Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Борисенко, О цилиндричности подмногообразий, содержащих прямую, в пространстве Минковского, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 7, 25–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8327>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 14:22:41

УДК 514.774.2

А. А. Борисенко

О цилиндричности подмногообразий, содержащих прямую, в пространстве Минковского

Рассматриваются финслеровы подмногообразия в пространстве Минковского и, в частности, в пространстве Рандерса. Дано обобщение теорем Топоногова, Чигера–Громолла на случай пространств Рандерса. Доказаны достаточные условия цилиндричности полных финслеровых подмногообразий в пространстве Минковского. Найдены условия, когда из выпуклости гиперповерхности в пространстве Рандерса следует положительность флаговой кривизны.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: флаговая кривизна, кривизна Риччи, финслерова метрика, риманова метрика, внешний нуль-индекс, распределение.

DOI: 10.4213/sm8327

§ 1. Введение

Если полное двумерное риманово многообразие неотрицательной гауссовой кривизны содержит прямую (полную геодезическую, которая является кратчайшей на каждом отрезке), то многообразие является плоским. Это было доказано С. Кон-Фоссеном в [1]. В. А. Топоногов обобщил этот результат на n -мерный случай. Он доказал, что если на полном некомпактном римановом многообразии M^n неотрицательной секционной кривизны существует k линейно независимых прямых, то M^n есть риманово произведение $M^n = M^{n-k} \times E^k$, где E^k изометрично евклидову пространству, M^{n-k} – полное риманово многообразие неотрицательной секционной кривизны (см. [2]).

На случай неотрицательной кривизны Риччи теорема была обобщена Дж. Чичером и Д. Громолом в [3]. В псевдоримановом случае теорема была доказана Дж. Эшенбургом и Г. Галловеем в [4] и [5]. С. Охта доказал аналогичные теоремы о расщеплении на случай финслеровых пространств Бервальда с неотрицательной взвешенной кривизной Риччи в [6].

С другой стороны, для полных подмногообразий в евклидовом пространстве были найдены условия, когда подмногообразия являлись цилиндрами. Пусть M^l – полное регулярное класса C^3 подмногообразие в евклидовом пространстве E^n . Если во всех точках подмногообразия нуль-индекс $\mu(Q)$ больше или равен k и кривизна Риччи неотрицательна, то подмногообразие M^l является цилиндром с k -мерной образующей евклидовой плоскостью E^k (см. [7]). При условии неотрицательности секционной кривизны теорема была доказана Ф. Хартманом в [8], для полных гиперповерхностей нулевой секционной кривизны – Ф. Хартманом и Л. Ниренбергом в [9] (так как в этом случае $\mu \geq l-1$),

для гиперповерхностей неотрицательной секционной кривизны – Р. Сакстедером в [10].

Без ограничений на внутреннюю геометрии подмногообразия была доказана следующая

ТЕОРЕМА 1 (см. [7]). Пусть M^l – полное регулярное связное подмногообразие в евклидовом пространстве E^n . Если:

- 1) нуль-индекс $\mu(Q)$ равен k во всех точках подмногообразия,
- 2) тип точки $j(Q)$ равен 0 для всех точек подмногообразия,

то подмногообразие M^l есть цилиндр с евклидовой k -мерной образующей E^k .

В настоящей работе находятся условия, при которых полное финслерово подмногообразие M^l неотрицательной кривизны Риччи в пространстве Минковского и в частном случае в пространстве Рандерса R^n является цилиндром, если на нем лежит прямая объемлющего пространства или нуль-индекс μ больше 0 в каждой точке.

Условимся, что индексы принимают такие значения: $i, j, k = 1, \dots, l$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n - l + 1$; $a, b, c = 1, \dots, n + 1$.

Пространством Минковского M^{n+1} (см. [11], [12]) называется пара (V^{n+1}, S) , где V^{n+1} – это $(n + 1)$ -мерное вещественное пространство с декартовыми координатами $y^1, \dots, y^{n+1}$.

Норма Минковского $S: V^{n+1} \rightarrow [0, \infty)$ обладает свойствами:

- 1) $S \in C^\infty(V^{n+1} \setminus \{0\})$;
- 2) для любого положительного числа q $S(qy) = qS(y)$;
- 3) симметричная билинейная форма

$$g_{ab} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S^2}{\partial y^a \partial y^b}$$

положительно определена на V^{n+1} .

Метрика S , индуцируемая на поверхности $M^l \subset M^{n+1}$, является финслеровой, т.е. $S(x; y): T_P M^l \rightarrow [0, +\infty)$ и для произвольной точки $P \in M^l$ $S|_{T_P M^l}$ – норма Минковского на $T_P M^l$.

Пространством Рандерса R^{n+1} будем называть пространство Минковского с нормой S вида

$$S(y) = |y|_E + \beta(y), \quad (1.1)$$

где $|y|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (y^i)^2}$ – евклидова норма, $\beta(y) = b_a y^a$ – линейная форма.

Необходимым и достаточным условием того, что данная функция (1.1) является нормой Минковского, является условие на евклидову длину вектора $b = (b_1, \dots, b_{n+1})$ $|b| < 1$. Условимся считать пространство неевклидовым, т.е. $|b| \neq 0$.

Будем рассматривать C^3 -гладкое подмногообразие M^l как множество точек в двух различных пространствах: в пространстве Рандерса (обозначая поверхность в таком случае $M^l \subset R^n$ с индуцированной финслеровой метрикой) и в наложенном евклидовом пространстве (в этом случае обозначая поверхность $\bar{M}^l \subset E^n$ с индуцированной римановой метрикой).

Аналогом понятия секционной кривизны римановых пространств является *флаговая кривизна* финслеровых пространств (см. [11]), которая может быть определена как секционная кривизна римановой метрики

$$g = \sqrt{g_{ij}(x, Z)u^i u^j} \quad (1.2)$$

для некоторого геодезического поля Z финслерова пространства, где

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j}$$

– коэффициенты метрического тензора финслерова пространства, задаваемого функцией $S(x, y)$.

§ 2. Формулировка теорем

Подмногообразие в пространстве Минковского M^{n+1} называется *цилиндром* с образующей вполне геодезической плоскостью M^k , если через каждую точку подмногообразия проходит плоскость, параллельная M^k , которая принадлежит подмногообразию.

Для полных подмногообразий в пространстве Минковского справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть M^l – полное регулярное связное подмногообразие в пространстве Минковского M^n . Если:

- 1) нуль-индекс $\mu(Q)$ равен k во всех точках подмногообразия,
 - 2) тип точки $j(Q)$ равен 0 для всех точек подмногообразия,
- то подмногообразие M^l есть цилиндр с k -мерной образующей.

Для гиперповерхностей в пространстве Рандерса имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть M^l – полная гиперповерхность неотрицательной кривизны Риччи в пространстве Рандерса R^{l+1} . Если на M^l лежит прямая пространства Рандерса, то M^l является цилиндром.

