Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. З. Гринес, С. Х. Капкаева, О. В. Починка, Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 10, 19–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8328>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 16:19:01

УДК 517.938

В. З. Гринес, С. Х. Капкаева, О. В. Починка**Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей**

В работе А. А. Ошемкова, В. В. Шарко трехцветные графы использовались для уточнения топологической эквивалентности потоков Морса–Смейла на поверхностях, полученной М. Пейшото. В настоящей работе на языке трехцветных графов, снабженных автоморфизмами, получена полная (включая реализацию) топологическая классификация градиентно-подобных каскадов на поверхностях.

Библиография: 25 названий.

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса–Смейла, градиентно-подобный диффеоморфизм, трехцветный граф, топологическая классификация.

DOI: 10.4213/sm8328

Введение

Динамические системы Морса–Смейла были введены С. Смейлом [1] в 1960 г. в качестве возможного аналога класса всех структурно устойчивых (грубых) систем в размерности большей двух. Условия, выделяющие этот класс, были сформулированы по аналогии с необходимыми и достаточными условиями грубости потоков на плоскости, найденными А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным [2] в 1937 г. В частности, ими было установлено, что неблуждающее множество любого грубого потока на поверхности состоит из конечного числа гиперболических траекторий. Вскоре благодаря работам С. Смейла и Д. В. Аносова стало понятно, что многомерные структурно устойчивые системы устроены значительно сложнее и могут обладать счетным множеством гиперболических периодических траекторий. Однако изучение систем Морса–Смейла по-прежнему является актуальной задачей, имеющей как самостоятельный интерес (для описания процессов с конечным множеством стационарных режимов), так и прикладной (для понимания переходных процессов в теории бифуркаций).

Ключевым вопросом в изучении динамической системы является нахождение набора полных топологических инвариантов – свойств системы, которые однозначно определяют разбиение фазового пространства на траектории с точностью до топологической эквивалентности (сопряженности). Напомним, что

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 112-01-00672, 13-01-12452-офи-м).

два потока f^t , f'^t (два диффеоморфизма f , f'), заданных на n -многообразии M^n , называются *топологически эквивалентными* (*топологически сопряженными*), если существует гомеоморфизм $h: M^n \rightarrow M^n$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока f'^t (удовлетворяющий условию $f'h = hf$). Топологическая классификация динамических систем занимает особое место в качественной теории дифференциальных уравнений. Она имеет самостоятельный интерес и, кроме того, зачастую приводит к обнаружению принципиально новых динамических эффектов. На сегодняшний день эта проблема имеет богатую историю. Приведем лишь ту ее часть, которая касается топологической классификации систем Морса–Смейла на замкнутых (компактных без края) поверхностях M^2 . Более детальный обзор по этой теме можно найти в книге [3] и в обзоре [4].

В 1955 г. Е. А. Леонтович и А. Г. Майер [5] ввели полный топологический инвариант для потоков с конечным числом особых траекторий на двумерной сфере – *схему потока*. Она содержала описание особых траекторий (состояний равновесия, периодических орбит, сепаратрис седловых состояний равновесия) и их взаимного расположения.

В 1971 г. М. М. Пейшото [6] формализовал понятие схемы Леонтович–Майера и доказал, что для систем Морса–Смейла на замкнутых поверхностях полным топологическим инвариантом является класс изоморфности ориентированного графа (графа Пейшото), поставленного в соответствие каждому потоку таким образом, что вершины графа находятся во взаимно однозначном соответствии с состояниями равновесия и замкнутыми траекториями, а ребра графа соответствуют компонентам связности инвариантных многообразий состояний равновесия и замкнутых траекторий. При этом от изоморфизма требуется, чтобы он сохранял выбранные специальным образом подграфы (называемые различающими множествами).

В работе А. А. Ошемкова, В. В. Шарко [7] отмечена неточность инварианта Пейшото, связанная с тем, что изоморфизм графов не различает типы разбиения на траектории для области, ограниченной двумя периодическими орбитами, а также предложена другая идея классификации. Именно, в качестве полного топологического инварианта потока Морса–Смейла без замкнутых траекторий было предложено использовать трехцветный граф, вершины которого соответствуют треугольным областям, на которые несущая поверхность разбивается специальными траекториями потока, при этом две вершины графа инцидентны ребру, если границы соответствующих этим вершинам треугольных областей имеют непустое пересечение. При этом и в работе [6], и в работе [7] была решена проблема реализации потоков Морса–Смейла по абстрактному инварианту.

Каскады Морса–Смейла, заданные на 2-многообразиях, обладают новым, по сравнению с потоками, типом движения, связанным с возможностью пересечений инвариантных многообразий различных седловых точек – *гетероклинических пересечений*. Тем не менее инварианта, подобного графу Пейшото, оказалось достаточно, чтобы описать полный топологический инвариант для широкого подмножества таких систем. В частности, для диффеоморфизмов Морса–Смейла на поверхностях с конечным числом гетероклинических орбит (А. Н. Безденежных, В. З. Гринес [8], [9] 1985 г., В. З. Гринес [10] 1993 г.). От-

метим также работу Р. Ланжевена [11] 1993 г., в которой нет классификационных результатов, но содержатся идеи построения инвариантов, отличных от графа. Используя идеи работы [11], Т.М. Митрякова и О.В. Починка [12] в 2010 г. ввели понятие схемы диффеоморфизма, которая содержит информацию о периодических данных и топологии вложения в фазовое пространство инвариантных многообразий седловых точек. Они доказали, что схема, оснащенная набором числовых параметров, является полным топологическим инвариантом для множества диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей топологической сопряженности, которому, в частности, принадлежат каскады Морса–Смейла, неблуждающее множество которых состоит из неподвижных точек, а блуждающее множество содержит конечное число гетероклинических орбит. Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла на поверхностях с бесконечным множеством гетероклинических орбит потребовала привлечения аппарата топологических цепей Маркова; она получена в книге Х. Бонатти и Р. Ланжевена [13].

Задача реализации каскадов Морса–Смейла в предположениях различной общности решалась в работах [14] и [15].

Напомним, что под *полной топологической классификацией* некоторого класса G динамических систем понимается решение следующих задач:

- нахождение топологических инвариантов динамических систем из класса G ;
- доказательство полноты множества найденных инвариантов, т.е. доказательство того, что совпадение множеств топологических инвариантов является необходимым и достаточным условием топологической эквивалентности (сопряженности) двух динамических систем из G ;
- реализация, т.е. построение по заданному множеству топологических инвариантов стандартного представителя, принадлежащего G .

В настоящей работе полная топологическая классификация градиентно-подобных каскадов на поверхностях получена на языке трехцветных графов.

§ 1. Формулировка результатов

Напомним, что диффеоморфизм $f: M^n \rightarrow M^n$, заданный на гладком замкнутом n -многообразии M^n , называется диффеоморфизмом *Морса–Смейла*, если:

- 1) неблуждающее множество Ω_f гиперболично и конечно (т.е. состоит из конечного числа периодических точек, для которых модули собственных значений матрицы Якоби не равны единице);
- 2) для любых периодических точек p, q устойчивое многообразие W_p^s и неустойчивое многообразие W_q^u либо не пересекаются, либо трансверсальны в каждой точке пересечения.

Пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ – диффеоморфизм Морса–Смейла. Неблуждающее множество диффеоморфизма f представим в виде $\Omega_f = \bigcup_{i=0}^n \Omega_f^i$, где Ω_f^i – множество периодических точек диффеоморфизма f , *индекс Морса* (размерность

неустойчивого многообразия W_p^u) которых равен i ($i = 0, 1, \dots, n$). Точки с индексом Морса n называются *источниками*, точки с индексом Морса 0 называются *стоками*, остальные – *седлами*. Для любого множества $P \subset \Omega_f$ положим $W_P^s = \bigcup_{p \in P} W_p^s$ и $W_P^u = \bigcup_{p \in P} W_p^u$.

Для любой периодической точки p диффеоморфизма f компоненты связности $W_p^s \setminus p$ ($W_p^u \setminus p$) называются ее устойчивыми (неустойчивыми) *сепаратрисами*. Заметим, что из конечности неблуждающего множества следует, что пересечение $W_p^s \cap W_p^u$ состоит в точности из одной точки p . Если для различных седловых периодических точек p, q диффеоморфизма f пересечение $W_p^s \cap W_q^u$ непусто, то оно является бесконечным множеством. При этом если $\dim W_p^s + \dim W_q^u = n$, то каждая точка, принадлежащая $W_p^s \cap W_q^u$, называется *гетероклинической точкой*, а если $\dim W_p^s + \dim W_q^u > n$, то каждая компонента связности $W_p^s \cap W_q^u$ называется *гетероклинической компонентой*. Диффеоморфизм Морса–Смейла называется *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество не содержит гетероклинических точек.

В настоящей работе рассматривается класс G градиентно-подобных диффеоморфизмов, заданных на поверхности M^2 . Заметим, что в этом случае условие градиентно-подобности эквивалентно тому, что пересечение $W_p^s \cap W_q^u$ является пустым для различных седловых точек p, q .

Пусть $f \in G$. Тогда $\Omega_f = \Omega_f^0 \cup \Omega_f^1 \cup \Omega_f^2$, где $\Omega_f^0, \Omega_f^1, \Omega_f^2$ – множества стоковых, седловых, источниковых точек диффеоморфизма f соответственно. Везде далее мы будем предполагать, что f имеет хотя бы одну седловую точку.¹

Так как блуждающее множество диффеоморфизма $f \in G$ не содержит гетероклинических точек, то для неустойчивой l_σ^u (устойчивой l_σ^s) сепаратрисы седла $\sigma \in \Omega_f^1$ существует сток $\omega \in \Omega_f^0$ (источник $\alpha \in \Omega_f^2$) такой, что $\text{cl}(l_\sigma^u) = l_\sigma^u \cup \sigma \cup \omega$ ($\text{cl}(l_\sigma^s) = l_\sigma^s \cup \sigma \cup \alpha$) (см., например, [3; предложение 2.1.3]).

Удалим из поверхности M^2 замыкание объединения устойчивых и неустойчивых многообразий всех седловых точек диффеоморфизма f и обозначим получившееся множество через $\widetilde{M}$, т.е. $\widetilde{M} = M^2 \setminus (W_{\Omega_f^0}^u \cup W_{\Omega_f^1}^u \cup W_{\Omega_f^1}^s \cup W_{\Omega_f^2}^s)$. Множество $\widetilde{M}$ представляется в виде объединения областей (*ячеек*), гомеоморфных открытому двумерному диску, граница каждой из которых имеет один из видов, изображенных жирными линиями на рис. 1, и содержит в точности один источник, один сток, одну или две седловые точки и некоторые из их сепаратрис.²

Пусть A – любая ячейка из множества $\widetilde{M}$, α и ω – источник и сток, входящие в ее границу. Простую кривую $\tau \subset A$, граничными точками которой являются источник α и сток ω , будем называть *t-кривой* (см. рис. 1). Обозначим через $\mathcal{T}$ множество, инвариантное относительно диффеоморфизма f и состоящее из t -кривых, взятых по одной из каждой ячейки. Способ построения такого множества приведен в § 3 (см. лемму 3.4).

¹Если диффеоморфизм Морса–Смейла $f: M^n \rightarrow M^n$ не имеет седловых точек, то его неблуждающее множество состоит из одного источника и одного стока. Все диффеоморфизмы “источник–сток” топологически сопряжены; доказательство этого факта приведено, например, в [3; теорема 2.2.1].

²Этот факт доказывается аналогично соответствующему результату для грубых потоков на поверхностях (см., например, [16]).

Рис. 1. Виды ячеек

Любую компоненту связности множества $M_\Delta = \widetilde{M} \setminus \mathcal{T}$ назовем *треугольной областью*. Обозначим через Δ_f множество всех треугольных областей диффеоморфизма f . В границу каждой треугольной области $\delta \in \Delta_f$ входят три периодические точки: источник α , седло σ , сток ω , а также устойчивая сепаратриса ℓ_σ^s (будем называть ее *s-кривой*) с граничными точками α и σ , неустойчивая сепаратриса ℓ_σ^u (будем называть ее *u-кривой*) с граничными точками ω и σ и кривая τ (*t-кривая*) с граничными точками α и ω (см. рис. 2). *Стороной* треугольной области назовем замыкание *s*-, *u*- или *t*-кривой. Будем говорить, что две треугольные области *имеют общую сторону*, если эта сторона принадлежит замыканиям обеих областей. *Периодом* треугольной области δ называется наименьшее натуральное число $k \in \mathbb{N}$ такое, что $f^k(\delta) = \delta$.

