Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Ю. Федоровский, Области Каратеодори и теорема
Рудина об обращении принципа максимума модуля, *Ма-
тем. сб.*, 2015, том 206, номер 1, 175–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8326>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 11:56:19

УДК 517.542+517.547.5

К. Ю. Федоровский

Области Каратеодори и теорема Рудина об обращении принципа максимума модуля

Получены результаты, распространяющие классическую теорему У. Рудина об обращении принципа максимума модуля с круга на области Каратеодори. Доказательства основаны на использовании недавних результатов о свойствах конформных отображений областей Каратеодори, которые также рассматриваются в работе.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: область Каратеодори, принцип максимума модуля, мероморфная функция, равенство в смысле конформного отображения.

DOI: 10.4213/sm8326

§ 1. Введение

Напомним, что для произвольного подмножества E комплексной плоскости $\mathbb{C}$ через E° , $\overline{E}$ и ∂E обозначены внутренность, замыкание и граница E соответственно. Если множество $\mathbb{C} \setminus E$ является связным, то говорят, что E не разделяет плоскость. Кроме того, пусть $\mathbb{D}$ и $\mathbb{T}$ – это единичный круг и единичная окружность в $\mathbb{C}$, т.е. $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, а $\mathbb{T} = \partial \mathbb{D}$, и пусть $\mathfrak{z}$ – это тождественная функция, т.е. $\mathfrak{z}(z) \equiv z$.

Пусть $C(X)$ – это пространство, состоящее из всех непрерывных на компакте $X \subset \mathbb{C}$ комплекснозначных функций, рассматриваемое с обычной равномерной нормой $\|f\|_X = \max_{z \in X} |f(z)|$, а $\text{Hol}(U)$ – это пространство, состоящее из всех функций, голоморфных на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{C}$, а $f \in \text{Hol}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Классический принцип максимума модуля для голоморфных функций утверждает, что для любого $z \in \Omega$ имеет место неравенство $|f(z)| \leq \|f\|_{\partial \Omega}$. Более того, если это неравенство обращается в равенство хотя бы в одной точке $z \in \Omega$, то функция f постоянна.

Естественно возникает вопрос о возможных обращениях этого принципа. Другими словами, вопрос о том, когда из условия $|f(z)| \leq \|f\|_{\partial \Omega}$ (или из его ослабленных вариантов; см. ниже) вытекает голоморфность функции $f \in C(\overline{\Omega})$ в области Ω . Одним из наиболее известных результатов в этом направлении является следующая теорема У. Рудина (см. [1; теорема 12.13]).

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 12-01-00434 и № 13-01-12430), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2900.2014.1), Министерства образования и науки РФ (тема 1.2640.2014) и фонда Дмитрия Зимина “Династия”.

ТЕОРЕМА А. Пусть подпространство $\mathscr{W}$ пространства $C(\overline{\mathbb{D}})$ удовлетворяет следующим трем условиям:

- (i) $1 \in \mathscr{W}$;
- (ii) если $f \in \mathscr{W}$, то $zf \in \mathscr{W}$;
- (iii) неравенство

$$|f(z)| \leq \|f\|_{\mathbb{T}} \quad (1.1)$$

имеет место для любых $f \in \mathscr{W}$ и $z \in \mathbb{D}$.

Тогда $\mathscr{W} \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$.

Обозначим через $\mathscr{P}$ пространство, состоящее из всех многочленов комплексного переменного z . Для компакта $X \subset \mathbb{C}$ пусть $A(X) := C(X) \cap \text{Hol}(X^\circ)$, а $P(X)$ – это замыкание в $C(X)$ подпространства $\{p|_X : p \in \mathscr{P}\}$. Другими словами, $P(X)$ – это в точности пространство всех функций, допускающих равномерную аппроксимацию на компакте $X \subset \mathbb{C}$ многочленами комплексного переменного. При этом $P(X) \subset A(X)$ для любого компакта X , а классическая теорема Мергеляна (см. [2]) утверждает, что $P(X) = A(X)$ тогда и только тогда, когда множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Обозначим через $\overline{\mathscr{W}}$ замыкание $\mathscr{W}$ в $C(\overline{\mathbb{D}})$. Так как из условий (i) и (ii) теоремы А вытекает, что $\mathscr{P} \subset \mathscr{W}$, то $A(\overline{\mathbb{D}}) = P(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\mathscr{W}} \subset A(\overline{\mathbb{D}})$. Следовательно, если замкнутое подпространство $\mathscr{X} \subset C(\overline{\mathbb{D}})$ удовлетворяет условиям теоремы А, то $\mathscr{X} = A(\overline{\mathbb{D}})$ и, более того, $\mathscr{X} = P(\overline{\mathbb{D}})$.

Теорема Рудина послужила отправной точкой для целого ряда дальнейших исследований в направлении обращения принципа максимума модуля. Эти исследования в основном были связаны с рассмотрением вместо неравенства (1.1) его ослабленных версий. Здесь надо отметить работы Д. Вермера [3] и Д. Андерсона, Д. Симы, Н. Левенберга и Т. Ренсфорда [4]. В этих работах вместо неравенства (1.1) рассматривается неравенство $|f(z)| \leq C_z \|f\|_{\mathbb{T}}$, где C_z – положительная постоянная (которая может зависеть от точки $z \in \mathbb{D}$), а в рассмотрение включаются не только голоморфные, но и мероморфные в $\mathbb{D}$ функции (см. [4]). Соответствующий результат (см. теорему Е ниже) потребовался в связи с изучением свойств проективных оболочек компактных множеств в пространстве $\mathbb{C}^n$ (подробное обсуждение этой связи можно найти в [4] и в цитированной там литературе).

Интерес представляет также распространение теоремы Рудина на области, отличные от единичного круга. Однако этот вопрос до настоящего времени оставался не изученным. В работе Довгошея [5] этот вопрос был впервые рассмотрен для областей Каратеодори G , не разделяющих плоскость (соответствующие определения приводятся ниже). Однако соответствующий результат (см. теорему В ниже) получен для подпространств $\mathscr{W} \subset C(\overline{G})$, которые удовлетворяют специальным дополнительным (по отношению к теореме Рудина) условиям. Так как области Каратеодори возникают в тех же задачах комплексного анализа и теории равномерных алгебр, что и теоремы Рудина, Вермера и Андерсона–Симы–Левенберга–Ренсфорда, то рассмотрение областей Каратеодори в соответствующем контексте является вполне естественным.

