $q_1 \in [a, b]$

$$f(q_1, k_1) = f(q_1, k_2)$$

и в силу аналитичности $f(q_1, k)$

$$f(q_1, k_1) \equiv f(q_1, k_2).$$

Это означает, что функция $f(q_1, k)$ не зависит от выбора k , т.е.

$$f(q_1, k) = f(q_1).$$

Так как функции $\mu_1(q_1, k)$ и $\mu_2(q_1, k)$ имеют период $1/k$, то и $f(q_1)$ – периодическая функция периода $1/k$. Таким образом, $f(q_1)$ имеет сколь угодно малый период. В силу аналитичности $f(q_1)$ из этого следует, что

$$f(q_1, k) \equiv C,$$

где C – некоторая константа. Поэтому

$$\mu_1(q_1, k) = C\mu_2(q_1, k)$$

и равенство (23) принимает вид

$$C\mu_2(q_1, k)h_{n-1} + \mu_2(q_1, k)h_n = 0.$$

Так как в этом равенстве все функции не равны тождественно нулю и аналитичны, то

$$Ch_{n-1} + h_n = 0,$$

что противоречит линейной независимости h_{n-1} и h_n . Лемма 1 доказана.

Пусть $k_0 = 1$. В силу леммы 1 найдется натуральное $k_1 > 1$, для которого $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{w}_{k_1} = \{0\}$. Если считать, что $k_0 = k_1$, то найдется $k_2 > k_1$, для которого $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{w}_{k_2} = \{0\}$. Продолжая этот процесс, приходим к выводу, что существует бесконечно много значений k , для которых $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{w}_k = \{0\}$.

ЛЕММА 2. *Для любого натурального числа k_0 найдется такое натуральное $k > k_0$, что $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{w}_k = \{0\}$ и $\dim \mathfrak{w}_k = 4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{k_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, – бесконечная последовательность натуральных чисел, для которых $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{w}_{k_i} = \{0\}$. Покажем, что среди $k_i > k_0$ найдется такое k , для которого $\dim \mathfrak{w}_k = 4$.

Рассуждая от противного, предположим, что $\dim \mathfrak{w}_{k_i} < 4$ для всех $k_i > k_0$. Это означает, что при $k_i > k_0$ функции $h_{n+1}(k_i), \dots, h_{n+4}(k_i)$ – линейно зависимы и, значит, найдутся коэффициенты $\alpha_1(k_i), \dots, \alpha_4(k_i)$, не все равные нулю, для которых

$$\alpha_1(k_i)h_{n+1}(k_i) + \dots + \alpha_4(k_i)h_{n+4}(k_i) = 0.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &(\alpha_1(k_i) \cos 2\pi k_i q_1 + \alpha_2(k_i) \sin 2\pi k_i q_1)h_{n-1} \\ &+ (\alpha_3(k_i) \cos 2\pi k_i q_1 + \alpha_4(k_i) \sin 2\pi k_i q_1)h_n = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Если положить

$$\begin{aligned} \lambda_1(q_1, k_i) &= \alpha_1(k_i) \cos 2\pi k_i q_1 + \alpha_2(k_i) \sin 2\pi k_i q_1, \\ \lambda_2(q_1, k_i) &= \alpha_3(k_i) \cos 2\pi k_i q_1 + \alpha_4(k_i) \sin 2\pi k_i q_1, \end{aligned}$$

то равенство (26) примет вид

$$\lambda_1(q_1, k_i)h_{n-1} + \lambda_2(q_1, k_i)h_n = 0. \quad (27)$$

По предположению равенство (27) справедливо при любом $k_i > k_0$. Отсюда получаем

$$\lambda_1(q_1, k_i) = C\lambda_2(q_1, k_i),$$

где C – константа. Нужное здесь рассуждение дословно повторяет вывод равенства

$$\mu_1(q_1, k) = C\mu_2(q_1, k)$$

из соотношения (23) при доказательстве леммы 1.

В результате равенство (27) принимает вид

$$C\lambda_2(q_1, k_i)h_{n-1} + \lambda_2(q_1, k_i)h_n = 0.$$

Так как в нем все функции не равны тождественно нулю и аналитичны, то

$$Ch_{n-1} + h_n = 0,$$

что противоречит линейной независимости h_{n-1} и h_n . Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует, что при отождествлении алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $L(h_1, \dots, h_n)$ существует бесконечно много значений $k \in \mathbb{N}$, для которых $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{w}_k = \{0\}$ и $\dim \mathfrak{w}_k = 4$. Одно из таких фиксированных значений k далее и рассматривается. При этом вместо $\mathfrak{w}_k$ будем писать $\mathfrak{w}$, опуская индекс k . Так что $\dim \mathfrak{w} = 4$ и $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{w} = \{0\}$. Аналогично, вместо $h_{n+1}(k), \dots, h_{n+4}(k)$ будем писать $h_{n+1}, \dots, h_{n+4}$.

Проверим, что линейная оболочка $\mathfrak{h}$ функций $h_1, \dots, h_{n+4}$ образует алгебру Ли относительно скобки Пуассона на многообразии M .

Как и в случае $\dim \mathfrak{l} = 1$ (см. § 4), убеждаемся, что первый элемент e_1 базиса $e_1, \dots, e_n$ алгебры $\mathfrak{g}$ можно выбрать так, чтобы гамильтониан h_1 имел вид (5), а $h_2, \dots, h_n$ не зависели от переменной p_1 .

Из коммутативности идеала $\mathfrak{l} = L(e_{n-1}, e_n)$ и определения действия 1-группы $\gamma_{n+1}(t), \dots, \gamma_{n+4}(t)$ на многообразии K вытекает, что они коммутируют друг с другом, так что $\mathfrak{w} = L(h_{n+1}, \dots, h_{n+4})$ образует коммутативную алгебру функций относительно скобки Пуассона.

