Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Болотов, Топология слоений коразмерности 1 неотрицательной кривизны. II, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 10, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8329>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:34:45

УДК 515.168

Д. В. Болотов

Топология слоений коразмерности 1 неотрицательной кривизны. II

В работе доказывается, что 3-связное¹ замкнутое многообразие M размерности $n \geq 5$ не допускает C^2 -слоения коразмерности 1 неотрицательной кривизны. В частности, дается исчерпывающий ответ на вопрос, поставленный Г. Штакком, о возможности существования слоений коразмерности 1 неотрицательной кривизны на сферах. Также мы показываем, что C^2 -слоение коразмерности 1 неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом многообразии M , слои которого имеют конечно порожденную фундаментальную группу, является плоским тогда и только тогда, когда M является $K(\pi, 1)$ -многообразием.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: слоение, римановы многообразия, кривизна.

DOI: 10.4213/sm8329

§ 1. Введение

Настоящая работа является естественным продолжением работы [1], где можно найти все необходимые определения и которую мы рекомендуем иметь рядом при прочтении нашей статьи. Напомним, что слоение $\mathcal{F}$ называется *слоением неотрицательной кривизны* (или *неотрицательной кривизны Риччи*) на римановом многообразии M , если все слои $\mathcal{F}$ в индуцируемой метрике имеют неотрицательную секционную кривизну (или неотрицательную кривизну Риччи). Слоение назовем *плоским*, если все слои в индуцированной метрике являются плоскими.

В первой части работы мы докажем слоеный аналог теоремы Чигера–Гро-молла (см. [2]), которая утверждает, что замкнутое $K(\pi, 1)$ -многообразие неотрицательной кривизны Риччи является плоским. А именно мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – замкнутое риманово многообразие с заданным C^2 -слоением $\mathcal{F}$ коразмерности 1 неотрицательной кривизны Риччи. Предположим, что все слои имеют конечно порожденную фундаментальную группу. Тогда

- 1) $\pi_1(M)$ – почти полициклическая группа,
- 2) $\mathcal{F}$ плоское тогда и только тогда, когда M является $K(\pi, 1)$ -многообразием.

¹Напомним, что топологическое пространство X называется n -связным, если $\pi_i(X) = 0$ для $i \leq n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. До сих пор неизвестно, существует ли полное риманово многообразие неотрицательной кривизны Риччи с бесконечно порожденной фундаментальной группой.

Вторая часть работы посвящена доказательству следующей теоремы, которая полностью отвечает на вопрос, поставленный Г. Штакером в [3].

ТЕОРЕМА 2. 3-связное многообразие M размерности $n \geq 5$, в частности многообразие, гомеоморфное S^n , не допускает C^2 -слоения коразмерности 1 неотрицательной кривизны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Случай $n = 5$, доказательство которого существенно использовало специфику данной размерности, был рассмотрен в [1]. Заметим, что 3-связность в пятимерном случае означает, что многообразие является гомотопической сферой (это следует из двойственности Пуанкаре и теоремы Гуревича), а значит, гомеоморфна сфере по известной теореме Смейла. В нашей работе мы приведем более короткое и элегантное доказательство общего случая.

§ 2. Предварительные сведения

В [1] нами была описана топологическая структура замкнутых многообразий, допускающих слоения коразмерности 1 неотрицательной кривизны Риччи. В частности, мы показали, что слоение неотрицательной кривизны Риччи является слоением почти без голономии и имеет место одна из следующих возможностей.

1. Слоение не имеет компактных слоев. В этом случае все слои всюду плотны и диффеоморфны некоторому открытому многообразию L , которое мы назовем типичным слоем, а многообразие является расслоением над окружностью. В этом случае имеет место групповое расширение

$$1 \rightarrow \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}^k \rightarrow 0. \quad (1)$$

2. Многообразие можно разбить на конечное число блоков², где слоение выглядит достаточно просто. А именно либо блок гомеоморфен прямому произведению $K \times I$ компактного слоя и отрезка, либо внутри блока все слои диффеоморфны некоторому типичному некомпактному слою L . В последнем случае фундаментальная группа блока B является групповым расширением:

$$1 \rightarrow \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(B) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^k \rightarrow 0. \quad (2)$$

При этом $k \geq 1$, и если $k = 1$, то $\text{int } B$ является расслоением над окружностью со слоем L . В этом случае блок называется *собственным* блоком. Если же $k \geq 2$, то все внутренние слои всюду плотны в B и блок называется *плотным*. Для любого k имеет место гомеоморфизм

$$\widetilde{\text{int } B} \simeq \widetilde{L} \times \mathbb{R}. \quad (3)$$

²Блоком мы называем компактное подмногообразие с границей, состоящей из слоев.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится понятие асимптотической размерности $\text{asdim } X$ метрического пространства X , введенное М. Громовым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Асимптотическая размерность $\text{asdim } X = n$, если для любого равномерно ограниченного открытого покрытия $\mathcal{V}$ существует равномерно ограниченное покрытие $\mathcal{U}$ кратности $n + 1$ такое, что $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ и не существует такого покрытия меньшей кратности.

Напомним некоторые свойства асимптотической размерности дискретных групп с метрикой слов (см. [4]):

- 1) $\text{asdim } \pi_1(M) \geq \dim M$, если M является $K(\pi, 1)$ -многообразием;
- 2) $\text{asdim } H \leq \text{asdim } G$ для любой подгруппы $H \subset G$;
- 3) $\text{asdim } H = \text{asdim } G$ для любой подгруппы $H \subset G$ конечного индекса;
- 4) $\text{asdim } G \leq \text{asdim } \text{Ker } f + \text{asdim } \text{Im } f$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Группа G называется *полициклической*, если она содержит субнормальную серию

$$1 = G_n \subset G_{n-1} \subset \dots \subset G_0 = G \quad (*)$$

такую, что каждая группа G_i/G_{i+1} является циклической.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Группа G называется *почти полициклической*, если в ней имеется полициклическая группа конечного индекса. Известно (Хирш), что это эквивалентно существованию субнормальной серии $(*)$, для которой каждая факторгруппа G_i/G_{i+1} является или циклической, или конечной группой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Числом Хирша $h(G)$ почти полициклической группы G называется число бесконечных циклических факторов G_i/G_{i+1} в $(*)$. Заметим, что это число не зависит от субнормальной серии $(*)$.

Для почти полициклической группы G имеем (см. [4]):

- 1) $\text{asdim } G = \text{asdim } \text{Ker } f + \text{asdim } \text{Im } f$;
- 2) $\text{asdim } G = h(G)$, где $h(G)$ – число Хирша группы G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть B – блок без внутренних компактных слоев, оснащенный слоением неотрицательной кривизны Риччи, и граница ∂B имеет более одной компоненты связности. Тогда

- 1) каждый внутренний слой является регулярным изометрическим накрытием любого граничного слоя $K \in \partial B$,
- 2) $\#(\pi_0(\partial B)) = 2$, а B является h -кобордизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой типичный слой содержит в своем замыкании все граничные слои. Чтобы это увидеть, достаточно показать, что это верно для собственного блока. Доказательство повторяет рассуждение в [5; лемма 1], где основная идея заключается в том, чтобы показать, что множество слоев, имеющих в своем замыкании одно и то же множество граничных слоев, является открытым и замкнутым множеством.

Шаг 1. Покажем, что внутри B найдется слой L' , содержащий прямую.

Рассмотрим произвольный типичный слой L внутри B и последовательности изолированных точек $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ на L , сходящиеся к $x \in K_1$ и $y \in K_2$, где

K_1 и K_2 – компактные слои, принадлежащие границе блока B . Мы можем считать, что $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ принадлежат непересекающимся открытым воротникам U_1 и U_2 слоев K_1 и K_2 соответственно. Пусть l_i – кратчайшая в L , соединяющая $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$.

ЛЕММА 2.1. $|l_i| \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, каждую из последовательностей точек $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ можно взять в одной слоеной карте U_x и U_y соответственно, причем так, чтобы каждая точка принадлежала своему локальному слою. Можно также потребовать, чтобы точки последовательностей лежали на замкнутых трансверсальных отрезках. Рассмотрим последовательность $\{x_i\}$. Пусть $\{x_i\}$ лежит на трансверсальном отрезке $I \subset U_x$, проходящем через точку x . Рассмотрим экспоненциальное отображение вдоль слоения, которое каждому касательному к слоению вектору a ставит в соответствие конец геодезической длины $|a|$ в соответствующем слое, выпущенной из данной точки касательно данному вектору. Так как слоение предполагается C^2 -гладким, экспоненциальное отображение $\exp_{\mathcal{F}}: T_{\mathcal{F}}M \rightarrow M$ также будет гладким.

Индукцированная риманова метрика

$$g^{\mathcal{F}}: T_{\mathcal{F}} \otimes T_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}$$

определяет связность Леви-Чевита

$$\nabla^{\mathcal{F}}: \nabla_{\zeta}: T_{\mathcal{F}} \rightarrow T_{\mathcal{F}}, \quad \zeta \in TM.$$

Аналогично метрике Сасаки в TM можно определить метрику Сасаки в расслоении $T_{\mathcal{F}}$. В этой метрике касательные плоскости локально эквидистантны, т.е. проекция $T_{\mathcal{F}} \rightarrow M$ является римановой субмерсией.

Рассмотрим непрерывное отображение

$$F: D^{n-1}(R) \times I \rightarrow M,$$

где $D^{n-1}(R)$ – евклидов шар радиуса R , которое определяется ограничением экспоненциального отображения $\exp_{\mathcal{F}}$ на $T_{\mathcal{F}}^{\leq R}I$, где $T_{\mathcal{F}}^{\leq R}I$ обозначает множество касательных к слоению $\mathcal{F}$ векторов длины не более R , ограниченное на I . Отметим, что F является равномерно непрерывным отображением, так как определено на компакте $D^{n-1}(R) \times I$. Так как по построению метрики $g^{\mathcal{F}}$ касательные плоскости эквидистантны и F равномерно непрерывна, то для всех $x_i \in I$, достаточно близких к $x \in I$, шары $B_t(R) = \exp_{\mathcal{F}}(D^{n-1}(R))$ лежат внутри $U_{\varepsilon} \subset U_1$, где U_{ε} обозначает ε -окрестность слоя K_1 . Здесь используется компактность слоя K_1 . Так как R взято произвольно, лемма доказана.

Обозначим через $z \in L' \subset B \setminus (U_1 \cup U_2)$ предельную точку для l_i , которая является предельной для множества точек $z_i \in l_i$. Пусть $l_j(r) \subset l_j$, $j > i_r$, – подпоследовательность кратчайших длины r , проходящих через z_j , сходящаяся к кривой $l(r)$ на слое L' . Это следует из теоремы Асколи и [6; лемма 2.4]. По построению $z \in l(r)$. Предположим, что $l(r)$ не является кратчайшей на L' .

Тогда соединим концы $l(r)$ кратчайшей l' в L' . Замкнутая кривая $\gamma := l' \circ l^{-1}(r)$ должна представлять нетривиальную голономию слоя L' , так как иначе для достаточно большого номера j мы легко найдем кривую l'_j , соединяющую концы кривой $l_j(r)$ и имеющую меньшую длину, чем $l_j(r)$,³ что противоречит тому, что $l_j(r)$ – кратчайшая. Однако $\mathcal{F}$ является слоением почти без голономии и слой L' должен иметь тривиальную голономию. Это противоречие доказывает, что $l(r)$ – кратчайшая длины r . Устремляя r к бесконечности, получим последовательность кратчайших в L' , проходящих через точку z , которая, очевидно, содержит подпоследовательность, сходящуюся к прямой l в L' .

Шаг 2. Докажем, что каждый внутренний слой является изометрическим накрытием любого граничного слоя $K \in \partial B$.

По теореме Чигера–Громолла о расщеплении (см. [1; теорема 14]) имеем, что L' изометрично прямому произведению $P \times E^1$. Из построения также видно, что замыкание $\bar{l}$ содержит точки как K_1 , так и K_2 . Значит, существует последовательность точек $p_i \in l$, сходящаяся к $p \in K_1$, и последовательность точек $q_i \in l$, сходящаяся к $q \in K_2$, а вместе с ними и последовательности параллельных переносов $f_i: L' \rightarrow L'$ и $g_i: L' \rightarrow L'$ таких, что $f_i(p_j) = p_{j+1}$, $g_i(q_j) = q_{j+1}$, сходящиеся к изометрическим накрытиям $f: L' \rightarrow K_1$ и $g: L' \rightarrow K_2$ соответственно. Доказательство этого факта ничем не отличается от доказательства леммы 2.5 в работе [6]. В частности, отсюда следует, что слой L' имеет компактную группу изометрий. В случае, когда блок B плотен, любые два типичных слоя изометричны и любой типичный слой является изометрическим накрытием любого граничного компактного слоя (см. [1; теорема 9]). А если блок B собственный, то всякий типичный слой имеет два конца и расщепляется в прямое произведение $S \times \mathbb{R}$ (см. [1; теорема 14]), а значит, также изометрически накрывает любой граничный компактный слой. В частности, отсюда следует, что все типичные слои локально изометричны K_1 и имеют универсальное накрытие, изометричное $\tilde{K}_1$ с поднятой метрикой. Аналогично доказывается, что все типичные слои имеют изометричные универсальные накрытия с любым граничным компактным слоем.

Шаг 3. Докажем, что накрытие из шага 2 является регулярным, а B является h -кобордизмом.

Всякий сфероид $\varphi: S^l \rightarrow L'$ свободно гомотопен сфероиду $f_k \circ \varphi$, сходящимся к сфероиду $f \circ \varphi$, свободно гомотопному $f_k \circ \varphi$ в B для больших k , так как для больших k отображение f_k близко к f . Обозначим через F_t гомотопию, соединяющую сфероиды φ и $f \circ \varphi$. Вспомним, что любое накрытие, в частности f , индуцирует изоморфизм старших гомотопических групп и мономорфизм фундаментальных групп. Из сказанного следует, что мы имеем следующую коммутативную диаграмму, индуцируемую включениями $i^{L'}: L' \rightarrow B$, $i^{K_1}: K_1 \rightarrow B$

³Это легко следует из предположения C^2 -гладкости слоения $\mathcal{F}$ и формулы длины кривой в слое: $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij}^{\mathcal{F}} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}} dt$. В этом случае коэффициенты метрического тензора $g_{ij}^{\mathcal{F}}$ гладко зависят от $x \in M$, и если мы рассмотрим трансверсальное гладкое вложение $I \times I \rightarrow M$ полосы, то на образе высекается одномерное слоение, а именно гладкое семейство γ_s кривых, длины которых непрерывно зависят от s .

и накрытием $f: L' \rightarrow K_1$:

$$\begin{array}{ccc} \pi_l(B, f(y_0)) & \xleftarrow{i_*^{K_1}} & \pi_l(K_1, f(y_0)) \\ \uparrow \psi_\alpha i_*^{L'} & \nearrow f_* & \\ \pi_l(L', y_0) & & \end{array}$$

где $\alpha: I \rightarrow B$ обозначает путь $F_t(y_0)$, а $\psi_\alpha: \pi_l(B, y_0) \rightarrow \pi_l(B, f(y_0))$ – соответствующий изоморфизм гомотопических групп. Так как $\text{int } B \simeq \tilde{L}' \times \mathbb{R}$, то $i_*^{L'}$ – изоморфизм для $l \geq 2$. А так как любое накрытие индуцирует изоморфизм старших гомотопических групп и мономорфизм фундаментальных групп, то для $l \geq 2$ гомоморфизм $i_*^{K_1}$ является изоморфизмом. Рассмотрим случай $l = 1$. Из (2) следует, что $i_*^{L'}$ – мономорфизм. Но $i_*^{K_1}$ – также мономорфизм, так как все слои в блоке B имеют кокомпактную группу изометрий, а значит, являются равномерно односвязными (см. [1; теорема 10]). Из мономорфности гомоморфизмов f_* и $i_*^{K_1}$ и из того, что группа $\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1} f_* \pi_1(L') = i_*^{L'}(\pi_1(L'))$ нормальна в $\pi_1(B)$ (см. (2)), легко следует, что группа $f_* \pi_1(L')$ нормальна в $\pi_1(K_1)$. Действительно, для любых $\alpha \in f_* \pi_1(L')$ и $\beta \in \pi_1(K_1)$ найдется $\gamma \in f_* \pi_1(L')$ такой, что

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\gamma) &= \psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta \alpha \beta^{-1}) = \psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta) \psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\alpha) (\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta))^{-1} \\ &= \psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta) i_*^{L'}(\alpha') (\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta))^{-1} \in i_*^{L'}(\pi_1(L')), \end{aligned}$$

где $\alpha = f_* \alpha'$. Из мономорфности $\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}$ следует, что $\beta \alpha \beta^{-1} = \gamma$.

Из [6; утверждение 1.2] следует, что слой L' , будучи регулярным накрытием замкнутого многообразия неотрицательной кривизны Риччи, изометричен риманову произведению $S \times E^k$, где S – компактное многообразие неотрицательной кривизны Риччи.

Теперь, дословно повторяя рассуждения в [1; предложение 2], доказываем, что число связных компонент ∂B не превосходит двух. Аналогично тому, как это было сделано в [1; следствие 3], доказывается, что если $i_*: \pi_1(K_i) \rightarrow \pi_1(B)$ – гомоморфизм, индуцированный включением любой из связных компонент границы, то композиция $\varphi \circ i_*$ – эпиморфизм, где φ – гомоморфизм из (2). А так как $\psi_\alpha i_*^{L'}(\pi_1(L', y_0)) \subset i_*^{K_1} \pi_1(K_1, f(y_0))$, то гомоморфизм $i_*^{K_1}: \pi_1(K_1) \rightarrow \pi_1(B)$ является эпиморфизмом. Мономорфность $i_*^{K_1}$ отмечалась выше. Значит, вложение $i_*^{K_1}: K_1 \rightarrow B$ является гомотопической эквивалентностью. По этим же соображениям $i_*^{K_2}: K_2 \rightarrow B$ является гомотопической эквивалентностью, а значит, B является h -кобордизмом, что доказывает предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть B – блок без внутренних компактных слоев, оснащенный слоением неотрицательной кривизны Риччи. Если фундаментальная группа типичного слоя L конечно порождена, то

- 1) фундаментальная группа $\pi_1(B)$ является почти полициклической,
- 2) образ гомоморфизма $i_*: \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(B)$, индуцированного включением граничного слоя $i: K \rightarrow B$, имеет индекс в $\pi_1(B)$, не превосходящий 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\pi_1(L)$ конечно порождена, то она содержит нормальную нильпотентную подгруппу конечного индекса [7]. Из последовательности (2) следует, что $\pi_1(B)$ является почти полициклической группой. Мальцев доказал (см. [8]), что любая подгруппа почти полициклической группы, в частности $i_*\pi_1(K) \subset \pi_1(B)$, является пересечением подгрупп конечного индекса. Поэтому если индекс $i_*\pi_1(K)$ в $\pi_1(B)$ больше 1, то существует конечнолистное накрытие блока B , имеющее более одной компоненты связности границы. Тогда из предложения 1 немедленно следует, что индекс $i_*\pi_1(K)$ в $\pi_1(B)$ равен 2. Предложение доказано.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Из слоеной теоремы Картана–Адамара [3] следует, что плоское слоение может быть только на $K(\pi, 1)$ -многообразии.

Докажем теорему в другую сторону. Будем предполагать многообразие и слоение ориентируемыми, переходя в случае необходимости к конечнолистному накрытию.

Случай 1. $\mathcal{F}$ не содержит компактных слоев. Тогда $\mathcal{F}$ – слоение без голономии, и по теореме Новикова (см. [1; теорема 5]) M расслаивается над S^1 , $\widetilde{M} \cong \widetilde{L} \times \mathbb{R}$ и имеет место групповое расширение (1). Из [9] следует, что все слои изометричны риманову произведению $N \times E^k$, где N компактно. Из теоремы Чигера–Громолла о расщеплении (см. [1; теорема 14]) следует, что $\mathcal{F}$ плоское тогда и только тогда, когда M асферично.

Случай 2. Предположим, что $\mathcal{F}$ содержит компактные слои. Тогда замыкание каждого слоя содержит компактный слой (см. [1; следствие 1]) и конечным числом компактных слоев мы можем разбить многообразие M на блоки, каждый из которых либо гомеоморфен прямому произведению $K \times I$, где K – компактный слой, либо является блоком без внутренних компактных слоев (см. § 2). В дальнейшем под блоком мы будем понимать лишь те блоки, которые входят в данное разбиение. Разобьем рассматриваемый случай на два.

а) Границы всех блоков имеют две компоненты связности.

В этом случае из предложения 1 следует, что все слои имеют изометричные универсальные накрытия. Более того, блоки являются h -кобордизмами и M можно представить как фактормногообразие $\overline{M}$ по свободному и дискретному действию группы $\mathbb{Z}$, где $\overline{M}$ является объединением бесконечного числа копий многообразия с краем, полученного в результате разрезания M некоторым компактным слоем K . Понятно, что $\pi_1(\overline{M}) = \pi_1(K)$ и имеет место расширение

$$1 \rightarrow \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Заметим, что $\pi_1(K)$ содержит свободную абелеву подгруппу $\mathbb{Z}^k$ конечного индекса (см. [7]). Из теоремы о расщеплении Чигера–Громолла (см. [1; теорема 14]) следует, что если $k < \dim K$, то $k < \dim K - 1$. В этом случае число Хирша группы $\pi_1(M)$ меньше чем $\dim M$. Вспомним, что число Хирша почти полициклической группы π совпадает с асимптотической размерностью

группы, которая, в свою очередь, не меньше размерности $K(\pi, 1)$ -многообразия (см. § 1). Поэтому если M есть $K(\pi, 1)$ -многообразие, то компактные слои, а значит, по предложению 1, все слои, принадлежащие блокам без внутренних компактных слоев, являются плоскими. Из теоремы Нисимори (см. [1; теорема 4]), которая описывает поведение слоения в окрестности компактного слоя с абелевой голономией, а также из замкнутости множества компактных слоев (см. [10]) следует, что всякий некомпактный слой исключительного блока $K \times I$ принадлежит блоку $B' \subset K \times I$ без внутренних компактных слоев. По построению (см. [1; теорема 17]) существует трансверсаль, пересекающая все слои блока $K \times I$. Значит, блок B' должен иметь два граничных слоя и обязан быть плоским согласно доказанному выше.

б) Существует блок с одной компонентой связности границы.

В этом случае M можно представить в виде объединения $M = A \cup B$, где $A \cap B$ – объединение блоков, имеющих две компоненты связности границы, если такие блоки существуют, и $A \cap B$ – единственный компактный слой в противном случае. Тогда $C = M \setminus \text{int } B$ и $D = M \setminus \text{int } A$ – блоки с одной компонентой связности границы. Из предложения 1 следует, что если B является объединением конечного числа блоков, границы которых имеют две связные компоненты, то вложение $i: K \rightarrow B$ граничного слоя является гомотопической эквивалентностью, следовательно, вложения $\partial C \rightarrow A \cap B$ и $\partial D \rightarrow A \cap B$ являются гомотопическими эквивалентностями.

Напомним следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3 (см. [11]). *Если для некоторой группы G следующая диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_1(A) & & \\
 & \nearrow \varphi_1 & & \searrow \rho_1 & \\
 \pi_1(A \cap B) & \xrightarrow{\rho_3} & & & G \\
 & \searrow \varphi_2 & & \nearrow \rho_2 & \\
 & & \pi_1(B) & &
 \end{array}$$

коммутативна, то однозначно определен гомоморфизм $\sigma: \pi_1(M) \rightarrow G$ такой, что $\rho_i = \sigma \circ \psi_i$, $i = 1, 2, 3$, где φ_1, φ_2 , а также $\psi_1: \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(M)$, $\psi_2: \pi_1(B) \rightarrow \pi_1(M)$, $\psi_3: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(M)$ – гомоморфизмы, индуцированные включениями.

Отметим, что линейно связные подмножества A , B и $A \cap B$ в цитируемой теореме должны быть открытыми и линейно связными. Но это требование можно ослабить, потребовав, чтобы существовали открытые подмножества U_A , U_B и $U_{A \cap B}$, содержащие A , B и $A \cap B$ соответственно, для которых множества A , B и $A \cap B$ являются сильными деформационными ретрактами. В нашем случае блоки A , B и $A \cap B$ удовлетворяют этому требованию. Достаточно к границам блоков A , B и $A \cap B$ добавить маленькие открытые воротники.

Предположим, гомоморфизмы φ_i сюръективны. Пусть N – группа, порожденная $\text{Ker } \varphi_1 \cup \text{Ker } \varphi_2$. Положим $G = \pi_1(A \cap B)/N$, а ρ_i – отображения факторизации. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\pi_1(A) &\cong \pi_1(A \cap B)/\text{Ker } \varphi_1, & \pi_1(B) &\cong \pi_1(A \cap B)/\text{Ker } \varphi_2, \\ G &\cong \pi_1(A)/(N/\text{Ker } \varphi_1) \cong \pi_1(B)/(N/\text{Ker } \varphi_2) \cong \pi_1(M).\end{aligned}$$

Из предложения 2 следует, что группа $\pi_1(A)$ является почти полициклической. Так как подгруппа и образ почти полициклической группы являются почти полициклическими группами, то $\pi_1(M)$ – почти полициклическая группа. Из предположения, что M является $K(\pi, 1)$ -многообразием, следует, что $\text{asdim } \pi_1(M) \geq n$. Вспомним, что для почти полициклической группы G и гомоморфизма $f: G \rightarrow G'$ имеем $\text{asdim } G = \text{asdim } \text{Ker } f + \text{asdim } \text{Im } f$. Напомним также, что замкнутое многообразие неотрицательной кривизны Риччи содержит свободную абелеву подгруппу конечного индекса (см. [7]) и $\text{asdim } \mathbb{Z}^k = k$ (см. [4]). Учитывая теорему о расщеплении Чигера–Громолла (см. [1; теорема 14]), получаем, что для любого компактного слоя K имеем $\text{asdim } \pi_1(K) = n - 1$ и все компактные слои должны быть плоскими, а значит, $K(\pi, 1)$ -многообразиями. А так как группа $\pi_1(K(\pi, 1))$ не содержит кручения, то, с учетом предложения 2 и свойств асимптотической размерности, гомоморфизмы φ_i должны быть мономорфизмами, а значит, изоморфизмами. В частности, $\varphi_1: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(A)$ – изоморфизм. Тогда существует отображение

$$h: C \rightarrow \partial C \sim A \cap B \sim B\pi_1(A),$$

классифицирующее универсальное накрытие $\tilde{C} \rightarrow C$, и композиция $h \circ i$ является гомотопической эквивалентностью, где $i: \partial C \rightarrow C$ – вложение граничного слоя. Это означает, что индуцированный гомоморфизм

$$i_*: H_{n-1}(\partial C) \rightarrow H_{n-1}(C)$$

есть мономорфизм, что невозможно.

Таким образом, хотя бы один из гомоморфизмов φ_i не сюръективен и согласно предложению 1 его образ является подгруппой индекса 2. Напомним, что всякая подгруппа индекса 2 нормальна. Предположим, что φ_1 не сюръективен. Тогда положим $G = \mathbb{Z}_2$, а ρ_1 определим как гомоморфизм факторизации

$$\rho_1: \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(A)/\text{Im } \varphi_1 = \mathbb{Z}_2.$$

Если φ_2 сюръективен, положим $\rho_2 = \rho_3 = 0$. Так как $\rho_1 = \sigma \circ \psi_1$, то $\sigma: \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ нетривиален. Перейдем к соответствующему двулистному накрытию $\bar{M}$. Для простоты пусть A , B и $A \cap B$ обозначают разбиение $\bar{M}$, аналогичное разбиению M . Нетрудно видеть, что φ_1 и φ_2 уже сюръективны, и мы приходим к противоречию согласно сказанному выше.

Мы заключаем, что φ_2 не сюръективен, и определим

$$\rho_2: \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(A)/\text{Im } \varphi_1 = \mathbb{Z}_2$$

как гомоморфизм факторизации, а $\rho_3 = 0$. Нетрудно видеть, что в этом случае двулистное накрытие $\overline{M}$, соответствующее ядру $\sigma: \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, удовлетворяет рассмотренному случаю 2а). А так как утверждение теоремы верно для $\overline{M}$, то оно верно и для M . Теорема доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Предположим, что $\mathcal{F}$ – C^2 -слоение коразмерности 1 неотрицательной кривизны на M . Так как M односвязно и $\mathcal{F}$ имеет полиномиальный рост слоев, то $\mathcal{F}$ обладает компактным слоем (см. [12]). Поэтому мы можем представить M в виде $M = A \cup B$, где $A \cap B$ – объединение блоков из теоремы 1, имеющих две компоненты связности границы, если такие блоки существуют, и $A \cap B$ – единственный компактный слой в противном случае. Тогда $C = M \setminus \text{int } B$ и $D = M \setminus \text{int } A$ – блоки с одной компонентой связности границы. Из предложения 1 следует, что вложения $\partial C \rightarrow A \cap B$ и $\partial D \rightarrow A \cap B$ являются гомотопическими эквивалентностями.

Шаг 1. Покажем, что блоки C и D являются собственными, а $\dim S = n - 3$, где S – душа типичного слоя L в блоке C (D).

Из точной гомологической последовательности Майера–Вьеториса с действительными коэффициентами

$$\cdots \rightarrow H_2(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(A \cap B; \mathbb{R}) \xrightarrow{(i_*^A, i_*^B)} H_1(A; \mathbb{R}) \oplus H_1(B; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M; \mathbb{R}) \rightarrow \cdots, \quad (4)$$

учитывая, что первые и вторые гомологии M нулевые, и так как первые числа Бетти $\beta_1(A)$ и $\beta_1(B)$ нетривиальны (это следует, например, из эпиморфности φ в (2)), имеем, что (i_*^A, i_*^B) – изоморфизм. Следовательно, $\text{Ker } i_*^A \cong \text{Im } i_*^B \neq 0$ и $\text{Ker } i_*^B \cong \text{Im } i_*^A \neq 0$. Теперь рассмотрим кусок когомологической последовательности Майера–Вьеториса с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{aligned} H^{n-1}(M; \mathbb{Z}_2) &\rightarrow H^{n-1}(A; \mathbb{Z}_2) \oplus H^{n-1}(B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{n-1}(A \cap B; \mathbb{Z}_2) \\ &\rightarrow H^n(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как

$$H^{n-1}(A \cap B; \mathbb{Z}_2) \cong H^{n-1}(\partial C; \mathbb{Z}_2) \cong H^n(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2,$$

а

$$H^{n-1}(M; \mathbb{Z}_2) \cong H_1(M; \mathbb{Z}_2) = 0,$$

то

$$H^{n-1}(A; \mathbb{Z}_2) \cong H^{n-1}(C; \mathbb{Z}_2) = 0, \quad H^{n-1}(B; \mathbb{Z}_2) \cong H^{n-1}(D; \mathbb{Z}_2) = 0.$$

Из спектральной последовательности регулярного $\mathbb{Z}^k$ -накрытия (2) с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ следует, что максимальная по градуировке ненулевая группа когомологий $H^l(C; \mathbb{Z}_2)$ изоморфна группе $H^k(\mathbb{Z}^k; \{H^l(S; \mathbb{Z}_2)\}) = \mathbb{Z}_2$, где l –

размерность души S типичного слоя L . Следовательно, $k + l \leq n - 2$. Если предположить, что $k + l < n - 2$, то

$$\bigoplus_{s+p=n-2} E_2^{sp} = \bigoplus_{s+p=n-2} H^s(\mathbb{Z}^k; \{H^p(S; \mathbb{R})\}) = 0.$$

Следовательно, $H^{n-2}(C; \mathbb{R}) = 0$ и по двойственности Пуанкаре имеем

$$H^{n-2}(C; \mathbb{R}) \cong H_2(C, \partial C; \mathbb{R}) = 0.$$

Но тогда, применяя точную гомологическую последовательность пары $(C, \partial C)$, получим $\text{Ker } i_*^A = 0$, что противоречит сказанному выше. Следовательно, $k + l = n - 2$ и

$$H^k(\mathbb{Z}^k; \{H^l(S; \mathbb{R})\}) \cong H^{n-2}(C; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}.$$

Тогда из двойственности Александра следует, что $H^{n-2}(C; \mathbb{R}) \cong H_1(D; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Из аналогичных соображений имеем $H_1(C; \mathbb{R}) \cong H^{n-2}(D; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Поэтому $k = 1$ в (2) и по теореме 1 блоки C и D являются собственными, а слоение внутри этих блоков является расслоением над S^1 . Заметим, что так как $k = 1$, то размерность души S типичного слоя L как в C , так и в D равна $n - 3$.

Шаг 2. Покажем, что на самом деле $L \simeq S \times \mathbb{R}^2$.

Без ограничения общности рассмотрим блок C . По теореме Чигера–Гро-молла (см. [1; теорема 15]) всякий типичный слой L в C диффеоморфен нормальному расслоению ν со слоем $\mathbb{R}^2$ над своей душой $S \subset L$. Заметим, что душа S , а значит, и расслоение ν должны быть ориентируемы, так как иначе из спектральной последовательности расслоения

$$\xi: L \rightarrow \text{int } C \rightarrow S^1$$

следовало бы, что

$$H^{n-2}(C, \mathbb{R}) \cong H^1(S^1; \{H^{n-3}(S; \mathbb{R})\}) = 0,$$

что противоречит сказанному выше. Теперь покажем, что расслоение ν тривиально. Для этого достаточно установить, что класс Эйлера $e(\nu) = 0$. Рассмотрим $A \cap B$ вместе с открытыми воротниками U_1 и U_2 граничных слоев ∂C и ∂D соответственно. Обозначим это объединение через U . Так как фундаментальная группа компактного слоя содержит нормальную свободную абелеву группу $\mathbb{Z}^k$ конечного индекса, рассмотрим конечнолистное накрытие $p: \widehat{U} \rightarrow U$, соответствующее подгруппе $\mathbb{Z}^k$. Так как $Wh(\mathbb{Z}^k) = 0$, то по теореме об s -кобордизме

$$p^{-1}(A \cap B) \simeq M_0 \times T^k \times I,$$

где

$$M_0 \times T^k \simeq \widehat{\partial C} := p^{-1}(\partial C),$$

а M_0 компактно и односвязно.

В односторонней окрестности $\widehat{U}_1$ поднятое слоение описывается в п. 3 теоремы Нисимори (см. [1; теорема 4]), откуда следует, что существует однозначно определенный гомологический класс α в группе $H_{n-2}(\widehat{\partial C})$, инвариантный относительно действия конечной группы G накрытия $p: \widehat{\partial C} \rightarrow \partial C$, так как действие G сохраняет слоение. Каждый гомологический класс в $H_{n-2}(\widehat{\partial C})$ представляется слоем

$$\widehat{N} \simeq M_0 \times T^{k-1} \subset T^k$$

тривиального расслоения

$$\widehat{\xi}_1: \widehat{N} \rightarrow \widehat{\partial C} \rightarrow S^1$$

с вполне геодезическими слоями, являющимися образами соответствующих слоев относительно регулярного изометрического $\mathbb{Z}$ -накрытия:

$$\widehat{N} \times E \rightarrow \widehat{\partial C}.$$

Заметим, что $\widehat{N} \times E$ является римановым прямым произведением и

$$\text{Iso}(\widehat{N} \times E) \cong \text{Iso}(\widehat{N}) \times \text{Iso}(E)$$

(см. [13]). Так как образ вполне геодезического подмногообразия при изометрии является вполне геодезическим подмногообразием и действие группы G сохраняет гомологический класс $[\widehat{N}]$, то расслоение $\widehat{\xi}_1$ инвариантно относительно действия G . Образ N слоя $\widehat{N}$ в ∂C должен представлять нетривиальный элемент $[N]$ в $H_{n-2}(\partial C)$ (см. [1; теорема 4]), поэтому образ расслоения $\widehat{\xi}_1$ относительно накрытия p является расслоением

$$\xi_1: N \rightarrow \partial C \rightarrow S^1.$$

Сечение $\varphi: S^1 \rightarrow \partial C$ этого расслоения представляет собой нетривиальную гомотопию, поэтому $\varphi(S^1)$ легко сдвинуть во внутренность C трансверсально слоям расслоения ξ .

Теперь, вспоминая структуру слоения в окрестности компактного слоя (см. [1; теорема 4]), легко видеть, что расслоение ξ_1 является ограничением расслоения

$$\widetilde{\xi}: N \rightarrow U_1 \rightarrow S^1 \times J$$

односторонней окрестности U_1 слоя ∂C , где J обозначает полуинтервал. Слои $\widetilde{\xi}$ принадлежат слоям слоения $\mathcal{F}$, и ограничение $\widetilde{\xi}$ на $\varphi(S^1)$ представляет собой трансверсальное вложение $i^{\text{tr}}: \partial C \rightarrow C$, гомотопное вложению границы $i: \partial C \rightarrow C$, индуцирующее послойное отображение расслоений $\xi_1 \rightarrow \xi$ над одной и той же базой S^1 . При этом ограничение гомотопии на N осуществляет трансверсальное вложение $N \times [0, t) \rightarrow C$ такое, что $N^r = N \times r$, где $0 < r < t$, разбивает слой L на два куска, один из которых гомеоморфен $N \times \mathbb{R}_{\geq 0}$. Пусть

$$\nu^R: S^1 \rightarrow E_R \rightarrow S$$

обозначает сферическое расслоение радиуса R , а

$$E_{\geq R} \simeq E_R \times \mathbb{R}_{\geq 0}$$

– множество векторов длины $\geq R$ в расслоении ν . Напомним, что тотальное пространство расслоения ν диффеоморфно слою L . Так как каждая из последовательностей подмногообразий N^{t_i} , $t_i \rightarrow 0$, и E_{t_j} , $t_j \rightarrow \infty$, задает компактное исчерпание L , то найдутся действительные числа R_1 , R_2 , r_1 , r_2 , для которых имеем вложения

$$E_{R_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset N^{r_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset N^{r_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Предполагается, что границы многообразий не пересекаются при вложениях. Так как сквозные вложения

$$E_{R_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad N^{r_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset N^{r_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$$

являются гомотопическими эквивалентностями, то вложение

$$I: N^{r_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$$

индуцирует изоморфизмы групп гомологий и гомотопических групп, а значит, I является гомотопической эквивалентностью. Для простоты изложения отождествим N^{r_1} с N . Вложение слоев $\eta: N \rightarrow L$ можно представить в виде композиции вложений

$$N \times 0 \xrightarrow{s} N \times \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{I} E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{J} L.$$

Поэтому если $e(\nu) \in H^2(S; \mathbb{R})$ нетривиален, то класс гомологий слоя $[S^1]$ расслоения ν^R тривиален в $H_1(E_R; \mathbb{R})$ и $J: E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow L$ индуцирует изоморфизм в первых гомологиях, а значит, $\eta: N \rightarrow L$ и вложение $i^{\text{tr}}: \partial C \rightarrow C$ индуцируют изоморфизм в первых гомологиях. Но из гомологической последовательности Майера–Вьеториса следует, что

$$H_1(\partial C; \mathbb{R}) \cong H_1(C; \mathbb{R}) \oplus H_1(D; \mathbb{R}),$$

что вместе с ранее доказанным изоморфизмом $H_1(D; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ приводит к противоречию. Следовательно,

$$e(\nu) = 0, \quad E_R \simeq S \times S^1,$$

а $L \simeq S \times \mathbb{R}^2$.

Шаг 3. Покажем, что $\pi_1(\partial C) \cong \mathbb{Z}^2$ и $\pi_1(C) \cong \pi_1(D) \cong \mathbb{Z}$.

Рассмотрим образ α класса

$$[* \times S^1 \times *] \in \pi_1(S \times S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0})$$

в $\pi_1(N)$ при изоморфизме

$$(I \circ s)_*^{-1}: \pi_1(S \times S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \rightarrow \pi_1(N).$$

Так как α является образом центрального элемента, то α принадлежит центру $\pi_1(N)$. Класс α порождает ядро эпиморфизма

$$\eta_*: \pi_1(N) \rightarrow \pi_1(L),$$

которое изоморфно группе $\mathbb{Z}$. Так как $\text{Ker } \eta_*$ инвариантно относительно действия фундаментальной группы базы расслоения ξ , то образ $\beta := i_*\alpha$, индуцированный вложением $i: N \rightarrow \partial C$, является образующей группы

$$\text{Ker}(i_*^{\text{tr}}: \pi_1(\partial C) \rightarrow \pi_1(C)) \cong \text{Ker}(\varphi_1: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(A)) \cong \mathbb{Z}$$

и $\gamma\beta\gamma^{-1} = \mp\beta$, где γ является классом сечения расслоения ξ_1 . Если $\gamma\beta\gamma^{-1} = -\beta$, то β представляет собой нулевой элемент в $H_1(\partial C; \mathbb{R})$ и поэтому

$$i_*^{\text{tr}}: H_1(\partial C; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(C; \mathbb{R})$$

– изоморфизм, что невозможно, как отмечалось выше. Отсюда следует, что $\gamma\beta\gamma^{-1} = \beta$ и β коммутирует со всеми образующими группы $\pi_1(\partial C)$, а значит, β принадлежит центру группы $\pi_1(\partial C)$. Аналогично доказывается, что

$$\text{Ker}(i_*^{\text{tr}}: \pi_1(\partial D) \rightarrow \pi_1(D)) \cong \text{Ker}(\varphi_2: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(B)) \cong \mathbb{Z}$$

и принадлежит центру группы

$$\pi_1(\partial D) \cong \pi_1(\partial C) \cong \pi_1(A \cap B).$$

Из предложения 2 следует, что если гомоморфизм $\varphi_1: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(A)$, индуцированный вложением, не является эпиморфизмом, то его образ имеет индекс 2. Применяя теорему 3, аналогично тому, как это делалось в § 3, мы легко найдем нетривиальный гомоморфизм $\pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ и придем к противоречию с односвязностью M . Из аналогичных соображений гомоморфизм $\varphi_2: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(B)$ должен быть эпиморфизмом. Отсюда легко следует, что $\pi_1(A \cap B)$ порождается $\text{Ker } \varphi_1 \cup \text{Ker } \varphi_2$, а значит,

$$\pi_1(\partial C) \cong \pi_1(A \cap B) \cong \mathbb{Z}^2.$$

Более того,

$$\pi_1(C) \cong \pi_1(D) \cong \mathbb{Z},$$

а типичный слой L односвязен как в C , так и в D .

Шаг 4. Докажем, что $\partial C \simeq M_0 \times T^2$, и придем к противоречию.

Будем предполагать, что $n \geq 7$ (случай $n = 5$ разобран в [1]). Напомним, что ∂C имеет конечнолистное регулярное изометрическое накрытие $M_0 \times T^2$. Так как $\pi_1(\partial C) \cong \mathbb{Z}^2$ и действие конечной группы G на $M_0 \times T^2$ сохраняет локально прямое риманово произведение, мы получаем на ∂C структуру расслоения

$$\mu: M_0 \rightarrow \partial C \rightarrow T^2.$$

Образ $\hat{N} = M_0 \times S^1$ при факторизации по действию G перейдет в многообразие N , диффеоморфное расслоению над S^1 со слоем M_0 . Ранее мы показали, что вложение

$$I: N^{r_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$$

является гомотопической эквивалентностью. Отсюда легко следует, что N^{r_1} и E_{R_2} ограничивают в L компактное многообразие W , которое является h -кобордизмом. Учитывая, что $Wh(\mathbb{Z}) = Wh(\mathbb{Z}^2) = 0$, из теоремы об s -кобордизме получаем, что W диффеоморфно $S \times S^1 \times I$. Отсюда N диффеоморфно $S \times S^1$, а значит, N получается факторизацией $S \times \mathbb{R}$ по действию $\mathbb{Z}$, при котором образующая группы $\mathbb{Z}$ представляется диффеоморфизмом $f: S \times \mathbb{R} \rightarrow S \times \mathbb{R}$, гомотопным тождественному преобразованию. Отсюда следует, что $N \simeq M_0 \times S^1$, где класс $i_*[* \times S^1]$ представляет собой образующую $\text{Ker } \varphi_1$.

Из теоремы об s -кобордизме также получаем, что $A \cap B$ диффеоморфно $\partial C \times I$ и ∂C диффеоморфно ∂D . Повторяя для блока D те же рассуждения, что и для блока C , и учитывая, что ∂C диффеоморфно ∂D , имеем на ∂C структуру еще одного расслоения

$$\xi_2: N' \rightarrow \partial C \rightarrow S^1,$$

трансверсального ξ_1 . Аналогично доказывается, что $N' \simeq M_0 \times S^1$, где класс $i_*[* \times S^1]$ представляет собой образующую $\text{Ker } \varphi_2$.

Из доказанного следует, что ограничение расслоения μ на образующие T^2 тривиально. А так как структурная группа расслоения μ дискретна, то μ тривиально и $\partial C \simeq M_0 \times T^2$. Отсюда видно, что расслоения $\xi: L \rightarrow \text{int } C \rightarrow S^1$ и $\xi': L \rightarrow \text{int } D \rightarrow S^1$ гомологически просты, а значит, послойные отображения расслоений $\xi_1 \rightarrow \xi$ и $\xi_2 \rightarrow \xi'$ индуцируют гомоморфизмы спектральных последовательностей этих расслоений. Теперь, применяя спектральные последовательности и дословно повторяя рассуждения, приведенные в [1; теорема 22], доказываем, что

$$0 \neq [T^2] \subset \text{Ker}(i_*^A, i_*^B)$$

(см. (4)), откуда получаем, что $H_3(M) \neq 0$. Но это противоречит предположению, что многообразие M является 3-связным. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Автор выражает благодарность А. А. Борисенко за плодотворные обсуждения настоящей работы и некоторые идеи, которые автор использовал в доказательстве.

Список литературы

- [1] Д. В. Болотов, “Топология слоений коразмерности 1 неотрицательной кривизны”, *Матем. сб.*, **204**:5 (2013), 3–24; англ. пер.: D. V. Bolotov, “Topology of codimension-one foliations of nonnegative curvature”, *Sb. Math.*, **204**:5 (2013), 621–640.
- [2] J. Cheeger, D. Gromoll, “The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature”, *J. Differential Geometry*, **6**:1 (1971), 119–128.
- [3] G. Stuck, “Un analogue feuilleté du théorème de Cartan–Hadamard”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **313**:8 (1991), 519–522.
- [4] G. Bell, A. Dranishnikov, *Asymptotic dimension*, 2007, arXiv:math/0703766.
- [5] Д. В. Болотов, “Слоения неотрицательной кривизны на замкнутых трехмерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **200**:3 (2009), 3–16; англ. пер.: D. V. Bolotov,

- “Foliations of nonnegative curvature on closed 3-dimensional manifolds”, *Sb. Math.*, **200:3** (2009), 313–324.
- [6] S. Adams, G. Stuck, “Splitting of non-negatively curved leaves in minimal sets of foliations”, *Duke Math. J.*, **71:1** (1993), 71–92.
- [7] B. Wilking, “On fundamental groups of manifolds of nonnegative curvature”, *Differential Geom. Appl.*, **13:2** (2000), 129–165.
- [8] А. И. Мальцев, “О гомоморфизмах на конечные группы”, *Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та*, **18** (1958), 49–60; англ. пер.: A. I. Mal’tsev, “On homomorphisms onto finite groups”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **119** (1983), 67–79.
- [9] S. R. Adams, A. Freire, “Nonnegatively curved leaves in foliations”, *J. Differential Geom.*, **34:3** (1991), 681–700.
- [10] И. Тамура, *Топология слоений*, Мир, М., 1979, 319 с.; пер. с япон.: I. Tamura, *Yōsō no toporoji*, Sū gaku Sensho, Iwanami Shoten, Tokyo, 1976, 238 pp.
- [11] У. Масси, Д. Столлинс, *Алгебраическая топология: введение*, Мир, М., 1977, 343 с.; пер. с англ.: W. S. Massey, *Algebraic topology: an introduction*, Harcourt, Brace & World, Inc., New York, 1967, xix+261 pp.; J. Stallings, *Group theory and three-dimensional manifolds*, Yale Mathematical Monographs, **4**, Yale Univ. Press, New Haven, Conn.–London, 1971, v+65 pp.
- [12] J. F. Plante, “A generalization of the Poincaré–Bendixson theorem for foliations of codimension one”, *Topology*, **12:2** (1973), 177–181.
- [13] J. Cheeger, D. Gromoll, “On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature”, *Ann. of Math.* (2), **96** (1972), 413–443.

Дмитрий Валерьевич Болотов
(Dmitry V. Bolotov)

Физико-технический институт низких температур
им. Б. И. Веркина НАН Украины, г. Харьков
E-mail: bolotov@ilt.kharkov.ua

Поступила в редакцию
17.01.2014