Работа имеет следующую структуру. В § 2 приводится и обсуждается определение областей Каратеодори, а теорема Рудина распространяется на области Каратеодори, не разделяющие плоскость. Соответствующий результат (теорема 1) формулируется аналогично теореме Рудина с заменой круга $\mathbb{D}$ на соответствующую область Каратеодори G . Этот результат улучшает результат Довгошей из [5], так как в теореме 1 (в отличие от теоремы В) на пространство $\mathcal{W}$ не налагается дополнительных условий. В § 3 формулируются и обсуждаются теоремы Вермера (теорема D) и Андерсона–Симы–Левенберга–Ренсфорда (теорема E) и приводится формулировка основного результата работы – теоремы 2, являющейся обобщением теоремы E на области Каратеодори. Доказательство теоремы 2 приводится в § 5, а § 4 посвящен изложению результатов о свойствах конформных отображений областей Каратеодори на единичный круг и их следствий о структуре мер, ортогональных рациональным функциям на границах областей Каратеодори, недавно полученных в работе [6] и являющихся существенным ингредиентом доказательства теоремы 2.

§ 2. Теорема Рудина и области Каратеодори

Напомним понятие области Каратеодори, которое будет использоваться на протяжении всей работы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{C}$ называется *областью Каратеодори*, если $\partial\Omega = \partial\Omega_\infty$, где через Ω_∞ обозначена неограниченная связная компонента множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$.

Легко проверяются следующие свойства областей Каратеодори, которые будут часто (и неявно) использоваться в дальнейшем: любая область Каратеодори является односвязной и обладает свойством $(\overline{\Omega})^\circ = \Omega$. Более того, последнее свойство является характеристическим свойством областей Каратеодори в классе односвязных областей. Если Ω – это такая область Каратеодори, что множество $\overline{\Omega}$ не разделяет плоскость, то сама область Ω также не разделяет плоскость (см., например, [7; замечание 2]). Ясно, что для областей, не являющихся областями Каратеодори, последнее утверждение в общем случае неверно.

Сформулируем цитированный выше результат Довгошей, который является первым результатом, распространяющим теорему Рудина на области Каратеодори (см. [5; теорема 18]).

ТЕОРЕМА В. Пусть Ω – область Каратеодори с границей Γ , а $\mathcal{A}$ – замкнутая подалгебра алгебры $C(\overline{\Omega})$ такая, что $1 \in \mathcal{A}$ и $\|f\|_{\overline{\Omega}} = \|f\|_\Gamma$ для любой функции $f \in \mathcal{A}$. Следующие условия эквивалентны:

- а) если существует функция $g \in \mathcal{A}$ такая, что g инъективна на $\overline{\Omega}$ и голоморфна в Ω , то $\mathcal{A} = P(\overline{\Omega})$;
- б) область Ω не разделяет плоскость.

В отличие от теоремы Рудина в теореме В рассматривается не подпространство $\mathcal{W} \subset C(\bar{\Omega})$, а замкнутая подалгебра $\mathcal{A} \subset C(\bar{\Omega})$. Кроме того, в этой теореме условие замкнутости $\mathcal{A}$ относительно операции умножения на $\mathfrak{z}$ заменено на условие существования в $\mathcal{A}$ однолистной функции. При этом в [5] доказывается, что если область Каратеодори Ω не разделяет плоскость, а замкнутая подалгебра $\mathcal{A} \subset C(\bar{\Omega})$ содержит однолистную функцию, то $\mathfrak{z} \in \mathcal{A}$. Этот результат является следствием весьма нетривиального утверждения о том, что если G – не разделяющая плоскость область Каратеодори, а ψ – непрерывное и инъективное отображение $G \rightarrow \mathbb{C}$, то $\psi(G)$ также будет не разделяющей плоскостью областью Каратеодори (доказательство этого утверждения можно найти, например, в [5; теорема 2]). Важно отметить, что в последнем утверждении условие о том, что G не разделяет плоскость, нельзя отбросить. Контрпримером в этом случае является область, известная как “внешняя змейка”, или “рог изобилия”. Это, например, область, ограниченная двумя спиралями $z = (1 + e^{-\tau})e^{i\tau}$ и $z = (1 + 2e^{-\tau})e^{i\tau}$, $\tau \in [0, +\infty)$, и отрезком $[2, 3]$. Легко видеть, что эта область разделяет плоскость и что функция $1/z$ является однолистной в ней. Однако легко проверить, что образом описанной области при отображении $z \mapsto 1/z$ будет область (так называемая “внутренняя змейка”), уже не являющаяся областью Каратеодори.

Заметим также, что утверждение теоремы В в случае, когда Ω является жордановой областью, было получено У. Рудиным в работе [8].

Условия, наложенные на $\mathcal{A}$ в теореме В, можно ослабить и сформулировать их так, как это сделано в теореме Рудина. В самом деле, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. а) Пусть G – область Каратеодори, не разделяющая плоскость. Если подпространство $\mathcal{W}$ пространства $C(\bar{G})$, удовлетворяет следующим трем условиям:

- (i) $1 \in \mathcal{W}$;
  - (ii) если $f \in \mathcal{W}$, то $\mathfrak{z}f \in \mathcal{W}$;
  - (iii) неравенство $|f(z)| \leq \|f\|_{\partial G}$ имеет место для любых $f \in \mathcal{W}$ и $z \in G$;
- то $\mathcal{W} \subset \text{Hol}(G)$.

б) Пусть Ω – область Каратеодори. Замкнутое подпространство $\mathcal{X} \subset C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющее условиям (i)–(iii) (с заменой $\mathcal{W}$ на $\mathcal{X}$ и G на Ω), совпадает с $P(\bar{\Omega})$ тогда и только тогда, когда Ω не разделяет плоскость.

Утверждение а) теоремы 1 является непосредственным обобщением теоремы Рудина на области Каратеодори, не разделяющие плоскость. Доказательство теоремы 1 может быть получено в результате несложной модификации доказательства теоремы В, однако мы приведем его со всеми необходимыми подробностями для удобства читателя и полноты изложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Утверждение а) и соответствующую импликацию в утверждении б) мы докажем одновременно. Пусть G – это не разделяющая плоскость область Каратеодори. Из условий (i) и (ii) вытекает, что $\mathcal{P} \subset \mathcal{W}$ и, следовательно, что $P(\bar{G}) \subset \mathcal{W}$. Пусть $\mathcal{A}$ – некоторая замкнутая

подалгебра алгебры $C(\overline{G})$, содержащая $\overline{\mathcal{W}}$. Обозначим $\Gamma := \partial G$ и рассмотрим подпространство

$$\mathcal{A}_\Gamma = \{f|_\Gamma : f \in \mathcal{A}\}.$$

Из условия (iii) вытекает, что $\mathcal{A}_\Gamma$ – это замкнутая подалгебра алгебры $C(\Gamma)$, а отображение $\Phi: f \mapsto f|_\Gamma$, $f \in \mathcal{A}$, – это изометрический изоморфизм алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_\Gamma$. Так как $P(\overline{G}) \subset \overline{\mathcal{W}}$, то $P(\Gamma) \subset \mathcal{A}_\Gamma$. Из теоремы Вермера о максимальнойности (для областей Каратеодори, не разделяющих плоскость, соответствующий результат получен в [9; теорема 6] и подробно обсуждается ниже) вытекает, что $\mathcal{A}_\Gamma$ – это либо алгебра $P(\Gamma)$, либо алгебра $C(\Gamma)$.

