Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Осипов, Неравенство Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа в пространствах Мори–Кампанато, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 7, 95–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8324>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 15:53:05

УДК 517.443+517.444

Н. Н. Осипов

Неравенство Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсия в пространствах Мори–Кампанато

Рубио де Франсия доказал одностороннее неравенство Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов в L^p , $2 \leq p < \infty$. Его методы можно доработать и доказать с их помощью аналог такого неравенства для показателей p , “больших бесконечности”, т.е. для классов Гёльдера и пространства ВМО.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: пространство ВМО, операторы Кальдерона–Зигмунда, мультипликаторы Фурье, пространства Гёльдера, пространство Липшица.

DOI: 10.4213/sm8324

§ 1. История вопроса

Пусть $\{\Delta_m\}$ – конечный или счетный набор попарно не пересекающихся интервалов на прямой $\mathbb{R}$. Через M_{Δ_m} мы будем обозначать операторы, которые соответствуют мультипликаторам χ_{Δ_m} :

$$M_{\Delta_m} f = (\widehat{f} \chi_{\Delta_m})^\vee.$$

В 1983 г. Дж. Рубио де Франсия доказал (см. [1]), что

$$\left\| \left(\sum_m |M_{\Delta_m} f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad 2 \leq p < \infty, \quad (1.1)$$

где константа C_p не зависит ни от функции f , ни от интервалов Δ_m . Из соображений двойственности вытекает, что эта оценка эквивалентна следующему неравенству:

$$\left\| \sum_m f_m \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \left\| \left(\sum_m |f_m|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad 1 < p \leq 2, \quad (1.2)$$

где $\{f_m\}$ – последовательность функций таких, что $\text{supp } \widehat{f}_m \subset \Delta_m$. В 1984 г. Дж. Бургейн (см. [2]) доказал, что оценка (1.2) остается верной при $p = 1$. При этом его доказательство было существенно сложнее, чем у Рубио де Франсия. Однако в 2005 г. С. В. Кисляков и Д. В. Париков, применив технику, сходную с той, которую использовал Рубио де Франсия, установили (см. [3]), что оценка (1.2) выполняется для всех $0 < p \leq 2$. Для $p \leq 1$ это скорее H^p -, чем

Работа выполнена при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышёва СПбГУ (грант Правительством РФ, договор № 11.Г34.31.0026), Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00526) и стипендии им. В. А. Рохлина (фонд им. Л. Эйлера).

L^p -оценка: дело в том, что идея упомянутого доказательства в значительной мере опиралась на свойства операторов типа Кальдерона–Зигмунда, действующих на “действительных” классах Харди H^p (см., например, [4], [5]).

Теперь заметим, что в качестве пространства, двойственного к классу H^1 , выступает ВМО, а пространствами, двойственными к классам H^p при $p < 1$, являются пространства Гёльдера (см. [5], [6]). Возникает естественный вопрос: существует ли двойственный вариант оценки (1.2) для показателей $p \in (0, 1]$? Хотя метод Рубио де Франсия позволяет ответить на этот вопрос, привести нашу задачу к тому виду, в котором она этим методом решается, оказывается непросто. Во-первых, можно доказать, что прямой аналог оценки (1.1) для пространства ВМО и классов Гёльдера неверен (это замечание мы обсудим ниже). Поэтому прежде всего необходимо понять, как вообще должна выглядеть наша теорема. Вторая проблема заключается в том, что с нормами в пространстве ВМО и в классах Гёльдера приходится обращаться более аккуратно, чем с H^p - или L^p -нормами. А именно, нужно учитывать тот факт, что ВМО-норма и любая гёльдерова норма не инвариантны относительно умножения функции на выражения вида $e^{2\pi i ax}$. Наконец, отметим, что вместо оценок для норм мы докажем более тонкие поточечные оценки (из которых оценки для норм будут следовать).

Обсудим вышеупомянутые проблемы. Во-первых, отметим, что напрямую применить соображения двойственности к оценке (1.2) при $0 < p \leq 1$ не удастся. Дело в том, что при доказательстве неравенства (1.2) классы H^p возникают некоторым нетривиальным образом. В качестве пояснения заметим, что функция f , спектр которой лежит в интервале $[a, b]$, естественным образом порождает по крайней мере две функции из класса H^p – функцию $e^{-2\pi i ax} f(x)$ и функцию $e^{-2\pi i bx} f(x)$ (одна из них является “аналитической”, другая – “антианалитической”). Обе эти функции используются в доказательстве оценки (1.2) для $p \in (0, 1]$. А именно, заметим, что в [1], [3], [7] авторы на самом деле рассматривали операторы вида

$$S^1 f(x) = \{e^{-2\pi i a_m x} M_{\Delta_m} f(x)\}, \quad S^2 f(x) = \{e^{-2\pi i b_m x} M_{\Delta_m} f(x)\}$$

(или сопряженные к ним), где a_m и b_m – соответственно левый и правый концы интервала Δ_m . Хорошо известно (и легко проверяется), что эти операторы не ограничены на пространствах, двойственных к классам H^p . Мы приведем здесь соответствующее рассуждение для пространства ВМО $= (H^1)^*$. Допустим, что

$$\|M_{[0, \eta]}(f)\|_{\text{ВМО}} \leq C \|f\|_{\text{ВМО}},$$

где $f \in L^2 \cap \text{ВМО}$ и константа C не зависит ни от f , ни от η . Рассмотрим некоторую функцию $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $\varphi \equiv 1$ на отрезке $[1, 2]$ и $\varphi \equiv 0$ вне отрезка $[0, 3]$. Тогда операторы, соответствующие мультипликаторам Фурье $\varphi(\eta\xi)$, $\eta > 0$, будут равномерно ограничены из L^1 в H^1 (так как они сопоставляют функциям из L^1 функции со спектром в $\mathbb{R}_+$), а значит, и из ВМО в L^∞ . Но это означает, что если $\text{supp } \hat{f} \subset [\eta, 2\eta]$, то $\|f\|_{\text{ВМО}} \asymp \|f\|_{L^\infty}$. С другой стороны, если мы положим $\Delta = [0, \frac{3}{2}\eta]$, то тогда по нашему предположению будет верна оценка $\|M_\Delta f\|_{\text{ВМО}} \leq C \|f\|_{\text{ВМО}}$. Это значит, что если $\text{supp } \hat{f} \subset [\eta, 2\eta]$, то $\|M_\Delta f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^\infty}$. Но тогда получается, что антианалитический проектор Риса равномерно ограничен в L^∞ на всех функциях, носитель преобразования Фурье которых компактен. Мы пришли к противоречию.

Однако после небольшого исправления операторы S^1 и S^2 все же становятся ограниченными на пространстве ВМО и на классах Гёльдера. Нужно лишь сгладить каждый мультипликатор χ_{Δ_m} на одном из концов отрезка Δ_m . Чтобы пояснить, что имеется в виду, мы предварительно опишем некоторый частный случай основного результата настоящей статьи. Рассмотрим две функции ψ^1 и ψ^2 из $C^\infty([0, 1])$ такие, что $\text{supp } \psi^1 \subset [0, 2/3]$, $\text{supp } \psi^2 \subset [1/3, 1]$ и при этом $\psi^1 + \psi^2 \equiv 1$ на $[0, 1]$. Продолжим эти функции нулем на всю вещественную прямую. Теперь, используя сдвиги и растяжения, мы можем построить функции ψ_m^1 и ψ_m^2 такие, что $\psi_m^1 + \psi_m^2 \equiv \chi_{\Delta_m}$. Каждая такая функция гладкая на одном из концов соответствующего интервала. Теперь мы переопределим операторы S^1 и S^2 , используя функции ψ_m^1 вместо χ_{Δ_m} для S^1 и функции ψ_m^2 для S^2 . Оказывается, если $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \text{ВМО}(\mathbb{R})$, то $S^\sigma f \in \text{ВМО}(\mathbb{R})$, $\sigma = 1, 2$, и $\|S^\sigma f\|_{\text{ВМО}} \leq C \|f\|_{\text{ВМО}}$. Все это останется верным, если вместо пространства ВМО взять один из классов Гёльдера $\text{Lip}_s(\mathbb{R})$, $0 < s < 1$ (см. (2.1)). Также мы сможем сформулировать содержательное утверждение в духе соотношения (1.1) для функций, которые удовлетворяют ВМО-условию или условию Гёльдера лишь в одной точке.

Еще отметим, что у оценок (1.1) и (1.2) существуют многомерные аналоги для всех $p \in (0, \infty)$ (см. [8]–[10]), которые не являются прямым следствием одномерных результатов. В этой связи было бы интересно получить многомерный вариант результатов, представленных в этой работе.

§ 2. Предварительные сведения

Как мы увидим в дальнейшем, в контексте нашей задачи наиболее естественными нормами в пространствах гладких функций являются нормы Мори–Кампанато.