Проверим, что $\{h_i, h_{n+j}\} \in \mathfrak{w}$, если $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, 4$. Пусть, например, $j = 1$:

$$\begin{aligned}
 \{h_1, h_{n+1}\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_{n+1}}{\partial p_i} \frac{\partial h_1}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{n+1}}{\partial q_i} \frac{\partial h_1}{\partial p_i} \\
 &= \frac{\partial h_{n+1}}{\partial p_1} \frac{\partial h_1}{\partial q_1} - \frac{\partial h_{n+1}}{\partial q_1} \frac{\partial h_1}{\partial p_1} + \sum_{i=2}^n \frac{\partial h_{n+1}}{\partial p_i} \frac{\partial h_1}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{n+1}}{\partial q_i} \frac{\partial h_1}{\partial p_i} \\
 &\stackrel{\text{см. (20)}}{=} 0 \cdot \frac{\partial h_1}{\partial q_1} - \left(-2\pi k \sin 2\pi k q_1 \cdot h_{n-1} + \cos 2\pi k q_1 \cdot \frac{\partial h_{n-1}}{\partial q_1} \right) \frac{\partial h_1}{\partial p_1} \\
 &\quad + \cos 2\pi k q_1 \left(\sum_{i=2}^n \frac{\partial h_{n-1}}{\partial p_i} \frac{\partial h_1}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{n-1}}{\partial q_i} \frac{\partial h_1}{\partial p_i} \right) = 2\pi k \sin 2\pi k q_1 \cdot h_{n-1} \\
 &\quad + \cos 2\pi k q_1 \left[\left(0 \cdot \frac{\partial h_1}{\partial q_1} - \frac{\partial h_{n-1}}{\partial q_1} \frac{\partial h_1}{\partial p_1} \right) + \sum_{i=2}^n \frac{\partial h_{n-1}}{\partial p_i} \frac{\partial h_1}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{n-1}}{\partial q_i} \frac{\partial h_1}{\partial p_i} \right] \\
 &= 2\pi k h_{n+2} + \cos 2\pi k q_1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_{n-1}}{\partial p_i} \frac{\partial h_1}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{n-1}}{\partial q_i} \frac{\partial h_1}{\partial p_i} \\
 &= 2\pi k h_{n+2} + \cos 2\pi k q_1 \{h_1, h_{n-1}\} \\
 &\stackrel{\text{см. (19)}}{=} 2\pi k h_{n+2} + \cos 2\pi k q_1 (c_{1n-1}^{n-1} h_{n-1} + c_{1n-1}^n h_n) \\
 &= 2\pi k h_{n+2} + c_{1n-1}^{n-1} (\cos 2\pi k q_1 \cdot h_{n-1}) + c_{1n-1}^n (\cos 2\pi k q_1 \cdot h_n) \\
 &\stackrel{\text{см. (20)}}{=} 2\pi k h_{n+2} + c_{1n-1}^{n-1} h_{n+1} + c_{1n-1}^n h_{n+3} \\
 &= c_{1n-1}^{n-1} h_{n+1} + 2\pi k h_{n+2} + c_{1n-1}^n h_{n+3}.
 \end{aligned}$$

Так как $h_2, \dots, h_n$ не зависят от p_1 и $h_{n+1} = \cos 2\pi k q_1 \cdot h_{n-1}$, то при $j \geq 2$

$$\{h_j, h_{n+1}\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_{n+1}}{\partial p_i} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{n+1}}{\partial q_i} \frac{\partial h_j}{\partial p_i}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=2}^n \frac{\partial h_{n+1}}{\partial p_i} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{n+1}}{\partial q_i} \frac{\partial h_j}{\partial p_i} = \cos 2\pi k q_1 \sum_{i=2}^n \frac{\partial h_{n-1}}{\partial p_i} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{n-1}}{\partial q_i} \frac{\partial h_j}{\partial p_i} \\
&= \cos 2\pi k q_1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_{n-1}}{\partial p_i} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{n-1}}{\partial q_i} \frac{\partial h_j}{\partial p_i} = \cos 2\pi k q_1 \{h_j, h_{n-1}\} \\
&\stackrel{\text{см. (19)}}{=} \cos 2\pi k q_1 (c_{jn-1}^{n-1} h_{n-1} + c_{jn-1}^n h_n) \\
&= c_{jn-1}^{n-1} (\cos 2\pi k q_1 \cdot h_{n-1}) + c_{jn-1}^n (\cos 2\pi k q_1 \cdot h_n) = c_{jn-1}^{n-1} h_{n+1} + c_{jn-1}^n h_{n+3}.
\end{aligned}$$

Итак, доказано, что $\{h_i, h_{n+1}\} \in \mathfrak{w}$, $i = 1, \dots, n$. Аналогично проверяется, что $\{h_i, h_{n+j}\} \in \mathfrak{w}$ при $j = 2, 3, 4$. В частности,

$$\begin{aligned}
\{h_1, h_{n+1}\} &= c_{1n-1}^{n-1} h_{n+1} + 2\pi k h_{n+2} + c_{1n-1}^n h_{n+3}, \\
\{h_1, h_{n+2}\} &= -2\pi k h_{n+1} + c_{1n-1}^{n-1} h_{n+2} + c_{1n-1}^n h_{n+4}, \\
\{h_1, h_{n+3}\} &= c_{1n}^{n-1} h_{n+1} + c_{1n}^n h_{n+3} + 2\pi k h_{n+4}, \\
\{h_1, h_{n+4}\} &= c_{1n}^{n-1} h_{n+2} - 2\pi k h_{n+3} + c_{1n}^n h_{n+4}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Это означает, что $\mathfrak{h} = L(h_1, h_2, \dots, h_{n+4})$ действительно образует алгебру Ли, содержащую $\mathfrak{w}$ в качестве идеала. Так как $\mathfrak{g} = L(h_1, h_2, \dots, h_n)$ и $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{w} = \{0\}$, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} + \mathfrak{w}$ – прямая сумма подалгебры $\mathfrak{g}$ и коммутативного идеала $\mathfrak{w}$. Ясно, что $\dim \mathfrak{h} = n + 4$ и $\mathfrak{h}$ – разрешимая алгебра Ли.

§ 8. О расширенной группе преобразований солвмногобразия K и ее стационарной подгруппе в случае $\dim \mathfrak{l} = 2$

Все результаты и рассуждения § 5 почти дословно переносятся на случай $\dim \mathfrak{l} = 2$.

Обозначим через $\tilde{G}$ односвязную группу Ли с алгеброй Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$, изоморфной построенной в § 7 алгебре Ли функций $\mathfrak{h}$. Ясно, что группа $\tilde{G}$ разрешима и $\dim \tilde{G} = n + 4$. Если $\tilde{\mathfrak{g}}$ отождествить с $\mathfrak{h}$, то алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ есть прямая сумма подалгебры $\mathfrak{g}$ и коммутативного идеала $\mathfrak{w}$.