Рис. 2. Треугольная область

Для того чтобы ввести комбинаторный топологический инвариант диффеоморфизма $f \in G$, напомним следующие определения.

Конечным графом называется упорядоченная пара (B, E) , для которой выполнены следующие условия: B – непустое конечное множество *вершин*; E – множество пар вершин, называемых *ребрами*.

Если граф содержит ребро $e = (a, b)$, то каждую из вершин a, b называют *инцидентной* ребру e и говорят, что вершины a и b соединены ребром e .

Путем в графе называют конечную последовательность его вершин и ребер вида: $b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_k), b_k$, $k \geq 1$. Число k называется *длиной пути*, оно совпадает с числом входящих в него ребер.

Граф называют *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем.

Циклом длины $k \in \mathbb{N}$ в графе называют конечное подмножество его вершин и ребер вида $\{b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_0)\}$. *Простым циклом* называют цикл, у которого все вершины и ребра попарно различны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Граф T называется *трехцветным графом*, если:

- 1) множество ребер графа T является объединением трех подмножеств, каждое из которых состоит из ребер одного и того же определенного цвета (цвета ребер из разных подмножеств не совпадают, будем обозначать эти цвета буквами s , t , u , а ребра для краткости будем называть s -, t -, u -ребрами);
- 2) каждая вершина графа T инцидентна в точности трем ребрам различных цветов;
- 3) граф не содержит циклов длины один.

Простой цикл трехцветного графа T назовем *двухцветным* циклом типа su , tu или st , если он содержит ребра в точности двух цветов s и u , t и u или s и t . Непосредственно из определения трехцветного графа следует, что длина любого двухцветного цикла является четным числом (так как цвета ребер строго чередуются), а отношение на множестве вершин, состоящее в принадлежности двухцветному циклу определенного типа, является отношением эквивалентности.

Взаимно однозначное отображение P графа T на себя, переводящее вершины в вершины с сохранением отношений инцидентности и цветности (т.е. вершина, инцидентная s -, t - или u -ребру, переходит в вершину, инцидентную ребру того же цвета), называется *автоморфизмом графа T* . В дальнейшем мы будем понимать под символом (T, P) граф T , оснащенный автоморфизмом P .

Два трехцветных графа (T, P) и (T', P') назовем *изоморфными*, если существует взаимно однозначное соответствие ξ между множествами их вершин, сохраняющее отношения инцидентности и цветности, а также сопрягающее автоморфизмы P и P' (т.е. $P'\xi = \xi P$).

Автоморфизм P трехцветного графа T назовем *периодическим* периода $m \in \mathbb{N}$, если $P^m(a) = a$ и $P^\mu(a) \neq a$ при натуральных $\mu < m$ для любой вершины a графа T .

Построим трехцветный граф T_f , соответствующий диффеоморфизму $f \in G$, следующим образом:

- 1) вершины графа T_f взаимно однозначно соответствуют треугольным областям множества Δ ;
- 2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s , t или u , если соответствующие этим вершинам треугольные области имеют общую s -, t - или u -кривую.

Обозначим через B_f множество вершин графа T_f . Так как стороны любой треугольной области раскрашены в разные цвета, то в вершине, соответствующей треугольной области, сходятся ребра трех различных цветов. Поскольку любая сторона треугольной области примыкает ровно к двум различным треугольным областям, то граф T_f не имеет циклов длины 1. Таким образом,

граф T_f удовлетворяет определению трехцветного графа. Обозначим через $\pi_f: \Delta_f \rightarrow B_f$ взаимно однозначное отображение множества треугольных областей диффеоморфизма f на множество вершин графа T_f . Диффеоморфизм f индуцирует на множестве вершин и ребер графа T_f автоморфизм $P_f = \pi_f f \pi_f^{-1}$. В силу конструкции трехцветные графы, полученные по различным разбиениям на треугольные области (зависящим от выбора t -кривых), изоморфны.

Следующая теорема является решением первых двух задач топологической классификации в классе G , описанных во введении.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы диффеоморфизмы f, f' из класса G были топологически сопряжены, необходимо и достаточно, чтобы их графы (T_f, P_f) и $(T_{f'}, P_{f'})$ были изоморфны.*

Для решения последней задачи топологической классификации (реализации) в классе G введем следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Трехцветный граф (T, P) назовем *допустимым*, если он обладает следующими свойствами:

- 1) граф T связан;
- 2) длина любого su -цикла графа T равна 4;
- 3) автоморфизм P является периодическим.

ЛЕММА 1.1. *Пусть $f \in G$. Тогда трехцветный граф (T_f, P_f) является допустимым.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть (T, P) – допустимый трехцветный граф. Тогда существует диффеоморфизм $f: M^2 \rightarrow M^2$ из класса G , граф (T_f, P_f) которого изоморфен графу (T, P) . При этом*

- i) *эйлерова характеристика поверхности M^2 вычисляется по формуле*

$$\chi(M^2) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2,$$

где ν_0, ν_1, ν_2 – число всех tu -, su -, st -циклов графа T соответственно;

- ii) *поверхность M^2 ориентируема тогда и только тогда, когда все циклы графа T имеют четную длину.*

§ 2. Вспомогательные факты

Сформулируем необходимые сведения о диффеоморфизме $f \in G$. Подробное изложение и доказательство приведенных ниже утверждений можно найти в [3; гл. 2].

Пусть ω – стоковая точка периода m_ω диффеоморфизма f . Согласно теореме 5.5 из [17] f^{m_ω} локально сопряжен в точке ω линейному диффеоморфизму пространства $\mathbb{R}^2$, заданному матрицей $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \varsigma_\omega \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, где $\varsigma_\omega = +1$ (-1), если $f^{m_\omega}|_{W_\omega^s}$ сохраняет (меняет) ориентацию. Число ς_ω будем называть *типом ориентации* стоковой точки ω . Тип ориентации $+1$ будем называть *положительным*.

Тип ориентации источниковой точки диффеоморфизма f равен типу ориентации этой точки как стоковой точки диффеоморфизма f^{-1} .

Обозначим через $\mathcal{O}_\omega$ орбиту точки ω . Положим $V_\omega = W_{\mathcal{O}_\omega}^s \setminus \mathcal{O}_\omega$. Обозначим через $\hat{V}_\omega = V_\omega/f$ пространство орбит действия группы $F = \{f^k, k \in \mathbb{Z}\}$ на V_ω и через $p_\omega: V_\omega \rightarrow \hat{V}_\omega$ естественную проекцию.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Пространство $\hat{V}_\omega$ диффеоморфно двумерному тору, если $\varsigma_\omega = +1$, и бутылке Клейна, если $\varsigma_\omega = -1$. Естественная проекция $p_\omega: V_\omega \rightarrow \hat{V}_\omega$ является накрытием³, индуцирующим эпиморфизм $\eta_\omega: \pi_1(\hat{V}_\omega) \rightarrow t_\omega \mathbb{Z}$ (здесь $t_\omega \mathbb{Z}$ – группа целых чисел, кратных t_ω), действующий по следующему правилу. Пусть $[\hat{c}] \in \pi_1(\hat{V}_\omega)$. Любое поднятие⁴ с петли $\hat{c}$ соединяет некоторую точку $x \in V_\omega$ с точкой $f^n(x)$, где $n \in \mathbb{Z}$ не зависит от выбора поднятия. Тогда $\eta_\omega([\hat{c}]) = n$.*

Для любой седловой сепаратрисы ℓ обозначим через t_ℓ ее период, т.е. наименьшее из натуральных чисел μ таких, что $f^\mu(\ell) = \ell$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Пусть ℓ – сепаратриса периода t_ℓ седловой точки диффеоморфизма f , содержащая сток ω в своем замыкании. Тогда множество $\hat{\ell} = p_\omega(\ell)$ является окружностью, гладко вложенной в $\hat{V}_\omega$ и такой, что $\eta_\omega([\hat{\ell}]) = t_\ell$.*

Рис. 3. Проекция седловой сепаратрисы в пространство орбит бассейна стока, гомеоморфное тору

Положим $q_{\ell,\omega} = t_\ell/t_\omega$. На рис. 3 изображен тор $\hat{V}_\omega$ с проекцией $\hat{\ell}$ сепаратрисы ℓ такой, что $q_{\ell,\omega} = 3$. На рис. 4, а) кривая $\hat{\ell}$ изображена на торе, представленном в виде квадрата со склеенными указанным образом сторонами. На рис. 4, б), в) аналогичным образом представлена бутылка Клейна, при этом на рис. 4, б) (рис. 4, в)) изображена проекция $\hat{\ell}$ в $\hat{V}_\omega$ сепаратрисы ℓ такой, что $q_{\ell,\omega} = 1$ ($q_{\ell,\omega} = 2$).

³Непрерывное отображение $p: \bar{X} \rightarrow X$ топологических пространств называется *накрытием* (накрывающим отображением), если

1) p сюръективно;

2) для любой точки $x \in X$ существует окрестность U такая, что $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \bar{U}_j$ для некоторого семейства $\{\bar{U}_j, j \in J\}$ подмножеств $\bar{X}$, удовлетворяющих условиям $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k = \emptyset$ для $j \neq k$ и $p|_{\bar{U}_j}: \bar{U}_j \rightarrow U$ – гомеоморфизм для всех $j \in J$.

⁴Если $p: \bar{X} \rightarrow X$ – накрытие и $h: Y \rightarrow X$ – непрерывное отображение, то *поднятием* отображения h называется непрерывное отображение $\bar{h}: Y \rightarrow \bar{X}$, для которого $p\bar{h} = h$.

Под поднятием петли $\hat{c}$ понимается поднятие непрерывного отображения $H_{\hat{c}}: [0, 1] \rightarrow \hat{V}_\omega$ такого, что $H_{\hat{c}}([0, 1]) = \hat{c}$.

Рис. 4. Проекция седловой сепаратрисы в пространство орбит бассейна стока

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $\hat{c} \subset \hat{V}_\omega$ – простой замкнутый путь такой, что $\eta_\omega([\hat{c}]) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда полный прообраз $p_\omega^{-1}(c)$ петли c является f -инвариантным множеством, состоящим из n простых попарно не пересекающихся кривых периода n .

Аналогичным образом вводится тип ориентации ζ_α для периодического источника α диффеоморфизма f , пространство орбит $\hat{V}_\alpha$ и проекция в него устойчивой сепаратрисы седловой точки.

Пусть σ – седловая точка периода m_σ диффеоморфизма f . Положим $\nu_\sigma = +1$ (-1), если $f|_{W_p^s}$ сохраняет (меняет) ориентацию; $\lambda_\sigma = +1$ (-1), если $f|_{W_p^u}$ сохраняет (меняет) ориентацию. Пару $\zeta_\sigma = (\nu_\sigma, \lambda_\sigma)$ будем называть *типом ориентации* седловой точки σ . Тип ориентации $(+1, +1)$ будем называть *положительным*.

Обозначим через $a_{\zeta_\sigma} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ диффеоморфизм, заданный матрицей

$$A_{\zeta_\sigma} = \begin{pmatrix} \nu_\sigma \cdot \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \lambda_\sigma \cdot 2 \end{pmatrix}.$$

Диффеоморфизм $a_{\zeta_\sigma} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет единственную неподвижную седловую точку в начале координат O с устойчивым многообразием $W_O^s = Ox_1$ и неустойчивым многообразием $W_O^u = Ox_2$. Диффеоморфизм f^{m_σ} в некоторой окрестности точки σ топологически сопряжен диффеоморфизму a_{ζ_σ} в окрестности точки O (см., например, [17; теорема 5.5]).