2.1. Пространства Мори–Кампанато. Через $\mathcal{P}_i$ мы обозначим пространство алгебраических полиномов степени, строго меньшей i , и при этом положим $\mathcal{P}_0 = \{0\}$. Для l^2 -значных полиномов будем использовать обозначение $\mathcal{P}_i(l^2)$. Теперь дадим определение пространств Мори–Кампанато $\dot{C}_p^{s,i}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Рассмотрим параметры $i \in \mathbb{Z}_+$, $p \in [1, \infty)$ и $s \in (-n/p, i]$. Пусть f – локально суммируемая функция на $\mathbb{R}^n$ (скалярнозначная или l^2 -значная). Мы говорим, что f принадлежит $\dot{C}_p^{s,i}(\mathbb{R}^n)$, если

$$\|f\|_{i,p,s} = \sup_Q \inf_P \frac{1}{|Q|^{s/n}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - P|^p \right)^{1/p} < \infty,$$

где супремум берется по всем кубам в $\mathbb{R}^n$, а инфимум – по всем полиномам из $\mathcal{P}_i$ (или из $\mathcal{P}_i(l^2)$).

Из неравенства Джона–Ниренберга вытекает, что ВМО совпадает с $\dot{C}_p^{0,1}$ для всех $p \in [1, \infty)$ (в смысле эквивалентности норм). Сформулируем аналог этого факта для $s > 0$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $i \in \mathbb{N}$ и $s \in (0, i]$. Тогда в любых двух пространствах $\dot{C}_p^{s,i}$, $1 \leq p < \infty$, нормы будут эквивалентны.

Доказательство можно найти в [11], [12] (также оно изложено в [13; § 1.1.2]). При $s > 0$ такая эквивалентность норм в некотором смысле сохраняется и для $p = \infty$. Точнее говоря, если $s > 0$, то пространства Мори–Кампанато совпадают со стандартными пространствами функций, у которых ограничены степенные модули непрерывности различных порядков (см. [11], [12] и изложение соответствующей теории в [13]). Прежде всего приведем результат для $0 < s \leq 1$.

ЛЕММА 2.2. *Если $0 < s \leq 1$ и $1 \leq p < \infty$, то пространство $\dot{C}_p^{s,1}$ совпадает с классом Гёльдера Lip_s , который определяется полунормой*

$$\|f\|_{\text{Lip}_s} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^s}. \quad (2.1)$$

На самом деле все пространства Кампанато (пространства $\dot{C}_p^{s,i}$ при $s > 0$) могут быть перенормированы в терминах конечных разностей. А именно, для функции f на $\mathbb{R}^n$ и вектора $h \in \mathbb{R}^n$ определим конечные разности $\Delta_h^\alpha f$ с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x + h) - f(x), \quad \Delta_h^\alpha f(x) = \Delta_h^1 \Delta_h^{\alpha-1} f(x), \quad \alpha = 1, 2, \dots$$

ЛЕММА 2.3. *Пусть $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ и $0 < s \leq i$. Тогда можно выбрать такое число $\alpha \in \mathbb{N}$, что пространство $\dot{C}_p^{s,i}$ совпадает с классом локально интегрируемых функций, удовлетворяющих условию*

$$|\Delta_h^\alpha f(x)| \leq C|h|^s,$$

где константа C не зависит ни от x , ни от h . Инфимум всех таких C определяет эквивалентную полунорму в $\dot{C}_p^{s,i}$.

Например, пространство $\dot{C}_p^{1,2}$ совпадает с классом Зигмунда Z , который определяется условием $|\Delta_h^2 f(x)| \leq C|h|$. Подробности можно найти в [13; § 4.1.1].

Наконец, при $s < 0$ мы получаем так называемые пространства Мори.

2.2. Максимальные функции. Теперь мы опишем максимальные функции, соответствующие нормам Мори–Кампанато. Они были подробно изучены в [14].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Рассмотрим параметры $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, \infty)$ и $i \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $h = \{h_m\}$ не более чем счетный набор измеримых функций, заданных на $\mathbb{R}^n$. Тогда максимальная функция $M_{i,p,s}h$ определяется формулой

$$M_{i,p,s}h(x) = \sup_{Q \ni x} \inf_P \frac{1}{|Q|^{s/n}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |h - P|_{l^2}^p \right)^{1/p},$$

где супремум берется по всем кубам, содержащим x , а инфимум – по всем наборам $P = \{P_m\}$ полиномов $P_m \in \mathcal{P}_i$.

Мы записали это определение в форме, которая несколько отличается от стандартной. А именно, мы не предполагаем, что h лежит в $L^1(l^2)$. Более того, мы даже не требуем, чтобы h и P были l^2 -значными функциями. Все дело в том, что мы собираемся применять максимальные операторы в ситуации, когда не знаем, является ли последовательность h функцией, действующей в l^2 . Но оказывается, что если функция $M_{i,p,s}h$ конечна хотя бы в одной точке, то последовательность h можно “исправить” таким образом, чтобы она стала l^2 -значной функцией. А именно, мы можем сформулировать следующее простое утверждение.

ФАКТ 2.1. Пусть $h = \{h_m\}$ – счетный набор заданных на $\mathbb{R}^n$ измеримых функций такой, что $M_{i,p,s}h(x_0) < \infty$ в некоторой точке x_0 . Тогда существует набор $P = \{P_m\}$ полиномов $P_m \in \mathcal{P}_i$ такой¹, что $h - P \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, l^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторый куб Q_1 , содержащий точку x_0 . По определению 2.2 мы можем выбрать такой набор P_1 полиномов, что $h - P_1 \in L^p(Q_1, l^2)$. Также рассмотрим другой куб Q_2 , $Q_2 \supset Q_1$, и соответствующий набор P_2 такой, что $h - P_2 \in L^p(Q_2, l^2)$. Мы имеем

$$P_2 - P_1 = (h - P_1) - (h - P_2) \in L^p(Q_1, l^2).$$

А значит, $P_2 - P_1 \in \mathcal{P}_i(l^2)$ и

$$h - P_1 = (h - P_2) + (P_2 - P_1) \in L^p(Q_2, l^2).$$

Таким образом, можно положить $P = P_1$.

В свою очередь, для “настоящей” функции (например, для последовательности, исправленной с помощью вышеописанной процедуры) можно сформулировать следующую лемму.

ЛЕММА 2.4. Предположим, что $i \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p < \infty$ и $s \in (-n/p, i]$. Пусть β – положительное число такое, что $\beta > \max\{s, i - 1\}$. Рассмотрим измеримую заданную на $\mathbb{R}^n$ функцию f (скалярнозначную или l^2 -значную) такую, что функция $M_{i,p,s}f$ конечна хотя бы в одной точке. Тогда функция

$$|f(x)|(1 + |x|^{n+\beta})^{-1}$$

окажется суммируемой.

Неявное доказательство этой леммы можно найти в [13; § 4.4.1].

Также нам потребуется некоторая модификация оператора $M_{i,p,s}$. Дело в том, что существуют проекции $\mathfrak{P}_Q$, действующие из $L^p(Q; dx/|Q|)$ на $\mathcal{P}_i$ и ограниченные в $L^p(Q; dx/|Q|)$ равномерно по Q . С помощью таких проекций можно выбрать полиномы, которые “почти” реализуют инфимумы из определения 2.2. А именно, пусть f – локально суммируемая функция на $\mathbb{R}^n$ (скалярнозначная или l^2 -значная). Тогда функция $M_{i,p,s}f$ эквивалентна следующему выражению:

$$\widetilde{M}_{i,p,s}f(x) = \sup_Q \frac{1}{|Q|^{s/n}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - \mathfrak{P}_Q f|^p \right)^{1/p}, \quad (2.2)$$

где супремум берется по всем кубам с центром в точке x . Подробности можно найти в [14] или в [13; § 1.2.2, § 4.4.1].

§ 3. Основной результат и его обсуждение

3.1. Прежде всего мы сформулируем предварительную версию основной теоремы. А именно, чтобы избежать трудностей, связанных с определением мультипликаторов Фурье, мы дополнительно предположим, что $f \in L^2(\mathbb{R})$.

¹Еще раз подчеркнем, что h и P не обязательно являются l^2 -значными функциями.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\Delta_m = [a_m, b_m]$ – попарно не пересекающиеся интервалы на прямой $\mathbb{R}$ с длинами $l_m = b_m - a_m$. Здесь индекс m пробегает некоторое не более чем счетное множество $\mathcal{M}$. Предположим, что $0 \notin (a_m, b_m)$ для любого $m \in \mathcal{M}$. Рассмотрим две функции ψ^1 и ψ^2 из $C^\infty([0, 1])$ такие, что

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} \psi^1 &\subset \left[0, \frac{2}{3}\right], & \operatorname{supp} \psi^2 &\subset \left[\frac{1}{3}, 1\right], \\ \psi^1 + \psi^2 &\equiv 1 & \text{ на отрезке } [0, 1]. \end{aligned}$$

Мы продолжим эти функции нулем на всю вещественную прямую, после чего, используя сдвиги и растяжения, преобразуем их в функции с носителями в отрезках Δ_m :

$$\psi_m^\sigma(\xi) = \psi^\sigma\left(\frac{\xi - a_m}{l_m}\right), \quad \sigma = 1, 2.$$

Пусть $f \in L^2(\mathbb{R})$. Определим два линейных оператора S^σ по формулам

$$\begin{aligned} S^1 f(x) &= \{e^{-2\pi i a_m x} (\widehat{f} \psi_m^1)^\vee(x)\}_{m \in \mathcal{M}}, \\ S^2 f(x) &= \{e^{-2\pi i b_m x} (\widehat{f} \psi_m^2)^\vee(x)\}_{m \in \mathcal{M}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Тогда при условии², что $i \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $s \in (-1/2, i]$ и $r > \max\{s, i - 1\}$, мы имеем

$$M_{r,2,s}(S^\sigma f) \leq C M_{i,2,s} f,$$

где константа C не зависит ни от функции f , ни от интервалов Δ_m .