Так как группа $\tilde{G}$ разрешима и односвязна, все ее аналитические подгруппы односвязны. Поэтому аналитическую подгруппу группы $\tilde{G}$, соответствующую подалгебре $\mathfrak{g}$, можно отождествить с группой G , а идеалу $\mathfrak{w}$ соответствует коммутативный нормальный делитель группы $\tilde{G}$, который можно отождествлять с $\mathfrak{w}$ как с векторной группой по сложению. При этом

$$\tilde{G} = G \cdot \mathfrak{w}$$

– полупрямое произведение.

Повторяя рассуждения § 5, приходим к выводу, что $\tilde{G}$ можно рассматривать как группу Ли преобразований многообразия K . Группа $\tilde{G}$ действует на K транзитивно и локально эффективно, продолжая исходное действие G на K .

Пусть x – элемент многообразия K со стационарной подгруппой D в группе G . И пусть $\tilde{D}$ – его стационарная подгруппа в $\tilde{G}$. Так как $G \subset \tilde{G}$, то $D \subset \tilde{D}$

и $D^0 \subset \tilde{D}^0$, где D^0 и $\tilde{D}^0$ – компоненты связности единицы D и $\tilde{D}$. Поскольку $\dim \tilde{G} = \dim G + 4$ и

$$\dim K = \dim G - \dim D^0 = \dim \tilde{G} - \dim \tilde{D}^0,$$

имеем

$$\dim \tilde{D}^0 = \dim D^0 + 4.$$

Если $x \in \mathcal{O}(q_1^0)$, то рассмотрим следующие четыре 1-подгруппы группы G :

$$\begin{aligned} \exp t(\cos 2\pi k q_1^0 \cdot e_{n-1}), & \quad \exp t(\sin 2\pi k q_1^0 \cdot e_{n-1}), \\ \exp t(\cos 2\pi k q_1^0 \cdot e_n), & \quad \exp t(\sin 2\pi k q_1^0 \cdot e_n). \end{aligned}$$

Пусть $\gamma_{n+1}(t)$, $\gamma_{n+2}(t)$, $\gamma_{n+3}(t)$, $\gamma_{n+4}(t)$ – уже известные нам 1-подгруппы группы $\tilde{G}$, которые действуют на произвольной орбите $\mathcal{O}(q_1)$ как

$$\begin{aligned} \exp t(\cos 2\pi k q_1 \cdot e_{n-1}), & \quad \exp t(\sin 2\pi k q_1 \cdot e_{n-1}), \\ \exp t(\cos 2\pi k q_1 \cdot e_n), & \quad \exp t(\sin 2\pi k q_1 \cdot e_n) \end{aligned}$$

соответственно. Все восемь подгрупп попарно коммутируют, и можно говорить об 1-подгруппах

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{n+1}(t) &= \gamma_{n+1}(t) \cdot \exp -t(\cos 2\pi k q_1^0 \cdot e_{n-1}), \\ \tilde{\gamma}_{n+2}(t) &= \gamma_{n+2}(t) \cdot \exp -t(\sin 2\pi k q_1^0 \cdot e_{n-1}), \\ \tilde{\gamma}_{n+3}(t) &= \gamma_{n+3}(t) \cdot \exp -t(\cos 2\pi k q_1^0 \cdot e_n), \\ \tilde{\gamma}_{n+4}(t) &= \gamma_{n+4}(t) \cdot \exp -t(\sin 2\pi k q_1^0 \cdot e_n) \end{aligned}$$

группы $\tilde{G}$. Ясно, что подгруппы $\tilde{\gamma}_{n+i}(t)$ оставляют инвариантной каждую орбиту $\mathcal{O}(q_1)$, а на орбите $\mathcal{O}(q_1^0)$ действуют тривиально. Так как $x \in \mathcal{O}(q_1^0)$, то все $\tilde{\gamma}_{n+i}(t)$, $i = 1, \dots, 4$, принадлежат стационарной подгруппе $\tilde{D}$ группы $\tilde{G}$ элемента x .

Очевидно, D^0 и $\tilde{D}^0$ – замкнутые аналитические подгруппы в $\tilde{G}$. Обозначим их алгебры Ли через $\mathfrak{d}$ и $\tilde{\mathfrak{d}}$. Так как $D^0 \subset \tilde{D}^0$, то $\mathfrak{d} \subset \tilde{\mathfrak{d}}$ и при этом

$$\dim \tilde{\mathfrak{d}} = \dim \mathfrak{d} + 4.$$

Если алгебру $\tilde{\mathfrak{g}}$ группы $\tilde{G}$ отождествить с алгеброй функций $\mathfrak{h}$, то $\tilde{\mathfrak{g}}$ есть прямая сумма подалгебры $\mathfrak{g} = L(h_1, \dots, h_n)$ и идеала $\mathfrak{w} = L(h_{n+1}, \dots, h_{n+4})$. При этом 1-подгруппы $\tilde{\gamma}_{n+1}(t), \dots, \tilde{\gamma}_{n+4}(t)$ группы $\tilde{G}$ определяются элементами $v_1, \dots, v_4$ алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ вида

$$\begin{aligned} v_1 &= h_{n+1} - \lambda_1 h_{n-1}, & v_2 &= h_{n+2} - \lambda_2 h_{n-1}, \\ v_3 &= h_{n+3} - \lambda_3 h_n, & v_4 &= h_{n+4} - \lambda_4 h_n, \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \cos 2\pi k q_1^0, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = \sin 2\pi k q_1^0.$$

Так как подгруппы $\tilde{\gamma}_{n+1}(t), \dots, \tilde{\gamma}_{n+4}(t)$ коммутируют друг с другом, то линейная оболочка $\mathfrak{v} = L(v_1, \dots, v_4)$ образует коммутативную подалгебру алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Проверим, что $\mathfrak{v} \cap \mathfrak{g} = \{0\}$. Пусть $v \in \mathfrak{v} \cap \mathfrak{g}$. Поскольку $v \in \mathfrak{v}$,

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_4 v_4 \\ &= (\alpha_1 h_{n+1} + \dots + \alpha_4 h_{n+4}) - [(\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2) h_{n-1} + (\alpha_3 \lambda_3 + \alpha_4 \lambda_4) h_n], \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha_1 h_{n+1} + \dots + \alpha_4 h_{n+4} = v + (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2) h_{n-1} + (\alpha_3 \lambda_3 + \alpha_4 \lambda_4) h_n.$$

Так как v, h_{n-1}, h_n – элементы $\mathfrak{g}$, то из последнего равенства следует, что $\alpha_1 h_{n+1} + \dots + \alpha_4 h_{n+4} \in \mathfrak{g}$. С другой стороны, $\alpha_1 h_{n+1} + \dots + \alpha_4 h_{n+4} \in \mathfrak{w}$. Поскольку $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{w} = \{0\}$, имеем $\alpha_1 h_{n+1} + \dots + \alpha_4 h_{n+4} = 0$, откуда $\alpha_1 = \dots = \alpha_4 = 0$, так как $h_{n+1}, \dots, h_{n+4}$ – базис $\mathfrak{w}$. Поэтому $v = 0$ и, значит, $\mathfrak{v} \cap \mathfrak{g} = \{0\}$.