ТЕОРЕМА 4. Пусть M^l – полная гиперповерхность неотрицательной кривизны Риччи в пространстве Рандерса R^{l+1} . Если нуль-индекс μ больше или равен k , то M^l является цилиндром с образующей k -мерной вполне геодезической плоскостью R^k .

ТЕОРЕМА 5. Пусть M^l – полная гиперповерхность неотрицательной кривизны Риччи в пространстве Рандерса. Если нуль-индекс Риччи:

- 1) $\nu_0 = l$, то M^l является цилиндром с $(l - 1)$ -мерной образующей;
- 2) $l > \nu_0 \geq k$, то M^l является цилиндром с k -мерной образующей.

Пусть $k(u)$ – вектор нормальной кривизны подмногообразия $\bar{M}^l$ в евклидовом наложенном пространстве E^n .

ТЕОРЕМА 6. Пусть M^l – полное подмногообразие в пространстве Рандерса R^n . Если кривизна Риччи M^l удовлетворяет неравенству

$$\text{Ric}(u) \geq \frac{3}{4}(l - 1)\langle k(u), b \rangle^2$$

и на подмногообразии лежит прямая объемлющего пространства, то подмногообразие является цилиндром.

ТЕОРЕМА 7. Пусть M^l – полное подмногообразие в пространстве Рандерса R^n , внешний нуль-индекс которого в каждой точке есть $\mu \geq \mu_0 > 0$. Если финслерова кривизна Риччи

$$\text{Ric}(u) \geq \frac{3}{4}(l-1)\langle k(u), b \rangle^2,$$

то M^l является цилиндром с μ_0 -мерной вполне геодезической плоской образующей.

§ 3. Доказательство лемм

ЛЕММА 1. Метрика, индуцируемая на подмногообразиях M^l пространства Рандерса R^{n+1} метрикой $S = \alpha + \beta$, проективно эквивалентна римановой метрике на $\overline{M}^l$, индуцируемой евклидовой метрикой, заданной в наложенном евклидовом пространстве E^{n+1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим подмногообразие M^l в окрестности некоторой точки P явным образом:

$$x^{l+\alpha} = f^\alpha(x^1, \dots, x^l). \quad (3.1)$$

Индуктируемая финслерова метрика $S(x, u)$ на M^l для вектора

$$Y = (u^1, \dots, u^l, u^i f_i^{l+1}, \dots, u^i f_i^{n+1-l}) \in T_P M^l$$

имеет вид

$$S(x, u) = \sqrt{\left(\delta_{ij} + \sum_{\alpha=1}^{n+1-l} f_i^{l+\alpha} f_j^{l+\alpha} \right) u^i u^j + (b_i + b_{l+\alpha} f_i^\alpha) u^i} = \alpha + \gamma. \quad (3.2)$$

Необходимым и достаточным условием того, что метрика F проективно эквивалентна римановой метрике

$$\alpha(u) = \sqrt{\left(\delta_{ij} + \sum_{\alpha=1}^{n+1-l} f_i^{l+\alpha} f_j^{l+\alpha} \right) u^i u^j}, \quad (3.3)$$

является условие замкнутости формы $\gamma(u) = c_i(x) u^i$, где $c_i(x) = b_i + b_{l+\alpha} f_i^\alpha$, т.е.

$$\frac{\partial c_i(x)}{\partial x^j} = \frac{\partial c_j(x)}{\partial x^i}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_i(x)}{\partial x^j} &= \frac{\partial b_i}{\partial x^j} + \frac{\partial b_{l+\alpha}}{\partial x^j} f_i^\alpha + b_{l+\alpha} \frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}, \\ \frac{\partial c_j(x)}{\partial x^i} &= \frac{\partial b_j}{\partial x^i} + \frac{\partial b_{l+\alpha}}{\partial x^i} f_j^\alpha + b_{l+\alpha} \frac{\partial f_j^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}. \end{aligned}$$

Так как b_a – константы, то условия замкнутости выполняются.

ЛЕММА 2. Пусть M^l – подмногообразие в пространстве Рандерса R^{n+1} , $\overline{M}^l$ – подмногообразие в наложенном евклидовом пространстве E^{n+1} , которое как множество точек совпадает с подмногообразием M^l . Тогда флаговая кривизна $K_\sigma(u)$ подмногообразия M^l и секционная кривизна $\overline{K}_\sigma$ подмногообразия $\overline{M}^l$ связаны равенством

$$K_\sigma(u) = \frac{\overline{K}_\sigma + \frac{3}{4S^2} \langle k(u), b \rangle^2 - \frac{1}{2S} \frac{\partial}{\partial s} \langle k(u), b \rangle}{S^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Флаговая кривизна финслеровой метрики $S(x, y)$ определяется следующим образом:

$$K(\sigma, u) = \frac{g_u(R_u(v), v)}{g_u(u, u)g_u(v, v) - g_u^2(v, u)}, \quad (3.4)$$

где $\sigma = \text{span}\{v, u\}$, $R_u(v) = R_k^i(u)v^k$, $R_k^i(u) = u^j R_{jkl}^i(v)u^l$, а R_{jkl}^i – тензор кривизны финслеровой метрики $S(x, u)$ на M^l (см. [12; п. 2.2, (2.45)]).

Для проективно эквивалентных метрик Рандерса и Римана верно следующее соотношение (см. [11; п. 6.1, (6.10)]):

$$R_k^i = \overline{R}_k^i + \left(\frac{3\Phi^2}{4S^2} - \frac{\Psi}{2S} \right) \left(\delta_k^i - \frac{S_{u^k}}{S} u^i \right) + \tau_k u^i, \quad (3.5)$$

где R_k^i , $\overline{R}_k^i$ – соответственно тензоры кривизны метрики Рандерса и соответствующей римановой метрики,

$$\Phi = c_{i,j}(x)u^i u^j, \quad \Psi = c_{i,jk}u^i u^j u^k, \quad \tau_k = \frac{1}{S(u)}(c_{i,jk} - c_{i,kj})u^i u^j, \quad (3.6)$$

$c_{i,j}$ – ковариантная производная ковектора c_i в римановой связности метрики α .