В свете изложенного в § 2 ясно, что из этой теоремы вытекают факты, описанные в конце § 1. Однако теперь мы не предполагаем, что функция $M_{i,2,s} f$ конечна почти всюду. В частности, наша оценка верна, даже если эта функция конечна лишь в одной точке. Из чего в свою очередь вытекает, что функция $S^\sigma f$ в определенном смысле гладкая в той же самой точке. Все это относится и к сформулированной ниже теореме 3.2, в которой мы избавляемся от ограничения $f \in L^2$. К сожалению, отсутствие этого ограничения приводит к более громоздкой формулировке.

Рассмотрим измеримую функцию f такую, что функция $M_{i,p,s} f$ конечна в некоторой точке, и функцию φ из класса Шварца $\mathcal{S}$. Из леммы 2.4 сразу вытекает, что преобразование Фурье функции f корректно определено, $f * \varphi \in C^\infty$, $f * \varphi \in \mathcal{S}'$ и $\widehat{f * \varphi} = \widehat{f} \widehat{\varphi}$. Все это позволяет сформулировать окончательную версию нашей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть Δ_m и ψ_m^σ , $\sigma = 1, 2$, – интервалы и функции, введенные в теореме 3.1. Предположим, что f – измеримая функция на $\mathbb{R}$ такая, что функция $M_{i,2,s} f$ конечна в некоторой точке. Тогда для каждого m существуют две последовательности функций $\psi_{m,\nu}^\sigma \in \mathcal{S}$ (их выбор не зависит от функции f) и две последовательности полиномов³ $p_{m,\nu}^\sigma \in \mathcal{P}_r$ (зависящие от f) такие, что:

- 1) последовательности $\psi_{m,\nu}^\sigma$ сходятся к функциям ψ_m^σ в $L^2(\mathbb{R})$ при $\nu \rightarrow \infty$;

²С этого момента символами s , i и r будут всегда обозначаться параметры, удовлетворяющие указанным соотношениям (если только специально не оговорено противное).

³Здесь мы не предполагаем, что $\{p_{m,\nu}^\sigma\}_{m \in \mathcal{M}} \in \mathcal{P}_r(l^2)$.

2) существуют две функции $g^\sigma = \{g_m^\sigma\}_{m \in \mathcal{M}}$ из $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}, l^2)$ такие, что

$$\begin{aligned} \{e^{-2\pi i a_m x} (\widehat{f} \psi_{m,\nu}^1)^\vee(x) - p_{m,\nu}^1(x)\}_{m \in \mathcal{M}} &\rightarrow g^1, \\ \{e^{-2\pi i b_m x} (\widehat{f} \psi_{m,\nu}^2)^\vee(x) - p_{m,\nu}^2(x)\}_{m \in \mathcal{M}} &\rightarrow g^2 \end{aligned}$$

при $\nu \rightarrow \infty$, где предел можно брать в $L^2(I, l^2)$ для любого интервала I ;

3) если положить

$$\widetilde{S}^\sigma f = g^\sigma,$$

то будет выполняться оценка

$$M_{r,2,s}(\widetilde{S}^\sigma f) \leq CM_{i,2,s}f,$$

где константа C не зависит ни от функции f , ни от интервалов Δ_m .

Нетрудно видеть, что из теоремы 3.2 сразу вытекает теорема 3.1.

Как обычно, из локальных оценок вытекают соответствующие оценки для норм.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если $f \in \dot{C}_2^{s,i}(\mathbb{R})$, то

$$\|\widetilde{S}^\sigma f\|_{r,2,s} \leq C\|f\|_{i,2,s}, \quad \sigma = 1, 2,$$

где константа C не зависит ни от функции f , ни от интервалов Δ_m .

Из этого следствия в свою очередь вытекает, что операторы $\widetilde{S}^\sigma$ ограничены из ВМО в ВМО, из Lip_s в Lip_s для $0 < s < 1$, из Lip_1 в Z и из Z в Z .

3.2. Сравнение с рассуждениями Рубио де Франсиа. Отметим, что доказательство неравенства (1.1) в [1] включало в себя некоторую оценку в классе ВМО, которая тем не менее была слабее, чем вышеописанный результат для $s = 0$ (но для целей Рубио де Франсиа ее было достаточно). Чтобы стало понятно, о чем идет речь, опишем некоторые детали этого доказательства. В первую очередь Рубио де Франсиа доказывает, что вместо оператора $Qf = \{M_{\Delta_m} f\}_{m \in \mathcal{M}}$ можно рассматривать некоторый “регуляризованный” оператор H (нам также встретятся такие операторы, см. формулу (6.2)). Грубо говоря, он доказывает, что

$$\|Qf\|_{L^p(l^2)} \leq C_p \|Hf\|_{L^p(l^2)}, \quad 2 \leq p < \infty.$$

После этого он получает оценку

$$M_{1,1,0}(|Hf|_{l^2}) \leq CM_2 f, \quad (3.2)$$

где $M_2 f = (M(f^2))^{1/2}$, а M – обычный максимальный оператор Харди–Литлвуда. На самом деле он оценивает выражение $M_{1,1,0}(Hf)$, но потом использует более грубую оценку (3.2). Оператор $M_{1,1,0}$ – это в точности максимальный оператор $(\cdot)^\sharp$, про который хорошо известно, что $\|g\|_{L^p} \leq C\|g^\sharp\|_{L^p}$ (см. [4], [5]). Собирая все вместе, Рубио де Франсиа получает требуемую L^p -оценку. Отметим два главных отличия между только что описанными рассуждениями и нашим доказательством, представленным ниже. Во-первых, мы должны осуществить переход от операторов $S^{1,2}$ к “хорошему” оператору H не в пространствах L^p , а в пространстве ВМО и в классах Липшица⁴ (что создаст дополнительные трудности). А во-вторых, вместо оценки (3.2) мы доказываем оценки вида $M_{r,2,s}(Hf) \leq CM_{i,2,s}f$.

⁴Точнее, мы имеем дело с соответствующими максимальными функциями.

3.3. Замечание о сдвигах. Умножая в оценке (1.1) каждое из выражений $M_{\Delta_m} f$ на коэффициенты $e^{-2\pi i a_m x}$ или $e^{-2\pi i b_m x}$, мы можем привести неравенство Рубио де Франсия к виду, похожему на оценки из теорем 3.1 и 3.2. Такие коэффициенты действительно возникали в доказательстве неравенства (1.1) (в “хороших” операторах H , о которых мы упоминали выше). Однако в окончательной оценке рассматриваются абсолютные значения, и поэтому в ней эти множители уже не фигурируют. Что касается неравенств из теорем 3.1 и 3.2, то в них наличие таких сдвигов содержательно. Эти теоремы говорят о гладкости l^2 -значной функции, компоненты которой сдвинуты по частоте именно таким образом: они не могут быть сдвинуты обратно из-за неконтролируемой осцилляции обсуждаемых коэффициентов.

Однако в рассуждениях ниже мы все же будем применять к гладким функциям сдвиги по частоте. Предупреждая закономерные вопросы, мы рассмотрим простой пример того, как такая операция может оказаться “безопасной” (этот пример не следует рассматривать как схему общего доказательства, техника которого будет существенно сложнее). Итак, пусть φ – функция из класса Шварца. Мы докажем, что если $|f(s) - f(t)| \leq |s - t|$ для $s, t \in \mathbb{R}$, то при любом $a \notin \text{supp } \widehat{\varphi}$ функция $g = \varphi * (e^{2\pi i a x} f(x))$ удовлетворяет неравенству $|g(s) - g(t)| \leq C|s - t|$, где константа C не зависит от a .