Рассмотрим алгебру $\tilde{\mathfrak{d}}$ и ее подалгебру $\mathfrak{d}$. Так как $\tilde{\gamma}_{n+1}(t), \dots, \tilde{\gamma}_{n+4}(t)$ содержатся в $\tilde{D}^0$, то $v_1, \dots, v_4$ лежат в $\tilde{\mathfrak{d}}$ и $\mathfrak{v} = L(v_1, \dots, v_4) \subset \tilde{\mathfrak{d}}$. При этом $\mathfrak{d} \cap \mathfrak{v} = \{0\}$ в силу того, что $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{v} = \{0\}$. Поскольку $\mathfrak{d} \subset \tilde{\mathfrak{d}}$ и $\dim \tilde{\mathfrak{d}} = \dim \mathfrak{d} + 4$, все это означает, что $\tilde{\mathfrak{d}}$ есть прямая сумма своих подалгебр $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{v}$:

$$\tilde{\mathfrak{d}} = \mathfrak{d} + \mathfrak{v}.$$

Проверим, что $\mathfrak{v}$ – идеал алгебры $\tilde{\mathfrak{d}}$. Достаточно убедиться, что $[\mathfrak{d}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{v}$.

Поскольку факторпространство G/D компактно и $\mathfrak{d}$ – алгебра Ли подгруппы D , по теореме Мостова $\mathfrak{d}$ содержится в нильрадикале $\mathfrak{n}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Мы покажем, что $[\mathfrak{n}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{v}$, откуда и вытекает включение $[\mathfrak{d}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{v}$.

Напомним, что базис $e_1, \dots, e_n$ алгебры $\mathfrak{g}$ выбран так, что $e_s, \dots, e_n, s > 1$, – базис нильрадикала $\mathfrak{n}$, а e_{n-1}, e_n – базис идеала $\mathfrak{l}$. Из нильпотентности $\mathfrak{n}$ следует, что элементы e_{n-1}, e_n можно выбрать так, чтобы при всех $s \leq i \leq n$

$$[e_i, e_{n-1}] = 0, \quad [e_i, e_n] = c_i e_{n-1}.$$

Для гамильтонианов h_i , соответствующих 1-подгруппам $\gamma_i(t) = \exp te_i$, имеем такие же соотношения:

$$\{h_i, h_{n-1}\} = 0, \quad \{h_i, h_n\} = c_i h_{n-1}, \quad i = s, \dots, n. \quad (30)$$

Пользуясь формулой (2), вычислим скобки Пуассона $\{h_i, h_{n+j}\}$ при $i = s, \dots, n, j = 1, \dots, 4$, при этом учтем, что $h_2, \dots, h_{n+4}$ не зависят от переменной p_1 :

$$\begin{aligned} \{h_i, h_{n+1}\} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_{n+1}}{\partial p_j} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{n+1}}{\partial q_j} \frac{\partial h_i}{\partial p_j} = \sum_{j=2}^n \frac{\partial h_{n+1}}{\partial p_j} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{n+1}}{\partial q_j} \frac{\partial h_i}{\partial p_j} \\ &\stackrel{\text{см. (20)}}{=} \cos 2\pi k q_1 \sum_{j=2}^n \frac{\partial h_{n-1}}{\partial p_j} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{n-1}}{\partial q_j} \frac{\partial h_i}{\partial p_j} \\ &= \cos 2\pi k q_1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_{n-1}}{\partial p_j} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{n-1}}{\partial q_j} \frac{\partial h_i}{\partial p_j} \\ &= \cos 2\pi k q_1 \{h_i, h_{n-1}\} \stackrel{\text{см. (30)}}{=} \cos 2\pi k q_1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$\{h_i, h_{n+2}\} = 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \{h_i, h_{n+3}\} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_{n+3}}{\partial p_j} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{n+3}}{\partial q_j} \frac{\partial h_i}{\partial p_j} = \sum_{j=2}^n \frac{\partial h_{n+3}}{\partial p_j} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{n+3}}{\partial q_j} \frac{\partial h_i}{\partial p_j} \\ &\stackrel{\text{см. (20)}}{=} \cos 2\pi k q_1 \sum_{j=2}^n \frac{\partial h_n}{\partial p_j} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} - \frac{\partial h_n}{\partial q_j} \frac{\partial h_i}{\partial p_j} = \cos 2\pi k q_1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_n}{\partial p_j} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} - \frac{\partial h_n}{\partial q_j} \frac{\partial h_i}{\partial p_j} \\ &= \cos 2\pi k q_1 \{h_i, h_n\} \stackrel{\text{см. (30)}}{=} \cos 2\pi k q_1 \cdot c_i h_{n-1} \stackrel{\text{см. (20)}}{=} c_i h_{n+1}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$\{h_i, h_{n+4}\} = c_i h_{n+2}.$$