Пусть $\mathcal{A}_\Gamma = C(\Gamma)$. Будем рассуждать аналогично тому, как это было сделано в работе [5] при доказательстве теоремы В (см. также доказательство последнего утверждения в работе [10]). Возьмем произвольную точку $a \in G$ и определим функционал $V_a(f) = f(a)$, $f \in \mathcal{A}$. Далее, при $h \in \mathcal{A}_\Gamma$ мы определим функционал

$$\Psi(h) = V_a(\Phi^{-1}(h)).$$

Из условия (iii) и из равенства $\mathcal{A}_\Gamma = C(\Gamma)$ вытекает, что $\Psi: C(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ – это непрерывный гомоморфизм. Следовательно, найдется такая точка $\zeta \in \Gamma$, что $\Psi(h) = h(\zeta)$ при $h \in C(\Gamma)$. Для функции $h_0 = \mathfrak{z}|_\Gamma \in \mathcal{A}_\Gamma$ получаем

$$\zeta = h_0(\zeta) = \Psi(h_0) = V_a(\Phi^{-1}(h_0)) = V_a(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}(a) = a,$$

что невозможно, так как $\zeta \in \Gamma$, а $a \in G$.

Следовательно, $\mathcal{A}_\Gamma \neq C(\Gamma)$. Но тогда $\mathcal{A}_\Gamma = P(\Gamma)$. Так как $\Phi(P(\overline{G})) = P(\Gamma) = \mathcal{A}_\Gamma$, то $\mathcal{A} = P(\overline{G})$. Остается заметить, что $P(\overline{G}) \subset \overline{\mathcal{W}} \subset \mathcal{A} = P(\overline{G})$, откуда вытекает, что $\overline{\mathcal{W}} = P(\overline{G})$ и $\mathcal{W} \subset \text{Hol}(G)$.

Обратно, пусть область Каратеодори Ω такова, что множество $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ не является связным. Пусть G_0 – это одна из ограниченных связных компонент этого множества, а $b \in G_0$ – произвольная точка. Несложно проверяется, что замкнутое подпространство $\mathcal{X}_b \subset C(\overline{\Omega})$, порожденное многочленами и функциями $1/(z-b)^k$, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяет всем условиям теоремы 1, но не совпадает с $P(\overline{\Omega})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если область G_0 в доказательстве последнего утверждения теоремы 1 – это единственная ограниченная компонента множества $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$, то в силу теоремы Мергеляна $\mathcal{X}_b = A(\overline{\Omega})$. Однако если область Каратеодори Ω_1 такова, что множество $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}_1$ имеет, как минимум, две ограниченные связные компоненты, скажем, G_1 и G_2 (в качестве Ω_1 можно взять, например, объединение двух “рогов избытия” с подходящими параметрами), то можно построить подпространство пространства $C(\overline{\Omega}_1)$, удовлетворяющее условиям теоремы 1, но не совпадающее ни с $P(\overline{\Omega}_1)$, ни с $A(\overline{\Omega}_1)$. Таким будет, например, замкнутое подпространство $\mathcal{X}_b \subset C(\overline{\Omega}_1)$, порожденное многочленами и функциями $1/(z-b)^k$, $k \in \mathbb{N}$, где $b \in G_1$.

Заметим, что условие связности дополнения к области G позволяет сделать один из ключевых шагов доказательства прямого утверждения в теореме 1 –

применить теорему Вермера о максимальности к алгебре $\mathcal{A}_\Gamma$. Обсудим эту теорему и связь между свойством максимальности алгебры $P(K)$ и топологическими свойствами компакта $K \subset \mathbb{C}$.

Напомним, что замкнутая подалгебра $\mathcal{B}$ алгебры $C(K)$ называется максимальной, если для любой замкнутой подалгебры $\mathcal{B}'$ алгебры $C(K)$ такой, что $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$, вытекает, что либо $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, либо $\mathcal{B}' = C(K)$. Вопрос о максимальности алгебры $P(K)$ для различных компактов $K \subset \mathbb{C}$ восходит к Д. Вермеру (см. [10]), который доказал, что алгебра $P(\overline{\mathbb{D}})|_{\mathbb{T}}$ является максимальной в $C(\mathbb{T})$. Позже Э. Бишоп (см. [9; теорема 6]) установил, что $P(X)|_{\partial X}$ является максимальной подалгеброй алгебры $C(\partial X)$ для компактов X , имеющих связное дополнение и связную внутренность. Из этого, в частности, вытекает использованный при доказательстве теоремы 1 результат о максимальности алгебры $P(\Gamma)$ в случае, когда Γ – это граница области Каратеодори, не разделяющей плоскость. Имеет место следующее утверждение, показывающее, что свойство алгебры $P(K)$ быть максимальной накладывает весьма жесткие топологические ограничения на компакт K (см. [7; предложение 1]).

ТЕОРЕМА С. *Пусть K – компакт в $\mathbb{C}$. Если алгебра $P(K)$ является максимальной подалгеброй алгебры $C(K)$, то K – это нигде не плотный компакт Каратеодори. Более того, если $K = \partial\Omega$, где Ω – это непустое открытое ограниченное множество в $\mathbb{C}$, то множества $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ и $\mathbb{C} \setminus \Omega$ связны.*

Напомним, что компакт $K \subset \mathbb{C}$ называется *компактом Каратеодори*, если $\partial K = \partial \hat{K}$, где $\hat{K}$ – это объединение K и всех ограниченных связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus K$. Так как $\hat{K} = \{z \in \mathbb{C} : |p(z)| \leq \|p\|_K \text{ для любого } p \in \mathcal{P}\}$, то множество $\hat{K}$ называют полиномиальной выпуклой оболочкой компакта K .