Во-первых, мы знаем, что $|\varphi'(\tau)| \leq C_N/(1 + |\tau|^N)$ для любого $N = 1, 2, \dots$. Во-вторых, можем написать

$$\begin{aligned} g(s) - g(t) &= \int_{\mathbb{R}} [(\varphi(s - x) - \varphi(t - x))e^{2\pi i a x}] f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} [(\varphi(s - x) - \varphi(t - x))e^{2\pi i a x}] (f(x) - f(t)) dx, \end{aligned}$$

поскольку интеграл от функции в квадратных скобках равен нулю по нашему предположению. Теперь разобьем интеграл на сумму двух: по множеству

$$E = \{x \in \mathbb{R}: |x - t| \leq 2|t - s|\}$$

и по его дополнению. Ясно, что первый из этих интегралов ограничен выражением

$$\int_E (|\varphi(s - x)| + |\varphi(t - x)|) 2|t - s| dx \leq 4|t - s| \int_{\mathbb{R}} |\varphi(\tau)| d\tau.$$

Что касается второго интеграла, то, оценивая разность $|\varphi(s - x) - \varphi(t - x)|$ по формуле Лагранжа, мы заключаем, что подынтегральное выражение не превосходит

$$\frac{C|t - s|}{1 + |x - t|^N} |x - t|.$$

Если $N > 2$, то интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|x - t| dx}{1 + |x - t|^N}$$

сходится и не зависит от t . Мы доказали наше утверждение.

§ 4. Разложение операторов из теоремы 3.2

Мы докажем теорему 3.2 лишь для мультипликаторов ψ_m^1 . Доказательство ее второй половины полностью аналогично.

Мы представим оператор $\tilde{S}^1$ как композицию некоторых вспомогательных операторов. Одним из них будет оператор типа Рубио де Франсиа: вместо того чтобы разрезать спектр функции f на части, соответствующие интервалам Δ_m , он будет вырезать меньшие куски, которые будут соответствовать некоторому более упорядоченному разбиению. Другой оператор будет соединять эти маленькие куски, формируя из них интервалы Δ_m . Подобная техника применялась в предыдущих работах (см., например, [1], [3], [7]). Однако в ситуациях, которые рассматривались в упомянутых статьях, можно было по желанию добавлять и убирать любые сдвиги $e^{-2\pi i ax}$, поскольку L^p -нормы инвариантны относительно такой операции. Однако мы не можем сказать то же самое о нормах Мори–Кампанато или о соответствующих максимальных функциях. В связи с этим нам придется обращаться со сдвигами аккуратнее, что усложнит наши рассуждения.

Введем несколько объектов, необходимых для нашего доказательства. Пусть A – число, большее единицы и достаточно близкое к ней. Выберем функцию θ такую, что $\text{supp } \theta \subset [A^{-1}, A]$ и

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}} \hat{\theta}\left(\frac{\xi}{A^v}\right) \equiv 1 \quad \text{на луче } (0, +\infty).$$

Через θ_v обозначим функции такие, что $\hat{\theta}_v(\xi) = \hat{\theta}(\xi/A^v)$ (т.е. $\theta_v(t) = A^v \theta(A^v t)$), а через $\mathfrak{a}_v$ – интервалы $[A^{v-1}, A^{v+1}]$. Отметим, что $\text{supp } \theta_v \subset \mathfrak{a}_v$.

Теперь, используя только что введенное разбиение единицы, мы построим последовательность $\psi_{m,\nu}^1$. Вспомним, что через l_m были обозначены длины интервалов Δ_m . Для каждого m мы рассмотрим интервалы $\mathfrak{a}_v$, которые пересекаются с отрезком $[0, \frac{2}{3}l_m]$, и обозначим индекс самого правого из них через N_m . Положим

$$\psi_{m,\nu}^1(\xi) = \psi_m^1(\xi) \sum_{v=\nu}^{N_m} \hat{\theta}_v(\xi - a_m), \quad \nu \leq N_m.$$

Ясно, что $\psi_{m,\nu}^1 \rightarrow \psi_m^1$ в L^2 при $\nu \rightarrow -\infty$.

Теперь рассмотрим отрезки

$$J_{k,j} = [j2^k, (j+8)2^k], \quad k, j \in \mathbb{Z},$$

которые получаются из диадических интервалов путем их восьмикратного увеличения с сохранением левого конца. Оказывается, что любой отрезок в $\mathbb{R}$ может быть в некотором смысле приближен одним из интервалов $J_{k,j}$. А именно, нетрудно доказать следующий факт.

ФАКТ 4.1. Для любого интервала $\Delta = [a, b]$ можно найти индексы $k, j \in \mathbb{Z}$ такие, что $\Delta \subset \frac{3}{4}J_{k,j}$ и $|\Delta| \asymp |J_{k,j}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем индекс k такой, что $2^k \leq |\Delta| < 2^{k+1}$, и положим

$$j = \sup\{j \in \mathbb{Z}: (j+1)2^k < a\}.$$

Легко видеть, что $J_{k,j}$ – искомый интервал.

Из только что доказанного факта вытекает, что для каждого m и v можно выбрать индексы $k_{m,v}$ и $j_{m,v}$ такие, что

$$a_m + a_v \subset \frac{3}{4} J_{k_{m,v}, j_{m,v}}$$

и длины этих интервалов сравнимы. Через $a_{m,v}$ мы обозначим левые концы интервалов $J_{k_{m,v}, j_{m,v}}$, т.е. положим $a_{m,v} = j_{m,v} 2^{k_{m,v}}$.

Далее, для каждого $k \in \mathbb{Z}$ построим функцию ϕ_k такую, что

$$\text{supp } \hat{\phi}_k \subset J_{k,0}, \quad \hat{\phi}_k \equiv 1 \quad \text{на} \quad \frac{3}{4} J_{k,0}.$$

А именно, пусть ϕ – такая функция из $\mathcal{S}$, что $\text{supp } \hat{\phi} \subset [0, 8]$ и $\hat{\phi} \equiv 1$ на $[1, 7]$. Тогда положим $\phi_k(t) = 2^k \phi(2^k t)$.

Также нам потребуется гладкое продолжение $\tilde{\psi} \in \mathcal{S}$ функции ψ^1 такое, что $\tilde{\psi} \equiv \psi^1$ на $[0, 1]$ и $\tilde{\psi} \equiv 0$ на $[1, +\infty)$. Кроме того, мы введем функции $\varphi_m(t) = l_m \tilde{\psi}^\vee(l_m t)$. Заметим, что $\hat{\varphi}_m(\xi) = \psi_m^1(\xi + a_m)$ на $[0, l_m]$ для любого m .

Наконец, положим $\delta_{m,v} = a_{m,v} - a_m$ и

$$g_{m,v}(t) = \int_{\mathbb{R}} \phi_{k_{m,v}}(t - y) e^{-2\pi i a_{m,v} y} f(y) dy. \quad (4.1)$$

Используя все объекты, введенные выше, напомним следующее тождество:

$$e^{-2\pi i a_m x} (\hat{f} \psi_{m,\nu})^\vee(x) = \sum_{v=\nu}^{N_m} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \delta_{m,v} \tau} \theta_v(x - \tau) \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \delta_{m,v}(\tau - t)} \varphi_m(\tau - t) g_{m,v}(t) dt d\tau.$$

Для проверки этого равенства достаточно сравнить преобразования Фурье его левой и правой частей. Обозначив выражение $e^{2\pi i \delta_{m,v} \tau} \theta_v(x - \tau)$ через $\rho_{m,v}(x, \tau)$, а выражение $e^{-2\pi i \delta_{m,v} t} \varphi_m(\tau - t)$ – через $\Phi_{m,v}(t)$, запишем наше тождество следующим образом:

$$e^{-2\pi i a_m x} (\hat{f} \psi_{m,\nu})^\vee(x) = \sum_{v=\nu}^{N_m} \int_{\mathbb{R}} \rho_{m,v}(x, \tau) (\Phi_{m,v} * g_{m,v})(\tau) d\tau. \quad (4.2)$$

Как мы увидим в §6, последовательность $\{g_{m,v}\}$ можно так разбить на конечное число подпоследовательностей, что интервалы $J_{k_{m,v}, j_{m,v}}$, соответствующие любой из них, будут попарно не пересекающимися. Каждая такая подпоследовательность имеет вид Hf , где H – оператор типа Рубио де Франсия: он похож на наш исходный оператор, но элементы его ядра гладкие, а соответствующие интервалы имеют более упорядоченную структуру. Свертки с функциями $\Phi_{m,v}$ возникают по причинам технического характера: чтобы равенство (4.2) выполнялось, нужно подправить спектр в правой части интервала Δ_m . Наконец, мы переходим обратно к интервалам Δ_m , используя “склеивающий” оператор с ядром $\{\rho_{m,v}(x, \tau)\}$. Все эти операторы (операторы Рубио де Франсия, оператор с ядром $\{\Phi_{m,v}\}$ и склеивающий оператор) являются операторами Кальдерона–Зигмунда. Чтобы это было действительно так для операторов Рубио де Франсия, мы должны сдвигать левые концы $a_{m,v}$ наших маленьких и упорядоченных интервалов $J_{k_{m,v}, j_{m,v}}$ в начало координат (вместо того, чтобы делать это для исходных интервалов Δ_m). Поэтому в склеивающем операторе появляются сдвиги $e^{2\pi i \delta_{m,v} \tau}$: мы помещаем каждый маленький интервал $J_{k_{m,v}, j_{m,v}}$ на его место внутри соответствующего большого интервала Δ_m .