Для $t \in (0, 1]$ положим $\mathcal{N}^t = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 x_2| \leq t\}$, $\mathcal{N}^1 = \mathcal{N}$ и заметим, что множество $\mathcal{N}^t$ является инвариантным относительно канонического диффеоморфизма a_{ζ_σ} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $f \in G$ и σ – седловая точка периода m_σ диффеоморфизма f . Окрестность N_σ точки σ назовем *линеаризирующей*, если существует гомеоморфизм $\mu_\sigma : N_\sigma \rightarrow \mathcal{N}$, сопрягающий диффеоморфизм $f^{m_\sigma}|_{N_\sigma}$ с каноническим диффеоморфизмом $a_{\zeta_\sigma}|_{\mathcal{N}}$.

Окрестность $N_{\mathcal{O}_\sigma} = \bigcup_{j=0}^{m_\sigma-1} f^j(N_\sigma)$ орбиты $\mathcal{O}_\sigma = \bigcup_{j=0}^{m_\sigma-1} f^j(\sigma)$, оснащенную отображением $\mu_{\mathcal{O}_\sigma}$, составленным из гомеоморфизмов

$$\mu_\sigma f^{-j}: f^j(N_\sigma) \rightarrow \mathcal{N}, \quad j = 0, \dots, m_\sigma - 1,$$

будем называть *линеаризирующей окрестностью орбиты* $\mathcal{O}_\sigma$.

Следующее утверждение доказывается аналогично теореме 2.1.2 из [3], где это утверждение доказано в случае, когда f – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Любая седловая точка (орбита) диффеоморфизма $f \in G$ обладает линеаризирующей окрестностью.*

Положим $\mathcal{N}^u = \mathcal{N} \setminus O x_1$ и через $\widehat{\mathcal{N}}_{\varsigma_\sigma}^u = \mathcal{N}^u / a_{\varsigma_\sigma}$ обозначим пространство орбит действия группы $\{a_{\varsigma_\sigma}^n, n \in \mathbb{Z}\}$ на $\mathcal{N}^u$. Обозначим через $p_{\widehat{\mathcal{N}}_{\varsigma_\sigma}^u}: \mathcal{N}^u \rightarrow \widehat{\mathcal{N}}_{\varsigma_\sigma}^u$ естественную проекцию и через $\eta_{\widehat{\mathcal{N}}_{\varsigma_\sigma}^u}$ отображение, составленное из нетривиальных гомоморфизмов из фундаментальных групп компонент связности пространства $\widehat{\mathcal{N}}_{\varsigma_\sigma}^u$ в группу $\mathbb{Z}$. Фундаментальная область⁵ действия группы $\{a_{\varsigma_\sigma}^n, n \in \mathbb{Z}\}$ на $\mathcal{N}^u$ в случаях $\varsigma_\sigma = (+1, +1)$ и $\varsigma_\sigma = (-1, +1)$ состоит из двух непересекающихся криволинейных трапеций, каждая из которых имеет эквивалентные точки, принадлежащие горизонтальным отрезкам границы, а в случаях $\varsigma_\sigma = (+1, -1)$ и $\varsigma_\sigma = (-1, -1)$ фундаментальную область можно выбрать в виде одной криволинейной трапеции (с эквивалентными точками на горизонтальных отрезках границы). На рис. 5 эти трапеции закрашены, и показано, как из них, отождествлением границ в силу диффеоморфизма a_{ς_σ} , получается многообразие $\widehat{\mathcal{N}}_{\varsigma_\sigma}^u$ в зависимости от выбора ς_σ . Таким образом, справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Многообразие $\widehat{\mathcal{N}}_{\varsigma_\sigma}^u$ имеет следующий топологический тип в зависимости от ς_σ :*

- пространство $\widehat{\mathcal{N}}_{+1,+1}^u$ гомеоморфно паре двумерных колец K_1, K_2 и $\eta_{\widehat{\mathcal{N}}_{+1,+1}^u}(K_1) = \eta_{\widehat{\mathcal{N}}_{+1,+1}^u}(K_2) = \mathbb{Z}$;
- пространство $\widehat{\mathcal{N}}_{-1,+1}^u$ гомеоморфно паре пленок Мёбиуса M_1, M_2 и $\eta_{\widehat{\mathcal{N}}_{-1,+1}^u}(M_1) = \eta_{\widehat{\mathcal{N}}_{-1,+1}^u}(M_2) = \mathbb{Z}$;
- пространство $\widehat{\mathcal{N}}_{+1,-1}^u$ гомеоморфно одному двумерному кольцу K и $\eta_{\widehat{\mathcal{N}}_{+1,-1}^u}(K) = 2\mathbb{Z}$;
- пространство $\widehat{\mathcal{N}}_{-1,-1}^u$ гомеоморфно одному двумерному кольцу K и $\eta_{\widehat{\mathcal{N}}_{-1,-1}^u}(K) = 2\mathbb{Z}$.

⁵ Фундаментальной областью действия группы G на топологическом пространстве X называется замкнутое множество $D_G \subset X$ такое, что существует множество $\tilde{D}_G$ со следующими свойствами:

- 1) $\text{cl}(\tilde{D}_G) = D_G$;
- 2) $g(\tilde{D}_G) \cap \tilde{D}_G = \emptyset$ для всех $g \in G$, отличных от нейтрального элемента группы G ;
- 3) $\bigcup_{g \in G} g(\tilde{D}_G) = X$.

Рис. 5. Пространства орбит $\widehat{\mathcal{N}}^u$

§ 3. Периодические данные диффеоморфизма $f \in G$

Пусть $f \in G$. Для любого стока ω диффеоморфизма f обозначим через L_ω объединение всех седловых сепаратрис, содержащих ω в своем замыкании. Напомним, что любая простая замкнутая кривая на компактной поверхности имеет окрестность, гомеоморфную либо двумерному кольцу, либо пленке Мёбиуса; кривая называется при этом либо *двусторонней*, либо *односторонней* соответственно. На ориентируемой поверхности все кривые являются двусторонними, тогда как на неориентируемой поверхности существуют как двусторонние, так и односторонние кривые.

ЛЕММА 3.1. Пусть ω – сток периода t_ω диффеоморфизма f . Тогда

- 1) если $\varsigma_\omega = +1$, то $q_{\ell_1, \omega} = q_{\ell_2, \omega}$ для любых сепаратрис $\ell_1, \ell_2 \subset L_\omega$;
- 2) если $\varsigma_\omega = -1$, то либо $q_{\ell, \omega} = 1$ и кривая $\widehat{\ell}$ является односторонней, либо $q_{\ell, \omega} = 2$ и кривая $\widehat{\ell}$ является двусторонней на бутылке Клейна $\widehat{V}_\omega$ для любой сепаратрисы $\ell \subset L_\omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае 1) положим $\widehat{L}_\omega = p_\omega(L_\omega)$. В силу утверждения 2 $\widehat{L}_\omega$ – непустое подмножество множества $\widehat{V}_\omega$, состоящее из конечного числа попарно не пересекающихся гомотопически нетривиальных гладких окружностей $\widehat{\ell}$ таких, что $\eta_\omega([\widehat{\ell}]) = t_\ell$. Тогда каждая компонента связности множества $\widehat{V}_\omega \setminus \widehat{L}_\omega$ является двумерным кольцом (см., например, [18; теорема 13]).

Отсюда следует, что $\eta_\omega([\widehat{\ell}_1]) = \eta_\omega([\widehat{\ell}_2])$ для любых сепаратрис $\ell_1, \ell_2 \subset L_\omega$. Тогда $q_{\ell_1, \omega} = q_{\ell_2, \omega}$ в силу утверждения 3.

В случае 2) покажем, что $q_{\ell, \omega}$ не превосходит двух для любой сепаратрисы $\ell \subset L_\omega$. Предположим противное: $q_{\ell, \omega} > 2$, и получим противоречие в каждом из следующих случаев: i) $q_{\ell, \omega}$ – нечетное число; ii) $q_{\ell, \omega}$ – четное число.

Не уменьшая общности, можно считать, что $m_\omega = 1$, W_ω^s есть $\mathbb{R}^2 = Ox_1x_2$ и диффеоморфизм $f|_{W_\omega^s}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

В случае i) пространство орбит стока ω относительно диффеоморфизма $f^{q_{\ell, \omega}}$ является бутылкой Клейна и проекция в нем сепаратрис $\ell, f(\ell), \dots, f^{q_{\ell, \omega}-1}(\ell)$ является объединением $q_{\ell, \omega}$ попарно не пересекающихся односторонних замкнутых кривых. А это противоречит тому, что среди любых трех попарно не пересекающихся замкнутых кривых на бутылке Клейна хотя бы одна является двусторонней (см., например, [19; лемма 3.2]).

Рис. 6. Образующие тора

В случае ii) обозначим через $\tilde{V}_\omega = V_\omega / f^2$ пространство орбит действия группы $F = \{f^{2k}, k \in \mathbb{Z}\}$ на V_ω , через $\tilde{p}_\omega: V_\omega \rightarrow \tilde{V}_\omega$ естественную проекцию и через $\tilde{\eta}_\omega: \pi_1(\tilde{V}_\omega) \rightarrow \mathbb{Z}$ эпиморфизм, индуцированный проекцией $\tilde{\eta}_\omega$. Положим $a = \tilde{p}_\omega(Ox_1^+)$, где $Ox_1^+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0, x_1 > 0\}$, и $b = \tilde{p}_\omega(S^1)$, где $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ (см. рис. 6). Кривые a, b с некоторой выбранной на них ориентацией являются образующими фундаментальной группы тора $\tilde{V}_\omega$, и, следовательно, каждый элемент $[c] \in \pi_1(\tilde{V}_\omega)$ однозначно определяется парой чисел $\langle n_a, n_b \rangle$ так, что $[c] = n_{c,a} \cdot [a] + n_{c,b} \cdot [b]$.

Положим $\tilde{\ell} = \tilde{p}_\omega(\ell)$ и будем считать простой замкнутый путь $\tilde{\ell}$ ориентированным согласно движению по сепаратрисе ℓ от седла к стоку. Поскольку $q_{\ell, \omega} \geq 4$, то $|\tilde{\eta}_\omega([\tilde{\ell}])| = |n_{\tilde{\ell}, a}| \geq 2$. Так как кривая $\tilde{\ell}$ является простой, то наибольший общий делитель чисел $n_{\tilde{\ell}, a}$ и $n_{\tilde{\ell}, b}$ равен единице (см., например, [18; теорема 2]). То есть $|n_{\tilde{\ell}, b}| \geq 1$. Покажем, что отсюда следует пересечение кривых ℓ и $f(\ell)$, что неверно.

В полярных координатах ρ, φ отображение $f|_{Ox_1x_2 \setminus O}$ имеет вид $\phi(\rho, \varphi) = (\rho/2, -\varphi)$. Рассмотрим накрытие $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus O)$, переводящее $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ в $(\rho, \varphi) \in (\mathbb{R}^2 \setminus O)$ и заданное формулой $(\rho, \varphi) = q(x_1, x_2) = (4^{x_1}, 2\pi x_2)$. Тогда поднятие $\bar{\phi}$ отображения ϕ ($q\bar{\phi} = \phi q$) имеет вид $\bar{\phi}(x_1, x_2) = (x_1 - \frac{1}{2}, -x_2)$. Обозначим через $\bar{\ell}$ компоненту связности множества $q^{-1}(\ell)$. Тогда $\bar{\ell}_1 = \bar{\phi}(\bar{\ell})$ является компонентой связности множества $q^{-1}(f(\ell))$. Множество $\bar{\ell}$ является простой неограниченной кривой, содержащей вместе с точкой $(x_1, x_2) \in \bar{\ell}$ все

Рис. 7. Кривые $\bar{\ell}$, $\bar{\ell}_1$

точки вида $(x_1 + k \cdot n_{\bar{\ell},a}, x_2 + k \cdot n_{\bar{\ell},b})$, $k \in \mathbb{Z}$, а кривая $\bar{\ell}_1$ содержит вместе с точкой $(x_1, x_2) \in \bar{\ell}_1$ все точки вида $(x_1 + k \cdot n_{\bar{\ell},a}, x_2 - k \cdot n_{\bar{\ell},b})$ (см. рис. 7). Тогда кривые $\bar{\ell}$, $\bar{\ell}_1$ пересекаются. Следовательно, кривые ℓ и $f(\ell)$ также пересекаются.

Положим $\mathcal{A}_f = \bigcup_{\omega \in \Omega_f^0} \text{cl } L_\omega$.