Метрический тензор римановой метрики α имеет вид

$$\overline{g}_{ij}(x) = \delta_{ij} + \langle F_i, F_j \rangle, \quad (3.7)$$

где F есть вектор с компонентами $f^\alpha(x)$, $F_i = \partial F / \partial x^i$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в евклидовом пространстве в ортонормированном базисе. Введем наложенное евклидово пространство E^{n+1} , которое как множество точек совпадает с пространством Рандерса, а подмногообразие $\overline{M}^l \subset E^{n+1}$ как множество точек совпадает с подмногообразием $M^l \subset R^{n+1}$. На подмногообразии $\overline{M}^l$ индуцируется риманова метрика α . Возьмем точку $P \in \overline{M}^l$ за начало ортогональной декартовой системы координат, касательное пространство $T_P \overline{M}^l$ за пространство переменных $x^1, \dots, x^l$; нормальное пространство $N_P \overline{M}^l$ – это пространство переменных $x^{l+\alpha}$. Эти координаты выбраны и в пространстве Рандерса. В этих координатах $\overline{M}^l$ задается в виде (3.1) и в точке P

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}(0) = 0. \quad (3.8)$$

Тогда из (3.3) и (3.7) мы получим

$$\frac{\partial \overline{g}_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0, \quad (3.9)$$

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k(0) = 0. \quad (3.10)$$

Найдем ковариантные производные:

$$\begin{aligned} c_{i,j}(0) &= (b_i + b_{l+\alpha} f_i^\alpha)_j = b_{l+\alpha} f_{ij}^\alpha, \\ c_{i,jk} &= \frac{\partial c_{i,j}}{\partial x^k} = \frac{\partial c_i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{ij}^s}{\partial x^k} b_s, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}_{ij}^s}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\bar{g}^{sm}}{2} \cdot \left(\frac{\partial \bar{g}_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial \bar{g}_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x^m} \right) \right). \quad (3.12)$$

Из (3.8), (3.12) следует, что

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}_{ij}^s}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{g}_{is}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial \bar{g}_{js}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x^s \partial x^k} \right). \quad (3.13)$$

Из (3.7), (3.13) получаем

$$\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x^k} = \langle F_{ik}, F_j \rangle + \langle F_i, F_{jk} \rangle. \quad (3.14)$$

Так как в точке P вектор F_i равен 0, то

$$\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x^s \partial x^k}(0) = \langle F_{ik}, F_{js} \rangle + \langle F_{is}, F_{jk} \rangle. \quad (3.15)$$

Подставив (3.15) в (3.13), мы получим

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}_{ij}^s}{\partial x^k} = \langle F_{ij}, F_{sk} \rangle. \quad (3.16)$$

Подставим (3.10) и (3.15) в (3.11). Тогда

$$c_{i,jk}(0) = b_{l+\alpha} f_{ijk}^\alpha - \sum_s \langle F_{ij}, F_{sk} \rangle b_s = b_{l+\alpha} f_{ijk}^\alpha - \left\langle F_{ij}, \sum_s F_{sk} b_s \right\rangle. \quad (3.17)$$

Рассмотрим произвольную нормальную геодезическую, проходящую через точку P на подмногообразии $\bar{M}^l$ в E^{n+1} . Ее радиус-вектор $r(s): x^i = x^i(s)$, $x^{l+\alpha} = f^\alpha(x^1(s), \dots, x^l(s))$, s – длина дуги. Ее единичная главная нормаль ν в точке P совпадает с нормалью ν_1 к подмногообразию $\bar{M}^l$ и имеет координаты $(\underbrace{0, \dots, 0}_l, 1, 0, \dots, 0)$, вектор кривизны геодезической

$$r''(s) = k(u) = \sum_{\alpha=1}^{n-l+1} k^\alpha \nu_\alpha = k\nu, \quad (3.18)$$

где ν_α – ортогональный базис нормалей, ковариантные производные которых в нормальной связности равны нулю в точке P , k^α – нормальные кривизны подмногообразия относительно нормалей ν_α в направлении касательного вектора u геодезической. Вектор $k(u)$ является также вектором нормальной кривизны подмногообразия $\bar{M}^l$ в направлении касательного вектора u .

Так как в точке P

$$f_i^\alpha(P) = 0, \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial s^2}(P) = 0,$$

то в точке P

$$f_{sss}^\alpha = f_{ijk}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial s} \frac{\partial x^j}{\partial s} \frac{\partial x^k}{\partial s} = f_{ijk}^\alpha u^i u^j u^k, \quad (3.19)$$

где $u = (u^1, \dots, u^l)$ – координаты касательного вектора к геодезической.

Из (3.3), (3.10) следует, что в точке P

$$\Phi(P) = b_{l+\alpha} f_{ij}^\alpha u^i u^j = \langle b, k(u) \rangle. \quad (3.20)$$

Из (3.6), (3.17), (3.18) следует, что

$$\Psi(P) = b_{l+\alpha} f_{ijk}^\alpha u^i u^j u^k - \left\langle F_{ij}, \sum_s b_s F_{sk} \right\rangle u^i u^j u^k.$$

Выберем базис единичных нормалей n_α к подмногообразию $\overline{M}^l$,

$$n_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (\text{grad } f^\alpha)^2}} (f_1^\alpha, \dots, f_l^\alpha, 0, \dots, -1, \dots, 0),$$

где -1 стоит на месте с номером $l + \alpha$. Стандартным образом ортогонализуем этот базис, чтобы он был ортогональным в окрестности точки P , взяв векторы $\nu_1 = n_1$, $\nu_2 = \text{срп}(n_1, n_2)$ и т.д. Легко подсчитать, что ковариантные производные ν_α в нормальной связности в точке P равны нулю, $\nabla_{e_s}^\perp \nu_\alpha = 0$, где e_s – ортогональный базис касательного пространства $T_P \overline{M}^l$. Поэтому

$$\left. \frac{\partial k^\alpha \nu_\alpha}{\partial s} \right|_P = \frac{\partial k^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^i}{\partial s} \nu_{\alpha|P} - k^\alpha \sum_i f_{ik}^\alpha \frac{\partial x^k}{\partial s} e_i.$$

Так как

$$k^\alpha|_P = f_{ij}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial s} \frac{\partial x^j}{\partial s}, \quad \left. \frac{\partial k^\alpha}{\partial s} \right|_P = f_{ijk}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial s} \frac{\partial x^j}{\partial s} \frac{\partial x^k}{\partial s}, \quad u^i = \frac{\partial x^i}{\partial s},$$

то из предыдущей формулы и выражения для $\Psi(P)$ получается

$$\Psi(P) = \frac{\partial}{\partial s} \langle k(u), b \rangle. \quad (3.21)$$

Из (3.6), (3.16) мы получим

$$\tau_k = \frac{1}{S} \left(- \left\langle k(u), \sum_{s=1}^l F_{sk} b_s \right\rangle + \left\langle F_{ik} u^i, \sum_{s=1}^l b_s F_{sj} u^j \right\rangle \right). \quad (3.22)$$

Найдем связь между R_k^i , $\overline{R}_k^i$.

При условии $|u|_E = 1$ из (3.2) следует, что

$$S_{u^k}(P) = b_k + u^k. \quad (3.23)$$

Из (3.5), (3.21), (3.22) вытекает, что в точке P в направлении вектора u

$$\begin{aligned} R_k^i(u) &= \overline{R}_k^i(u) + M \left(\delta_k^i - \frac{b_k + u^k}{S} u^i \right) \\ &\quad + \frac{1}{S} \left(\left\langle F_{ik} u^i, \sum_{s=1}^l b_s F_{sj} u^j \right\rangle - \left\langle k(u), \sum_{s=1}^l F_{sk} b_s \right\rangle \right) u^i, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\overline{R}_k^i(u) = \overline{R}_{skl}^i u^s u^l = \overline{g}^{ij} \overline{R}_{jskl} u^s u^l. \quad (3.25)$$

По формулам Гаусса

$$\bar{R}_{jskl} = \sum_{\alpha} (\bar{h}_{jk}^{\alpha} \bar{h}_{sl}^{\alpha} - \bar{h}_{jl}^{\alpha} \bar{h}_{sk}^{\alpha}), \quad (3.26)$$

где $\bar{h}_{ij}^{\alpha}$ – коэффициенты вторых квадратичных форм относительно ортонормированного базиса нормалей ν_{α} .

В точке P коэффициенты вторых квадратичных форм $\bar{h}_{ij}^{\alpha} = f_{ij}^{\alpha}$, $\bar{g}^{ij} = \delta_{ij}$ и

$$\bar{R}_{skl}^i = \sum_{\alpha} (f_{ik}^{\alpha} f_{sl}^{\alpha} - f_{il}^{\alpha} f_{sk}^{\alpha}) = \langle F_{ik}, F_{sl} \rangle - \langle F_{il}, F_{sk} \rangle. \quad (3.27)$$

Из (3.23), (3.24), (3.26) следует, что

$$\bar{R}_k^i(u) = \langle F_{ik}, F_{sl} u^s u^l \rangle - \langle F_{il} u^l, F_{sk} u^s \rangle = \langle k(u), F_{ik} \rangle - \langle F_{il} u^l, F_{sk} u^s \rangle. \quad (3.28)$$

Метрическая форма метрики Рандерса имеет вид (см. [11; п. 1.1, (1.3)])

$$g_{ij}(x, u) = \frac{S(u)}{\alpha(u)} \left\{ \bar{g}_{ij}(x) - \frac{u^i u^j}{\alpha^2(u)} \right\} + \left(c_i(x) + \frac{u_i}{\alpha(u)} \right) \left(c_j(x) + \frac{u_j}{\alpha(u)} \right). \quad (3.29)$$

В точке P формула (3.29) принимает вид

$$g_{ij}(0, u) = S \delta_{ij} - S u^i u^j + (b_i + u^i)(b_j + u^j). \quad (3.30)$$

Флаговая кривизна M^l в точке P вдоль двумерной плоскости σ , натянутой на векторы u и v , вычисляется по формуле (3.4). Подставим (3.23), (3.27), (3.29) в (3.4). Тогда в точке P

$$\begin{aligned} g_u(R_u(v), v) &= g_{ij}(R_k^i(u) v^k) v^j = \{ S \delta_{ij} - S u^i u^j + (b_i + u^i)(b_j + u^j) \} \\ &\times \left\{ \bar{R}_k^i(u) v^k v^j + M \left(\delta_k^i - \frac{S u_k}{S} u^i \right) v^k v^j \right. \\ &\left. + \frac{1}{S} \left\{ \left\langle F_{mk} u^m, \sum_s b_s F_{sp} u^p \right\rangle - \left\langle k(u), \sum_s F_{sk} b_s \right\rangle \right\} v^k v^j u^i \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Раскроем скобки в уравнении (3.31):

$$\begin{aligned} g_{ij}(R_k^i(u) v^k) v^j &= \underbrace{S \delta_{ij} \bar{R}_k^i(u) v^k v^j}_{(1)} - \underbrace{S \sum_{i,j} \bar{R}_k^i(u) v^k v^j u^i u^j}_{(2)} \\ &+ \underbrace{\sum_{i,j} (b_i + u^i)(b_j + u^j) \bar{R}_k^i(u) v^k v^j}_{(3)} + \underbrace{S M \delta_{ij} \left\{ v^i - \frac{\langle b + u, v \rangle}{S} u^i \right\} v^j}_{(4)} \\ &- \underbrace{S M \sum_{i,j} u^i u^j \left\{ v^i - \frac{\langle b + u, v \rangle}{F} u^i \right\} v^j}_{(5)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{M \sum_{i,j} (b_i + u^i)(b_j + u^j) \left\{ v^i - \frac{\langle b + u, v \rangle}{S} u^i \right\} v^j}_{(6)} \\
& + \underbrace{S \delta_{ij} \frac{1}{S} \left\{ \left\langle F_{mk} u^m, \sum_s b_s F_{sp} u^p \right\rangle - \left\langle k(u), \sum_s b_s F_{sk} \right\rangle \right\} u^i v^j v^k}_{(7)} \\
& - \underbrace{\sum_{i,j} S u^i u^j \frac{1}{S} \left\{ \left\langle F_{mk} u^m, \sum_s b_s F_{sp} u^p \right\rangle - \left\langle k(u), \sum_s b_s F_{sk} \right\rangle \right\} u^i v^j v^k}_{(8)} \\
& + \underbrace{\sum_{i,j} (b_i + u^i)(b_j + u^j) \frac{1}{S} \left\{ \left\langle F_{mk} u^m, \sum_s b_s F_{sp} u^p \right\rangle - \left\langle k(u), \sum_s b_s F_{sk} \right\rangle \right\} u^i v^j v^k}_{(9)}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Упростим каждое из слагаемых:

$$(1) \quad S \delta_{ij} \bar{R}_k^i(u) v^k v^j = S \bar{K}_\sigma (|u|^2 |v|^2 - \langle u, v \rangle^2) = S \bar{K}_\sigma |u \times v|^2, \tag{3.33}$$

где $\bar{K}_\sigma$ – секционная кривизна индуцированной римановой метрики $\bar{g}_{ij}$ вдоль площадки σ .

Подставим значения $\bar{R}_k^i(u)$ из формулы (3.28) в выражение (2) в (3.32):

$$\begin{aligned}
(2) \quad S \sum_{ij} u^i u^j \bar{R}_k^i(u) v^k v^j &= S \langle u, v \rangle (\langle k(u), F_{ik} u^i v^k \rangle - \langle F_{il} u^i u^l, F_{sk} u^s v^k \rangle) \\
&= S \langle u, v \rangle (\langle k(u), F_{ik} u^i v^k \rangle - \langle k(u), F_{sk} u^s v^k \rangle) = 0;
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad S \sum_{ij} (b_i + u^i)(b_j + u^j) \bar{R}_k^i(u) v^k v^j \\
&= S b_i b_j \bar{R}_k^i(u) v^k v^j + S \sum_{i,j} (b_i u^j + b_j u^i) \bar{R}_k^i(u) v^k v^j + S \sum_{i,j} u^i u^j \bar{R}_k^i(u) v^k v^j \\
&= S \langle b + u, v \rangle (\langle k(u), F_{ik} b^i v^k \rangle - \langle F_{il} b^i u^l, F_{sk} u^s v^k \rangle);
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$(4) \quad S M \delta_{ij} \left\{ v^i - \frac{\langle b + u, v \rangle}{S} u^i \right\} v^j = S M \left(\langle v, v \rangle - \frac{\langle b + u, v \rangle \langle u, v \rangle}{S} \right); \tag{3.36}$$

$$(5) \quad S M \sum u^i u^j \left\{ v^i - \frac{\langle b + u, v \rangle}{S} u^i \right\} v^j = S M \left(\langle u, v \rangle - \frac{\langle b + u, v \rangle \langle u, u \rangle}{S} \right) \langle u, v \rangle; \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
(6) \quad M \sum_{ij} (b_i + u^i)(b_j + u^j) \left\{ v^i - \frac{\langle b + u, v \rangle}{S} u^i \right\} v^j \\
&= \langle b + u, v \rangle^2 \left(1 - \frac{\langle b + u, u \rangle}{S} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Флаговый вектор u имеет единичную длину в евклидовой метрике $\langle u, u \rangle = 1$ и $S = |u| + \langle b, u \rangle$.

Запишем выражения для (7)–(9) без сомножителя $(\langle S_{mk}u^m v^k, \sum b_s S_{sp} u^p \rangle - \langle k(u), \sum b_s F_{sk} v^k \rangle)$:

$$(7) \quad S\delta_{ij}u^i v^j = S\langle u, v \rangle; \quad (3.39)$$

$$(8) \quad S \sum_{i,j} u^i u^j u^i v^j = S\langle u, u \rangle \langle u, v \rangle = S\langle u, v \rangle; \quad (3.40)$$

$$(9) \quad \frac{1}{S} \sum_{i,j} (b_i + u^i)(b_j + u^j) u^i v^j = \frac{1}{S} \langle b + u, u \rangle \langle b + u, v \rangle = S\langle b + u, v \rangle. \quad (3.41)$$

Подставим полученные выражения в (3.31). Получим

$$\begin{aligned} g_u(R_u(v), v) &= \underbrace{S\bar{K}_\sigma |u \times v|^2}_{(1)} - \underbrace{S\langle b + u, v \rangle (\langle k(u), F_{ik} b^i v^k \rangle - \langle F_{il} b^i u^l, F_{sk} u^s v^k \rangle)}_{(3)} \\ &+ \underbrace{SM \left(\langle v, v \rangle - \frac{\langle b + u, v \rangle \langle u, v \rangle}{S} \right)}_{(4)} - \underbrace{SM \left(\langle u, v \rangle - \frac{\langle b + u, v \rangle \langle u, u \rangle}{S} \right) \langle u, v \rangle}_{(5)} \\ &+ \left(\left\langle F_{mk} u^m v^k, \sum b_s F_{sp} u^p \right\rangle - \left\langle k(u), \sum b_s F_{sk} v^k \right\rangle \right) + S\langle b + u, v \rangle. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Упростив, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} g_u(R_u(v), v) &= S\bar{K}_\sigma |u \times v|^2 + SM(\langle v, v \rangle \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle^2) \\ &= S|u \times v|^2 (\bar{K}_\sigma + M). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Упростим знаменатель $g_u \langle u, u \rangle g_u \langle v, v \rangle - g_u \langle u, v \rangle^2$, учитывая, что из однородности метрики следует

$$g_u \langle u, u \rangle = S^2. \quad (3.44)$$

Из формулы (3.29) получим

$$\begin{aligned} g_u \langle v, v \rangle &= g_{ij} v^i v^j = S\delta_{ij} v^i v^j - S \sum_{i,j} u^i u^j v^i v^j + (b_i + u^i)(b_j + u^j) v^i v^j \\ &= S\langle v, v \rangle - S\langle u, v \rangle^2 + \langle b + u, v \rangle^2. \end{aligned}$$

Так как $\langle u, u \rangle = 1$, то

$$g_u \langle v, v \rangle = S|u \times v|^2 + \langle b + u, v \rangle^2, \quad (3.45)$$

$$g_u \langle u, v \rangle = g_{ij} u^i v^j = S\langle u, v \rangle - S\langle u, u \rangle \langle u, v \rangle + \langle b + u, u \rangle \langle b + u, v \rangle = S\langle b + u, v \rangle. \quad (3.46)$$

Из (3.44)–(3.46) следует, что

$$g_u \langle u, u \rangle g_u \langle v, v \rangle - g_u \langle u, v \rangle^2 = S^3 |u \times v|^2. \quad (3.47)$$

Из (3.43), (3.47) получим, что флаговая кривизна $K_\sigma(u)$ подмногообразия M^l в пространстве Рандерса R^{n+1} в точке P в направлении касательного вектора u и двумерной площадки σ , натянутой на векторы u, v , равна

$$K_\sigma(u) = \frac{\bar{K}_\sigma + M}{S^2}, \quad (3.48)$$

где $M = \frac{3\Phi^2}{4S^2} - \frac{\Psi}{2S}$. Подставив значения $\Phi(P)$, $\Psi(P)$ из (3.20), (3.21), получим

$$M = \frac{3\langle k(u), b \rangle^2}{4S^2} - \frac{\frac{\partial}{\partial s} \langle k(u), b \rangle}{2S}. \quad (3.49)$$

Подставим значения M из (3.49) в (3.48). Тогда

$$K_\sigma(u) = \frac{\bar{K}_\sigma}{S^2} + \frac{3}{4S^4} \langle k(u), b \rangle^2 - \frac{1}{2S^3} \frac{\partial}{\partial s} \langle k(u), b \rangle, \quad (3.50)$$

где дифференцирование ведется по длине дуги геодезической $\bar{M}^l \subset E^{n+1}$, касательной к вектору $u \in T_P \bar{M}^l$. Из (3.50) следует связь между финслеровой кривизной Риччи M^l и римановой кривизной Риччи $\bar{M}^l$:

$$\text{Ric}(u) = \frac{\bar{\text{Ric}}(u)}{S^2} + (l-1) \left(\frac{3}{4S^4} \langle k(u), b \rangle^2 - \frac{1}{2S^3} \frac{\partial}{\partial s} \langle k(u), b \rangle \right). \quad (3.51)$$

Лемма 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если кривизна Риччи гиперповерхности M^l в пространстве Рандерса $\text{Ric}(u) \geq 0$, то риманова кривизна Риччи гиперповерхности $\bar{M}^l$ в наложенном евклидовом пространстве $\bar{\text{Ric}}(u) \geq 0$.

Допустим, это не так. Тогда на гиперповерхности $\bar{M}^l$ в точке P есть единичный вектор u_0 такой, что нормальная кривизна гиперповерхности $\bar{M}^l$ в этом направлении равна нулю. Если u_0 не главное направление, соответствующее нулевому собственному значению, то покажем, что $\bar{\text{Ric}}(u_0) < 0$. Выберем координаты в точке P , как в лемме 2. Тогда в этой точке коэффициенты вторых квадратичных форм относительно нормали ν гиперповерхности $\bar{M}^l$ имеют вид $\bar{h}_{ij} = f_{ij}$. По формуле Гаусса секционная кривизна в направлении двумерной площадки σ , которая проходит через u_0 , равна

$$\bar{K}_\sigma = -(\bar{h}_{ij} u_0^i a^j)^2 = -\bar{h}(u_0, a)^2,$$

где $a = (a^1, \dots, a^l) \in \sigma$ — единичный ортогональный к u_0 вектор. Кривизна Риччи

$$\bar{\text{Ric}}(u_0) = - \sum_{i=1}^{l-1} \bar{h}(u_0, e_i)^2,$$

где e_s , $s = 1, \dots, l-1$, — ортонормированный набор векторов в касательном пространстве $T_P \bar{M}^l$, ортогональных вектору u_0 . Если $\bar{h}(u_0, e_i) = 0$ для всех векторов e_i , то u_0 является главным направлением, соответствующим нулевому собственному значению, и $\bar{\text{Ric}}(u_0) = 0$. Если это не так, то $\bar{\text{Ric}}(u_0) < 0$.

Выражение $\frac{\partial}{\partial s} \langle k(u), b \rangle$ может быть неотрицательным или неположительным в зависимости от направления на геодезической, выходящей в направлении u_0 или $-u_0$. Подставив значения $\bar{\text{Ric}}(u_0)$, $k(u_0)$ и $\frac{\partial}{\partial s} \langle k(u), b \rangle$ в формулу (3.50), получим, что $\text{Ric}(u_0) < 0$. Это противоречит нашему допущению.

Пусть финслерова кривизна Риччи гиперповерхности M^l в пространстве Рандерса R^{l+1} неотрицательна и в каждой точке есть направление u такое,

что $\text{Ric}(u) = 0$. Обозначим $\nu(P) = \dim L(P)$, где $L(P) \subset T_P M^l$ – линейное подпространство максимальной размерности такое, что для $u \in L(P)$ кривизна Риччи $\text{Ric}(u) = 0$, и назовем его *нуль-индексом Риччи*. Пусть для $P_0 \in M^l$ нуль-индекс Риччи $\nu_0 = \nu(P_0) = \min_{P \in M^l} \nu(P) > 0$.

Напомним определение внешнего нуль-индекса.

Внешним нуль-индексом $\bar{\mu}(Q)$ точки $Q \in \bar{M}^l$ в евклидовом пространстве E^{n+1} называется максимальная размерность подпространства $\bar{L}(Q)$ касательного пространства $T_Q \bar{M}^l$ такого, что

$$\bar{h}_{ij}(\xi)y^i = 0$$

для любого $y \in \bar{L}(Q)$, $\bar{h}_{ij}(\xi)$ – вторая квадратичная форма для любой нормали $\xi \in N_Q \bar{M}^l$.

ЛЕММА 3. *В окрестности точки P_0 распределение $L(P)$ интегрируемо. Слоями являются вполне геодезические плоские подмногообразия R^ν объемлющего пространства Рандерса. Если гиперповерхность M^l полная, то на ней лежит плоскость размерности ν_0 объемлющего пространства, если $\nu_0 < l$, и размерности $l - 1$, если $\nu_0 = l$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{Ric}(u) \geq 0$ и $\text{Ric}(u_0) = 0$. Тогда из формулы (3.51) следует, что $\bar{\text{Ric}}(u_0) = 0$, и вторая квадратичная форма гиперповерхности $\bar{M}^l$ в E^{l+1} неотрицательна. Пусть вектор u_0 не принадлежит подпространству, отвечающему нулевой главной кривизне гиперповерхности $\bar{M}^l$ в евклидовом пространстве. Допустим, что найдется еще вектор $v_0 \in T_P \bar{M}^l$, также не принадлежащий нулевому подпространству. Тогда в силу теоремы Гаусса $\bar{\text{Ric}}(u_0) > 0$, что противоречит ранее доказанному. Поэтому в этом случае $\bar{\mu} = l - 1$, $\nu_0 = l$. Если $\nu_0 < l$, то из предыдущих рассуждений следует $\bar{\mu} = \nu_0$.

Если была полна гиперповерхность $M^l \subset R^{l+1}$, то полна и гиперповерхность $\bar{M}^l$ в евклидовом пространстве E^{l+1} . Для подмногообразий в евклидовом пространстве справедлива лемма 3. Так как в силу неотрицательности кривизны $\text{Ric}(u)$ $\mu = \bar{\mu}$, то лемма справедлива и для пространства Рандерса.

ЛЕММА 4 (см. [7]). *Пусть $\bar{M}^l$ есть регулярное класса C^3 подмногообразие в евклидовом пространстве E^n . Предположим, что в окрестности $Q_0 \in \bar{M}^l$ нуль-индекс $\bar{\mu}(Q) = k$ постоянен. Тогда нуль-распределение $\bar{L}(Q)$ интегрируемо и слои являются областями на плоскостях E^k объемлющего пространства. Касательное пространство стационарно вдоль слоя. Если $\bar{M}^l$ – полное подмногообразие и $\bar{\mu}(Q_0) = \min_{Q \in \bar{M}^l} \bar{\mu}(Q) = k$, то слой, проходящий через точку Q_0 , является плоскостью E^k .*

Х. Рунд ввел определение второй квадратичной формы для гиперповерхностей пространства Минковского (см. [12]), Х. Элиопоулос обобщил его на случай подмногообразий произвольной коразмерности в пространстве Минковского (см. [13]).

Для гиперповерхности в пространстве Минковского M^n с индикатрисой $S(y^1, \dots, y^{n+1}) = 1$ и параметрическим заданием гиперповерхности

$$y^a = y^a(u^1, \dots, u^n)$$

нормаль ν удовлетворяет уравнению (см. [12; гл. V, § 7, (7.1)])

$$\frac{\partial y^a}{\partial u^i} \nu^a = 0, \quad \nu^a = g^a(x, \nu) \nu_b, \quad S(\nu) = 1, \quad g_{ab} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S^2}{\partial y^a \partial y^b}.$$

Если M^n – гиперповерхность, то нормаль в точке P гиперповерхности M^n будет радиусом-вектором индикатрисы в той точке, в которой касательная гиперплоскость параллельна касательной гиперплоскости гиперповерхности M^n в точке P .

Для подмногообразий произвольной коразмерности ковариантные компоненты нормалей удовлетворяют той же системе уравнений.

Для гиперповерхностей компоненты второй квадратичной формы определяются уравнением (см. [12; гл. V, § 7, (7.27)])

$$h_{ij} = n_a I_{ij}^a, \quad (3.52)$$

где

$$I_{ij}^a = \frac{\partial y^a}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial y^a}{\partial u^s} \Gamma_{ij}^{*s} + \Gamma_{cd}^{*a} \frac{\partial y^c}{\partial u^i} \frac{\partial y^d}{\partial u^j}, \quad (3.53)$$

$$\Gamma_{cd}^{*a} = \Gamma_{cd}^a - C_{ij}^k \Gamma_{ij}^h y^j, \quad (3.54)$$

$$\Gamma_{ij}^h = g^{hs} \Gamma_{ij,s}, \quad (3.55)$$

$$\Gamma_{ij,h} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^h} \right), \quad (3.56)$$

$$C_{ij}^k = g^{ks} C_{ij,s}, \quad (3.57)$$

$$C_{ij,s} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s} \right), \quad (3.58)$$

где $g_{ij}(v)$ – финслерова метрическая форма, индуцированная на гиперповерхности (см. [12]).

Так как для объемлющего пространства Минковского $\Gamma_{cd}^a = 0$, то коэффициенты второй квадратичной формы принимают следующий вид:

$$h_{ij} = \nu_a \frac{\partial y^a}{\partial u^i \partial u^j}. \quad (3.59)$$

Этой же формулой выражаются и коэффициенты вторых квадратичных форм для подмногообразий произвольной коразмерности (см. [13]).

Для подмногообразия M^l в пространстве Минковского M^{n+1} рассмотрим наложенное евклидово пространство E^{n+1} . На подмногообразии $\overline{M}^l$ в E^{n+1} , которое как множество точек совпадает с M^l , индуцируется риманова метрика. Линейные пространства вторых квадратичных форм в той же точке $P \in M^l$, $P \in \overline{M}^l$ совпадают в силу формулы (3.59) и формулы для вычисления вторых квадратичных форм в евклидовом пространстве.

Введем понятие внешнего нуля-индекса $\mu(Q)$ для подмногообразий пространства Минковского аналогично определению в евклидовом пространстве. Это было сделано в работе [14]. Нуль-индексы $\mu(Q)$ и $\bar{\mu}(Q)$ совпадают. Поэтому в пространстве Минковского справедливо утверждение леммы 4. Только слоями являются плоскости пространства Минковского.

Для вторых квадратных форм подмногообразия в римановом пространстве введены определения ранга, типа точки, внешнего нуля-индекса (см. [7], [15]). Эти же определения вводятся для подмногообразий в пространстве Минковского.

Пусть $r(Q, \xi)$ есть ранг второй квадратичной формы подмногообразия M^l в пространстве Минковского M^{n+1} в точке Q относительно нормали ξ .

Рангом второй квадратичной формы поверхности M^l в точке Q называется целое неотрицательное число

$$r(Q) = \max_{\xi \in N_Q} r(Q, \xi),$$

где N_Q – нормальное подпространство в точке Q .

Пусть вторая квадратичная форма после приведения к диагональному виду имеет k_1 положительных и k_2 отрицательных членов. Тогда

$$j(Q) = \min(k_1, k_2).$$

Типом точки Q называется число

$$j(Q) = \min j(Q, \xi),$$

где минимум берется по всем нормам в точке Q , для которых $r(Q, \xi) = r(Q)$.

Если $j(Q) = 0$, то существует нормаль в точке, относительно которой вторая квадратичная форма является неотрицательно определенной. При этом если ранг $r(Q) = l$, то относительно некоторой нормали вторая квадратичная форма положительно определена. Если $r(Q) = l - k$, то относительно некоторой нормали ограничение второй квадратичной формы на некоторую $(l - k)$ -плоскость будет положительно определено.

Поверхности с нулевым типом являются в некотором смысле обобщением выпуклых гиперповерхностей на подмногообразия произвольной коразмерности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Так как для подмногообразия M^l в пространстве Минковского и подмногообразия $\bar{M}^l$ в евклидовом пространстве $\mu(Q) = \bar{\mu}(Q)$, $j(Q) = \bar{j}(Q)$, то по теореме 1 подмногообразие $\bar{M}^l$ является цилиндром с k -мерной образующей, а значит, и подмногообразие M^l .

Но так как плоскости евклидова пространства являются вполне геодезическими плоскостями пространства Минковского, то теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из следствия получается, что наложенная поверхность $\bar{M}^l$ в евклидовом пространстве E^{l+1} имеет также неотрицательную кривизну Риччи, а прямая, которая принадлежит M^l , является прямой и евклидова пространства, а гиперповерхность $\bar{M}^l$ является полной. Поэтому по теореме Чигера–Громолла (см. [3]) гиперповерхность $\bar{M}^l$ с точки зрения внутренней геометрии является метрическим произведением. Но имеет место

ЛЕММА 5 (см. [7], [16]). *Пусть подмногообразие $\bar{M}^l$ в E^n является метрическим произведением $\bar{M}^l = M^{l-1} \times E^1$ и образ $(P \times E^1)$, где P – фиксированная точка M^l , является прямой γ объемлющего евклидова пространства. Тогда $\bar{M}^l$ является цилиндром с образующей прямой γ .*

Так как прямые наложенного евклидова пространства являются и прямыми пространства Рандерса и при этом параллельность сохраняется, то гиперповерхность M^l является цилиндром.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Так как аналог леммы 4 имеет место в пространстве Минковского, то на гиперповерхности M^l лежит k -мерная плоскость R^k . Тогда, применяя теорему 3, мы получим нужное утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Она следует из леммы 3 и теоремы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Из (3.51) следует, что кривизна Риччи подмногообразия $\overline{M}^l$ в евклидовом пространстве E^n неотрицательная. Дальнейшее доказательство совпадает с доказательством теоремы 3. Если подмногообразие $\overline{M}^l$ лежит в гиперплоскости, перпендикулярной вектору b , то утверждение теоремы верно при условии неотрицательности финслеровой кривизны Риччи M^l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Из условия теоремы и обобщения леммы 4 на случай пространства Минковского следует, что на M^l лежит плоскость R^{ν_0} пространства Рандерса. Из условия на кривизну Риччи следует, что поверхность $\overline{M}^l$ имеет неотрицательную кривизну Риччи. Дальнейшее доказательство совпадает с доказательством теоремы 4.

§ 4. Положительность флаговой кривизны гиперповерхностей в пространстве Рандерса

Из выпуклости гиперповерхности в пространстве Рандерса не следует неотрицательность ее флаговой кривизны. Однако при некоторых ограничениях на геометрию гиперповерхности в наложенном евклидовом пространстве такая зависимость имеет место.

ТЕОРЕМА 8. Пусть M^l есть C^3 -гладкая гиперповерхность в пространстве Рандерса R^{l+1} . Пусть $\overline{M}^l$ в наложенном евклидовом пространстве имеет положительную секционную кривизну $\overline{K}_E$, нормальные кривизны наложенной гиперповерхности $\overline{M}^l$ удовлетворяют неравенству $0 < k_1 \leq k_n \leq k_2$ и $|b| < \frac{2k_1/k_2}{2k_1/k_2 + 1}$.

Если вдоль каждой геодезической на гиперповерхности $\overline{M}^l$ для нормальной кривизны выполняется неравенство

$$\left| \frac{\partial k}{\partial s} \right| < 2\overline{K}_E \sqrt{3 \left(\frac{k_1}{k_2} - \frac{|b|}{2(1 - |b|)} \right)},$$

то флаговая кривизна K_R положительна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В некоторой окрестности произвольной точки $P \in \overline{M}^l \subset E^{l+1}$ гиперповерхность задается явно:

$$z = f(x^1, \dots, x^l), \quad f(0) = 0, \quad f_i(P) = 0.$$

Для касательного направления $\tau \in T_P M^l$ рассмотрим нормальную геодезическую γ , $\gamma(0) = P$, $\dot{\gamma}(0) = \tau$. Вектор главной нормали геодезической имеет направление оси z . Тогда формула (3.50) принимает вид

$$K_R(\tau) = \frac{\bar{K}_E}{S^2} + \frac{3}{4} \frac{b_{l+1}^2 k^2(\tau)}{S^4(\tau)} - \frac{1}{2S^3(\tau)} \frac{\partial}{\partial s} (k \langle b, n \rangle).$$

Действительно,

$$k(\tau) = \frac{f_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{\partial x^j}{\partial s}}{(\delta_{ij} + f_i f_j) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}},$$

где $x^i = x^i(s)$ – параметрическое уравнение геодезической на $\bar{M}^l$. Тогда в точке P , учитывая, что $\frac{d^2 x^i}{ds^2} = 0$, $f_i(0) = 0$, получаем

$$\left. \frac{\partial \langle b, \nu \rangle}{\partial s} \right|_P = -f_{ij} \frac{dx^i}{ds} b^j.$$

В точке P формула (3.50) примет вид

$$K_R(\tau) = \frac{\bar{K}_E}{S^2(\tau)} + \frac{3}{4} \frac{b_{l+1}^2 k^2(\tau)}{S^4(\tau)} - \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial k}{\partial s} b_{l+1}}{S^3(\tau)} + \frac{1}{2} \frac{k(\tau) f_{ij} b^j \frac{dx^i}{ds}}{S^3(\tau)}.$$

Так как нормальные кривизны гиперповерхности $\bar{M}^l$ удовлетворяют неравенству $0 < k_1 \leq k \leq k_2$, то

$$-k_2 |b| \leq f_{ij} b^j \frac{dx^i}{ds} \leq k_2 |b|. \quad (4.1)$$

Заметим, что $F(\tau) = 1 + \langle b, \tau \rangle$. Поэтому

$$0 < 1 - |b| \leq F(\tau) \leq 1 + |b|. \quad (4.2)$$

Формула для флаговой кривизны есть квадратный трехчлен от b_{l+1} . Достаточным условием положительности флаговой кривизны является условие на отрицательность дискриминанта

$$\left(\frac{dk(\tau)}{ds} \right)^2 < 12k^2(\tau) \left(\bar{K}_E + \left(f_{ij} b^j \frac{dx^i}{ds} \right) k(\tau) \right). \quad (4.3)$$

Это неравенство эквивалентно системе неравенств

$$\left(\frac{dk(\tau)}{ds} \right) < 2k(\tau) \sqrt{3 \left(\bar{K}_E + \frac{\left(f_{ij} b^j \frac{dx^i}{ds} \right) k(\tau)}{2F(\tau)} \right)},$$

$$\bar{K}_E + \frac{f_{ij} b^j \frac{dx^i}{ds}}{2F(\tau)} > 0.$$

Используя оценки (4.1), (4.2), мы получим, что неравенства

$$\frac{|b|}{2(1-|b|)} < \frac{k_1}{k_2},$$

$$\left| \frac{dk(\tau)}{ds} \right| < 2\bar{K}_E \sqrt{3 \left(\frac{k_1}{k_2} - \frac{|b|}{2(1-|b|)} \right)}$$

обеспечат выполнение неравенств предыдущей системы, и при этих условиях флаговая кривизна гиперповерхности в пространстве Рандерса будет положительной.

Для двумерных поверхностей в трехмерном пространстве Рандерса это было доказано в [17].

Искренне благодарю К. Д. Драча за внимательное прочтение рукописи, а И. В. Шпоту – за подготовку рукописи к печати.

Список литературы

- [1] S. Cohn-Vossen, “Totalkrümmung und geodätische Linien auf einfach zusammenhängenden offenen vollständigen Flächenstücken”, *Матем. сб.*, **1(43)**:2 (1936), 139–164.
- [2] В. А. Топоногов, “Метрическое строение римановых пространств неотрицательной кривизны, содержащих прямые линии”, *Сиб. матем. журн.*, **5**:6 (1964), 1358–1369.
- [3] J. Cheeger, D. Gromoll, “The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature”, *J. Differential Geometry*, **6** (1971), 119–128.
- [4] J.-H. Eschenburg, “The splitting theorem for space-times with strong energy condition”, *J. Differential Geom.*, **27**:3 (1988), 477–491.
- [5] G. J. Galloway, “The Lorentzian splitting theorem without the completeness assumption”, *J. Differential Geom.*, **29**:2 (1989), 373–387.
- [6] Shin-ich Ohta, *Splitting theorem for Finsler manifolds of nonnegative Ricci curvature*, arXiv: 1203.0079v2.
- [7] А. А. Борисенко, “Внешняя геометрия сильно параболических многомерных подмногообразий”, *УМН*, **52**:6(318) (1997), 3–52; англ. пер.: А. А. Borisenko, “Extrinsic geometry of strongly parabolic multidimensional submanifolds”, *Russian Math. Surveys*, **52**:6 (1997), 1141–1190.
- [8] P. Hartman, “On the isometric immersions in Euclidean space of manifolds with nonnegative sectional curvatures. II”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **47**:2 (1970), 529–540.
- [9] P. Hartman, L. Nirenberg, “On spherical image maps whose Jacobians do not change sign”, *Amer. J. Math.*, **81**:4 (1959), 901–920.
- [10] R. Sacksteder, “On hypersurfaces with no negative sectional curvatures”, *Amer. J. Math.*, **82**:3 (1960), 609–630.
- [11] Shiing-Shen Chern, Zhongmin Shen, *Riemann–Finsler geometry*, Nankai Tracts Math., **6**, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005, x+192 pp.
- [12] Х. Рунд, *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*, Наука, М., 1981, 504 с.; пер. с англ.: Н. Rund, *The differential geometry of Finsler spaces*, Grundlehren Math. Wiss., **101**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1959, xiii+284 pp.
- [13] Н. А. Eliopoulos, “Subspaces of a generalized metric space”, *Canad. J. Math.*, **11** (1959), 235–255.

- [14] А. А. Борисенко, *Строение поверхностей с вырожденным сферическим изображением*, Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук, Харьковский гос. ун-т, Х., 1973.
- [15] А. А. Борисенко, “О строении 1-мерных поверхностей с вырожденной второй квадратичной формой в n -мерном евклидовом пространстве”, *Укр. геом. сб.*, 1973, № 13, 18–27.
- [16] А. А. Борисенко, “О строении непрерывной поверхности, содержащей прямую”, *Укр. геом. сб.*, 1973, № 14, 21–24.
- [17] А. А. Борисенко, С. В. Мирошниченко, “О флаговой кривизне двумерных поверхностей в трехмерном пространстве Рандерса”, *Докл. НАН Украины*, 2012, № 11, 7–14.

Александр Андреевич Борисенко

(Alexander A. Borisenko)

Сумский государственный университет, Украина

E-mail: aborisenk@gmail.com

Поступила в редакцию

14.01.2014 и 01.04.2014