§ 5. Склеивающий оператор

Рассмотрим оператор R , который преобразует двойную последовательность функций в последовательность, занумерованную одним индексом, и определяется формулой

$$R(\{h_{m,v}\})(x) = \left\{ \sum_{v=-\infty}^{N_m} \int_{\mathbb{R}} \rho_{m,v}(x, \tau) h_{m,v}(\tau) d\tau \right\}_{m \in \mathcal{M}}.$$

ФАКТ 5.1. *Оператор R ограничен в L^2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это сразу вытекает из теоремы Планшереля и того факта, что каждое множество $\text{supp } \hat{\theta}_v$ пересекается лишь с двумя соседними множествами $\text{supp } \hat{\theta}_{v-1}$ и $\text{supp } \hat{\theta}_{v+1}$.

ФАКТ 5.2. *Для любой двойной последовательности q полиномов $q_{m,v}$ верно, что $Rq \equiv 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразование Фурье функции $e^{2\pi i \delta_{m,v} \tau} q_{m,v}(\tau)$ сосредоточено в одной точке $\delta_{m,v}$, которая не принадлежит множеству $\text{supp } \hat{\theta}_v$. Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_{m,v}(\cdot, \tau) q_{m,v}(\tau) d\tau \equiv 0.$$

Кроме того, ядро оператора R удовлетворяет некоторому условию гладкости.

ЛЕММА 5.1. *Зафиксируем некоторое $m \in \mathcal{M}$. Для любого интервала I с центром в x_0 существует l^2 -значная функция*

$$p_{m,I}(x, \tau) = \{p_{m,v,I}(x, \tau)\}_{v \in \mathbb{Z}}$$

со следующими свойствами. Во-первых,

$$p_{m,v,I}(x, \tau) = \sum_{\alpha=0}^{r-1} x^\alpha b_\alpha^{m,v,I}(\tau),$$

где $b_\alpha^{m,v,I}$ – функции из $\mathcal{S}$. Во-вторых,

$$\left(\sum_{v \in \mathbb{Z}} |\rho_{m,v}(x, \tau) - p_{m,v,I}(x, \tau)|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{C_r |I|^r}{|\tau - x_0|^{r+1}} \quad (5.1)$$

для $\tau \notin 2I$ и $x \in I$.

Ясно, что эту лемму достаточно проверять для функций $\theta_v(x - \tau)$ вместо функций $\rho_{m,v}(x, \tau)$. Соответствующее доказательство можно найти, например, в [7]. Также мы приведем его набросок в § 7.

Пусть $h = \{h_{m,v}\}$ – некоторая l^2 -значная функция такая, что $M_{i,2,s}h$ конечна хотя бы в одной точке. Мы введем модификацию оператора R , действие которой на любую такую функцию h корректно определено. Для этого можно, например, воспользоваться рассуждением из [13; § 4.4]. Рассмотрим некоторые интервалы $J_1 \subset J_2 \subset \dots$, объединение которых совпадает со всей прямой $\mathbb{R}$. Из

ограниченности оператора R в L^2 и из лемм 2.4 и 5.1 вытекает, что на каждом интервале J_α можно построить следующую l^2 -значную функцию:

$$W_{\alpha,h}(x) = R(\chi_{2J_\alpha} h)(x) + \left\{ \int_{\mathbb{R} \setminus 2J_\alpha} \sum_{v=-\infty}^{N_m} (\rho_{m,v}(x, \tau) - p_{m,v,J_\alpha}(x, \tau)) h_{m,v}(\tau) d\tau \right\}_{m \in \mathcal{M}}, \quad x \in J_\alpha.$$

Повторяя рассуждения из [13; §4.4], можно доказать, что каждая функция $W_{\alpha+1,h}(x) - W_{\alpha,h}(x)$, $x \in J_\alpha$, совпадает с некоторым полиномом из $\mathcal{P}_r(l^2)$. А значит, мы можем определить модификацию $\tilde{R}$ оператора R следующим образом. Положим $\tilde{R}h = W_{1,h}$ на J_1 . Затем положим $\tilde{R}h = W_{2,h} + P$ на J_2 , где P – полином из $\mathcal{P}_r(l^2)$ такой, что $P = W_{2,h} - W_{1,h}$ на J_1 . Затем продолжим $\tilde{R}h$ на J_3 тем же способом и т.д.

ФАКТ 5.3. Для любого l^2 -значного полинома q верно, что $\tilde{R}q \in \mathcal{P}_r(l^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наше доказательство будет похоже на рассуждение в [13; §4.4.1]. Введем функции

$$W_{\alpha,h}^\nu(x) = \left\{ \sum_{v=\nu}^{N_m} \left(\int_{\mathbb{R}} \rho_{m,v}(x, \tau) h_{m,v}(\tau) d\tau - \int_{\mathbb{R} \setminus 2J_\alpha} p_{m,v,J_\alpha}(x, \tau) h_{m,v}(\tau) d\tau \right) \right\}_{m \in \mathcal{M}}, \quad x \in J_\alpha. \quad (5.2)$$

Легко видеть, что $W_{\alpha,h}^\nu \rightarrow W_{\alpha,h}$ в $L^2(J_\alpha, l^2)$ при $\nu \rightarrow -\infty$. В качестве h подставим наш полином q . Тогда в силу того, что $W_{\alpha,q}^\nu$ являются полиномами (см. факт 5.2), функция $W_{\alpha,q}$ также окажется полиномом.

Из леммы 5.1 и из фактов 5.1 и 5.3 вытекает следующая лемма, которую можно доказать так же, как теорему 4.21 в [13; §4.4.1] (в этой статье мы также докажем похожее утверждение для более сложного оператора, см. лемму 6.3).

ЛЕММА 5.2. Пусть h – измеримая l^2 -значная функция такая, что $M_{i,2,s}h$ конечна в некоторой точке. Тогда

$$M_{r,2,s}(\tilde{R}h) \leq CM_{i,2,s}h.$$

Предположим, что

$$h = \{\Phi_{m,v} * g_{m,v}\}_{m \in \mathcal{M}, v \leq N_m}. \quad (5.3)$$

Лемма 5.2 позволяет свести теорему 3.2 к оценке $M_{r,2,s}h \leq CM_{i,2,s}f$. Действительно, предположим, что эта оценка выполняется. Благодаря факту 2.1 можно выбрать набор P полиномов из $\mathcal{P}_r$ такой, что последовательность $\tilde{h} = h - P$ окажется функцией в $L_{\text{loc}}^2(l^2)$. По лемме 5.1 мы получаем оценку $M_{r,2,s}(\tilde{R}h) \leq CM_{r,2,s}h$ (здесь мы положили $i = r$). С другой стороны, имеем

$$\tilde{R}h = W_{\alpha,\tilde{h}} + P_\alpha = \lim_{\nu \rightarrow -\infty} (W_{\alpha,\tilde{h}}^\nu + P_\alpha^\nu) \quad \text{на каждом } J_\alpha,$$

где функции $W_{\alpha,\tilde{h}}^\nu$ определяются формулой (5.2), P_α являются l^2 -значными полиномами, согласовывающими функции $W_{\alpha,\tilde{h}} + P_\alpha$ на разных интервалах J_α ,

полиномы P_α^ν выбираются по тому же принципу для $W_{\alpha, \tilde{h}}^\nu$ и пределы берутся в $L^2(J_\alpha, l^2)$. Из равенства (4.2) и факта 5.2 следует, что

$$W_{\alpha, \tilde{h}}^\nu(x) + P_\alpha^\nu(x) = \{e^{-2\pi i a_m x} (\widehat{f}\psi_{m, \nu}^1)^\vee(x) - p_{m, \nu}^1(x)\}_{m \in \mathcal{M}},$$

где $p_{m, \nu}^1$ – полиномы, не зависящие от α . Таким образом, мы свели нашу теорему к оценке $M_{r, 2, s} h \leqslant C M_{i, 2, s} f$, где h определяется соотношением (5.3).

§ 6. Завершение доказательства

6.1. Прежде всего избавимся от функций $\Phi_{m, v}$. Для этого введем простой оператор Φ :

$$\Phi(\{g_{m, v}\}) = \{\Phi_{m, v} * g_{m, v}\}_{m \in \mathcal{M}, v \leqslant N_m}.$$

Из факта 2.1 и леммы 2.4 вытекает, что оператор Φ корректно определен для любой последовательности измеримых функций $g = \{g_{m, v}\}$, если только $M_{i, 2, s} g$ конечна в некоторой точке. Из теоремы Планшереля сразу следует, что оператор Φ ограничен в L^2 . Кроме того, ясно, что если P – последовательность полиномов из $\mathcal{P}_i$, то каждый элемент последовательности ΦP также является полиномом из $\mathcal{P}_i$. Наконец, мы можем сформулировать следующее условие гладкости для ядра оператора Φ .