Из теоремы С и упомянутых результатов Вермера и Бишопы вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если $\Omega \neq \emptyset$ – ограниченная область в $\mathbb{C}$, то $P(\partial\Omega)$ является максимальной подалгеброй алгебры $C(\partial\Omega)$, если и только если Ω является областью Каратеодори, не разделяющей плоскость.*

Заметим также, что несколько более слабый вариант следствия 1 (в случае, когда область Ω изначально предполагается односвязной) был получен ранее Довгошем (см. [5; теорема 17]).

Таким образом, класс областей Каратеодори, не разделяющих плоскость, является наиболее общим классом областей, на которые теорема Рудина обобщается непосредственным образом. Однако можно поставить вопрос следующим образом: пусть Ω – некоторая область в $\mathbb{C}$, а функция $g \in C(\overline{\Omega})$ удовлетворяет какому-либо варианту принципа максимума модуля в Ω ; следует ли из этого голоморфность g в Ω ? Изучение этого вопроса приводит к более далеко идущим обобщениям теоремы Рудина, которые рассматриваются в следующих параграфах работы.

§ 3. Теоремы Вермера и Андерсона–Симы–Левенберга–Рансфорда и формулировка основного результата

В 2006 г. Д. Вермер получил следующий результат (см. [3; теорема 2]).

ТЕОРЕМА Д. Пусть $g \in C(\overline{\mathbb{D}})$ такова, что $g|_{\mathbb{T}}$ – вещественно аналитическая функция. Если для любой точки $z \in \mathbb{D}$ найдется константа C_z такая, что неравенство

$$|f_1(z) + g(z)f_2(z)| \leq C_z \|f_1 + gf_2\|_{\mathbb{T}} \quad (3.1)$$

имеет место для любых функций $f_1, f_2 \in A(\overline{\mathbb{D}})$, то $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$.

Для открытого множества $U \subset \mathbb{C}$ обозначим через $H^\infty(U)$ пространство всех голоморфных и ограниченных в U функций и положим $H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$. Кроме того, обозначим через H^p , $p \geq 1$, стандартные пространства Харди в единичном круге. Напомним, что в силу классической теоремы Фату для любой функции $f \in H^p$ и для почти всех точек $\xi \in \mathbb{T}$ существуют угловые граничные значения $f(\xi)$ функции f в точке ξ .

Теорема Д была усилена в 2011 г. в работе Д. Андерсона, Д. Симы, Н. Левенберга и Т. Ренсфорда [4], в которой было доказано следующее утверждение (см. [4; следствие 2.3]).

ТЕОРЕМА Е. Пусть U – открытое подмножество $\mathbb{D}$, и пусть $g \in C(U \cup \mathbb{T})$. Предположим, что для любой точки $z \in U$ существует константа C_z такая, что неравенство (3.1) имеет место для любых функций $f_1, f_2 \in A(\overline{\mathbb{D}})$. Тогда существуют две функции $u, v \in H^\infty$ такие, что $g = u/v$ в U , и для почти всех точек $\xi \in \mathbb{T}$ выполняется равенство $g(\xi) = u(\xi)/v(\xi)$. В частности, функция g голоморфна в U и мероморфно продолжается в $\mathbb{D}$.

Основной целью настоящей работы является распространение результата Андерсона–Симы–Левенберга–Ренсфорда с круга на области Каратеодори. Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Ω – область Каратеодори с границей Γ , а U – открытое подмножество в Ω . Пусть $g \in C(U \cup \Gamma)$. Если для любого $z \in U$ найдется константа C_z такая, что неравенство

$$|f_1(z) + g(z)f_2(z)| \leq C_z \|f_1 + gf_2\|_{\Gamma} \quad (3.2)$$

выполняется для любых функций $f_1, f_2 \in A(\overline{\Omega})$, то существуют две функции $u, v \in H^\infty(\Omega)$ такие, что равенство

$$g(z) = \frac{u(z)}{v(z)} \quad (3.3)$$

выполняется всюду в U и почти всюду на Γ в смысле конформного отображения. Последнее означает, что для почти всех точек $\xi \in \mathbb{T}$ выполняется следующее равенство угловых граничных значений:

$$g(\varphi(\xi)) = \frac{u(\varphi(\xi))}{v(\varphi(\xi))},$$

где φ – некоторое конформное отображение $\mathbb{D}$ на Ω . В частности, функция g голоморфна в U и мероморфно продолжается во всю область Ω .

В случае, когда $N \subset \Omega$ – конечное множество, а $U = \Omega \setminus N$, теорема 2 дает описание мероморфных в Ω функций с полюсами в N . В частности, если N – пустое множество, то возникает соответствующее описание голоморфных в Ω функций.

Отметим, что в случае, когда Ω – жорданова область со спрямляемой границей, равенство (3.3) может пониматься напрямую, т.е. как равенство угловых граничных значений почти всюду на $\partial\Omega$. Аналогичным образом равенство (3.3) можно понимать на любой спрямляемой жордановой дуге $\gamma \subset \partial\Omega$, обладающей тем свойством, что всякая точка дуги γ не является предельной точкой для множества $\partial\Omega \setminus \gamma$.

Основная идея, использованная при доказательстве теоремы 2, аналогична идеям, которые использовались в работах [12] и [13] при доказательстве результатов о равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами, а также идее доказательства теоремы Е в [4]. Доказательство теоремы 2 основывается на следующем утверждении, которое обобщает результат [4; теорема 2.1] на области Каратеодори.

ТЕОРЕМА 3. Пусть Ω – область Каратеодори, а $\Gamma = \partial\Omega$. Пусть $g \in C(\Gamma)$, а $z_0 \in \Omega$ и $b \in \mathbb{C}$. Если существует константа C такая, что для любых функций $f_1, f_2 \in A(\overline{\Omega})$ выполняется неравенство

$$|f_1(z_0) + bf_2(z_0)| \leq C \|f_1 + gf_2\|_{\Gamma}, \quad (3.4)$$

то найдутся две функции $u, v \in H^\infty(\Omega)$ такие, что равенство (3.3) выполняется почти всюду на Γ в смысле конформного отображения, а

$$\frac{u(z_0)}{v(z_0)} = b.$$

Связь теорем D и E и теоремы 2 с теоремой Рудина. Пусть G – область Каратеодори, не разделяющая плоскость. Нам потребуется следующее утверждение, являющееся непосредственным следствием теоремы 2 (при $G = \mathbb{D}$ достаточно воспользоваться теоремой E).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть функция $g \in C(\overline{G})$ такова, что для любых функций $f_1, f_2 \in A(\overline{G})$ и для любой точки $z \in G$ имеет место неравенство

$$|f_1(z) + g(z)f_2(z)| \leq \|f_1 + gf_2\|_{\Gamma}. \quad (3.5)$$

Тогда функция g голоморфна в G .