Итак, вычисления показали, что при $i = s, \dots, n$

$$\begin{aligned} \{h_i, h_{n+1}\} &= 0, & \{h_i, h_{n+2}\} &= 0, \\ \{h_i, h_{n+3}\} &= c_i h_{n+1}, & \{h_i, h_{n+4}\} &= c_i h_{n+2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Теперь можно найти $\{h_i, v_j\}$, $i = s, \dots, n$, $j = 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned} \{h_i, v_1\} &\stackrel{\text{см. (29)}}{=} \{h_i, h_{n+1} - \lambda_1 h_{n-1}\} = \{h_i, h_{n+1}\} - \lambda_1 \{h_i, h_{n-1}\} \\ &\stackrel{\text{см. (31), (30)}}{=} 0 - \lambda \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$\{h_i, v_2\} = 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \{h_i, v_3\} &\stackrel{\text{см. (29)}}{=} \{h_i, h_{n+3} - \lambda_3 h_n\} = \{h_i, h_{n+3}\} - \lambda_3 \{h_i, h_n\} \\ &\stackrel{\text{см. (31), (30)}}{=} c_i h_{n+1} - \lambda_3 c_i h_{n-1} = c_i (h_{n+1} - \lambda_3 h_{n-1}) \\ &\stackrel{\text{т.к. } \lambda_3 = \lambda_1}{=} c_i (h_{n+1} - \lambda_1 h_{n-1}) \stackrel{\text{см. (29)}}{=} c_i v_1. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$\{h_i, v_4\} = c_i v_2.$$

В результате имеем

$$\{h_i, v_1\} = 0, \quad \{h_i, v_2\} = 0, \quad \{h_i, v_3\} = c_i v_1, \quad \{h_i, v_4\} = c_i v_2 \quad (32)$$

при $i = s, \dots, n$. Это означает, что $[\mathfrak{n}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{v}$, откуда следует, что $\mathfrak{v}$ – идеал алгебры $\tilde{\mathfrak{d}}$.

Идеалу $\mathfrak{v}$ соответствует коммутативный связный нормальный делитель группы $\tilde{D}^0$, который мы можем отождествить с $\mathfrak{v}$ как с векторной группой. Так как алгебра $\tilde{\mathfrak{d}}$ есть прямая сумма своей подалгебры $\mathfrak{d}$ и идеала $\mathfrak{v}$, то из леммы (см. §5) следует, что

$$\tilde{D}^0 = D^0 \cdot \mathfrak{v}$$

– полупрямое произведение.

Обозначим через $\tilde{D}'$ группу, порожденную подгруппами D и $\tilde{D}^0$ группы $\tilde{G}$. Тогда $\tilde{D}'$ – замкнутая подгруппа $\tilde{G}$. Доказательство этого факта дословно повторяет соответствующее доказательство из §6. Надо лишь заменить прямое произведение $\tilde{D}^0 = D^0 \times \mathfrak{v}$ для случая $\dim \mathfrak{l} = 1$ на полупрямое произведение $\tilde{D}^0 = D^0 \cdot \mathfrak{v}$ в случае $\dim \mathfrak{l} = 2$.

Как и в случае $\dim \mathfrak{l} = 1$ доказывается, что

$$\tilde{D}' = \{g \in \tilde{G} \mid g = d \cdot v, d \in D, v \in \mathfrak{v}\}.$$

Покажем теперь, что

$$\tilde{D}' \cap G = D.$$

Так как $D \subset \tilde{D}'$ и $D \subset G$, то $D \subset \tilde{D}' \cap G$. Для доказательства обратного включения рассмотрим произвольный элемент $g \in \tilde{D}' \cap G$. Поскольку $g \in \tilde{D}'$, имеем $g = dv$, где $d \in D$, $v \in \mathfrak{v}$, откуда $v = d^{-1}g$. С другой стороны, $g \in G$ и $d \in D \subset G$, так что $v \in G$ и, следовательно, $v \in G \cap \mathfrak{v}$. Если будет доказано, что $G \cap \mathfrak{v} = \{e\}$, то $v = e$ и $g = d \in D$, т.е. $\tilde{D}' \cap G \subset D$.

Итак, остается проверить, что $G \cap \mathfrak{v} = \{e\}$. Выше уже было доказано, что $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{v} = \{0\}$. Однако может случиться, что две подалгебры алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ имеют нулевое пересечение, а соответствующие им аналитические подгруппы в $\tilde{G}$ имеют общие элементы, отличные от единичного.

Мы знаем, что

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{g}} &= L(h_1, \dots, h_{n-1}, h_n, h_{n+1}, \dots, h_{n+4}), \\ \mathfrak{g} &= L(h_1, \dots, h_{n-1}, h_n), \quad \mathfrak{l} = L(h_{n-1}, h_n), \quad \mathfrak{w} = L(h_{n+1}, \dots, h_{n+4}). \end{aligned}$$

Пусть

$$\mathfrak{a} = L(h_{n-1}, h_n, h_{n+1}, \dots, h_{n+4}).$$

Тогда $\mathfrak{a}$ – коммутативный идеал алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{a} = \mathfrak{l} + \mathfrak{w}$ – прямая сумма. Очевидно, $\mathfrak{a}$ содержит подалгебру $\mathfrak{v} = L(v_1, \dots, v_4)$ (см. (29)).

Так как группа $\tilde{G}$ односвязна, идеалу $\mathfrak{a}$ алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ соответствует в $\tilde{G}$ односвязный коммутативный нормальный делитель, который мы будем отождествлять с $\mathfrak{a}$ по сложению и обозначать той же буквой. Аналитические подгруппы группы $\mathfrak{a}$, соответствующие подалгебрам $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{w}$ и $\mathfrak{v}$, будем отождествлять с $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{w}$ и $\mathfrak{v}$ по сложению и обозначать теми же буквами. В силу коммутативности $\mathfrak{a}$ можно говорить о прямом произведении

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{l} \times \mathfrak{w},$$

содержащем подгруппу $\mathfrak{v}$.

Пусть теперь $g \in G \cap \mathfrak{v}$. Так как $g \in \mathfrak{v}$ и $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{a}$, то $g = xy$, где $x \in \mathfrak{l}$, $y \in \mathfrak{w}$, откуда $y = x^{-1}g$. С другой стороны, $g \in G$ и $x \in \mathfrak{l} \subset G$, так что $y \in G$.

Поскольку $\tilde{G} = G \cdot \mathfrak{w}$ – полупрямое произведение, то $G \cap \mathfrak{w} = \{e\}$, откуда $y = e$ и $g = x \in \mathfrak{l}$.

Итак, $g \in \mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ и в то же время $g \in \mathfrak{v}$. Так как $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{v} = \{0\}$, то $g = 0$ или, в мультипликативных обозначениях, $g = e$. Это доказывает, что $G \cap \mathfrak{v} = \{e\}$.