ЛЕММА 6.1. *Зафиксируем индексы $m \in \mathcal{M}$ и $v \in \mathbb{Z}$, $v \leqslant N_m$. Тогда для любого интервала I с центром в точке τ_0 существует функция $p_{m, v, I}(\tau, t)$ со следующими свойствами. Во-первых,*

$$p_{m, v, I}(\tau, t) = \sum_{\alpha=0}^{r-1} \tau^\alpha b_\alpha^{m, v, I}(t),$$

где $b_\alpha^{m, v, I}$ – функции из $\mathcal{S}$. Во-вторых,

$$|\Phi_{m, v}(\tau - t) - p_{m, v, I}(\tau, t)| \leqslant \frac{C_r |I|^r}{|t - \tau_0|^{r+1}} \quad \text{для } t \notin 2I \quad \text{и } \tau \in I.$$

Здесь константа C_r не зависит от индексов m и v .

Мы приведем доказательство этой леммы (которое, впрочем, очень простое) в § 7. Из леммы 6.1, из L^2 -ограниченности оператора Φ и из того факта, что Φ преобразует полиномы в полиномы, вытекает следующая лемма, которую можно доказать тем же способом, что и теорему 4.21 в [13], но без трудностей, касающихся корректного определения оператора (см. также доказательство леммы 6.3, в котором рассматривается более сложный оператор).

ЛЕММА 6.2. *Пусть g – последовательность измеримых функций такая, что $M_{i, 2, s} g$ конечна в некоторой точке. Тогда*

$$M_{r, 2, s}(\Phi g) \leqslant C M_{i, 2, s} g.$$

Таким образом, осталось доказать, что для функций $g_{m, v}$, определяемых формулой (4.1), выполняется оценка

$$M_{r, 2, s}(\{g_{m, v}\}_{m \in \mathcal{M}, v \leqslant N_m}) \leqslant C M_{i, 2, s} f. \quad (6.1)$$

6.2. Операторы Рубио де Франсиа. Разобьем каждую последовательность $\{v \in \mathbb{Z}: v \leq N_m\}$ на 100 подпоследовательностей $\mathcal{V}_m^d$, $d = 1, \dots, 100$, следующим образом: число v попадает в $\mathcal{V}_m^d$, если остаток от деления числа $N_m - v$ на 100 равен d . Следующий факт почти очевиден.

ФАКТ 6.1. Если число A достаточно близко к 1, то каждый набор

$$\{J_{k_m, v, j_m, v}\}_{m \in \mathcal{M}, v \in \mathcal{V}_m^d}, \quad d = 1, \dots, 100,$$

состоит из попарно не пересекающихся интервалов. Кроме того, эти интервалы не содержат точку 0.

Далее, пусть $\mathcal{A}$ – некоторое подмножество в $\mathbb{Z}^2$ такое, что $\{J_{k,j}\}_{(k,j) \in \mathcal{A}}$ является набором попарно не пересекающихся интервалов, не содержащих точку 0. Рассмотрим оператор H , который определяется по формуле

$$Hf(t) = \int_{\mathbb{R}} \kappa(t, y) f(y) dy, \quad (6.2)$$

где

$$\kappa(t, y) = \{\kappa_{k,j}(t, y)\}_{(k,j) \in \mathcal{A}} = \{\phi_k(t - y) e^{-2\pi i j 2^k y}\}_{(k,j) \in \mathcal{A}}.$$

Такие операторы впервые рассматривались Дж. Рубио де Франсиа в [1]. Мы докажем следующую лемму, которая вместе с фактом 6.1 сразу приводит к оценке (6.1).

ЛЕММА 6.3. Пусть f – измеримая функция такая, что $M_{i,2,s}f$ конечна в некоторой точке. Тогда выполняется оценка

$$M_{r,2,s}(Hf) \leq CM_{i,2,s}f.$$

Как обычно, мы сначала изучим поведение оператора H в пространстве L^2 и на полиномах.

ФАКТ 6.2. Оператор H ограничен в L^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы знаем, что

$$j2^k + \text{supp } \hat{\phi}_k \subset J_{k,j}$$

и набор $\{J_{k,j}\}_{(k,j) \in \mathcal{A}}$ состоит из попарно не пересекающихся интервалов. По теореме Планшереля из всего этого вытекает L^2 -ограниченность оператора H .

ФАКТ 6.3. Для любого полинома q верно, что $Hq \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразование Фурье функции $e^{-2\pi i j 2^k y} q(y)$ сосредоточено в одной точке $-j2^k$. Так как $0 \notin J_{k,j}$ при $(k,j) \in \mathcal{A}$, то $-j2^k \notin \text{supp } \hat{\phi}_k$, а значит, $Hq \equiv 0$.

Ядро $\kappa(t, y)$ удовлетворяет следующему условию гладкости.

ЛЕММА 6.4. Для любого интервала $I \subset \mathbb{R}$ существует l^2 -значная функция

$$q_I(t, y) = \{q_{k,j,I}(t, y)\}_{(k,j) \in \mathcal{A}},$$

обладающая следующими свойствами. Во-первых,

$$q_{k,j,I}(t, y) = \sum_{\alpha=0}^{r-1} t^\alpha b_\alpha^{k,j,I}(y), \quad (6.3)$$

где $b_{\alpha}^{k,j,I}$ – функции из $\mathcal{S}$. Во-вторых, для любого $\xi \in l^2$, любого $t \in I$ и любого $\sigma \in \mathbb{N}$ выполняется оценка

$$\left(\int_{I_{\sigma}} |\langle \kappa(t, y) - q_I(t, y), \xi \rangle_{l^2}|^2 dy \right)^{1/2} \leq C 2^{-\sigma B_r} |I|^{-1/2} |\xi|_{l^2}, \quad (6.4)$$

где $I_{\sigma} = 2^{\sigma+1}I \setminus 2^{\sigma}I$ и $B_r = r + 1/2$.

Очень похожие оценки можно найти в [1], [3], [7]. Однако показатель B_r явно нигде не вычислялся. Поскольку нам нужно его точное значение, докажем лемму 6.4 в § 7.

Теперь у нас есть все компоненты, необходимые для доказательства леммы 6.3. Наши рассуждения будут похожи на доказательство теоремы 4.21 из [13], но несколько усложнятся из-за того, что условие (6.4) более тонкое и громоздкое по сравнению со стандартными условиями такого типа.

6.3. Доказательство леммы 6.3. Рассмотрим точку y_0 такую, что $\mu = \widetilde{M}_{i,2,s}(f)(y_0)$ – конечное число (как мы помним, оператор $\widetilde{M}_{i,2,s}$ определяется формулой (2.2)). Тогда для любого интервала I с центром в точке y_0 верно, что

$$\frac{1}{|I|^s} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f - f_I|^2 \right)^{1/2} \leq \mu,$$

где $f_I = \mathfrak{P}_I f$.

Пусть P_I – последовательность полиномов из $\mathcal{P}_r$, определяемая по формуле

$$P_I(t) = Hf(t) - \left[H(\chi_{2I}(f - f_I))(t) + \int_{\mathbb{R} \setminus 2I} (\kappa(t, y) - q_I(t, y))(f(y) - f_I(y)) dy \right]. \quad (6.5)$$

Тот факт, что каждый элемент последовательности P_I корректно определен и принадлежит пространству $\mathcal{P}_r$, сразу вытекает из леммы 2.4, факта 6.3 и равенства (6.3). Следует отметить, что мы не требуем, чтобы последовательность P_I была l^2 -значным полиномом из $\mathcal{P}_r(l^2)$.

Если мы проверим оценку

$$\frac{1}{|I|^s} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |Hf - P_I|_{l^2}^2 \right)^{1/2} \leq C\mu,$$

то тем самым докажем лемму 6.3.

Сначала сформулируем несколько вспомогательных утверждений. Применяя неравенство Коши–Буняковского–Шварца к лемме 0.24 из [13], мы приходим к следующему утверждению (нужно отметить, что упомянутая лемма является в свою очередь простым следствием рассуждений в [14]).

ЛЕММА 6.5. Для любых двух кубов $Q \subset Q_1 \subset \mathbb{R}^n$ и любого полинома $p \in \mathcal{P}_i$ верно, что

$$\|p\|_{L^{\infty}(Q_1)} \leq C \left(\frac{|Q_1|}{|Q|} \right)^{i/n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |p|^2 \right)^{1/2},$$

где константа C зависит лишь от i и n .

Из свойств проекции $\mathfrak{P}_I$ вытекает следующая оценка (ее тоже можно найти в [13]).