ЛЕММА 3.2. *Множество $\mathcal{A}_f$ является связным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку множество Ω_f^2 состоит из конечного числа источников, то оно нульмерно, а значит, множество $M^2 \setminus \Omega_f^2$ связно (см., например, теорему о разбивающих множествах в [20]⁶). Выберем открытую окрестность U множества Ω_f^2 такую, что $f^{-1}(\text{cl } U) \subset U$. Положим $V = M^2 \setminus U$. Тогда множество V связно и замкнуто. Более того, $V \supset f(V) \supset \dots \supset f^n(V) \supset \dots$. Поскольку $V \subset W_{\Omega_f^0 \cup \Omega_f^1}^s$, то $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(V) = \mathcal{A}_f$. Отсюда следует, что множество $\mathcal{A}_f$ связно (см., например, [3; предложение 10.2.1]).

Обозначим через m_f наименьшее натуральное число, для которого $\Omega_f^{m_f}$ состоит из неподвижных точек с положительным типом ориентации.

ЛЕММА 3.3. *Пусть ℓ – седловая сепаратриса периода m_ℓ диффеоморфизма f . Тогда*

- 1) $m_\ell = m_f$, если $\widehat{\ell}$ – двусторонняя кривая;
- 2) $m_\ell = m_f/2$, если $\widehat{\ell}$ – односторонняя кривая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем доказательство на шаги.

Шаг 1. Покажем, что для любых различных седловых сепаратрис ℓ , ℓ' справедливо следующее:

- i) если обе кривые $\widehat{\ell}$, $\widehat{\ell}'$ односторонние либо обе двусторонние, то $m_\ell = m_{\ell'}$;
- ii) если кривая $\widehat{\ell}$ односторонняя и кривая $\widehat{\ell}'$ двусторонняя, то $m_{\ell'} = 2m_\ell$.

Обозначим через σ , σ' (возможно, $\sigma = \sigma'$) седловые точки, имеющие сепаратрисы ℓ , ℓ' соответственно. В силу связности множества $\mathcal{A}_f = \bigcup_{\omega \in \Omega_f^0} \text{cl } L_\omega$ (см. лемму 3.2) существует путь (возможно, не простой) $\nu: [0, 1] \rightarrow (\mathcal{A}_f \cup \text{cl } \ell \cup \text{cl } \ell')$ со следующими свойствами:

⁶Теорема о разбивающих множествах: любое n -мерное связное многообразие не может быть разбито подмножеством топологической размерности $\leq n - 2$.

- (1) существуют значения $t_0, t_1, \dots, t_{2n} \in [0, 1]$ такие, что $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{2n} = 1$;
- (2) $\nu(\{t_0, t_{2n}\}) \in (\Omega_f^0 \cup \Omega_f^2)$, $\nu(\{t_1, t_3, \dots, t_{2n-1}\}) \subset \Omega_f^1$, $\nu(t_1) = \sigma$, $\nu(t_{2n-1}) = \sigma'$, $\nu(\{t_2, t_4, \dots, t_{2n-2}\}) \subset \Omega_f^0$;
- (3) множество $\ell_j = \nu((t_j, t_{j+1}))$, $j = 0, \dots, 2n-1$, является седловой сепаратрисой, причем $\ell_0 = \ell$, $\ell_{2n-1} = \ell'$;
- (4) ℓ_{2i}, ℓ_{2i+1} – сепаратрисы седла $\nu(t_{2i+1})$ для $i = 0, \dots, n-1$ и $\ell_{2i-1}, \ell_{2i} \subset L_{\nu(t_{2i})}$ для $i = 1, \dots, n-1$.

Положим $\zeta_j = +1$, если $\widehat{\ell}_j$ – двусторонняя кривая, и $\zeta_j = -1$, если $\widehat{\ell}_j$ – односторонняя кривая. Набор $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{2n-2}, \zeta_{2n-1})$ обладает следующими свойствами:

- i) в силу утверждения 5
- если $\zeta_0 = -1$, $\zeta_1 = +1$, то $m_{\ell_1} = 2m_{\ell_0}$,
 - если $\zeta_0 = \zeta_1$, то $m_{\ell_1} = m_{\ell_0}$,
 - если $\zeta_0 = +1$, $\zeta_1 = -1$, то $m_{\ell_0} = 2m_{\ell_1}$,
 - если $\zeta_{2n-2} = -1$, $\zeta_{2n-1} = +1$, то $m_{\ell_{2n-1}} = 2m_{\ell_{2n-2}}$,
 - если $\zeta_{2n-2} = \zeta_{2n-1}$, то $m_{\ell_{2n-2}} = m_{\ell_{2n-1}}$,
 - если $\zeta_{2n-2} = +1$, $\zeta_{2n-1} = -1$, то $m_{\ell_{2n-2}} = 2m_{\ell_{2n-1}}$;
- ii) поскольку ℓ_{2i}, ℓ_{2i+1} – неустойчивые сепаратрисы седла $\nu(t_{2i+1})$ для $i = 1, \dots, n-2$, то $\zeta_{2i} = \zeta_{2i+1}$ и $m_{\ell_{2i}} = m_{\ell_{2i+1}}$;
- iii) в силу леммы 3.1
- если $\zeta_{2i-1} = -1$, $\zeta_{2i} = +1$, то $m_{\ell_{2i}} = 2m_{\ell_{2i-1}}$,
 - если $\zeta_{2i-1} = \zeta_{2i}$, то $m_{\ell_{2i}} = m_{\ell_{2i-1}}$,
 - если $\zeta_{2i-1} = +1$, $\zeta_{2i} = -1$, то $m_{\ell_{2i-1}} = 2m_{\ell_{2i}}$.

Таким образом, смена знака у членов ζ_j, ζ_{j+1} набора ζ с минуса на плюс (с плюса на минус) соответствует увеличению (уменьшению) периода сепаратрисы $m_{\ell_{j+1}}$ вдвое относительно периода m_{ℓ_j} , тогда как сохранение знака соответствует равенству периодов. Следовательно,

- если $\zeta_0 = -1$, $\zeta_{2n-1} = +1$, то в наборе ζ присутствует нечетное число смен знака, откуда $m_{\ell'} = 2m_{\ell}$;
- если $\zeta_0 = \zeta_{2n-1}$, то в наборе ζ присутствует четное число смен знака, откуда $m_{\ell'} = m_{\ell}$;
- если $\zeta_0 = +1$, $\zeta_{2n-1} = -1$, то в наборе ζ присутствует нечетное число смен знака, откуда $m_{\ell} = 2m_{\ell'}$.

Шаг 2. Если для любой сепаратрисы ℓ диффеоморфизма f кривая $\widehat{\ell}$ двусторонняя, то положим $m = m_{\ell}$. Если диффеоморфизм f содержит седловые сепаратрисы ℓ, ℓ' такие, что $\widehat{\ell}$ – двусторонняя кривая и $\widehat{\ell'}$ – односторонняя кривая, то положим $m = m_{\ell}$. Если для любой сепаратрисы ℓ диффеоморфизма f кривая $\widehat{\ell}$ односторонняя, то положим $m = 2m_{\ell}$. Покажем, что $m_f = m$.

Из шага 1 следует, что все седловые сепаратрисы диффеоморфизма $g = f^m$ неподвижны. Тогда неподвижными являются все седловые точки g и они имеют положительный тип ориентации. А в силу леммы 3.1 неподвижными с положительным типом ориентации являются и все узловые точки диффеоморфизма g . Поскольку m_f не меньше периода любой седловой сепаратрисы, то $m_f = m$.

Напомним, что каждая компонента связности A множества

$$\widetilde{M} = M^2 \setminus (W_{\Omega_0^u}^u \cup W_{\Omega_1^u}^u \cup W_{\Omega_1^s}^s \cup W_{\Omega_2^s}^s)$$

гомеоморфна открытому двумерному диску, граница которого содержит в точности один источник α и в точности один сток ω , а любая простая дуга $\tau \subset A$ с граничными точками α и ω называется t -кривой. Для любой t -кривой τ обозначим через m_τ ее период, т.е. наименьшее из натуральных чисел μ таких, что $f^\mu(\tau) = \tau$.

ЛЕММА 3.4. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ существует f -инвариантное множество $\mathcal{T}$, состоящее из t -кривых, каждая из которых принадлежит в точности одной ячейке множества $\widetilde{M}$. При этом период t -кривой равен либо m_f , либо $m_f/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – любая ячейка из множества $\widetilde{M}$, α и ω – источник и сток, входящие в ее границу. Обозначим через L_ω объединение седловых сепаратрис, содержащих ω в своем замыкании. Положим $\widehat{L}_\omega = p_\omega(L_\omega)$. В силу утверждения 2 $\widehat{L}_\omega$ – непустое подмножество множества $\widehat{V}_\omega$, состоящее из конечного числа попарно не пересекающихся гомотопически нетривиальных гладких окружностей таких, что $\eta_\omega([\widehat{\ell}]) = m_\ell$ для любой окружности $\widehat{\ell} \subset \widehat{L}_\omega$. По построению множество $\widehat{A} = p_\omega(A)$ является компонентой связности множества $\widehat{V}_\omega \setminus \widehat{L}_\omega$ и, следовательно, гомеоморфно двумерному кольцу или пленке Мёбиуса (см. рис. 8).

Рис. 8. Иллюстрация к лемме 3.4

Если $\widehat{A}$ – кольцо, то выберем простую замкнутую гомотопически нетривиальную гладкую кривую $\widehat{\tau} \subset \widehat{A}$. Тогда в силу леммы 3.3 $\eta_\omega([\widehat{\tau}]) = m_f$. Если $\widehat{A}$ – пленка Мёбиуса, то выберем простую замкнутую одностороннюю кривую $\widehat{\tau} \subset \widehat{A}$. Тогда в силу леммы 3.3 $\eta_\omega([\widehat{\tau}]) = m_f/2$. В обоих случаях в силу утверждения 3 множество $p_\omega^{-1}(\widehat{\tau})$ является f -инвариантным объединением t -кривых, по одной на каждой из ячеек множества $p_\omega^{-1}(\widehat{A})$, и период каждой кривой равен m_f или $m_f/2$.

Если множество $p_\omega^{-1}(\widehat{A})$ исчерпывает все множество ячеек диффеоморфизма f , то лемма доказана. В противном случае повторим рассуждения для

ячеек множества $\widetilde{M} \setminus p_\omega^{-1}(\widehat{A})$. Продолжая процесс, мы исчерпаем все ячейки диффеоморфизма f и построим искомое множество $\mathcal{T}$.

Напомним, что любая компонента связности множества $M_\Delta = \widetilde{M} \setminus \mathcal{T}$ называется *треугольной областью* и через Δ_f мы обозначили множество всех треугольных областей диффеоморфизма f .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Любая треугольная область $\delta \in \Delta_f$ диффеоморфизма $f \in G$ имеет период m_f .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta \in \Delta_f$ – треугольная область диффеоморфизма f . По построению в границу δ входят три периодические точки: источник α , седло σ , сток ω , а также устойчивая сепаратриса ℓ_σ^s (s -кривая) с граничными точками α и σ , неустойчивая сепаратриса ℓ_σ^u (u -кривая) с граничными точками ω и σ и кривая τ (t -кривая) с граничными точками α и ω (см. рис. 2). В силу лемм 3.3 и 3.4 стороны треугольника δ имеют период m_f либо $m_f/2$. Согласно утверждению 5 либо s -сторона ℓ_σ^s , либо u -сторона ℓ_σ^u имеет период m_f , что и завершает доказательство предложения.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Автоморфизм P_f , индуцированный диффеоморфизмом f на графе T_f , является периодическим периода m_f .*

§ 4. Связь графа $(T_f; P_f)$ с диффеоморфизмом $f \in G$

Пусть $f \in G$ и $(T_f; P_f)$ – трехцветный граф, построенный по диффеоморфизму f .

Пусть $\mathcal{C}_0$ ($\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$) – множество всех tu -циклов (su -циклов, st -циклов) графа T_f соответственно.