Рассмотрим факторпространство $\tilde{K} = \tilde{G}/\tilde{D}'$. Группа $\tilde{G}$ действует на $\tilde{K}$ левыми сдвигами вместе со своей подгруппой G . При этом $\tilde{D}'$ и $D = \tilde{D}' \cap G$ – стационарные подгруппы $\tilde{G}$ и G соответственно для смежного класса $\tilde{D}' \in \tilde{K}$.

Как и в случае $\dim \mathfrak{l} = 1$, действие группы G на многообразии $\tilde{K}$ транзитивно. Доказательство этого факта дословно повторяет соответствующее доказательство из § 6 с сохранением всех обозначений. Надо лишь заменить при этом подалгебры

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= L(h_n, h_{n+1}, h_{n+2}), \\ \mathfrak{l} &= L(h_n), \quad \mathfrak{w} = L(h_{n+1}, h_{n+2}), \quad \mathfrak{v} = L(v_1, v_2) \end{aligned}$$

на подалгебры

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= L(h_{n-1}, h_n, h_{n+1}, \dots, h_{n+4}), \\ \mathfrak{l} &= L(h_{n-1}, h_n), \quad \mathfrak{w} = L(h_{n+1}, \dots, h_{n+4}), \quad \mathfrak{v} = L(v_1, \dots, v_4). \end{aligned}$$

Так как группа G действует транзитивно на многообразии $\tilde{K}$ со стационарной подгруппой D , то $\tilde{K}$ гомеоморфно (а потому и диффеоморфно) многообразию $K = G/D$. В результате на K возникает транзитивное и локально эффективное действие односвязной разрешимой группы Ли $\tilde{G}$ размерности $\dim G + 4$ и указан элемент $x \in K$, для которого стационарными подгруппами $\tilde{G}$ и G являются подгруппы $\tilde{D}'$ и D соответственно. При этом пара $\tilde{G}, \tilde{D}'$ явно строится с помощью пары G, D . Можно считать поэтому, что $\tilde{D} = \tilde{D}'$. Это завершает доказательство теоремы в случае $\dim \mathfrak{l} = 2$.

Конечно, построенная группа преобразований $\tilde{G}$ многообразия K , в свою очередь, может быть расширена до группы преобразований того же многообразия, размерность которой больше размерности $\tilde{G}$ на 2 или на 4. В связи с этим полезно иметь в виду, что 4-мерный идеал $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_k$ алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ может содержать одномерный идеал алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$. В то же время при достаточно больших натуральных k идеал $\mathfrak{w}_k$ не содержит одномерных идеалов $\tilde{\mathfrak{g}}$. Разумеется, в последнем случае $\mathfrak{w}_k$ имеет хотя бы один двумерный идеал $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Для подтверждения сказанного рассмотрим формулы (28). Из них следует, что в алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$ ограничение $\text{ad } h_1$ на идеал $\mathfrak{w}_k$ имеет в его базисе $h_{n+1}, \dots, h_{n+4}$ матрицу

$$T = \begin{bmatrix} c_{1n-1}^{n-1} & -2\pi k & c_{1n}^{n-1} & 0 \\ 2\pi k & c_{1n-1}^{n-1} & 0 & c_{1n}^{n-1} \\ c_{1n-1}^n & 0 & c_{1n}^n & -2\pi k \\ 0 & c_{1n-1}^n & 2\pi k & c_{1n}^n \end{bmatrix}$$

с характеристическим многочленом

$$\begin{aligned} g(x) &= |xE - T| = [(x - c_{1n-1}^{n-1})(x - c_{1n}^n) - c_{1n-1}^n c_{1n}^{n-1}]^2 \\ &\quad + 4\pi^2 k^2 [(x - c_{1n-1}^{n-1})^2 + (x - c_{1n}^n)^2 + 2c_{1n-1}^n c_{1n}^{n-1} + 4\pi^2 k^2]. \end{aligned}$$

Очевидно, $g(x)$ не имеет действительных корней, если

$$c_{1n-1}^n c_{1n}^{n-1} + 2\pi^2 k^2 > 0.$$

Ясно, что при достаточно больших натуральных k последнее неравенство выполняется. Это означает, что при таких k идеал $\mathfrak{w}_k$ не содержит одномерных инвариантных относительно $\text{ad } h_1$ подпространств, а потому и одномерных идеалов алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Если

$$c_{1n}^n = c_{1n-1}^{n-1}, \quad c_{1n}^{n-1} = -c_{1n-1}^n = 2\pi k,$$

то

$$g(x) = [(x - c_{1n}^n)^2 + 4\pi^2 k^2]^2 + 8\pi^2 k^2 [(x - c_{1n}^n)^2 - 2\pi^2 k^2].$$

При этом $g(c_{1n}^n) = 0$, т.е. $x = c_{1n}^n$ — действительный корень $g(x)$. Это означает, что для натурального $k = 1/2\pi c_{1n}^{n-1}$ идеал $\mathfrak{w}_k$ содержит одномерное подпространство, инвариантное относительно $\text{ad } h_1$. Если $[h_i, \mathfrak{w}_k] = \{0\}$, $i = 2, \dots, n$, то это подпространство является идеалом алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Приведем соответствующий пример.

Пусть G — группа матриц вида

$$g(x, y, z) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi x & \sin 2\pi x & 0 & z \\ -\sin 2\pi x & \cos 2\pi x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где x, y, z — произвольные действительные числа. Группа G — трехмерная односвязная разрешимая группа Ли, обладающая равномерной дискретной подгруппой (см. [10; гл. 3]).

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G обладает базисом h_1, h_2, h_3 с таблицей умножения

$$[h_1, h_2] = -2\pi h_3, \quad [h_1, h_3] = 2\pi h_2, \quad [h_2, h_3] = 0.$$

В этом примере

$$n = 3, \quad c_{12}^2 = 0, \quad c_{12}^3 = -2\pi, \quad c_{13}^2 = 2\pi, \quad c_{13}^3 = 0,$$

так что

$$c_{13}^3 = c_{12}^2 = 0, \quad c_{13}^2 = -c_{12}^3 = 2\pi, \quad k = 1.$$

В то же время из $[h_2, h_3] = 0$ следует (см. § 7), что

$$[h_2, \mathfrak{w}_1] = [h_3, \mathfrak{w}_1] = \{0\}.$$

§ 9. Один пример

Пусть G — группа матриц вида

$$g(x, y, z) = \begin{bmatrix} e^{\lambda x} & 0 & 0 & z \\ 0 & e^{-\lambda x} & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где x, y, z – произвольные действительные числа, λ – фиксированное действительное число, для которого $e^\lambda + e^{-\lambda}$ – целое число, $\lambda \neq 0$ (см. [10; гл. 3]). Группа G – трехмерная односвязная разрешимая группа Ли, обладающая равномерной дискретной подгруппой D с тремя образующими d_1, d_2, d_3 вида

$$d_1 = g(1, 0, 0), \quad d_2 = g(0, y_2, z_2), \quad d_3 = g(0, y_3, z_3).$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G обладает базисом h_1, h_2, h_3 с таблицей умножения

$$[h_1, h_2] = -\lambda h_2, \quad [h_1, h_3] = \lambda h_3, \quad [h_2, h_3] = 0. \quad (33)$$

Алгебра $\mathfrak{g}$, а вместе с ней и группа G , не зависят от выбора λ .