ФАКТ 6.4. Для любого интервала I верно, что

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I |f_{2I} - f_I|^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\frac{1}{|2I|} \int_{2I} |f - f_{2I}|^2 \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наша оценка вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f_{2I} - f_I|^2 \right)^{1/2} &= \left(\frac{1}{|I|} \int_I |\mathfrak{P}_I(f - f_{2I})|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f - f_{2I}|^2 \right)^{1/2} \leq C' \left(\frac{1}{|2I|} \int_{2I} |f - f_{2I}|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим первое слагаемое из квадратных скобок в (6.5). Пользуясь L^2 -ограниченностью оператора H , получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |H(\chi_{2I}(f - f_I))|_{l^2}^2 \right)^{1/2} &\leq C \left(\frac{1}{|I|} \int_{2I} |f - f_I|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\frac{1}{|I|} \int_{2I} |f - f_{2I}|^2 \right)^{1/2} + C' \|f_{2I} - f_I\|_{L^\infty(2I)}. \end{aligned}$$

Из леммы 6.5 и факта 6.4 вытекает, что

$$\|f_{2I} - f_I\|_{L^\infty(2I)} \leq C 2^i \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f_{2I} - f_I|^2 \right)^{1/2} \leq C' \left(\frac{1}{|2I|} \int_{2I} |f - f_{2I}|^2 \right)^{1/2}.$$

Комбинируя это неравенство с предыдущим, приходим к следующей оценке:

$$\frac{1}{|I|^s} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |H(\chi_{2I}(f - f_I))|_{l^2}^2 \right)^{1/2} \leq C\mu.$$

Осталось рассмотреть второе слагаемое в квадратных скобках из формулы (6.5). Положим

$$W(t) = \int_{\mathbb{R} \setminus 2I} (\kappa(t, y) - q_I(t, y)) (f(y) - f_I(y)) dy.$$

Можем написать следующее:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |W|_{l^2}^2 \right)^{1/2} &= |I|^{-1/2} \sup_{u: \|u\| \leq 1} \left| \int_I \langle u(t), W(t) \rangle_{l^2} dt \right| \\ &\leq |I|^{-1/2} \sup_{u: \|u\| \leq 1} \int_I \int_{\mathbb{R} \setminus 2I} |f(y) - f_I(y)| |\langle u(t), \kappa(t, y) - q_I(t, y) \rangle_{l^2}| dy dt, \end{aligned}$$

где супремум берется по единичному шару в $L^2(I, l^2)$. По неравенству Коши–Буняковского–Шварца мы видим, что последнее выражение не превосходит

$$\begin{aligned} |I|^{-1/2} \sup_{u: \|u\| \leq 1} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \left(\int_{I_\sigma} |f(y) - f_I(y)|^2 dy \right)^{1/2} \\ \times \int_I \left(\int_{I_\sigma} |\langle u(t), \kappa(t, y) - q_I(t, y) \rangle_{l^2}|^2 dy \right)^{1/2} dt. \end{aligned}$$

Лемма 6.4 влечет, что второй множитель в каждом из слагаемых оценивается величиной

$$C 2^{-\sigma(1/2+r)} |I|^{-1/2} \int_I |u(t)|_{l^2} dt \leq C' 2^{-\sigma(1/2+r)}.$$

Таким образом, мы должны оценить следующее выражение:

$$|I|^{-1/2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} 2^{-\sigma(1/2+r)} \left(\int_{I_{\sigma}} |f - f_I|^2 \right)^{1/2}.$$

Мы можем написать, что

$$\begin{aligned} & \left(\int_{2^{\sigma+1}I} |f - f_I|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \left(\int_{2^{\sigma+1}I} |f - f_{2^{\sigma+1}I}|^2 \right)^{1/2} + \sum_{\alpha=1}^{\sigma} |2^{\sigma+1}I|^{1/2} \|f_{2^{\alpha+1}I} - f_{2^{\alpha}I}\|_{L^{\infty}(2^{\sigma+1}I)}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 6.5 и факт 6.4, получаем

$$\begin{aligned} \|f_{2^{\alpha+1}I} - f_{2^{\alpha}I}\|_{L^{\infty}(2^{\sigma+1}I)} & \leq C \left(\frac{|2^{\sigma+1}I|}{|2^{\alpha}I|} \right)^{i-1} \left(\frac{1}{|2^{\alpha}I|} \int_{2^{\alpha}I} |f_{2^{\alpha+1}I} - f_{2^{\alpha}I}|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C' 2^{(\sigma-\alpha)(i-1)} \left(\frac{1}{|2^{\alpha+1}I|} \int_{2^{\alpha+1}I} |f - f_{2^{\alpha+1}I}|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C' 2^{(\sigma-\alpha)(i-1)} |2^{\alpha+1}I|^s \mu. \end{aligned}$$

Подставляя последнее выражение в предыдущую оценку, мы видим, что

$$\left(\int_{I_{\sigma}} |f - f_I|^2 \right)^{1/2} \leq C |2^{\sigma+1}I|^{1/2} |I|^s \mu 2^{\sigma(i-1)} \sum_{\alpha=1}^{\sigma} 2^{\alpha(s-i+1)}.$$

Наконец, имеем

$$\frac{1}{|I|^s} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |W|_{l^2}^2 \right)^{1/2} \leq C \mu \sum_{\sigma=1}^{\infty} \left(2^{-\sigma(r-i+1)} \sum_{\alpha=1}^{\sigma} 2^{\alpha(s-i+1)} \right).$$

Сумма по α оценивается либо константой, если $s - i + 1 < 0$, либо величиной σ , если $s - i + 1 = 0$, либо же величиной $C 2^{\sigma(s-i+1)}$, если $s - i + 1 > 0$. Так как $r > \max\{s, i - 1\}$, то ряд по σ в любом случае сходится и наша лемма доказана.

§ 7. Условия гладкости

В этом параграфе мы докажем леммы 5.1, 6.1 и 6.4.

7.1. Доказательство леммы 5.1. Такие оценки широко известны, и соответствующее доказательство можно найти, например, в [7]. Здесь мы приведем его набросок.

Пусть $P_{u,v}$ — полином Тэйлора функции θ_v в точке u степени $r - 1$. Положим $p_{v,I}(x, \tau) = P_{x_0 - \tau, v}(x - \tau)$. Так как $\theta \in \mathcal{S}$, то легко видеть, что

$$\begin{aligned} |\theta_v(x - \tau) - p_{v,I}(x, \tau)| & \leq C_{r,\beta} A^{v(r+1)} |x - x_0|^r (1 + A^v |\tau - x_0|)^{-\beta}, \\ \beta & = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Взяв $\beta = 0$ и $\beta = r + 2$, получим оценки

$$|\theta_v(x - \tau) - p_{v,I}(x, \tau)| \leq C_r A^{v(r+1)} |I|^r, \quad (7.1)$$

$$|\theta_v(x - \tau) - p_{v,I}(x, \tau)| \leq C_r A^{-v} \frac{|I|^r}{|\tau - x_0|^{r+2}}. \quad (7.2)$$

Оценка (7.1) сильнее, чем (7.2), в точности, когда $A^v < 1/|\tau - x_0|$. Положим

$$p_{m,v,I}(x, \tau) = e^{2\pi i \delta_{m,v} \tau} p_{v,I}(x, \tau)$$

и разобьем сумму в (5.1) на две: по всем v таким, что $A^v < 1/|\tau - x_0|$, и по всем оставшимся v . Используя неравенство (7.1) для слагаемых из суммы и неравенство (7.2) для остальных, мы получим оценку (5.1).

7.2. Доказательство леммы 6.1. Пусть $P_{u,m,v}$ – полином Тейлора функции $\Phi_{m,v}$ в точке u степени $r - 1$. Вспомним, что $\Phi_{m,v}(t) = e^{-2\pi i \delta_{m,v} t} \varphi_m(t)$ и $\varphi_m(t) = l_m \varphi(l_m t)$, где φ – некоторая функция из $\mathcal{S}$. Положив

$$p_{m,v,I}(\tau, t) = P_{\tau_0 - t, m, v}(\tau - t),$$

мы приходим к соотношению

$$|\Phi_{m,v}(\tau - t) - p_{m,v,I}(\tau, t)| \leq C_r \sum_{\substack{0 \leq \alpha, \alpha' \leq r \\ \alpha + \alpha' = r}} |\tau - \tau_0|^r \delta_{m,v}^\alpha |\varphi_m^{(\alpha')}(\eta)|,$$

где η – число между $\tau - t$ и $\tau_0 - t$. Так как $|\tau - t| \asymp |\tau_0 - t|$, мы получаем

$$|\tau - \tau_0|^r \delta_{m,v}^\alpha |\varphi_m^{(\alpha')}(\eta)| \leq C_{r,\beta} |\tau - \tau_0|^r \delta_{m,v}^\alpha l_m^{\alpha' + 1} (1 + l_m |t - \tau_0|)^{-\beta},$$

$$\beta = 1, 2, \dots$$

Заметим, что $\delta_{m,v} \leq l_m$. А значит, положив $\beta = 0$ и $\beta = r + 2$, мы придем к оценкам

$$|\Phi_{m,v}(\tau - t) - p_{m,v,I}(\tau, t)| \leq C_r l_m^{r+1} |I|^r,$$

$$|\Phi_{m,v}(\tau - t) - p_{m,v,I}(\tau, t)| \leq \frac{C_r |I|^r}{l_m |t - \tau_0|^{r+2}}.$$

Используя первое неравенство, если $l_m < 1/|t - \tau_0|$, и второе в остальных случаях, мы получим требуемую оценку.