Из определения треугольных областей следует, что для $i = 0, 1, 2$ корректно определено отображение $p_i: \Delta_f \rightarrow \Omega_f^i$, ставящее в соответствие треугольной области $\delta \in \Delta_f$ единственную периодическую точку из множества Ω_f^i , принадлежащую замыканию δ . Положим $q_i = p_i \pi_f^{-1}: B_f \rightarrow \Omega_f^i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $i \in \{0, 1, 2\}$ и $C_i \in \mathcal{C}_i$. Для любых вершин $b_1, b_2 \in C_i$ имеет место равенство $q_i(b_1) = q_i(b_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство для $i = 0$ (в остальных случаях доказательства аналогичные). Вершинам $b_1, b_2 \in C_0$ соответствуют треугольные области $\delta_1 = \pi_f^{-1}(b_1)$ и $\delta_2 = \pi_f^{-1}(b_2)$ (см. рис. 9). Поскольку b_1 и b_2 – вершины цикла C_0 , то существует последовательность $\delta_1 = \beta_1, \dots, \beta_k = \delta_2$ треугольных областей таких, что β_i и β_{i+1} , $i = 1, \dots, k-1$, имеют общую u - или t -кривую. Поскольку каждое из таких ребер содержит единственную стоковую точку, принадлежащую замыканию обеих областей, то $\pi_f(\beta_1) = \dots = \pi_f(\beta_k)$. Отсюда следует, что $q_0(b_1) = q_0(b_2)$.

В силу предложения 2 корректно определено отображение Q_i , ставящее в соответствие циклу $C_i \in \mathcal{C}_i$ точку $x \in \Omega_f^i$ такую, что $x = q_i(b)$ для некоторой вершины $b \in C_i$.

ЛЕММА 4.1. *Отображение Q_i является взаимно однозначным.*

цикл C_0 совокупность треугольных областей,
соответствующих циклу C_0 Рис. 9. Пример tu -цикла C_0 и соответствующих ему треугольных областей

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сюръективность отображения Q_i . Для точки $x \in \Omega_f^i$ обозначим через Δ_x объединение всех треугольных областей, содержащих x в своем замыкании, т.е. $\Delta_x = \{\delta_x \in \Delta_x \subset \Delta_f \mid p_i(\delta_x) = x\}$. В окрестности точки x построим замкнутую кривую S_x , которая пересекает каждое ребро, содержащее точку x в своем замыкании, в единственной точке и не пересекает других ребер. Тогда существует единственный цикл C_x , множество вершин которого имеет вид $B_{C_x} = \pi_f(\bigcup_{\delta_x \in \Delta_x} \delta_x)$. Рассмотрим произвольную точку

$$b = \pi_f(\delta_x) \in B_{C_x}, \quad q_i(b) = q_i(\pi_f(\delta_x)) = p_i(\pi_f^{-1}(\pi_f(\delta_x))) = p_i(\delta_x) = x.$$

Отсюда следует, что $Q_i(C_x) = x$.

Покажем инъективность отображения Q_i . Предположим противное: для некоторых циклов C_i и C'_i таких, что $C_i \neq C'_i$, пусть $Q_i(C_i) = Q_i(C'_i) = x \in \Omega_f^i$. Пусть $\Delta_x = p_i^{-1}(x)$ – полный прообраз точки x , тогда $\pi_f(\Delta_x) = B_{C_x}$, где цикл C_x определяется способом, описанным выше. В силу конструкции $C_x = C_i = C'_i$. Получили противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В силу леммы 4.1 стоковой точке $\omega \in \Omega_f^0$ соответствует tu -цикл; седловой точке $\sigma \in \Omega_f^1$ – su -цикл; источниковой точке $\alpha \in \Omega_f^2$ – st -цикл графа T_f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.1. Докажем, что трехцветный граф (T_f, P_f) обладает следующими свойствами:

- 1) граф T_f связан;
- 2) длина su -циклов графа T_f равна 4;
- 3) автоморфизм P_f является периодическим с периодом m_f .

Пусть $f \in G$. Докажем последовательно все приведенные выше свойства графа T_f .

1) Пусть b_1, b_2 – различные вершины графа T_f . Покажем, что существует путь, их соединяющий.

Для $i = 1, 2$ положим $\delta_i = \pi_f^{-1}(b_i)$ и выберем точку $x_i \in \text{int } \delta_i$. Поскольку 2-многообразие M^2 связно, а множество $\bigcup_{i=0}^2 \Omega_f^i$ нульмерно, то множество $M_\Omega = M^2 \setminus \bigcup_{i=0}^2 \Omega_f^i$ связно (см., например, теорему о разбивающих множествах

в [20]). Тогда существует гладкий путь $H: [0, 1] \rightarrow M_\Omega$ такой, что $H(0) = x_1$ и $H(1) = x_2$ (см., например, [21]). Можно считать этот путь трансверсальным объединению s -, t -, u -кривых.⁷ Обозначим через $\delta_1 = \beta_1, \dots, \beta_k = \delta_2$ последовательность треугольных областей из множества Δ_f , пронумерованных в порядке пересечения их кривой $H([0, 1])$ при возрастании параметра $t \in [0, 1]$. Треугольные области β_i и β_{i+1} граничат по кривым γ_i . Положим $d_i = \pi_f(\beta_i)$. Из построения графа T_f следует, что последовательность вершин и ребер $d_1, e_1, d_2, \dots, d_{k-1}, e_{k-1}, d_k$ (где вершины b_i и b_{i+1} инцидентны ребру e_i , $i \geq 1$, причем цвет кривой γ_i совпадает с цветом ребра e_i) является путем на графе T_f , соединяющим вершины b_1 и b_2 .

2) Согласно лемме 4.1 каждой седловой точке $\sigma \in \Omega_f^1$ соответствует цикл $C_1 \in \mathcal{C}_1$, в который входят в точности те вершины, которые являются образами треугольных областей под действием отображения π_f , содержащими σ в своем замыкании. Так как число таких областей в точности четыре, следовательно, и длина любого su -цикла равна четырем.

3) В силу следствия 1 автоморфизм P_f является периодическим с периодом m_f .

§ 5. Доказательство теоремы 1

Докажем, что диффеоморфизмы f, f' из класса G топологически сопряжены тогда и только тогда, когда графы $(T_f; P_f), (T_{f'}; P_{f'})$ изоморфны.

Необходимость. Пусть диффеоморфизмы f и f' топологически сопряжены, т.е. существует гомеоморфизм $h: M^2 \rightarrow M'^2$ такой, что $f' = hfh^{-1}$. Докажем, что графы (T_f, P_f) и $(T_{f'}, P_{f'})$ изоморфны.

Не уменьшая общности, будем считать, что множество $\Delta_{f'}$ треугольных областей диффеоморфизма f' построено с помощью множества t -кривых $\mathcal{T}' = h(\mathcal{T})$. Поскольку сопрягающий гомеоморфизм h переводит инвариантные многообразия периодических точек диффеоморфизма f в инвариантные многообразия диффеоморфизма f' с сохранением периода и устойчивости, то он переводит треугольные области диффеоморфизма f в треугольные области диффеоморфизма f' с сохранением периода. Тогда искомый изоморфизм ξ определяется формулой $\xi = \pi_{f'} h \pi_f^{-1}$.

Достаточность. Рассмотрим трехцветные графы $(T_f, P_f), (T_{f'}, P_{f'})$ диффеоморфизмов $f, f' \in G$ соответственно. Пусть существует изоморфизм $\xi: B_f \rightarrow B_{f'}$ такой, что $P_{f'} \xi = \xi P_f$. Построим гомеоморфизм $h: M^2 \rightarrow M'^2$, сопрягающий диффеоморфизмы f и f' .

Шаг 1. Пусть ω – произвольная стоковая точка периода m_ω диффеоморфизма f . Обозначим через F_ω объединение седловых сепаратрис и t -кривых, содержащих ω в своем замыкании, и через $2k_\omega$ их число. Согласно лемме 3.2.1 из [3] существует двумерный диск $D_\omega \subset W_\omega^s$ такой, что $f^{m_\omega}(D_\omega) \subset D_\omega$ и

⁷Множество $H([0, 1])$ является компактным как непрерывный образ компакта. Тогда существует открытая окрестность $U(\Omega_f)$ неблуждающего множества Ω_f , не пересекающаяся с множеством $H([0, 1])$. Обозначим через R объединение s -, t -, u -кривых и положим $\hat{R} = R \cup U(\Omega_f)$. Поскольку множество $\hat{R}$ замкнуто, то согласно теореме о трансверсальности (см., например, [3; теорема 10.3.29]) мы можем аппроксимировать гладкий путь H таким образом, что множество $H([0, 1])$ будет трансверсально множеству $\hat{R}$.

Рис. 10. Окрестность стоковой точки

окружность $S_\omega = \partial D_\omega$ пересекает каждую компоненту связности множества F_ω в точности в одной точке (см. рис. 10). В силу леммы 4.1 $Q_0^{-1}(\omega) = C_\omega$, где C_ω – tu -цикл графа T_f . При этом длина цикла C_ω равна $2k_\omega$, так как число всех треугольных областей, содержащих ω в своем замыкании, равно $2k_\omega$. Поскольку автоморфизм P_f переводит вершины в вершины с сохранением отношения инцидентности и цветности, то двухцветные циклы переходят в двухцветные циклы того же типа. Обозначим через m_{C_ω} наименьшее из натуральных чисел $\mu \in \mathbb{N}$, для которых $P_f^\mu(C_\omega) = C_\omega \neq \emptyset$. Поскольку $P_f = \pi_f f \pi_f^{-1}$, то $m_{C_\omega} = m_\omega$.

Поскольку изоморфизм ξ переводит циклы графа T_f в циклы графа $T_{f'}$ с сохранением инцидентности и цветности, то однозначно определяется сток $\omega' = Q'_0 \xi Q_0^{-1}(\omega)$ периода $m_{\omega'}$. Пусть $F_{\omega'}$ – объединение седловых сепаратрис и t -кривых, содержащих ω' в своем замыкании, и $2k_{\omega'}$ – их число. Обозначим через $D_{\omega'} \subset W_{\omega'}^s$ двумерный диск такой, что $f^{m_{\omega'}}(D_{\omega'}) \subset D_{\omega'}$ и кривая $S_{\omega'} = \partial D_{\omega'}$ пересекает каждую компоненту связности множества $F_{\omega'}$ в точности в одной точке. В силу леммы 4.1 $(Q'_0)^{-1}(\omega') = C_{\omega'}$ и длина цикла $C_{\omega'}$ равна $2k_{\omega'}$. Поскольку изоморфизм ξ переводит вершины цикла C_ω в вершины цикла $C_{\omega'}$ и $\xi P_f = P_{f'} \xi$, то $m_{\omega'} = m_\omega$, $k_{\omega'} = k_\omega$. Покажем, что $\varsigma_\omega = \varsigma_{\omega'}$.

В случае $k_\omega > 1$ параметр ς_ω однозначно определяется перестановкой вершин цикла C_ω под действием $P_f^{m_\omega}$ следующим образом: $\varsigma_\omega = +1$ ($\varsigma_\omega = -1$), если эта перестановка является (не является) циклической. Поскольку $\xi P_f = P_{f'} \xi$, то изоморфизм ξ сохраняет цикличность перестановки, откуда следует, что $\varsigma_\omega = \varsigma_{\omega'}$.

Пусть теперь $k_\omega = 1$. Предположим, что $\varsigma_\omega \neq \varsigma_{\omega'}$. Для определенности положим, что $\varsigma_\omega = -1$ и $\varsigma_{\omega'} = +1$. В силу леммы 3.3 m_f – четное число. При этом вершины b_0, b_1 цикла C_ω удовлетворяют соотношению $P_f^{m_f/2}(b_0) = b_1$. Так как ξ – изоморфизм графов (T_f, P_f) и $(T_{f'}, P_{f'})$, то вершины $b'_0 = \xi(b_0), b'_1 = \xi(b_1)$ цикла $C_{\omega'}$ удовлетворяют соотношению $P_{f'}^{m_{f'}/2}(b'_0) = b'_1$. Отсюда следует, что под действием диффеоморфизма $f'^{m_{f'}/2}$ неустойчивая сепаратриса отображается в t -кривую, что невозможно. Получили противоречие. Это означает, что $\varsigma_\omega = \varsigma_{\omega'}$.