Очевидно,

$$\mathfrak{g} = L(h_1) + L(h_2, h_3)$$

– прямая сумма одномерной подалгебры $L(h_1)$ двумерного коммутативного идеала $L(h_2, h_3)$, который является коммутантом алгебры $\mathfrak{g}$ и содержит одномерный идеал $\mathfrak{l} = L(h_3)$ алгебры $\mathfrak{g}$.

В соответствии с результатами § 4 и формулами (8)–(12) можно говорить об алгебре Ли

$$\tilde{\mathfrak{g}}(k_1) = L(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5),$$

в которой h_1, h_2, h_3 коммутируют друг с другом по формулам (33) и, кроме того,

$$[h_1, h_4] = \lambda h_4 + 2\pi k_1 h_5, \quad [h_1, h_5] = -2\pi k_1 h_4 + \lambda h_5, \quad (34)$$

а $\mathfrak{w}(k_1) = L(h_2, h_3, h_4, h_5)$ – коммутативная подалгебра алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}(k_1)$. При этом предполагается, что k_1 – произвольное натуральное число, большее некоторого натурального k_0 .

Односвязная группа Ли $\tilde{G}(k_1)$ с алгеброй Ли $\tilde{\mathfrak{g}}(k_1)$ действует транзитивно и локально эффективно на трехмерном компактном солвмногообразии $K = G/D$. Мы покажем, что если группа $\tilde{G}(k_1)$ изоморфна группе $\tilde{G}(k'_1)$, то $k_1 = k'_1$. Это эквивалентно аналогичному утверждению для алгебр Ли $\tilde{\mathfrak{g}}(k_1)$ и $\tilde{\mathfrak{g}}(k'_1)$.

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли вида

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{b} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

– прямая сумма одномерной подалгебры $\mathfrak{b}$ и n -мерного коммутативного коммутанта $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Пусть

$$\mathfrak{b} = L(e), \quad [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = L(e_1, \dots, e_n),$$

и пусть

$$[e, e_1] = a_{11}e_1 + \dots + a_{n1}e_n,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$[e, e_n] = a_{1n}e_1 + \dots + a_{nn}e_n.$$

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Предположим, что $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ – изоморфные алгебры Ли и $\varphi: \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}$ – соответствующий изоморфизм. Ясно, что $\varphi([\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Пусть A и A' – матрицы, построенные для алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ с помощью базисов $e, e_1, \dots, e_n$ и $e', e'_1, \dots, e'_n$ соответственно. Если отождествить $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ с помощью изоморфизма φ , то $e', e'_1, \dots, e'_n$ можно рассматривать как еще один базис алгебры $\mathfrak{g}$. Поэтому согласно сказанному выше собственные значения матриц A и A' должны быть пропорциональными с вещественным коэффициентом пропорциональности. Это означает, что если собственные значения матриц A и A' не пропорциональны, то алгебры $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ не могут быть изоморфными. Этим фактом мы и будем пользоваться далее.

Вернемся к нашему примеру и рассмотрим алгебру $\tilde{\mathfrak{g}}(k_1)$ с базисом $h_1, \dots, h_5$. Из формул (33) и (34) следует, что для этого базиса

$$A = A(k_1) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -2\pi k_1 \\ 0 & 0 & 2\pi k_1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Матрица $A(k_1)$ имеет характеристический многочлен

$$|xE - A(k_1)| = (x + \lambda)(x - \lambda)((x - \lambda)^2 + 4\pi^2 k_1^2)$$

с собственными значениями

$$-\lambda, \quad \lambda, \quad \lambda - 2\pi k_1 i, \quad \lambda + 2\pi k_1 i. \quad (35)$$

Пусть известно, что алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}(k_1)$ и $\tilde{\mathfrak{g}}(k'_1)$ изоморфны. Тогда собственные значения матриц $A(k_1)$ и $A(k'_1)$ должны быть пропорциональны. Ясно, что $A(k'_1)$ имеет собственные значения

$$-\lambda, \quad \lambda, \quad \lambda - 2\pi k'_1 i, \quad \lambda + 2\pi k'_1 i. \quad (36)$$

Если набор (36) получается из набора (35) умножением на некоторое действительное α , то, сравнивая в этих наборах действительные числа, приходим к выводу, что $\alpha = \pm 1$. Из сравнения их комплексных чисел получаем, что $\alpha = 1$. Но тогда $k_1 = k'_1$, т.е. алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}(k_1)$ попарно не изоморфны, так же, как и группы $\tilde{G}(k_1)$, $k_1 > k_0$.

Каждая группа Ли $\tilde{G}(k_1)$ есть 5-мерная группа преобразований 3-мерного компактного многообразия $K = G/D$ с алгеброй Ли

$$\tilde{\mathfrak{g}}(k_1) = L(h_1) + L(h_2, \dots, h_5).$$

При этом $L(h_2, \dots, h_5) = [\tilde{\mathfrak{g}}(k_1), \tilde{\mathfrak{g}}(k_1)]$ – коммутативный идеал алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}(k_1)$, содержащий ее одномерный идеал $\mathfrak{l} = L(h_3)$. Поэтому можно расширить группу $\tilde{G}(k_1)$ тем же способом, которым мы уже пользовались при расширении группы G до группы $\tilde{G}(k_1)$.

Рассмотрим алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}(k_1, k_2) = L(h_1, \dots, h_7)$, в которой $h_1, \dots, h_5$ коммутируют друг с другом по правилам (33) и (34), $L(h_2, \dots, h_7)$ – коммутативная подалгебра $\tilde{\mathfrak{g}}(k_1, k_2)$ и, кроме того,

$$[h_1, h_6] = \lambda h_6 + 2\pi k_2 h_7, \quad [h_1, h_7] = -2\pi k_2 h_4 + \lambda h_7. \quad (37)$$

Очевидно,

$$L(h_2, \dots, h_7) = [\tilde{\mathfrak{g}}(k_1, k_2), \tilde{\mathfrak{g}}(k_1, k_2)].$$

Для алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}(k_1, k_2)$ и ее базиса $h_1, \dots, h_7$ матрица $A = A(k_1, k_2)$ имеет следующий вид:

$$A(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -2\pi k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi k_1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -2\pi k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi k_2 & \lambda \end{bmatrix}.$$

При этом k_2 пробегает все натуральные значения, большие некоторого фиксированного номера. Дополнительно потребуем, чтобы $k_1 < k_2$.

Собственные значения матрицы $A(k_1, k_2)$ таковы:

$$-\lambda, \quad \lambda, \quad \lambda - 2\pi k_1 i, \quad \lambda + 2\pi k_1 i, \quad \lambda - 2\pi k_2 i, \quad \lambda + 2\pi k_2 i. \quad (38)$$

Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}(k_1, k_2) \cong \tilde{\mathfrak{g}}(k'_1, k'_2)$. Тогда набор собственных значений матрицы $A(k'_1, k'_2)$

$$-\lambda, \quad \lambda, \quad \lambda - 2\pi k'_1 i, \quad \lambda + 2\pi k'_1 i, \quad \lambda - 2\pi k'_2 i, \quad \lambda + 2\pi k'_2 i \quad (39)$$

получается умножением набора (38) на некоторое действительное α (без учета порядка элементов набора). Сравнивая действительные числа из (38) и (39), заключаем, что $\alpha = \pm 1$. Если $\alpha = -1$, то сравнивая вещественные части комплексных чисел из (38) и (39), приходим к выводу, что $\lambda = 0$. Так как это неверно, то $\alpha = 1$. Но тогда либо $k_1 = k'_1$, $k_2 = k'_2$, либо $k_1 = k'_2$, $k_2 = k'_1$. Последнее, однако, противоречит условиям $k_1 < k_2$, $k'_1 < k'_2$. Значит, $k_1 = k'_1$, $k_2 = k'_2$.

Все это означает, что если $\tilde{G}(k_1, k_2) \cong \tilde{G}(k'_1, k'_2)$, то $k_1 = k'_1$, $k_2 = k'_2$.

Продолжая процесс расширения, приходим к группам $\tilde{G}(k_1, k_2, \dots, k_n)$, зависящим от параметров $k_1, \dots, k_n$, принимающих натуральные значения, большие некоторых фиксированных. При этом дополнительно требуется, чтобы $k_1 < k_2 < \dots < k_n$. Все эти группы действуют транзитивно и локально эффективно на исходном 3-мерном компактном солвмногообразии $K = G/D$ и попарно не изоморфны как группы Ли.

Коммутант алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ каждой уже построенной группы $\tilde{G}$ кроме одномерных идеалов алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ содержит двумерные коммутативные идеалы $\tilde{\mathfrak{g}}$, каждый из которых можно использовать для нового расширения группы $\tilde{G}$. Алгебра Ли такого расширения будет содержать 4-мерный идеал, из которого можно выделить подходящий 2-мерный идеал этой алгебры. Каждый такой 2-мерный идеал можно использовать для построения очередного расширения и так далее.

В результате возникает плохо обозримое множество односвязных разрешимых групп Ли, действующих транзитивно и локально эффективно на данном 3-мерном компактном многообразии K . Вполне возможно, что к уже построенным группам преобразований солвмногообразия K придется добавлять новые

разрешимые группы Ли, содержащие равномерные подгруппы, изоморфные стационарным подгруппам уже построенных групп (см. [2]). Наконец, не исключено, что на многообразии K могут действовать нужные группы преобразований, отличные от описанных.

Разобранный пример говорит в пользу того, что проблема Ауслендера скорее всего не имеет удовлетворительного решения.

Список литературы

- [1] L. Auslander, “An exposition of the structure of solvmanifolds. I. Algebraic theory”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79**:2 (1973), 227–261.
- [2] М. В. Милованов, “Описание разрешимых групп Ли с заданной равномерной подгруппой”, *Матем. сб.*, **113**(155):1(9) (1980), 98–117; англ. пер.: M. V. Milovanov, “A description of solvable Lie groups with a given uniform subgroup”, *Math. USSR-Sb.*, **41**:1 (1982), 83–99.
- [3] М. В. Милованов, “О группах преобразований компактных солвмногообразий и проблеме Ауслендера”, *Докл. НАН Беларуси*, **54**:5 (2010), 11–14.
- [4] М. В. Милованов, “Полные инволютивные наборы функций на кокасательных расслоениях компактных солвмногообразий”, *Матем. сб.*, **198**:5 (2007), 115–136; англ. пер.: M. V. Milovanov, “Complete involutive sets of functions on the cotangent bundles of compact solvmanifolds”, *Sb. Math.*, **198**:5 (2007), 711–731.
- [5] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974, 431 с.; англ. пер.: V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Grad. Texts in Math., **60**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1978, xvi+462 pp.
- [6] С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1964, 533 с.; пер. с англ.: S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **XII**, Academic Press, New York–London, 1962, xiv+486 pp.
- [7] R. S. Palais, *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, Mem. Amer. Math. Soc., no. 22, 1957, iii+123 pp.
- [8] А. И. Мальцев, “Об односвязности нормальных делителей групп Ли”, *Докл. АН СССР*, **34**:1 (1942), 12–15.
- [9] G. D. Mostow, “Factor spaces of solvable groups”, *Ann. of Math.* (2), **60**:1 (1954), 1–27.
- [10] Л. Ауслендер, Л. Грин, Ф. Хан, *Потоки на однородных пространствах*, Мир, М., 1966, 208 с.; пер. с англ.: L. Auslander, L. Green, F. Hahn, *Flows on homogeneous spaces*, Ann. of Math. Stud., **53**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1963, vii+107 pp.

Михаил Васильевич Милованов
(Mikhail V. Milovanov)

Белорусский государственный педагогический
университет им. М. Танка, г. Минск
E-mail: mvmil@mail.ru

Поступила в редакцию
06.01.2014 и 03.07.2014