7.3. Доказательство леммы 6.4. Оценки, подобные неравенству (6.4), и их доказательства можно найти в [1], [3], [7]. Для полноты мы повторим доказательство здесь и в то же время вычислим B_r .

Вместо множества $\mathcal{A}$ будем рассматривать все $\mathbb{Z}^2$. Если мы докажем лемму в такой постановке, то сможем получить требуемую оценку для любого подмножества $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^2$: достаточно будет подставить векторы $\xi = \{\xi_{k,j}\}_{(k,j) \in \mathbb{Z}^2}$, у которых $\xi_{k,j} = 0$ при $(k,j) \notin \mathcal{A}$.

Определим полиномы $p_{k,I}(t, y)$ для функций ϕ_k так же, как мы определяли полиномы $p_{v,I}$ для θ_v . Оценки (7.1) и (7.2) выполняются для ϕ_k и $p_{k,I}$ при $A = 2$. Определим функцию $q_I(t, y)$ по формуле

$$q_I(t, y) = \{q_{k,j,I}(t, y)\}_{(k,j) \in \mathcal{A}} = \{p_{k,I}(t, y) e^{-2\pi i j 2^k y}\}_{(k,j) \in \mathcal{A}}.$$

Также мы положим

$$\gamma_{k,\sigma} = \sup_{y \in I_\sigma, t \in I} |\phi_k(t - y) - p_{k,I}(t, y)|.$$

В этих обозначениях имеем

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{I_\sigma} |\langle \kappa(t, y) - q_I(t, y), \xi \rangle|^2 dy \right)^{1/2} \\
 & \leq \left(\int_{I_\sigma} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\phi_k(t - y) - p_{k, I}(t, y)| \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \xi_{k, j} e^{-2\pi i j 2^k y} \right| \right)^2 dy \right)^{1/2} \\
 & \leq \sum_k \gamma_{k, \sigma} \left(\int_{I_\sigma} \left| \sum_j \xi_{k, j} e^{-2\pi i j 2^k y} \right|^2 dy \right)^{1/2} \\
 & \leq \left(\sum_k \gamma_{k, \sigma} \right)^{1/2} \left(\sum_k \gamma_{k, \sigma} \int_{I_\sigma} \left| \sum_j \xi_{k, j} e^{-2\pi i j 2^k y} \right|^2 dy \right)^{1/2}; \tag{7.3}
 \end{aligned}$$

здесь мы воспользовались неравенством треугольника в L^2 и неравенством Коши для сумм.

Далее, используя оценки (7.1) и (7.2), получаем

$$\gamma_{k, \sigma} \leq C_r 2^{k(r+1)} |I|^r, \quad \gamma_{k, \sigma} \leq C_r 2^{-k} |I|^{-2} 2^{-(r+2)\sigma}. \tag{7.4}$$

Вторая оценка сильнее, чем первая, в точности, когда $2^k \geq |I|^{-1} 2^{-\sigma}$. Разбивая сумму $\sum \gamma_{k, \sigma}$ на две части в соответствии с этой закономерностью, мы приходим к оценкам

$$\begin{aligned}
 \sum_k \gamma_{k, \sigma} & \leq C_r \left(\sum_{k: 2^k < |I|^{-1} 2^{-\sigma}} 2^{k(r+1)} |I|^r + \sum_{k: 2^k \geq |I|^{-1} 2^{-\sigma}} 2^{-k} |I|^{-2} 2^{-(r+2)\sigma} \right) \\
 & \leq C'_r 2^{-\sigma(r+1)} |I|^{-1}. \tag{7.5}
 \end{aligned}$$

Осталось оценить второй множитель в последнем выражении в (7.3). Подставив $\tilde{y} = 2^k y$ и воспользовавшись теоремой Риса-Фишера, получим

$$\int_{2^{\sigma+1}I} \left| \sum_j \xi_{k, j} e^{-2\pi i j 2^k y} \right|^2 dy \leq \begin{cases} C 2^{\sigma+1} |I| \sum_j |\xi_{k, j}|^2, & 2^{\sigma+1} |I| \geq 2^{-k}, \\ 2^{-k} \sum_j |\xi_{k, j}|^2, & 2^{\sigma+1} |I| < 2^{-k}. \end{cases}$$

Из этих оценок и неравенств (7.4) вытекает, что

$$\begin{aligned}
 & \sum_k \gamma_{k, \sigma} \int_{I_\sigma} \left| \sum_j \xi_{k, j} e^{-2\pi i j 2^k y} \right|^2 dy \\
 & \leq C |\xi|_{l^2}^2 \left(\sum_{k: 2^k < |I|^{-1} 2^{-\sigma-1}} \gamma_{k, \sigma} 2^{-k} + \sum_{k: 2^k \geq |I|^{-1} 2^{-\sigma-1}} \gamma_{k, \sigma} 2^{\sigma+1} |I| \right) \\
 & \leq C_r |\xi|_{l^2}^2 \left(\sum_{k: 2^k < |I|^{-1} 2^{-\sigma-1}} 2^{kr} |I|^r + \sum_{k: 2^k \geq |I|^{-1} 2^{-\sigma-1}} 2^{-k} 2^{-(r+1)\sigma+1} |I|^{-1} \right) \\
 & \leq C'_r |\xi|_{l^2}^2 2^{-r\sigma}.
 \end{aligned}$$

Совмещая эту оценку с неравенством (7.5), завершаем доказательство.

Автор выражает благодарность С.В. Кислякову за значительную помощь в получении правильной постановки задачи, а также за полезные замечания, которые позволили существенно улучшить текст работы.

Список литературы

- [1] J. L. Rubio de Francia, “A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **1**:2 (1985), 1–14.
- [2] J. Bourgain, “On square functions on the trigonometric system”, *Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B*, **37**:1 (1985), 20–26.
- [3] С. В. Кисляков, Д. В. Париков, “О теореме Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 33, Зап. научн. сем. ПОМИ, **327**, ПОМИ, СПб., 2005, 98–114; англ. пер.: S. V. Kislyakov, D. V. Parilov, “On the Littlewood–Paley theorem for arbitrary intervals”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **139**:2 (2006), 6417–6424.
- [4] C. Fefferman, E. M. Stein, “ H^p spaces of several variables”, *Acta Math.*, **129**:1 (1972), 137–193.
- [5] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Math. Ser., **43**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993, xiv+695 pp.
- [6] P. L. Duren, B. W. Romberg, A. L. Shields, “Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$ ”, *J. Reine Angew. Math.*, **238** (1969), 32–60.
- [7] С. В. Кисляков, “Теорема Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов: весовые оценки”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 36, Зап. научн. сем. ПОМИ, **355**, ПОМИ, СПб., 2008, 180–198; англ. пер.: S. V. Kislyakov, “Littlewood–Paley theorem for arbitrary intervals: weighted estimates”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **156**:5 (2009), 824–833.
- [8] J.-L. Journé, “Calderón–Zygmund operators on product spaces”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **1**:3 (1985), 55–91.
- [9] Н. Н. Осипов, “Неравенство Литлвуда–Пэли для произвольных прямоугольников в $\mathbb{R}^2$ при $0 < p \leq 2$ ”, *Алгебра и анализ*, **22**:2 (2010), 164–184; англ. пер.: N. N. Osipov, “Littlewood–Paley inequality for arbitrary rectangles in $\mathbb{R}^2$ for $0 < p \leq 2$ ”, *St. Petersburg Math. J.*, **22**:2 (2011), 293–306.
- [10] Н. Н. Осипов, “Одностороннее неравенство Литлвуда–Пэли в $\mathbb{R}^n$ для $0 < p \leq 2$ ”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 38, Зап. научн. сем. ПОМИ, **376**, ПОМИ, СПб., 2010, 88–115; англ. пер.: N. N. Osipov, “One-sided Littlewood–Paley inequality in $\mathbb{R}^n$ for $0 < p \leq 2$ ”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **172**:2 (2011), 229–242.
- [11] S. Campanato, “Proprietà di Hölderianità di alcune classi di funzioni”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **17** (1963), 175–188.
- [12] N. G. Meyers, “Mean oscillation over cubes and Hölder continuity”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15**:5 (1964), 717–721.
- [13] S. Kislyakov, N. Kruglyak, *Extremal problems in interpolation theory, Whitney–Besicovitch coverings, and singular integrals*, IMPAN Monogr. Mat. (N. S.), **74**, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013, x+316 pp.
- [14] R. A. DeVore, R. C. Sharpley, *Maximal functions measuring smoothness*, Mem. Amer. Math. Soc., **47**, no. 293, 1984, viii+115 pp.

Николай Николаевич Осипов
(Nikolay N. Osipov)

Санкт-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: nicknick@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию
07.01.2014