Поскольку изоморфизм ξ переводит вершины цикла C_ω в вершины цикла $C_{\omega'}$ с сохранением инцидентности и цветности, то для любой треугольной области

$\delta \in \Delta_f$ такой, что $\delta \cap S_\omega \neq \emptyset$, дуге $\delta \cap S_\omega$ однозначно соответствует дуга $\delta' \cap S_{\omega'}$, где $\delta' = \pi_{f'}^{-1}(\xi(\pi_f(\delta)))$, а точке $x \in S_\omega$, принадлежащей неустойчивой сепаратрисе или t -кривой, разделяющей треугольные области $\delta_1, \delta_2 \subset W_\omega^s$, соответствует точка $x' \in S_{\omega'}$, принадлежащая неустойчивой сепаратрисе или t -кривой, разделяющей треугольные области $\delta'_1 = \pi_{f'}^{-1}\xi\pi_f(\delta_1)$, $\delta'_2 = \pi_{f'}^{-1}\xi\pi_f(\delta_2)$.

Тогда существует гомеоморфизм $h_\omega: S_\omega \rightarrow S_{\omega'}$ со следующими свойствами:

- 1) для любой треугольной области $\delta \in \Delta_f$ такой, что $\delta \cap S_\omega \neq \emptyset$, выполняется равенство $h_\omega(\delta \cap S_\omega) = \delta' \cap S_{\omega'}$, где $\delta' = \pi_{f'}^{-1}(\xi(\pi_f(\delta)))$;
- 2) $h_\omega((L_\omega \cup \mathcal{T}) \cap S_\omega) = (L_{\omega'} \cup \mathcal{T}') \cap S_{\omega'}$, при этом точка $x \in S_\omega$, принадлежащая неустойчивой сепаратрисе или t -кривой, разделяющей треугольные области $\delta_1, \delta_2 \subset W_\omega^s$, переходит в точку $x' = h_\omega(x) \in S_{\omega'}$, принадлежащую неустойчивой сепаратрисе или t -кривой, разделяющей треугольные области $\delta'_1 = \pi_{f'}^{-1}\xi\pi_f(\delta_1)$, $\delta'_2 = \pi_{f'}^{-1}\xi\pi_f(\delta_2)$.

Положим $\tilde{S}_\omega = f^{m_\omega}(S_\omega)$, $\tilde{S}_{\omega'} = (f')^{m_{\omega'}}(S_{\omega'})$ и $\tilde{h}_\omega = (f')^{m_{\omega'}} h_\omega f^{-m_\omega}: \tilde{S}_\omega \rightarrow \tilde{S}_{\omega'}$. Обозначим через $K_\omega \subset W_\omega^s$ ($K_{\omega'} \subset W_{\omega'}^s$) замкнутое двумерное кольцо, ограниченное замкнутыми кривыми S_ω и $\tilde{S}_\omega$ ($S_{\omega'}$ и $\tilde{S}_{\omega'}$).

Покажем, что $\tilde{h}_\omega(\delta \cap \tilde{S}_\omega) = \delta' \cap \tilde{S}_{\omega'}$. Распишем равенство, стоящее в левой части:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_\omega(\delta \cap \tilde{S}_\omega) &= (f')^{m_{\omega'}} h_\omega f^{-m_\omega}(\delta \cap \tilde{S}_\omega) \\ &= ((f')^{m_{\omega'}} h_\omega f^{-m_\omega}(\delta)) \cap ((f')^{m_{\omega'}} h_\omega f^{-m_\omega}(\tilde{S}_\omega)) \\ &= \delta' \cap ((f')^{m_{\omega'}} h_\omega f^{-m_\omega}(f^{m_\omega}(S_\omega))) \\ &= \delta' \cap ((f')^{m_{\omega'}} h_\omega(S_\omega)) = \delta' \cap ((f')^{m_{\omega'}}(S_{\omega'})) = \delta' \cap \tilde{S}_{\omega'}. \end{aligned}$$

Из приведенных построений и из того, что $\varsigma_\omega = \varsigma_{\omega'}$, следует, что существует гомеоморфизм $\hat{h}_\omega: L_\omega \cap K_\omega \rightarrow L_{\omega'} \cap K_{\omega'}$ такой, что $\hat{h}_\omega|_{S_\omega \cap K_\omega} = h_\omega|_{S_\omega \cap K_\omega}$ и $\hat{h}_\omega|_{\tilde{S}_\omega \cap K_\omega} = \tilde{h}_\omega|_{\tilde{S}_\omega \cap K_\omega}$. Поскольку каждая компонента связности множества $K_\omega \setminus L_\omega$ ($K_{\omega'} \setminus L_{\omega'}$) является двумерным диском, то существует гомеоморфизм $h_{K_\omega}: K_\omega \rightarrow K_{\omega'}$, совпадающий с h_ω на S_ω , с $\tilde{h}_\omega$ на $\tilde{S}_\omega$ и с $\hat{h}_\omega$ на $K_\omega \cap L_\omega$.

Определим гомеоморфизм $h_{W_\omega^s}: W_\omega^s \rightarrow W_{\omega'}^s$ формулой

$$h_{W_\omega^s}(x) = (f')^{-jm_\omega}(h_{K_\omega}(f^{jm_\omega}(x))),$$

где $f^{jm_\omega}(x) \in K_\omega$ для $x \in (W_\omega^s \setminus \omega)$ и $h_{W_\omega^s}(\omega) = \omega'$. Положим $h_{W_{\omega'}^s}(x) = (f')^{-j}(h_{W_\omega^s}(f^j(x)))$, где $f^j(x) \in W_\omega^s$ для $x \in (W_{\omega'}^s \setminus \omega')$ и $j \in \{0, \dots, m_\omega - 1\}$. Из каждой стоковой орбиты выберем произвольную стоковую точку ω и произведем аналогичные построения; обозначим через $\varphi: W_{\Omega_f^0}^s \rightarrow W_{\Omega_{f'}^0}^s$ совокупность построенных гомеоморфизмов.

Шаг 2. Поскольку каждой седловой точке σ (σ') диффеоморфизма f (f') соответствует su -цикл C_σ ($C_{\sigma'}$) на графе T_f ($T_{f'}$), то любой точке $\sigma \in \Omega_f^1$ однозначно соответствует точка $\sigma' = Q_1'(\xi(Q_1^{-1}(\sigma))) \in \Omega_{f'}^1$. Поскольку $\xi(C_\sigma) = C_{\sigma'}$ и $\xi P_f = P_{f'} \xi$, то $m_{\sigma'} = m_\sigma$ и $\varsigma_{\sigma'} = \varsigma_\sigma$.

Гомеоморфизм φ , построенный в шаге 1, обладает свойством $\varphi(W_\sigma^u) = W_{\sigma'}^u$. Таким образом, гомеоморфизм φ продолжается на множество Ω_f^1 формулой $\varphi(\sigma) = \sigma'$ и сопрягает диффеоморфизмы $f|_{W_{\Omega_f^0}^s \cup \Omega_f^1}$ и $f'|_{W_{\Omega_{f'}^0}^s \cup \Omega_{f'}^1}$. В этом шаге мы модифицируем его так, чтобы он продолжался на множество $W_{\Omega_f^1}^s$.

Пусть $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_s$ – седловые орбиты диффеоморфизма f . Выберем по одной точке в каждой орбите: $\sigma_i \in \mathcal{O}_i$, $i = 1, \dots, s$, и положим $\sigma'_i = \varphi(\sigma_i)$. Из утверждения 4 следует существование линеаризующей окрестности N_{σ_i} ($N_{\sigma'_i}$) для точки σ_i (σ'_i) с отображением μ_{σ_i} ($\mu_{\sigma'_i}$), сопрягающим ограничение диффеоморфизма $f^{m_{\sigma_i}}$ ($f^{m_{\sigma'_i}}$) на множество N_{σ_i} ($N_{\sigma'_i}$) с диффеоморфизмом $a_{\varsigma_{\sigma_i}}|_{\mathcal{N}}$ ($a_{\varsigma_{\sigma'_i}}|_{\mathcal{N}}$), т.е. $\mu_{\sigma_i} f^{m_{\sigma_i}} = a_{\varsigma_{\sigma_i}} \mu_{\sigma_i}$ ($\mu_{\sigma'_i} f^{m_{\sigma'_i}} = a_{\varsigma_{\sigma'_i}} \mu_{\sigma'_i}$). Для $t \in (0, 1]$ положим $\mathcal{N}^{ut} = \mathcal{N}^t \setminus O_{x_1}$. Выберем значение $t_1^i \in (0, 1]$ так, что $\varphi(\mu_{\sigma_i}^{-1}(\mathcal{N}^{ut_1^i})) \subset N_{\sigma'_i}$. Поскольку $m_{\sigma_i} = m_{\sigma'_i}$ и $\varsigma_{\sigma_i} = \varsigma_{\sigma'_i}$, то отображение $\tilde{\varphi}_{\sigma_i} = \mu_{\sigma'_i} \varphi \mu_{\sigma_i}^{-1}|_{\mathcal{N}^{ut_1^i}} : \mathcal{N}^{ut_1^i} \rightarrow \mathcal{N}^u$ является топологическим вложением, коммутирующим с диффеоморфизмом $a_{\varsigma_{\sigma_i}}$, т.е. $a_{\varsigma_{\sigma_i}} \tilde{\varphi}_{\sigma_i} = \tilde{\varphi}_{\sigma_i} a_{\varsigma_{\sigma_i}}$.

Для $\kappa \in \{-1, +1\}$ определим топологическое вложение $\tilde{\psi}_{\sigma_i, \kappa} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ формулой $\tilde{\psi}_{\sigma_i, \kappa}(x_1, x_2) = (\tilde{\varphi}_{\sigma_i}(x_1), \kappa \cdot x_2)$. Выберем значение $t_2^i \in (0, 1)$ так, чтобы выполнялось включение $\tilde{\psi}_{\sigma_i, \kappa}(\mathcal{N}^{ut_2^i}) \subset \tilde{\varphi}_{\sigma}(\mathcal{N}^{ut_1^i})$. Поскольку отображение $\tilde{\varphi}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\psi}_{\sigma_i, \kappa}|_{O_{x_1} \setminus O} : O_{x_1} \setminus O \rightarrow O_{x_1} \setminus O$ является тождественным, то существует $\kappa_* \in \{-1, +1\}$ такое, что топологическое вложение $\tilde{\varphi}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\psi}_{\sigma_i, \kappa_*}|_{\mathcal{N}^{ut_2^i}} : \mathcal{N}^{ut_2^i} \rightarrow \mathcal{N}^u$ сохраняет ориентацию. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\sigma_i} &= \tilde{\psi}_{\sigma_i, \kappa_*}, & \tilde{\theta}_{\sigma_i} &= \tilde{\varphi}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\psi}_{\sigma_i}|_{\mathcal{N}^{ut_2^i}} : \mathcal{N}^{ut_2^i} \rightarrow \mathcal{N}^u, \\ \hat{\theta}_{\sigma_i} &= p_{\hat{\mathcal{N}}_{\varsigma_{\sigma_i}}^u} \tilde{\theta}_{\sigma_i} (p_{\hat{\mathcal{N}}_{\varsigma_{\sigma_i}}^u}|_{\mathcal{N}^{ut_2^i}})^{-1} : \hat{\mathcal{N}}_{\varsigma_{\sigma_i}}^{ut_2^i} \rightarrow \hat{\mathcal{N}}_{\varsigma_{\sigma_i}}^u, \\ K_{\sigma_i} &= \hat{\mathcal{N}}_{\varsigma_{\sigma_i}}^u \setminus \text{int } \hat{\mathcal{N}}_{\varsigma_{\sigma_i}}^{ut_2^i}, & Q_{\sigma_i} &= \hat{\mathcal{N}}_{\varsigma_{\sigma_i}}^u \setminus \text{int } \hat{\theta}_{\sigma_i}(\hat{\mathcal{N}}_{\varsigma_{\sigma_i}}^{ut_2^i}). \end{aligned}$$

В силу утверждения 5 каждая компонента связности множеств K_{σ_i} и Q_{σ_i} является кольцом. Следовательно, существует гомеоморфизм $\hat{\Theta}_{\sigma_i} : \hat{\mathcal{N}}_{\varsigma_{\sigma_i}}^u \rightarrow \hat{\mathcal{N}}_{\varsigma_{\sigma_i}}^u$, совпадающий с $\hat{\theta}_{\sigma_i}$ на $\hat{\mathcal{N}}_{\varsigma_{\sigma_i}}^{ut_2^i}$ и тождественный на $\partial \hat{\mathcal{N}}_{\varsigma_{\sigma_i}}^u$.