Заметим, что неравенство (3.2), фигурирующее в теореме 2, представляет собой ослабленный вариант неравенства (3.5) (в неравенстве (3.2) возникает константа C_z , которая может зависеть от точки). Таким образом, предложение 1 является весьма слабым следствием теоремы 2, но его достаточно для выяснения связи этой теоремы с теоремой Рудина.

Покажем, как утверждение теоремы Рудина выводится из приведенного предложения. Пусть G – область Каратеодори, не разделяющая плоскость, а $\mathcal{W}$ – подпространство пространства $C(\overline{G})$, удовлетворяющее свойствам (i)–(iii) теоремы 1. Выберем произвольную функцию $g \in \mathcal{W}$ и рассмотрим модуль

$$\mathcal{P}_g = \{p_1 + gp_2 : p_1, p_2 \in \mathcal{P}\}$$

над кольцом $\mathcal{P}$. Из свойств (i) и (ii) вытекает, что $\mathcal{P}_g \subset \mathcal{W}$. Так как многочлены плотны в пространстве $A(\overline{G})$ (это следует из того, что область G не разделяет плоскость), то модуль

$$\mathcal{M}_g(G) = \{f_1 + gf_2 : f_1, f_2 \in A(\overline{G})\}$$

содержится в $\overline{\mathcal{W}}$ (напомним, что $\overline{\mathcal{W}}$ – это замыкание $\mathcal{W}$ в $C(\overline{G})$). Таким образом, из выполнения свойства (iii) для $\mathcal{W}$ следует, что неравенство (3.5) выполняется для всех $z \in G$ и $f_1, f_2 \in A(\overline{G})$. Тогда из предложения 1 вытекает, что $g \in \text{Hol}(G)$ и, следовательно, $\mathcal{M}_g(G) = A(\overline{G})$. Так как g – произвольная функция из $\mathcal{W}$, то $\mathcal{W} \subset A(\overline{G})$. Таким образом,

$$A(\overline{G}) = \mathcal{M}_g(G) \subset \overline{\mathcal{W}} \subset A(\overline{G}),$$

откуда $\overline{\mathcal{W}} = A(\overline{G})$. Остается заметить, что $A(\overline{G}) = P(\overline{G})$, так как область G не разделяет плоскость.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Так как замыкание $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$ модуля $\mathcal{M}_g(G)$ в $C(\overline{G})$ удовлетворяет условиям (i)–(ii) теоремы 1, то из выполнения неравенства $|f(z)| \leq \|f\|_{\partial G}$ для любых $f \in \mathcal{M}_g(G)$ и $z \in G$ вытекает, что $\overline{\mathcal{M}}_g(G) = P(\overline{G})$.

В этом утверждении представляется целесообразным заменить замыкание $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$ модуля $\mathcal{M}_g(G)$ на сам этот модуль. Это, разумеется, возможно в случае, когда $\mathcal{M}_g(G)$ является замкнутым подпространством пространства $C(\overline{G})$. Обсудим кратко, при каких условиях это свойство выполняется. Пусть, как обычно, $\bar{\partial}$ обозначает оператор Коши–Римана в $\mathbb{C}$, т.е.

$$\bar{\partial}f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Пусть функция g принадлежит классу C^2 в окрестности множества $\overline{G}$ и удовлетворяет условию $\bar{\partial}g \neq 0$ в G . В этом случае элементы f модуля $\mathcal{M}_g(G)$ являются решениями эллиптического дифференциального уравнения

$$\bar{\partial} \left(\frac{\bar{\partial}f}{\bar{\partial}g} \right) = 0. \quad (3.6)$$

Так как в классе непрерывных функций обобщенные решения уравнения (3.6) являются классическими (см., например, [11; теорема 3.7.7]), то равномерный предел последовательности решений уравнения (3.6) в некоторой области снова является решением (в той же области). Таким образом, в рассматриваемом случае модуль $\mathcal{M}_g(G)$ является замкнутым подпространством пространства $C(\overline{G})$.

§ 4. Свойства областей Каратеодори, необходимые для доказательства теорем 2 и 3

Существенным ингредиентом доказательства теоремы 3 являются полученные в [6] результаты о граничном поведении конформных отображений областей Каратеодори на единичный круг и вытекающие из них результаты о структуре мер, ортогональных к рациональным функциям на границах областей Каратеодори. Для удобства читателя и согласования обозначений мы приведем эти результаты в несколько большей общности, чем это необходимо для доказательства теоремы 3.

4.1. Пусть Ω – ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$ (не обязательно являющаяся областью Каратеодори), а φ – некоторое (фиксированное) конформное отображение $\mathbb{D}$ на Ω .

Обозначим через $\mathcal{F}(\varphi)$ подмножество, состоящее из всех тех точек $\xi \in \mathbb{T}$, в которых угловые предельные значения функции φ существуют. Это множество называется множеством Фату функции φ , и согласно [14; предложение 6.5] оно является борелевским.

Определим множество $\partial_a \Omega \subset \partial \Omega$, состоящее из всех точек $\partial \Omega$, которые достижимы из Ω посредством некоторой кривой. Согласно предложениям 2.14 и 2.17 из [14] имеет место равенство

$$\partial_a \Omega = \{\varphi(\xi) : \xi \in \mathcal{F}(\varphi)\},$$

а в [6; § 2] показано, что множество $\partial_a \Omega$ является борелевским. Заметим, что множество $\partial_a \Omega$ зависит только от области Ω , но не от выбора конформного отображения φ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество $\partial_a \Omega$ называется *достижимой частью границы* области Ω , а области со свойством $\partial \Omega = \partial_a \Omega$ называются *областями с достижимой границей*.

Пусть теперь Ω – область Каратеодори, пусть $z_0 = \varphi(0) \in \Omega$, а $\varphi'(0) > 0$, и пусть $\psi = \varphi^{-1}$. Для формулировки следующих результатов нам потребуется одна специальная конструкция. Возьмем конформное отображение φ_∞ круга $\mathbb{D}$ на область Ω_∞ с нормировкой $\varphi_\infty(0) = \infty$ и определим последовательности замкнутых жордановых кривых

$$\Gamma_m = \varphi_\infty \left(\left\{ \xi : |\xi| = 1 - \frac{1}{m+1} \right\} \right), \quad m \in \mathbb{N},$$

и конформных отображений φ_m круга $\mathbb{D}$ на $D(\Gamma_m)$ (здесь и далее $D(\Gamma)$ обозначает область, ограниченную замкнутой жордановой кривой Γ) с нормировкой $\varphi_m(0) = z_0$, $\varphi'_m(0) > 0$.

Из классической теоремы Каратеодори (см. [16; гл. II, § 5, теорема 1]) о сходимости к ядру следует, что последовательность $\{\varphi_m\}$ сходится к φ локально

равномерно в $\mathbb{D}$, а последовательность $\{\varphi_m^{-1}\}$ сходится к φ^{-1} локально равномерно в Ω (под локально равномерной сходимостью в области понимается равномерная сходимость на компактных подмножествах этой области).

Нам потребуется более точная информация о поведении функции φ в $\overline{\mathbb{D}}$ и о поведении функции φ^{-1} в $\overline{\Omega}$.

Напомним ряд классических результатов в этом направлении (при этом мы не будем предполагать, что рассматриваемая область Ω является областью Каратеодори). Так, известная теорема Каратеодори о продолжении утверждает, что φ продолжается до гомеоморфизма $\overline{\mathbb{D}}$ на $\overline{\Omega}$ в том и только том случае, когда Ω является жордановой областью, а φ непрерывно (не обязательно гомеоморфно) продолжается в $\overline{\mathbb{D}}$ тогда и только тогда, когда $\partial\Omega$ является локально связным множеством. Следующим важным результатом здесь является теорема Каратеодори о простых концах (см. [14; гл. 2, п. 2.1]). Она утверждает, что φ продолжается до гомеоморфизма $\overline{\mathbb{D}}$ на $\Omega \cup \epsilon(\Omega)$, где $\epsilon(\Omega)$ – это множество простых концов области Ω . Так как объединение $\Omega \cup \epsilon(\Omega)$ может существенно отличаться от $\overline{\Omega}$ в любом разумном геометрическом и/или топологическом смысле, то теорема о простых концах является не самым удобным инструментом для изучения поведения φ на $\mathbb{T}$ и φ^{-1} на $\partial\Omega$. Так, например, вопрос о непрерывном продолжении φ^{-1} на $\overline{\Omega}$ решается для общих односвязных областей следующим образом (см. [17; § 2]): φ^{-1} непрерывно продолжается в $C(\overline{\Omega})$ тогда и только тогда, когда каждая точка $z \in \partial\Omega$ является простой граничной точкой для Ω в том смысле, что множество $\xi \in \mathbb{T}$ таких, что ζ принадлежит полному предельному множеству $C(\varphi, \xi)$ функции φ в точке ξ , состоит из одной точки. Заметим, что проверка этого критерия во многих случаях является достаточно сложной задачей.

В случае областей Каратеодори в вопросе о продолжении φ^{-1} в $\overline{\Omega}$ удастся получить следующий результат (см. [6; теорема 1]).

ТЕОРЕМА F. *Если Ω – область Каратеодори, а $\zeta \in \partial_a\Omega$, то существует единственная точка $\xi_\zeta \in \mathcal{F}(\varphi)$ такая, что $\varphi(\xi_\zeta) = \zeta$; эта точка обозначается $\varphi^{-1}(\zeta)$. При этом для любой точки $\zeta \in \partial_a\Omega$ имеет место сходимость $\varphi_m^{-1}(\zeta) \rightarrow \varphi^{-1}(\zeta)$ при $m \rightarrow \infty$.*

Пусть $\psi := \varphi^{-1}$. Из теоремы F вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если Ω – область Каратеодори, то функции φ и ψ продолжаются до борелевских функций (обозначаемых теми же символами) на множествах $\mathbb{D} \cup \mathcal{F}(\varphi)$ и $\Omega \cup \partial_a\Omega$ соответственно, причем $\psi(\varphi(\xi)) = \xi$ для любого $\xi \in \mathcal{F}(\varphi)$ и $\varphi(\psi(\zeta)) = \zeta$ для любого $\zeta \in \partial_a\Omega$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из теоремы F вытекает, что если Ω – это область Каратеодори с достижимой границей, то φ^{-1} продолжается до функции, принадлежащей первому классу Бэра в $\overline{\Omega}$.

В связи с этим утверждением заметим, что любая жорданова область будет областью Каратеодори с достижимой границей, но существуют области Каратеодори с достижимой границей, которые не являются жордановыми областями (см., например, [6; пример 1]).

Отметим также еще одно интересное и важное свойство областей Каратеодори (см. [6; предложение 2]): если Ω – область Каратеодори, а V – это ограниченная связная компонента множества $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$, то множество $\partial_a \Omega \cap \partial V$ состоит не более чем из одной точки (причем существуют такие Ω и V , что множество $\partial_a \Omega \cap \partial V$ является одноточечным). В частности, области Каратеодори с достижимой границей не разделяют плоскость.

4.2. Перейдем к вопросу о структуре мер, ортогональных к рациональным функциям на границах областей Каратеодори. Всюду в дальнейшем под мерой мы будем понимать конечную комплекснозначную борелевскую меру в $\mathbb{C}$. Мера μ называется ортогональной к некоторому классу функций $\mathfrak{C}$, если $\int f(z) d\mu(z) = 0$ для любой функции $f \in \mathfrak{C}$. Этот факт обозначается стандартно: $\mu \perp \mathfrak{C}$.

Пусть $h \in L^1(\mathbb{T})$, где пространство Лебега $L^1(\mathbb{T})$ рассматривается относительно нормированной меры Лебега m на $\mathbb{T}$ (т.е. $dm(\xi) = |d\xi|/(2\pi)$). Обозначим через $h d\xi$ меру на $\mathbb{T}$, действующую (как функционал на пространстве $C(\mathbb{T})$) по формуле

$$(h d\xi)(f) = \int_{\mathbb{T}} f(\xi) h(\xi) d\xi.$$

Для меры $\nu := h d\xi$ определим меру $\varphi(\nu)$ на $\partial\Omega$ следующим образом:

$$\varphi(\nu)(E) := \nu(\psi(E \cap \partial_a \Omega))$$

для любого борелевского множества $E \subset \partial\Omega$. При этом для любой функции $g \in C(\partial\Omega)$ имеют место равенства

$$\int g(\zeta) d\varphi(\nu)(\zeta) = \int_{\mathcal{F}(\varphi)} g(\varphi(\xi)) h(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{T}} g(\varphi(\xi)) h(\xi) d\xi. \quad (4.1)$$

Определим теперь меру ω_0 на $\partial\Omega$ равенством $\omega_0 := \varphi(|d\xi|/(2\pi))$, а меру ω – равенством $\omega := \varphi(d\xi)$. При этом меры ω_0 и ω сосредоточены на $\partial_a \Omega$ и не имеют атомов. Кроме того, из следствия 2 и из равенства (4.1) вытекает, что для любой функции $h \in L^1(\mathbb{T})$ выполнено

$$\varphi(h d\xi) = (h \circ \psi)\omega = (h_0 \circ \psi)\omega_0,$$

где $h_0 = 2\pi i z h$. Мера ω_0 обладает тем свойством, что для любого борелевского множества $E \subset \partial\Omega$ имеет место равенство $\omega_0(E) = \omega(\varphi(0), E, \Omega)$ (см., например, [6; § 3]), где через $\omega(z, E, \Omega)$ обозначается гармоническая мера множества E , вычисленная относительно области Ω и точки z . Отметим еще, что $|\omega| = 2\pi\omega_0$, а для любой функции $g \in C(\partial\Omega)$ имеет место равенство

$$\int g(\zeta) d\omega_0(\zeta) = \widehat{g}(\varphi(0)),$$

где через $\widehat{g}$ обозначена такая гармоническая в области Ω и непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция, что $\widehat{g}|_{\partial\Omega} = g$.

Для компакта X в $\mathbb{C}$ обозначим через $\mathcal{R}(X)$ пространство всех рациональных функций комплексного переменного, полюсы которых лежат вне X .

Нам потребуется информация о структуре мер на $\partial\Omega$, ортогональных пространству $\mathcal{R}(\bar{\Omega})$. Из результатов работ [9], [15] и [6; § 3] вытекает следующее утверждение, которое распространяет классическую теорему братьев Рисс на области Каратеодори.

ТЕОРЕМА G. Пусть Ω – область Каратеодори, а μ – мера на $\partial\Omega$ такая, что $\mu \perp \mathcal{R}(\bar{\Omega})$. Тогда существует функция $h \in H^1$ такая, что

$$\mu = (h \circ \psi)\omega = (h_0 \circ \psi)\omega_0, \quad (4.2)$$

где $h_0 = 2\pi i z h$ (т.е. $h_0 \in H^1$ и $h_0(0) = 0$).

Пусть теперь Ω – это область Каратеодори, не разделяющая плоскость. Из теоремы G вытекает, что любая мера, ортогональная многочленам, будет абсолютно непрерывна относительно гармонической меры на ∂G (напомним, что для любых точек $z_1 \in \Omega$ и $z_2 \in \Omega$ меры $\omega(z_1, \cdot, \Omega)$ и $\omega(z_2, \cdot, \Omega)$ абсолютно непрерывны друг относительно друга). Легко проверяется, что имеет место и обратное утверждение: если Ω – такая ограниченная односвязная область, что любая мера на $\partial\Omega$, ортогональная к $\mathcal{P}$, является абсолютно непрерывной относительно гармонической меры на $\partial\Omega$, то Ω является не разделяющей плоскость областью Каратеодори (впервые этот факт был отмечен в работе [18]).

§ 5. Доказательство теорем 2 и 3

Как отмечалось выше, доказательство теоремы 2 по существу основано на теореме 3. Поэтому мы начнем с доказательства теоремы 3, а теорема 2 будет доказана позже.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Не ограничивая общности, будем считать, что φ выбрано таким образом, что $\varphi(0) = z_0$.

Рассмотрим подпространство $\mathcal{M}(\Gamma)$ пространства $C(\Gamma)$, которое состоит из сужений на Γ всех функций вида $f_1 + g f_2$, где $f_1, f_2 \in A(\bar{\Omega})$. Из неравенства (3.4) следует, что линейный функционал

$$f_1 + g f_2 \mapsto f_1(z_0) + b f_2(z_0)$$

ограничен на $\mathcal{M}(\Gamma)$. По теореме Хана–Банаха этот функционал продолжается до непрерывного линейного функционала на всем пространстве $C(\Gamma)$, и, следовательно, по теореме Рисса о представлении найдется такая мера μ на Γ , что равенство

$$f_1(z_0) + b f_2(z_0) = \int_{\Gamma} (f_1(\zeta) + g(\zeta) f_2(\zeta)) d\mu(\zeta) \quad (5.1)$$

имеет место для всех $f_1, f_2 \in A(\bar{\Omega})$.

Применим равенство (5.1) в случае, когда f_1 – произвольная функция класса $\mathcal{R}(\bar{\Omega})$, а $f_2 \equiv 0$. В этом случае

$$\int_{\Gamma} f_1(\zeta) d\mu(\zeta) = f_1(z_0).$$

Далее, учитывая определение меры ω_0 и применяя интегральную формулу Коши, получаем

$$\int_{\Gamma} f_1(\zeta) d\omega_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f_1(\varphi(\xi))}{\xi} d\xi = f_1(\varphi(0)) = f_1(z_0).$$

Так как два последних равенства выполняются для любой функции $f_1 \in \mathcal{R}(\bar{\Omega})$, то из них следует, что мера $\mu - \omega_0$ ортогональна пространству $\mathcal{R}(\bar{\Omega})$. Применяя (4.2), получаем, что эта мера имеет вид $\mu - \omega_0 = (h_1 \circ \psi)\omega_0$, где $h_1 \in H^1$ и $h_1(0) = 0$, откуда

$$\mu = (h_1 \circ \psi + 1)\omega_0. \quad (5.2)$$

Рассуждая аналогично и полагая в равенстве (5.1) $f_1 \equiv 0$, а $f_2(z) \in \mathcal{R}(\bar{\Omega})$, найдем такую функцию $h_2 \in H^1$ с условием $h_2(0) = 0$, что

$$g\mu = (h_2 \circ \psi + b)\omega_0. \quad (5.3)$$

Из соотношений (5.2) и (5.3) следует, что для ω_0 -почти всех $\zeta \in \Gamma$ верно равенство

$$h_2(\psi(\zeta)) + b = g(\zeta)(h_1(\psi(\zeta)) + 1).$$

Так как $h_1(0) = 0$, то $(h_1 \circ \psi + 1) \not\equiv 0$, и, следовательно, для ω_0 -почти всех $\zeta \in \Gamma$ предельные значения $h_1(\psi(\zeta)) + 1$ отличны от нуля. Таким образом, для ω_0 -почти всех $\zeta \in \Gamma$ справедливо соотношение

$$g(\zeta) = \frac{h_2(\psi(\zeta)) + b}{h_1(\psi(\zeta)) + 1}.$$

Поскольку функция $h_2 + b$ принадлежит классу H^1 и, следовательно, классу Неванлинны в круге $\mathbb{D}$, то найдутся такие функции u_1 и u_2 класса H^∞ , что $h_2 + b\varphi = u_1/u_2$. Аналогично, существуют функции v_1 и v_2 класса H^∞ такие, что $h_1 + \varphi = v_1/v_2$.

Определим теперь функции u и v класса $H^\infty(\Omega)$ следующим образом:

$$u(z) := u_1(\psi(z))v_2(\psi(z)), \quad v(z) := u_2(\psi(z))v_1(\psi(z)) \quad \text{при } z \in \Omega.$$

Таким образом, для почти всех точек $\xi \in \mathbb{T}$ выполняется равенство угловых граничных значений

$$\frac{u(\varphi(\xi))}{v(\varphi(\xi))} = \frac{u_1(\xi)v_2(\xi)}{u_2(\xi)v_1(\xi)} = \frac{h_2(\xi) + b\varphi(\xi)}{h_1(\xi) + \varphi(\xi)} = \frac{h_2(\psi(\zeta)) + b}{h_1(\psi(\zeta)) + 1} = g(\zeta) = g(\varphi(\xi)), \quad (5.4)$$

где $\zeta = \varphi(\xi)$. Из равенства (5.4) вытекает, что равенство $g(\zeta) = u(\zeta)/v(\zeta)$ выполняется почти всюду на Γ в смысле конформного отображения. Остается заметить, что

$$\frac{u(z_0)}{v(z_0)} = \frac{h_2(\psi(z_0)) + b}{h_1(\psi(z_0)) + 1} = \frac{h_2(0) + b}{h_1(0) + 1} = b.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В силу теоремы 3 для любой точки $z \in U$ существуют такие функции $u, v \in H^\infty(\Omega)$, что $u(z)/v(z) = g(z)$, а равенство $g(\zeta) = u(\zeta)/v(\zeta)$ выполняется почти всюду на Γ в смысле конформного отображения. Возьмем две различные точки $z_1 \in U$ и $z_2 \in U$ и определим для них соответствующие пары функций u_1 и v_1 (для точки z_1) и u_2 и v_2 (для точки z_2). Заметим, что $v_1 \not\equiv 0$ и $v_2 \not\equiv 0$ в Ω и для почти всех $\xi \in \mathbb{T}$ имеет место равенство угловых граничных значений

$$\frac{u_1(\varphi(\xi))}{v_1(\varphi(\xi))} = g(\varphi(\xi)) = \frac{u_2(\varphi(\xi))}{v_2(\varphi(\xi))}.$$

Отсюда на основании граничной теоремы единственности Лузина–Привалова (см. [16; гл. 4, п. 2.5]) заключаем, что $u_1/v_1 = u_2/v_2$ в Ω . Таким образом, существуют такие функции $u, v \in H^\infty(\Omega)$, что равенство $g = u/v$ выполняется всюду в U и почти всюду на Γ в смысле конформного отображения. Кроме того, непрерывная на U функция g совпадает там с мероморфной функцией u/v и, следовательно, g голоморфна в U .

Список литературы

- [1] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987, xiv+416 pp.
- [2] С. Н. Мергелян, “Равномерные приближения функций комплексного переменного”, *УМН*, **7:2(48)** (1952), 31–122; англ. пер.: S. N. Mergelyan, *Uniform approximations to functions of a complex variable*, Amer. Math. Soc. Translation, **101**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1954, 99 pp.
- [3] J. Wermer, *Rudin’s theorem and projective hulls*, 2006, arXiv: math/0611060v1.
- [4] J. T. Anderson, J. A. Cima, N. Levenberg, T. J. Ransford, “Projective hulls and characterizations of meromorphic functions”, *Indiana Univ. Math. J.*, **61:6** (2012), 2111–2122.
- [5] O. Dovgoshey, “Certain characterizations of Carathéodory domains”, *Comput. Methods Funct. Theory*, **5:2** (2005), 489–503.
- [6] J. J. Carmona, K. Yu. Fedorovskiy, “Conformal maps and uniform approximation by polyanalytic functions”, *Selected topics in complex analysis*, Oper. Theory Adv. Appl., **158**, Birkhäuser, Basel, 2005, 109–130.
- [7] J. J. Carmona, K. Yu. Fedorovskiy, “New conditions for uniform approximation by polyanalytic polynomials”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **279**, МАИК, М., 2012, 227–241; *Proc. Steklov Inst. Math.*, **279** (2012), 215–229.
- [8] W. Rudin, “Analyticity, and the maximum modulus principle”, *Duke Math. J.*, **20:3** (1953), 449–457.
- [9] E. Bishop, “The structure of certain measures”, *Duke Math. J.*, **25:2** (1958), 283–289.
- [10] J. Wermer, “On algebras of continuous functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4:6** (1953), 866–869.
- [11] Р. Нарасимхан, *Анализ на действительных и комплексных многообразиях*, Мир, М., 1971, 232 с.; пер. с англ.: R. Narasimhan, *Analysis on real and complex manifolds*, Adv. Stud. Pure Math., **1**, Masson & Cie, Éditeurs, Paris; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1968, x+246 pp.

- [12] К. Ю. Федоровский, “О равномерных приближениях функций n -аналитическими полиномами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$ ”, *Матем. заметки*, **59**:4 (1996), 604–610; англ. пер.: K. Yu. Fedorovskii, “Uniform n -analytic polynomial approximations of functions on rectifiable contours in $\mathbb{C}$ ”, *Math. Notes*, **59**:4 (1996), 435–439.
- [13] Д. Д. Кармона, П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, “О равномерной аппроксимации полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций”, *Матем. сб.*, **193**:10 (2002), 75–98; англ. пер.: J. J. Carmona, P. V. Paramonov, K. Yu. Fedorovskiy, “On uniform approximation by polyanalytic polynomials and the Dirichlet problem for bianalytic functions”, *Sb. Math.*, **193**:10 (2002), 1469–1492.
- [14] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Grundlehren Math. Wiss., **299**, Springer-Verlag, Berlin, 1992, x+300 pp.
- [15] E. Bishop, “Boundary measures of analytic differentials”, *Duke Math. J.*, **27**:3 (1960), 331–340.
- [16] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Гостехиздат, М.–Л., 1952, 540 с.; нем. пер.: G. M. Golusin, *Geometrische Funktionentheorie*, Hochschulbucher fur Math., **31**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957, xii+438 pp.
- [17] O. J. Farrell, “On approximation to a mapping function by polynomials”, *Amer. J. Math.*, **54**:3 (1932), 571–578.
- [18] A. A. Dovgoshei, “The F. and M. Riesz’ theorem and Carathéodory domains”, *Anal. Math.*, **21**:3 (1995), 165–175.

Константин Юрьевич Федоровский
(Konstantin Yu. Fedorovskiy)

Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана;
Математико-механический факультет
Санкт-Петербургского государственного
университета
E-mail: kfedorovs@yandex.ru

Поступила в редакцию
14.01.2014 и 24.10.2014