Обозначим через $\tilde{\Theta}_{\sigma_i} : \mathcal{N}^u \rightarrow \mathcal{N}^u$ поднятие гомеоморфизма $\hat{\Theta}_{\sigma_i}$, являющегося тождественным отображением на $\partial \mathcal{N}$.

Определим гомеоморфизм $\Theta_{\sigma_i} : N_{\sigma_i} \rightarrow \varphi(N_{\sigma_i})$ формулой

$$\Theta_{\sigma_i}(x) = \begin{cases} \varphi(\mu_{\sigma_i}^{-1}(\tilde{\Theta}_{\sigma_i}(\mu_{\sigma_i}(x)))), & x \in \mu_{\sigma_i}^{-1}(\mathcal{N}^u), \\ \mu_{\sigma'_i}^{-1}(\tilde{\psi}_{\sigma_i}(\mu_{\sigma_i}(x))), & x \in W_{\sigma_i}^s. \end{cases}$$

Определим гомеоморфизм $\Theta_{\mathcal{O}_{\sigma_i}} : N_{\mathcal{O}_{\sigma_i}} \rightarrow \varphi(N_{\mathcal{O}_{\sigma_i}})$ формулой

$$\Theta_{\mathcal{O}_{\sigma_i}}(x) = f'^j(\Theta_{\sigma_i}(f^{-j}(x))),$$

где $j \in \mathbb{Z}$ выбрано так, что $f^{-j}(x) \in N_{\sigma_i}$. Положим $N_f = \bigcup_{i=1}^s N_{\mathcal{O}_i}$ и обозначим через $\Theta : N_f \rightarrow \varphi(N_f)$ гомеоморфизм, составленный из гомеоморфизмов $\Theta_{\mathcal{O}_1}, \dots, \Theta_{\mathcal{O}_s}$.

Шаг 3. Определим гомеоморфизм $h : M^2 \setminus \Omega_f^2 \rightarrow M^2 \setminus \Omega_f^2$ формулой

$$h(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in M^2 \setminus (N_f \cup \Omega_f^2), \\ \Theta(x), & x \in N_f, \end{cases}$$

и продолжим его по непрерывности на множество Ω_f^2 , поставив в соответствие точке $\alpha \in \Omega_f^2$ точку $\alpha' \in \Omega_{f'}^2$, такую, что $h(W_\alpha^u \setminus (\alpha)) = W_{\alpha'}^u \setminus \alpha'$. Тогда h – искомый гомеоморфизм.

Таким образом, достаточность доказана.

§ 6. Реализация

Идейно этот параграф содержит модификацию метода реализации градиентно-подобных потоков, предложенного в статье [7], с учетом специфики дискретных динамических систем, которые, вообще говоря, не являются сдвигом на единицу времени некоторого потока (см., например, [22], [23]).

Пусть (T, P) – допустимый трехцветный граф. Разобьем доказательство теоремы 2 на три шага, которые составят доказательства предположений 3, 5, 6.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Существует диффеоморфизм $f: M^2 \rightarrow M^2$ из класса G , граф (T_f, P_f) которого изоморфен графу (T, P) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ векторное поле

$$v = (\sin(\pi x), \sin(\pi y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Непосредственно проверяется, что неблуждающее множество потока, определенного векторным полем v , совпадает с множеством точек целочисленной решетки плоскости (x, y) , причем точки с двумя четными (нечетными) координатами являются источниками (стоками) потока, а точки с координатами разной четности – седловыми состояниями потока. Объединение замыкания седловых сепаратрис образует семейство целочисленных горизонтальных и вертикальных прямых. Диагонали соответствующих квадратов, соединяющие вершину с четными координатами с вершиной с нечетными координатами, являются инвариантными относительно построенного потока.

Обозначим через d треугольник $\triangle OBC$ с вершинами $O(0, 0)$, $C(1, 0)$, $B(1, 1)$ и будем называть его стороны OC , OB , BC соответственно s -, t -, u -сторонами $\triangle OBC$ (см. рис. 11). Обозначим через $g: d \rightarrow d$ диффеоморфизм, являющийся сдвигом на единицу времени потока, определяемого на треугольнике d векторным полем v .

Обозначим через n число вершин допустимого трехцветного графа (T, P) . Положим $D = d \times \mathbb{Z}_n$, где $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$, и обозначим через $p_d: D \rightarrow d$ проекцию на первую координату, т.е. $p_d(d, i) = d$. Множество B вершин графа T пронумеруем следующим образом: $b_0, \dots, b_{n-1}$. Введем на множестве D минимальное отношение эквивалентности $\sim$, удовлетворяющее следующему правилу: если вершины b_i, b_j графа T соединены s -, t - или u -ребром, то $(\rho, i) \sim (\rho, j)$ для любой точки ρ , лежащей на s -, t - или u -стороне треугольника d соответственно. Из свойств допустимого графа следует, что факторпространство $M^2 = D/\sim$ является замкнутым топологическим 2-многообразием. Обозначим через $q: D \rightarrow M^2$ естественную проекцию.

Автоморфизм P индуцирует на множестве D отображение $\Pi: D \rightarrow D$, переводящее точку (ρ, i) , $\rho \in d$, $i \in \mathbb{Z}_n$, в точку (ρ, j) , где $j \in \mathbb{Z}_n$ выбирается таким

Рис. 11. Траектории потока, порожденного векторным полем v

образом, что $b_j = P(b_i)$. Поскольку изоморфизм P сохраняет отношение инцидентности и цветности, то на топологическом пространстве M^2 корректно определен гомеоморфизм $f: M^2 \rightarrow M^2$ формулой $f(z) = q(g(\Pi(q^{-1}(z))))$, $z \in M^2$. Определим на M^2 гладкую структуру, относительно которой отображение f является диффеоморфизмом.

Покроем многообразие M^2 конечным числом карт (U_z, ψ_z) , $z \in M^2$, где $U_z \subset M^2$ – открытая окрестность точки z и $\psi: U_z \rightarrow \mathbb{R}^2$ – гомеоморфизм на образ, следующих трех типов (см. рис. 11 для наглядности).

1. Для точки $z = q(C, i_1)$, $i_1 \in \mathbb{Z}_n$, существуют еще три треугольника $d \times \{i_2\}$, $d \times \{i_3\}$, $d \times \{i_4\}$, $i_2, i_3, i_4 \in \mathbb{Z}_n$, таких, что $(\rho, i_{2k-1}) \sim (\rho, i_{2k})$ для любой точки $\rho \in OC$ и $(\rho, i_{2k}) \sim (\rho, i_{2k+1})$ для любой точки $\rho \in BC$, где $k = 1, 2$ и $i_5 = i_1$. Положим

$$U_z = \text{int } q(d \times \{i_1, i_2, i_3, i_4\}), \quad \psi_z(w) = p_d((q|_{d \times \{i_1\}})^{-1}(w)) \quad \text{для } w \in q(d \times \{i_1\});$$

$$\psi_z(w) = M_{OC}(p_d((q|_{d \times \{i_2\}})^{-1}(w))) \quad \text{для } w \in q(d \times \{i_2\}),$$

$$\text{где } M_{OC}(x, y) = (x, -y) \quad \text{для } (x, y) \in \mathbb{R}^2;$$

$$\psi_z(w) = M_C(p_d((q|_{d \times \{i_3\}})^{-1}(w))) \quad \text{для } w \in q(d \times \{i_3\}),$$

$$\text{где } M_C(x, y) = (2 - x, -y) \quad \text{для } (x, y) \in \mathbb{R}^2;$$

$$\psi_z(w) = M_{BC}(p_d((q|_{d \times \{i_4\}})^{-1}(w))) \quad \text{для } w \in q(d \times \{i_4\}),$$

$$\text{где } M_{BC}(x, y) = (2 - x, y) \quad \text{для } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Для точки $z = q(O, i_1)$, $i_1 \in \mathbb{Z}_n$, существует еще $2m - 1$ треугольник $d \times \{i_2\}, \dots, d \times \{i_{2m}\}$, $i_2, \dots, i_{2m} \in \mathbb{Z}_n$, такие, что $(\rho, i_{2k-1}) \sim (\rho, i_{2k})$ для любой точки $\rho \in OB$ и $(\rho, i_{2k}) \sim (\rho, i_{2k+1})$ для любой точки $\rho \in OC$, где $k = 1, \dots, m$ и $i_{2m+1} = i_1$. Положим

$$U_z = \text{int } q(d \times \{i_1, \dots, i_{2m}\}), \quad \psi_z(w) = \nu_k(p_d((q|_{d \times \{i_{2k-1}\}})^{-1}(w)))$$

$$\text{для } w \in q(d \times \{i_{2k-1}\});$$

$$\begin{aligned} \psi_z(w) &= \nu_k(M_{OB}(p_d((q|_{d \times \{i_{2k}\}})^{-1}(w)))) \quad \text{для } w \in q(d \times \{i_{2k}\}), \\ \text{где } \nu_k(r \cos \varphi, r \sin \varphi) &= \left(r \cos \left(\frac{4\varphi + 2\pi(k-1)}{m} \right), r \sin \left(\frac{4\varphi + 2\pi(k-1)}{m} \right) \right) \\ &\quad \text{для } (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2 \\ \text{и } M_{OB}(x, y) &= (y, x) \quad \text{для } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

3. Для точки $z = q(B, i_1)$, $i_1 \in \mathbb{Z}_n$, существует еще $2l - 1$ треугольник $d \times \{i_2\}, \dots, d \times \{i_{2l}\}$, $i_2, \dots, i_{2l} \in \mathbb{Z}_n$, такие, что $(\rho, i_{2j-1}) \sim (\rho, i_{2j})$ для любой точки $\rho \in OB$ и $(\rho, i_{2j}) \sim (\rho, i_{2j+1})$ для любой точки $\rho \in OC$, где $j = 1, \dots, l$ и $i_{2l+1} = i_1$. Положим

$$\begin{aligned} U_z &= \text{int } q(d \times \{i_1, \dots, i_{2l}\}), \quad \psi_z(w) = \mu_j(p_d((q|_{d \times \{i_{2j-1}\}})^{-1}(w))) \\ &\quad \text{для } w \in q(d \times \{i_{2j-1}\}); \\ \psi_z(w) &= \mu_j(M_{OB}(p_d((q|_{d \times \{i_{2j}\}})^{-1}(w)))) \quad \text{для } w \in q(d \times \{i_{2j}\}), \\ \text{где } \mu_j((r-1) \cos \varphi, (r-1) \sin \varphi) &= \left((r-1) \cos \left(\frac{4(\varphi + \pi/2) - 2\pi(j-1)}{l} \right), \right. \\ &\quad \left. (r-1) \sin \left(\frac{4(\varphi + \pi/2) - 2\pi(j-1)}{l} \right) \right) \\ &\quad \text{для } ((r-1) \cos \varphi, (r-1) \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Покажем, что введенные карты задают гладкую структуру на M^2 . Для этого проверим гладкость отображений перехода для карт разных типов, так как различные карты одного типа не пересекаются между собой.

1.2. Если (U_{z_1}, ψ_{z_1}) и (U_{z_2}, ψ_{z_2}) – карты первого и второго типов соответственно такие, что $U_{z_1} \cap U_{z_2} \neq \emptyset$, то отображение

$$\phi_{1,2} = \psi_{z_2} \psi_{z_1}^{-1}: \psi_{z_1}(U_{z_1} \cap U_{z_2}) \rightarrow \psi_{z_2}(U_{z_1} \cap U_{z_2})$$

имеет следующий вид для $k \in \{1, \dots, m\}$:

$$\begin{aligned} \phi_{1,2}(x, y) &= \nu_k(x, y) \text{ или } \phi_{1,2}(x, y) = \nu_k(y, x) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \triangle OBC; \\ \phi_{1,2}(x, y) &= \nu_k(x, -y) \text{ или } \phi_{1,2}(x, y) = \nu_k(-y, x) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \triangle OB_1C; \\ \phi_{1,2}(x, y) &= \nu_k(2 - x, -y) \text{ или } \phi_{1,2}(x, y) = \nu_k(-y, 2 - x) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \triangle O_1B_1C; \\ \phi_{1,2}(x, y) &= \nu_k(2 - x, y) \text{ или } \phi_{1,2}(x, y) = \nu_k(y, 2 - x) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \triangle O_1BC. \end{aligned}$$

1.3. Если (U_{z_1}, ψ_{z_1}) и (U_{z_3}, ψ_{z_3}) – карты первого и третьего типов соответственно такие, что $U_{z_1} \cap U_{z_3} \neq \emptyset$, то отображение

$$\phi_{1,3} = \psi_{z_3} \psi_{z_1}^{-1}: \psi_{z_1}(U_{z_1} \cap U_{z_3}) \rightarrow \psi_{z_3}(U_{z_1} \cap U_{z_3})$$

имеет следующий вид для $j \in \{1, \dots, l\}$:

$$\begin{aligned} \phi_{1,3}(x, y) &= \mu_j(x, y) \text{ или } \phi_{1,3}(x, y) = \mu_j(y, x) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \triangle OBC; \\ \phi_{1,3}(x, y) &= \mu_j(x, -y) \text{ или } \phi_{1,3}(x, y) = \mu_j(-y, x) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \triangle OB_1C; \\ \phi_{1,3}(x, y) &= \mu_j(2 - x, -y) \text{ или } \phi_{1,3}(x, y) = \mu_j(-y, 2 - x) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \triangle O_1B_1C; \\ \phi_{1,3}(x, y) &= \mu_j(2 - x, y) \text{ или } \phi_{1,3}(x, y) = \mu_j(y, 2 - x) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \triangle O_1BC. \end{aligned}$$

2.3. Если (U_{z_2}, ψ_{z_2}) и (U_{z_3}, ψ_{z_3}) – карты второго и третьего типов соответственно такие, что $U_{z_2} \cap U_{z_3} \neq \emptyset$, то отображение

$$\phi_{2,3} = \psi_{z_3} \psi_{z_2}^{-1} : \psi_{z_2}(U_{z_2} \cap U_{z_3}) \rightarrow \psi_{z_3}(U_{z_2} \cap U_{z_3})$$

имеет следующий вид для $k \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, l\}$:

$$\phi_{2,3}(x, y) = \mu_j(\nu_k^{-1}(x, y)) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \nu_k(d).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть a_f^0, a_f^1, a_f^2 – число стоковых, седловых, источников точек диффеоморфизма $f \in G$, заданного на ориентируемой (неориентируемой) поверхности рода g (q). Тогда

$$a_f^0 - a_f^1 + a_f^2 = 2 - 2g \quad (a_f^0 - a_f^1 + a_f^2 = 2 - q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что эйлерова характеристика для ориентируемой поверхности выражается формулой $\chi(X) = 2 - 2g$, где g – число ручек, а для неориентируемой поверхности формула выглядит следующим образом: $\chi = 2 - q$, где q – число пленок Мёбиуса (см., например, [3]). С другой стороны, в силу [24] многообразие M^2 является двумерным клеточным комплексом $M^2 = \bigcup_{p \in \Omega_f} W_p^u$ с числом a_f^0, a_f^1, a_f^2 нульмерных, одномерных, двумерных клеток соответственно. Тогда эйлерова характеристика данного комплекса вычисляется по формуле $\chi(M^2) = \sum_{q=0}^2 (-1)^q c_q$, где c_q – число его q -мерных клеток (см., например, [25; теорема 9]). Отсюда $\chi(M^2) = a_f^0 - a_f^1 + a_f^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Эйлерова характеристика поверхности M^2 , построенной по допустимому графу (T, P) в предложении 3, вычисляется по формуле $\chi(M^2) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2$, где ν_0, ν_1, ν_2 – число всех tu -, su -, st -циклов графа T соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.1 $\nu_i = a_f^i$ для $i = 0, 1, 2$. Тогда с учетом предложения 4 $\chi(M^2) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2$.

Введем понятие согласованной ориентации треугольных областей многообразия M^2 , сконструированного в доказательстве предложения 3. Для этого обозначим через Δ множество треугольных областей в M^2 и через $\pi: \Delta \rightarrow B$ взаимно однозначное соответствие между треугольными областями и вершинами графа T . Ориентируем каждую его треугольную область из Δ , выбрав один из двух возможных порядков обхода ее вершин: если при обходе вершин треугольная область остается слева, то припишем области метку $+1$; если при обходе вершин треугольная область остается справа, то припишем области метку -1 . Ориентацию треугольных областей из множества Δ будем называть *согласованной*, если двум смежным треугольным областям приписаны различные метки, т.е. направление обхода на общей границе совпадает. Таким образом, существует отображение $\theta: \Delta \rightarrow \{+1, -1\}$ такое, что

$$\theta(\delta_1) \cdot \theta(\delta_2) = -1 \quad (*)$$

для различных треугольных областей $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$, границы которых имеют непустое пересечение.

Согласно [25], [21] триангулированная поверхность M^2 называется *ориентируемой*, если все треугольные области на ней можно согласованно ориентировать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Поверхность M^2 , построенная по допустимому графу (T, P) в предложении 3, ориентируема тогда и только тогда, когда в графе T все циклы имеют четную длину.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть поверхность M^2 ориентируема. Тогда существует согласованная ориентация $\theta: \Delta \rightarrow \{+1, -1\}$ со свойством (*). Покажем, что в графе T все циклы имеют четную длину.

Предположим противное: существует цикл

$$C = \{b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_0)\}$$

нечетной длины k . Положим $\delta_i = \pi^{-1}(b_i)$, $i = 0, \dots, k-1$. Тогда из условия (*) следует, что $\theta(\delta_i) \cdot \theta(\delta_{i+1}) = -1$ ($\delta_k = \delta_0$). Отсюда

$$\theta(\delta_0) = -\theta(\delta_1) = -(-\theta(\delta_2)) = \dots = (-1)^{k-1}\theta(\delta_{k-1}) = (-1)^k\theta(\delta_k).$$

Таким образом, $\theta(\delta_0) = -\theta(\delta_0)$, что невозможно. Получили противоречие.

Достаточность. Предположим, что все циклы графа T имеют четную длину. Введем согласованную ориентацию θ треугольных областей следующим образом. Пусть $\delta_0 \in \Delta$ – произвольная треугольная область. Положим $\theta(\delta_0) = +1$ и $b_0 = \pi(\delta_0)$. Для любой области $\delta \in \Delta$ положим $b = \pi(\delta)$. Поскольку граф T связан, то в нем существует путь

$$b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b).$$

Положим $\theta(\delta) = (-1)^k$. Поскольку все циклы графа T имеют четную длину, то длины всех путей, соединяющих вершины b_0 и b , имеют одинаковую четность. Следовательно, отображение θ корректно определено.

Список литературы

- [1] S. Smale, “Morse inequalities for a dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49.
- [2] А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, “Грубые системы”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 247–250.
- [3] В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, РХД, Ижевск, 2011, 424 с.
- [4] В. З. Гринес, О. В. Починка, “Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях”, *УМН*, **68**:1(409) (2013), 129–188; англ. пер.: V. Z. Grines, O. V. Pochinka, “Morse–Smale cascades on 3-manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **68**:1 (2013), 117–173.
- [5] Е. Леонтович, А. Майер, “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Докл. АН СССР*, **103**:4 (1955), 557–560.
- [6] М. М. Peixoto, “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems*, Proc. Sympos. (Univ. Bahia, Salvador, 1971), Academic Press, New York, 1973, 389–419.
- [7] А. А. Ошемков, В. В. Шарко, “О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93–140; англ. пер.: A. A. Oshemkov, V. V. Sharko, “Classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds”, *Sb. Math.*, **189**:8 (1998), 1205–1250.

- [8] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, “Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. I”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений*, Горьк. гос. ун-т, Горький, 1984, 22–38; англ. пер.: A. N. Bezdenzhnykh, V. Z. Grines, “Dynamical properties and topological classification of gradient-like diffeomorphisms on two-dimensional manifolds. I”, *Selecta Math. Soviet*, **11**:1 (1992), 1–11.
- [9] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, “Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. II”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений*, Горьк. гос. ун-т, Горький, 1987, 24–32; англ. пер.: A. N. Bezdenzhnykh, V. Z. Grines, “Dynamical properties and topological classification of gradient-like diffeomorphisms on two-dimensional manifolds. II”, *Selecta Math. Soviet*, **11**:1 (1992), 13–17.
- [10] В. З. Гринес, “Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях”, *Матем. заметки*, **54**:3 (1993), 3–17; англ. пер.: V. Z. Grines, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic trajectories on surfaces”, *Math. Notes*, **54**:3 (1993), 881–889.
- [11] R. Langevin, “Quelques nouveaux invariants des difféomorphismes Morse–Smale d’une surface”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **43**:1 (1993), 265–278.
- [12] Т. М. Митрякова, О. В. Починка, “К вопросу о классификации диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей топологической сопряженности”, *Нелинейная динам.*, **6**:1 (2010), 91–105.
- [13] C. Bonatti, R. Langevin, *Difféomorphismes de Smale des surfaces*, Astérisque, **250**, Soc. Math. France, Paris, 1998, viii+235 pp.
- [14] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, “Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий”, *Дифференциальные и интегральные уравнения*, Сб. науч. тр. под ред. Н. Ф. Отрокова, Горьк. гос. ун-т, Горький, 1985, 33–37; англ. пер.: A. N. Bezdenzhnykh, V. Z. Grines, “Realization of gradient-like diffeomorphisms of two-dimensional manifolds”, *Selecta Math. Soviet*, **11**:1 (1992), 19–23.
- [15] Т. М. Митрякова, О. В. Починка, “Реализация каскадов с конечным числом модулей топологической сопряженности на поверхностях”, *Матем. заметки*, **93**:6 (2013), 902–919; англ. пер.: T. M. Mitryakova, O. V. Pochinka, “Realization of cascades on surfaces with finitely many moduli of topological conjugacy”, *Math. Notes*, **93**:6 (2013), 890–905.
- [16] А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, М., 1966, 568 с.; англ. пер.: A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, A. G. Maier, *Qualitative theory of second-order dynamic systems*, Halsted Press (A division of John Wiley & Sons), New York–Toronto, Ont.; Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem–London, 1973, xxiii+524 pp.
- [17] Ж. Палис, В. Ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем. Введение*, Мир, М., 1986, 302 с.; пер. с англ.: J. Palis, Jr., W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982, xii+198 pp.
- [18] D. Rolfsen, *Knots and links*, Corrected reprint of the 1976 original, Math. Lecture Ser., **7**, Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990, xiv+439 pp.
- [19] D. P. Demuner, M. Federson, C. Gutierrez, “The Poincaré–Bendixson theorem on the Klein bottle for continuous vector fields”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **25**:2 (2009), 495–509.
- [20] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1948, vii+165 pp.

- [21] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия*, Наука, М., 1987, 480 с.; англ. пер.: M. Postnikov, *Smooth manifolds, Lectures in geometry. Semester III*, Mir, Moscow, 1989, 511 pp.
- [22] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка, “О включении в поток диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей двух”, *Матем. заметки*, **91**:5 (2012), 791–794; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, V. S. Medvedev, O. V. Pochinka, “Embedding in a flow of Morse–Smale diffeomorphisms on manifolds of dimension higher than two”, *Math. Notes*, **91**:5 (2012), 742–745.
- [23] J. Palis, “On Morse–Smale dynamical systems”, *Topology*, **8**:4 (1969), 385–404.
- [24] С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, *УМН*, **25**:1(151) (1970), 113–185; пер. с англ.: S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817.
- [25] Л. С. Понтрягин, *Основы комбинаторной топологии*, Гостехиздат, М.–Л., 1947, 143 с.; англ. пер.: L. S. Pontryagin, *Foundations of combinatorial topology*, Graylock Press, Rochester, N. Y., 1952, xii+99 pp.

Вячеслав Зигмундович Гринес
(Vyacheslav Z. Grines)

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: vgrines@yandex.ru

Поступила в редакцию
15.01.2014

Светлана Халиловна Капкаева
(Svetlana Kh. Kapkaeva)

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет
им. Н. П. Огарева, г. Саранск
E-mail: kapkaevasvetlana@yandex.ru

Ольга Витальевна Починка
(Olga V. Pochinka)

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru