Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Галатенко, Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций с ошибками при вычислении коэффициентов, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 7, 21–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm833>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:30:48

УДК 517.518+517.982

В. В. Галатенко

Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций с ошибками при вычислении коэффициентов

Изучаются орторекурсивные разложения с ошибками при вычислении коэффициентов. Приводится пример системы функций, определенных на промежутке действительной оси, орторекурсивное разложение по которой сходится к разлагаемому элементу при любых ошибках, удовлетворяющих некоторым достаточно слабым требованиям. Для различных классов разлагаемых функций доказаны теоремы о сходимости почти всюду, сходимости в метриках L^p ($1 \leq p < \infty$), равномерной сходимости.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Орторекурсивные разложения

Пусть $(H, (\cdot, \cdot))$ – пространство со скалярным произведением над полем действительных или комплексных чисел, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система ненулевых элементов H , f – некоторый элемент H . Индуктивно определим последовательность остатков $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ и последовательность коэффициентов $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим

$$\begin{aligned} r_0 &= f, \\ \hat{f}_1 &= \frac{(r_0, e_1)}{(e_1, e_1)}, \quad r_1 = r_0 - \hat{f}_1 e_1, \\ \hat{f}_2 &= \frac{(r_1, e_2)}{(e_2, e_2)}, \quad r_2 = r_1 - \hat{f}_2 e_2 \end{aligned}$$

и т.д. Если уже определен остаток r_n , то положим

$$\hat{f}_{n+1} = \frac{(r_n, e_{n+1})}{(e_{n+1}, e_{n+1})}, \quad r_{n+1} = r_n - \hat{f}_{n+1} e_{n+1}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Формальный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$ называется *орторекурсивным разложением* (рекурсивным рядом Фурье) элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Вероятно, впервые орторекурсивные разложения появились в работе [1], хотя и в неявном виде (подробнее об этом см. [2]). Приведенное выше определение было предложено Т. П. Лукашенко в работах [3], [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00420) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1657.2003.1).

Орторекурсивные разложения обладают рядом свойств, аналогичных общеизвестным свойствам разложений в ряд Фурье по ортогональным системам. А именно для орторекурсивных разложений справедливы аналоги неравенства Бесселя, тождества Бесселя, эквивалентность сходимости разложения к разлагаемому элементу и равенства Парсеваля. Сформулируем соответствующий результат (доказательство см. в [4]).

ТЕОРЕМА (Т. П. Лукашенко). Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система ненулевых элементов H , f – некоторый элемент H , $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$ – орторекурсивное разложение элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) для любого натурального числа N выполняется равенство

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N \hat{f}_n e_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2$$

(аналог тождества Бесселя);

б) имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2 \leq \|f\|^2$$

(аналог неравенства Бесселя);

с) орторекурсивное разложение $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$ элемента f сходится к f тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \|e_n\|^2$$

(эквивалентность сходимости разложения к разлагаемому элементу и равенства Парсеваля).

Отметим, что в случае ортогональности системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ орторекурсивное разложение и обычное разложение в ряд Фурье по этой системе совпадают. При этом если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ еще и полна, то разложение любого элемента f из H сходится к f , т.е. имеет место равенство $f = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$. Кроме того, для любой последовательности коэффициентов $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, отличной от $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ либо расходится, либо сходится к элементу, отличному от f . Неформально это утверждение можно переформулировать так: орторекурсивное разложение по полной ортогональной системе (совпадающее с обычным разложением в ряд Фурье по этой системе) сходится к разлагаемому элементу, но не обладает абсолютной устойчивостью к ошибкам, возникающим при вычислении коэффициентов. На практике же вычислительные ошибки неизбежны. В связи с этим представляется интересным искать системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющие следующим двум требованиям:

- (i) орторекурсивное разложение любого элемента $f \in H$ по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f ;
- (ii) орторекурсивное разложение по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно устойчиво в некотором смысле к ошибкам, возникающим при вычислении коэффициентов.

Формализуем сказанное. Рассмотрим орторекурсивное разложение произвольного элемента $f \in H$ по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ с ошибками при вычислении коэффициентов. Нулевой остаток разложения $r_{0,\varepsilon}$, как и в разложении без ошибок, равен f , но при вычислении первого коэффициента в результате вычислительной погрешности вместо величины $(r_{0,\varepsilon}, e_1)/(e_1, e_1)$ получается ее приближенное значение

$$\widehat{f}_{1,\varepsilon} = \frac{(r_{0,\varepsilon}, e_1)}{(e_1, e_1)}(1 + \varepsilon_1)$$

и первый остаток, соответственно, получается равным $r_{1,\varepsilon} = r_{0,\varepsilon} - \widehat{f}_{1,\varepsilon}e_1$. Аналогично, из-за вычислительной погрешности при вычислении второго коэффициента вместо величины $(r_{1,\varepsilon}, e_2)/(e_2, e_2)$ получается ее приближенное значение

$$\widehat{f}_{2,\varepsilon} = \frac{(r_{1,\varepsilon}, e_2)}{(e_2, e_2)}(1 + \varepsilon_2)$$

и второй остаток получается равным $r_{2,\varepsilon} = r_{1,\varepsilon} - \widehat{f}_{2,\varepsilon}e_2$; при вычислении n -го коэффициента вместо величины $(r_{n-1,\varepsilon}, e_n)/(e_n, e_n)$ получается ее приближенное значение

$$\widehat{f}_{n,\varepsilon} = \frac{(r_{n-1,\varepsilon}, e_n)}{(e_n, e_n)}(1 + \varepsilon_n)$$

и n -й остаток получается равным $r_{n,\varepsilon} = r_{n-1,\varepsilon} - \widehat{f}_{n,\varepsilon}e_n$.

В результате построены последовательность коэффициентов $\{\widehat{f}_{n,\varepsilon}\}_{n=1}^\infty$ и последовательность остатков $\{r_{n,\varepsilon}\}_{n=0}^\infty$ орторекурсивного разложения с ошибками при вычислении коэффициентов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Формальный ряд $\sum_{n=1}^\infty \widehat{f}_{n,\varepsilon}e_n$ называется *орторекурсивным разложением (рекурсивным рядом Фурье)* элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ с ошибками $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$.

Вероятно, аналогичное определение было впервые предложено Р. Грибонвалем и М. Нилсеном в статье [5], посвященной изучению “жадных алгоритмов” (greedy algorithms), являющихся в некотором смысле частным случаем орторекурсивных разложений.

Последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ моделирует относительные ошибки, возникающие при вычислении коэффициентов разложения. Чем больше по модулю значение ε_n , тем больше возникающая на n -м шаге погрешность. Если $\varepsilon_n = 0$ при всех натуральных n , то орторекурсивное разложение $\sum_{n=1}^\infty \widehat{f}_{n,\varepsilon}e_n$ с ошибками при вычислении коэффициентов совпадает с обычным орторекурсивным разложением $\sum_{n=1}^\infty f_n e_n$.

В приведенных обозначениях требования (i) и (ii) можно переформулировать так: для всех элементов $f \in H$ и для всех удовлетворяющих некоторым условиям последовательностей ошибок $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ справедливо равенство

$$f = \sum_{n=1}^\infty \widehat{f}_{n,\varepsilon}e_n.$$

§ 2. Определение системы

Перейдем к рассмотрению конкретной системы, удовлетворяющей выдвигаемым требованиям. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – некоторый невырожденный промежуток, конечный или бесконечный. Через H будем далее обозначать пространство $L^2(I, \mu)$ классов эквивалентности измеримых действительных или комплекснозначных функций, квадрат модуля которых интегрируем относительно классической меры Лебега μ . Пусть $\Xi = \{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность конечных невырожденных промежутков, лежащих в I , удовлетворяющая следующим условиям:

- ($\Xi 1$) система Ξ покрывает промежуток I в смысле Витали, т.е. для любой точки $x \in I$ и любого числа $\delta > 0$ существует номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что $\Delta_n \ni x$ и $|\Delta_n| < \delta$;
- ($\Xi 2$) если для некоторых натуральных чисел k и l , $k < l$, пересечение $\Delta_k \cap \Delta_l$ непусто, то $\Delta_k \supset \Delta_l$.

Через $\chi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, будем обозначать характеристическую функцию промежутка Δ_n . Пусть $g \in H$ и для всех натуральных чисел n мера множества $\{x \in \Delta_n : g(x) \neq 0\}$ положительна. Положим $e_n(x) = g(x)\chi_n(x)$.

Формулы для вычисления коэффициентов орторекурсивного разложения элемента $f \in H$ по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ с ошибками $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ имеют вид

$$\hat{f}_{n+1, \varepsilon} = \int_{\Delta_{n+1}} r_{n, \varepsilon}(x) \overline{g(x)} dx \left(\int_{\Delta_{n+1}} |g(x)|^2 dx \right)^{-1} (1 + \varepsilon_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Эти формулы имеют смысл не только при $f, g \in L^2(I, \mu)$, но и при $f\bar{g} \in L_{\text{loc}}(I, \mu)$, $g \in L_{\text{loc}}^2(I, \mu)$. Кроме того, интеграл здесь можно понимать как интеграл Данжуа–Перрона (о свойствах этого обобщения интеграла Лебега, называемого также узким интегралом Данжуа, интегралом Перрона или интегралом Куршвейля–Хенстока, см. [6; гл. VI–VIII] или [7; гл. XVI]) и предполагать лишь, что $f\bar{g}$ и $|g|^2$ локально интегрируемы на I в указанном смысле. Именно этот, более общий, случай и будет рассматриваться ниже.

Отметим, что в случае $g(x) \equiv 1$ и $\varepsilon_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, орторекурсивное разложение по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ было рассмотрено Т. П. Лукашенко в статье [4] и излагаемые ниже результаты являются обобщением теоремы 3 этой статьи.

§ 3. Свойства разложений

Изучение орторекурсивных разложений по системе

$$e_n(x) = g(x)\chi_n(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

с ошибками при вычислении коэффициентов начнем с установления явного вида частичных сумм $S_{N, \varepsilon}(x) = \sum_{n=1}^N \hat{f}_{n, \varepsilon} e_n(x)$ этого разложения.

Введем некоторые обозначения. Для произвольной точки $x \in I$ через $J(x) = \{j_n(x)\}_{n=1}^\infty$ обозначим возрастающую последовательность натуральных чисел такую, что $x \in \Delta_k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $k \in J(x)$ (легко видеть, что $S_{N, \varepsilon}(x) = \sum_{n: j_n(x) \leq N} \hat{f}_{j_n(x), \varepsilon} e_{j_n(x)}$). Из условий ($\Xi 1$) и ($\Xi 2$) следует, что последовательность $\{\Delta_{j_n(x)}\}_{n=1}^\infty$ является последовательностью вложенных промежутков, стягивающихся к точке x .

ТЕОРЕМА 1. Пусть N – некоторое натуральное число, x – произвольная точка I , функции f и g таковы, что $f\bar{g}$ и $|g|^2$ локально интегрируемы на I по Данжуа–Перрону и для всех натуральных чисел n мера множества $\{x \in \Delta_n : g(x) \neq 0\}$ положительна. Тогда справедливо равенство

$$S_{N,\varepsilon}(x) = \sum_{n: j_n(x) \leq N} \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} f(y)\overline{g(y)} dy \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} |g(y)|^2 dy \right)^{-1} \right. \\ \left. \times (1 + \varepsilon_{j_n(x)}) \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} (-\varepsilon_{j_l(x)}) \right) g(x)$$

(сумму из нуля слагаемых считаем равной нулю, произведение из нуля множителей считаем равным единице).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольную точку $x \in I$ и проведем индукцию по N . При $N = 1$ утверждение непосредственно следует из определения орторекурсивного разложения. Предположим, что утверждение справедливо для $N = m$ и докажем его для $N = m + 1$. Если $\Delta_{m+1} \not\ni x$, то

$$S_{m+1,\varepsilon}(x) = S_{m,\varepsilon}(x) + \hat{f}_{m+1,\varepsilon} e_{m+1}(x) = S_{m,\varepsilon}(x) + \hat{f}_{m+1,\varepsilon} g(x) \chi_{m+1}(x) = S_{m,\varepsilon}(x)$$

и искомая формула верна. Рассмотрим случай $\Delta_{m+1} \ni x$. Из условия $(\Xi 2)$ и предположения индукции следует, что для всех $y \in \Delta_{m+1}$ имеет место равенство

$$S_{m,\varepsilon}(y) = C_{m,\varepsilon} g(y),$$

где

$$C_{m,\varepsilon} = \sum_{n: j_n(x) \leq m} \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} f(y)\overline{g(y)} dy \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} |g(y)|^2 dy \right)^{-1} \right. \\ \left. \times (1 + \varepsilon_{j_n(x)}) \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq m} (-\varepsilon_{j_l(x)}) \right).$$

Тогда для всех $y \in \Delta_{m+1}$ имеем:

$$r_{m,\varepsilon}(y) = f(y) - S_{m,\varepsilon}(y) = f(y) - C_{m,\varepsilon} g(y),$$

откуда

$$\hat{f}_{m+1,\varepsilon} = \left(\int_{\Delta_{m+1}} f(y)\overline{g(y)} dy \left(\int_{\Delta_{m+1}} |g(y)|^2 dy \right)^{-1} \right. \\ \left. - C_{m,\varepsilon} \int_{\Delta_{m+1}} |g(y)|^2 dy \left(\int_{\Delta_{m+1}} |g(y)|^2 dy \right)^{-1} \right) (1 + \varepsilon_{m+1})$$

и

$$S_{m+1,\varepsilon}(x) = C_{m,\varepsilon} g(x) + \int_{\Delta_{m+1}} f(y)\overline{g(y)} dy \left(\int_{\Delta_{m+1}} |g(y)|^2 dy \right)^{-1} (1 + \varepsilon_{m+1}) g(x) \\ - C_{m,\varepsilon} (1 + \varepsilon_{m+1}) g(x).$$

Подставив в последнюю формулу выражение для $C_{m,\varepsilon}$, получаем искомое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. Если для всех натуральных n справедливо равенство $\varepsilon_n = 0$ (ошибки при вычислении коэффициентов отсутствуют), то частичные суммы орторекурсивного разложения по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют вид:

$$S_N(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \bigcup_{n=1}^N \Delta_n, \\ \int_{\Delta_{k(x;N)}} f(y) \overline{g(y)} dy \left(\int_{\Delta_{k(x;N)}} |g(y)|^2 dy \right)^{-1} g(x), & x \in \bigcup_{n=1}^N \Delta_n, \end{cases}$$

где $k(x; N)$ – наибольший из членов последовательности $J(x)$, не превосходящий N .

Перейдем к доказательству теорем, устанавливающих сходимость орторекурсивных разложений по изучаемой системе к разлагаемому элементу.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции f и g таковы, что $f\bar{g}$ и $|g|^2$ локально интегрируемы на I по Данжуа–Перрону, $g(x) \neq 0$ почти всюду. Кроме того, пусть для почти всех точек $x \in I$ справедливы следующие условия:

(A1) для любого натурального числа K выполняется соотношение

$$\prod_{n: j_n(x) \geq K} \varepsilon_{j_n(x)} = 0;$$

(A2) существует такое число $A = A(x)$, что для всех натуральных чисел N справедливо неравенство

$$\sum_{n: j_n(x) \leq N} \left(|1 + \varepsilon_{j_n(x)}| \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} |\varepsilon_{j_l(x)}| \right) \leq A.$$

Тогда орторекурсивное разложение функции f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f почти всюду на I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in I$. Из локальной интегрируемости по Данжуа–Перрону функций $f\bar{g}$ и $|g|^2$ на I следует, что интегралы с переменным верхним пределом

$$F_1(x) = \int_{x_0}^x f(y) \overline{g(y)} dy, \quad F_2(x) = \int_{x_0}^x |g(y)|^2 dy$$

дифференцируемы почти всюду на I и для почти всех точек $x \in I$ справедливы равенства $F_1'(x) = f(x) \overline{g(x)}$, $F_2'(x) = |g(x)|^2$ (см. [6; гл. VIII, § 1]).

Через E обозначим множество точек $x \in I$, удовлетворяющих условиям (A1), (A2), а также условиям:

- (D) $F_1'(x) = f(x) \overline{g(x)}$, $F_2'(x) = |g(x)|^2$;
- (G) $g(x) \neq 0$.

Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что при всех $x \in E$ частичные суммы $S_{N,\varepsilon}(x)$ сходятся к $f(x)$ при $N \rightarrow \infty$.

Зафиксируем произвольную точку $x \in E$ и произвольное число $\delta > 0$. Из условия (D) следует, что для любого положительного числа γ существует такое число $h_1 > 0$, что для всех действительных чисел h , удовлетворяющих условиям $|h| < h_1$ и $x + h \in I$, выполняется оценка

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y) \overline{g(y)} dy - f(x) \overline{g(x)} \right| < \gamma.$$

Тогда для любых чисел $u, v \in I$ таких, что $0 < v - u < h_1$ и $x \in [u, v]$, справедливо неравенство

$$\left| \frac{1}{v-u} \int_u^v f(y) \overline{g(y)} dy - f(x) \overline{g(x)} \right| < \gamma.$$

Действительно, если $x = u$ или $x = v$, то это неравенство непосредственно следует из выбора числа h_1 , если же $x \in (u, v)$, то имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{v-u} \int_u^v f(y) \overline{g(y)} dy - f(x) \overline{g(x)} \right| \\ &= \left| \frac{x-u}{v-u} \cdot \frac{1}{x-u} \int_u^x f(y) \overline{g(y)} dy + \frac{v-x}{v-u} \cdot \frac{1}{v-x} \int_x^v f(y) \overline{g(y)} dy \right. \\ & \quad \left. - \frac{x-u}{v-u} \cdot f(x) \overline{g(x)} - \frac{v-x}{v-u} \cdot f(x) \overline{g(x)} \right| < \frac{x-u}{v-u} \cdot \gamma + \frac{v-x}{v-u} \cdot \gamma = \gamma. \end{aligned}$$

Аналогично, для любого положительного числа γ существует такое число $h_2 > 0$, что для всех чисел $u, v \in I$ таких, что $0 < v - u < h_2$ и $x \in [u, v]$, справедливо неравенство

$$\left| \frac{1}{v-u} \int_u^v |g(y)|^2 dy - |g(x)|^2 \right| < \gamma.$$

Отсюда, используя условие (G), получаем, что существует такое число $h_0 > 0$, что для всех чисел $u, v \in I$, удовлетворяющих условиям $0 < v - u < h_0$ и $x \in [u, v]$, имеет место оценка

$$\left| \int_u^v f(y) \overline{g(y)} dy \left(\int_u^v |g(y)|^2 dy \right)^{-1} - \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \delta.$$

Найдем такое натуральное число K , что $\Delta_K \ni x$ и $|\Delta_K| < h_0$ (существование искомого K следует из условия ($\Xi 1$)). Рассмотрим значения частичных сумм $S_{N,\varepsilon}(x)$ для $N > K$. По теореме 1

$$\begin{aligned} S_{N,\varepsilon}(x) &= \left[\sum_{n: j_n(x) \leq K-1} \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} f(y) \overline{g(y)} dy \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} |g(y)|^2 dy \right)^{-1} \right. \right. \\ & \quad \left. \times (1 + \varepsilon_{j_n(x)}) \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq K-1} (-\varepsilon_{j_l(x)}) \right) g(x) \Big] \prod_{l: K \leq j_l(x) \leq N} (-\varepsilon_{j_l(x)}) \\ &+ \sum_{n: K \leq j_n(x) \leq N} \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} f(y) \overline{g(y)} dy \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} |g(y)|^2 dy \right)^{-1} \right. \\ & \quad \left. \times (1 + \varepsilon_{j_n(x)}) \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} (-\varepsilon_{j_l(x)}) \right) g(x). \end{aligned}$$

Из условия (A1) следует, что при $N \rightarrow \infty$ первое слагаемое сходится к нулю. Для оценки второго слагаемого заметим, что в силу условия ($\Xi 2$) и выбора K для всех натуральных чисел n таких, что $j_n(x) \geq K$, справедливо представление

$$\int_{\Delta_{j_n(x)}} f(y) \overline{g(y)} dy \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} |g(y)|^2 dy \right)^{-1} = \frac{f(x)}{g(x)} + \theta_{j_n(x)}(x),$$

где $|\theta_{j_n(x)}(x)| < \delta$. Для завершения доказательства остается использовать соотношение

$$\sum_{n: K \leq j_n(x) \leq N} \left(\frac{f(x)}{g(x)} (1 + \varepsilon_{j_n(x)}) \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} (-\varepsilon_{j_l(x)}) \right) g(x) \rightarrow f(x), \quad N \rightarrow \infty,$$

вытекающее из условия (A1) и равенства

$$\begin{aligned} & \sum_{n: K \leq j_n(x) \leq N} \left((1 + \varepsilon_{j_n(x)}) \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} (-\varepsilon_{j_l(x)}) \right) \\ &= \sum_{n: K \leq j_n(x) \leq N} \left(\prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} (-\varepsilon_{j_l(x)}) - \prod_{l: l \geq n, j_l(x) \leq N} (-\varepsilon_{j_l(x)}) \right) \\ &= 1 - \prod_{l: K \leq j_l(x) \leq N} (-\varepsilon_{j_l(x)}), \end{aligned}$$

а также оценку

$$\left| \sum_{n: K \leq j_n(x) \leq N} \left(\theta_{j_n(x)}(x) (1 + \varepsilon_{j_n(x)}) \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} (-\varepsilon_{j_l(x)}) \right) g(x) \right| \leq A(x) |g(x)| \delta,$$

следующую из условия (A2).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функции f и g таковы, что $f\overline{g}$ и $|g|^2$ локально интегрируемы на I по Данжуга–Перрону, $g(x) \neq 0$ почти всюду. Кроме того, пусть существует такое действительное число q , $0 \leq q < 1$, что при всех натуральных n имеет место неравенство $|\varepsilon_n| \leq q$. Тогда орторекурсивное разложение функции f по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ с ошибками $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к f почти всюду на I .

ТЕОРЕМА 3. Пусть для некоторого числа p , $1 < p < \infty$, функция f принадлежит пространству $L^p(I, \mu)$, а функция g такова, что g измерима, g и $1/g$ существенно ограничены. Пусть также почти все $x \in I$ удовлетворяют условию

(A1) для любого натурального числа K имеет место соотношение

$$\prod_{n: j_n(x) \geq K} \varepsilon_{j_n(x)} = 0.$$

Кроме того, пусть справедливо утверждение:

(A2) существует такое число $A > 0$, что для почти всех точек $x \in I$ и всех натуральных чисел N имеет место оценка

$$\sum_{n: j_n(x) \leq N} \left(|1 + \varepsilon_{j_n(x)}| \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} |\varepsilon_{j_l(x)}| \right) \leq A.$$

Тогда орторекурсивное разложение функции f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f в метрике L^p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия существенной ограниченности функций g и $1/g$ следует, что существуют такие положительные числа c и C , что для почти всех $x \in I$ справедливо неравенство $c \leq |g(x)| \leq C$. Используя теорему 1 и условие (A2), оценим частичные суммы $S_{N,\varepsilon}(x)$ орторекурсивного разложения функции f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для всех натуральных чисел N и почти всех точек $x \in I$ имеем:

$$\begin{aligned} |S_{N,\varepsilon}(x)| &= \left| \sum_{n: j_n(x) \leq N} \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} f(y) \overline{g(y)} dy \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} |g(y)|^2 dy \right)^{-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \times (1 + \varepsilon_{j_n(x)}) \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} (-\varepsilon_{j_l(x)}) \right) g(x) \Big| \\ &\leq \frac{C^2}{c^2} \sum_{n: j_n(x) \leq N} \left(\frac{1}{|\Delta_{j_n(x)}|} \int_{\Delta_{j_n(x)}} |f(y)| dy \cdot |1 + \varepsilon_{j_n(x)}| \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} |\varepsilon_{j_l(x)}| \right) \\ &\leq \frac{C^2}{c^2} \sum_{n: j_n(x) \leq N} \left(M_f(x) \cdot |1 + \varepsilon_{j_n(x)}| \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} |\varepsilon_{j_l(x)}| \right) \leq \frac{AC^2}{c^2} M_f(x), \end{aligned}$$

где

$$M_f(x) = \sup_{\Delta: x \in \Delta \subset I} \frac{1}{|\Delta|} \cdot \int_{\Delta} |f(y)| dy$$

($\sup$ берется по всем принадлежащим I невырожденным конечным промежуткам, содержащим точку x) – максимальная функция Харди–Литтлвуда (см. [8; гл. VIII, п. В] или [9; приложение 1, § 2, п. 2°]). По условию функция $f \in L^p(I, \mu)$, тогда и $M_f(x) \in L^p(X, \mu)$ (см. [8; гл. VIII, п. В, п. 2°] или [9; приложение 1, § 2, п. 2°, теорема 2]). Для завершения доказательства остается использовать теорему 2 и теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. [6; гл. I, § 12, теорема (12.11)] или [10; гл. 3, § 16, теорема 16.3]).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть для некоторого числа p , $1 < p < \infty$, функция f принадлежит пространству $L^p(I, \mu)$, а функция g такова, что g измерима, g и $1/g$ существенно ограничены. Пусть также существует такое действительное число q , $0 \leq q < 1$, что при всех натуральных n имеет место неравенство $|\varepsilon_n| \leq q$. Тогда орторекурсивное разложение функции f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f в метрике L^p .

ТЕОРЕМА 4. Пусть функции f и g непрерывны на промежутке I , причем $g(x) \neq 0$ на I . Пусть Q – некоторый лежащий в I компакт такой, что выполняются условия:

- (A1) для любого натурального числа K и любого положительного числа δ существует такой номер N_0 , что для всех $N \in \mathbb{N}$, $N > N_0$, и для всех точек $x \in Q$ справедлива оценка

$$\prod_{n: K \leq j_n(x) \leq N} |\varepsilon_{j_n(x)}| < \delta;$$

- (A2) существует такое число $A > 0$, что для всех точек $x \in Q$ и всех натуральных чисел N имеет место неравенство

$$\sum_{n: j_n(x) \leq N} \left(|1 + \varepsilon_{j_n(x)}| \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} |\varepsilon_{j_l(x)}| \right) \leq A.$$

Кроме того, пусть система промежутков Ξ удовлетворяет условию:

- (Ξ3) для любого элемента $x \in Q$ и любого числа $\delta > 0$ существуют один или два принадлежащих системе Ξ промежутка длины меньше δ , покрывающие x вместе с некоторой I -окрестностью.

Тогда орторекурсивное разложение функции f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f равномерно на множестве Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $Q = \emptyset$, то утверждение тривиально. Будем считать, что Q непусто. Используя условие (Ξ1), найдем промежутки $\Delta_{k_1}, \Delta_{k_2} \in \Xi$, принадлежащие I вместе со своими концами и содержащие $\min Q$ и $\max Q$ соответственно. Обозначим через α наименьший, а через β – наибольший из концов этих промежутков. Имеет место соотношение: $Q \subset [\alpha, \beta] \subset I$. Отметим, что в силу условия (Ξ2) для всех натуральных чисел k таких, что $k \geq \max\{k_1, k_2\}$ и $\Delta_k \cap Q \neq \emptyset$, справедливо включение $\Delta_k \subset [\alpha, \beta]$.

Зафиксируем произвольное положительное число δ . Так как функции f и g равномерно непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$ и, кроме того, функция g отделена от нуля на этом отрезке, существует такое число $h_0 > 0$, что для всех точек $x \in [\alpha, \beta]$ и для всех чисел u и v , принадлежащих отрезку $[\alpha, \beta]$ и удовлетворяющих условиям $0 < v - u < h_0$, $[u, v] \ni x$, справедливо неравенство

$$\left| \int_u^v f(y) \overline{g(y)} dy \left(\int_u^v |g(y)|^2 dy \right)^{-1} - \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \delta.$$

Для всех точек $x \in Q$ найдем, пользуясь условием (Ξ3), один или два принадлежащих системе Ξ промежутка длины меньше h_0 с номерами, большими $\max\{k_1, k_2\}$, содержащие x вместе с некоторой I -окрестностью. Существует конечное покрытие компакта Q такими окрестностями, а значит, и выбранными промежутками. Выбросив из покрытия все промежутки, не пересекающиеся с Q , получим конечную систему лежащих в отрезке $[\alpha, \beta]$ промежутков $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_s}$ с длинами меньше h_0 , покрывающую Q .

Обозначим через K наибольшее из чисел $i_1, \dots, i_s$. Рассмотрим значения частичных сумм $S_{N,\varepsilon}(x)$ для $N > K$ и $x \in Q$. По теореме 1

$$\begin{aligned} S_{N,\varepsilon}(x) = & \left[\sum_{n: j_n(x) \leq K} \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} f(y) \overline{g(y)} dy \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} |g(y)|^2 dy \right)^{-1} \right. \right. \\ & \times (1 + \varepsilon_{j_n(x)}) \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq K} (-\varepsilon_{j_l(x)}) \left. \right) g(x) \Big] \prod_{l: K+1 \leq j_l(x) \leq N} (-\varepsilon_{j_l(x)}) \\ & + \sum_{n: K+1 \leq j_n(x) \leq N} \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} f(y) \overline{g(y)} dy \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} |g(y)|^2 dy \right)^{-1} \right. \\ & \times (1 + \varepsilon_{j_n(x)}) \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} (-\varepsilon_{j_l(x)}) \left. \right) g(x). \end{aligned}$$

Из условий $(\overline{A1})$, $(\overline{A2})$, ограниченности на множестве Q функций f и g , а также отделимости функции g от нуля на этом множестве следует, что при $N \rightarrow \infty$ первое слагаемое равномерно на Q сходится к нулю. Для оценки второго слагаемого заметим, что в силу условия $(\Xi 2)$ и выбора K для всех точек $x \in Q$ и всех натуральных чисел n таких, что $j_n(x) \geq K+1$, выполняются соотношения $\Delta_{j_n(x)} \subset [\alpha, \beta]$ и $|\Delta_{j_n(x)}| < h_0$. Отсюда и из выбора числа h_0 следует справедливость представления

$$\int_{\Delta_{j_n(x)}} f(y) \overline{g(y)} dy \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} |g(y)|^2 dy \right)^{-1} = \frac{f(x)}{g(x)} + \theta_{j_n(x)}(x),$$

где $|\theta_{j_n(x)}(x)| < \delta$. Для завершения доказательства остается использовать соотношение

$$\sum_{n: K+1 \leq j_n(x) \leq N} \left(\frac{f(x)}{g(x)} (1 + \varepsilon_{j_n(x)}) \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} (-\varepsilon_{j_l(x)}) \right) g(x) \Rightarrow f(x),$$

$N \rightarrow \infty$, $x \in Q$, вытекающее из условия $(\overline{A1})$, ограниченности на множестве Q функции f и равенства

$$\begin{aligned} & \sum_{n: K+1 \leq j_n(x) \leq N} \left((1 + \varepsilon_{j_n(x)}) \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} (-\varepsilon_{j_l(x)}) \right) \\ & = 1 - \prod_{l: K+1 \leq j_l(x) \leq N} (-\varepsilon_{j_l(x)}), \end{aligned}$$

а также оценку

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n: K+1 \leq j_n(x) \leq N} \left(\theta_{j_n(x)}(x) (1 + \varepsilon_{j_n(x)}) \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} (-\varepsilon_{j_l(x)}) \right) g(x) \right| \\ & \leq A \max_{x \in [\alpha, \beta]} |g(x)| \delta, \end{aligned}$$

следующую из условия $(\overline{A2})$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функции f и g непрерывны на промежутке I , причем $g(x) \neq 0$ на I , Q – некоторый лежащий в I компакт. Пусть также существует такое действительное число q , $0 \leq q < 1$, что при всех натуральных n имеет место неравенство $|\varepsilon_n| \leq q$. Кроме того, пусть система промежутков Ξ удовлетворяет условию $(\Xi 3)$. Тогда орторекурсивное разложение функции f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f равномерно на множестве Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что для любого компакта $Q \subset I$ из существования числа $q \in [0, 1)$ такого, что $|\varepsilon_n| \leq q$, $n = 1, 2, \dots$, следует справедливость условий $(\overline{A1})$, $(\overline{A2})$.

Начнем с проверки условия $(\overline{A2})$. Имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{n: j_n(x) \leq N} \left(|1 + \varepsilon_{j_n(x)}| \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} |\varepsilon_{j_l(x)}| \right) \\ & \leq \sum_{n: j_n(x) \leq N} \left((1 + q) \prod_{l: l > n, j_l(x) \leq N} q \right) \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^n \leq \frac{2}{1 - q}. \end{aligned}$$

Покажем справедливость условия $(\overline{A1})$. В ходе доказательства теоремы 4 было установлено, что для любого натурального числа N существует конечное покрытие компакта Q промежутками из системы Ξ с номерами большими чем N . Зафиксируем произвольные положительное число δ и натуральное число K . Найдем число $n \in \mathbb{N}$, для которого справедливо неравенство $q^n < \delta$. Положим $K_0 = K$. Найдем конечное покрытие множества Q промежутками из системы Ξ с номерами большими чем K_0 . Наибольший из номеров промежутков, попавших в покрытие, обозначим через K_1 . Найдем конечное покрытие множества Q промежутками из системы Ξ с номерами большими чем K_1 . Наибольший из номеров промежутков, попавших в покрытие, обозначим через K_2 . Продолжая процесс, найдем числа $K_3, \dots, K_n$. Положим $N_0 = K_n$.

Из построения чисел $K_0, \dots, K_n$ следует, что для произвольной точки $x \in Q$ и произвольного числа $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ существует по крайней мере один номер j , $K_{l-1} < j \leq K_l$, такой, что $\Delta_j \ni x$. Тогда для любой точки $x \in Q$ и любого числа $N > N_0$ в произведение $\prod_{n: K \leq j_n(x) \leq N} |\varepsilon_{j_n(x)}|$ входит по меньшей мере n множителей, каждый из которых не превосходит q . В результате все произведение можно оценить через q^n , а эта величина в силу выбора n строго меньше чем δ .

Отметим, что без условия $(\Xi 3)$ утверждение теоремы 4 становится неверным даже в случае нулевых ошибок ($\varepsilon_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$). Соответствующий пример можно найти в статье [4].

Перейдем к изучению сходимости орторекурсивного разложения по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ в метрике L^1 . Введем некоторые обозначения. Пусть x – некоторая точка из промежутка I , N – некоторое натуральное число. Через $s(x; N)$ обозначим число содержащих x промежутков $\Delta_k \in \Xi$ с номерами k , не превосходящими N . Через $\Xi_{l;N}$, $l = 1, 2, \dots$, обозначим множество таких промежутков $\Delta_k \in \Xi$, что для некоторой точки $y \in I$ выполняется соотношение $k = j_{s(y;N)+1-l}(y)$ (т.е. $\Delta_k \ni y$, $k \leq N$ и множество $\{m : m \in \mathbb{N}, k + 1 \leq m \leq N$,

$\Delta_m \ni y\}$ содержит ровно $l - 1$ элемент). Легко видеть, что при фиксированном N начиная с некоторого номера $l_0 = l_0(N)$ множества $\Xi_{l;N}$ пусты. Если $\Xi_{l;N}$ непусто, то через $\tilde{\varepsilon}(l; N)$ и $\beta(l; N)$ обозначим $\sup_{k: \Delta_k \in \Xi_{l;N}} |\varepsilon_k|$ и $\sup_{k: \Delta_k \in \Xi_{l;N}} |1 + \varepsilon_k|$ соответственно, в противном случае положим $\tilde{\varepsilon}(l; N) = \beta(l; N) = 0$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция f принадлежит пространству $L^1(I, \mu)$, а функция g такова, что g измерима, g и $1/g$ существенно ограничены. Пусть также почти все $x \in I$ удовлетворяют условию:

(A1) для любого натурального числа K имеет место соотношение

$$\prod_{n: j_n(x) \geq K} \varepsilon_{j_n(x)} = 0.$$

Кроме того, пусть справедливо утверждение:

(A2) существует такое положительное число A , что для всех натуральных чисел N имеет место оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\beta(n; N) \prod_{l=1}^{n-1} \tilde{\varepsilon}(l; N) \right] \leq A.$$

Пусть также система промежутков Ξ удовлетворяет требованию:

(Ξ4) существует такое число $M \in \mathbb{N}$, что для любой точки $x \in I$ и любых натуральных чисел l, N число промежутков, входящих в множество $\Xi_{l;N}$ и содержащих x , не превосходит M .

Тогда орторекурсивное разложение функции f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f в метрике L^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем положительные числа s и C такие, что для почти всех $x \in I$ выполняется оценка $s \leq |g(x)| \leq C$ (существование таких чисел следует из существенной ограниченности функций g и $1/g$). Зафиксируем произвольное натуральное число N .

Через $E_k, k = 1, 2, \dots, N$, обозначим множество таких точек $x \in I$, что

$$j_{s(x;N)}(x) = k$$

(т.е. точек x таких, что $\Delta_k \ni x$ и для всех натуральных чисел $n, k < n \leq N$, $\Delta_n \not\ni x$). Отметим, что множества E_k удовлетворяют следующим условиям:

(E1) $\bigcup_{k=1}^N E_k = \bigcup_{k=1}^N \Delta_k$;

(E2) для любых натуральных чисел k и $l, 1 \leq k, l \leq N$, либо $E_k \subset \Delta_l$, либо $E_k \cap \Delta_l = \emptyset$;

(E3) для любых натуральных чисел k и $l, 1 \leq k < l \leq N$, выполняется соотношение $E_k \cap E_l = \emptyset$

(справедливость этих утверждений следует из свойства (Ξ2) системы Ξ).

Из теоремы 1 и условий (E1), (E2) следует, что для всех точек x , не принадлежащих $\bigcup_{k=1}^N E_k$, частичная сумма $S_{N,\varepsilon}(x)$ равна нулю, а для почти всех $x \in E_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, частичная сумма $S_{N,\varepsilon}(x)$ удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} |S_{N,\varepsilon}(x)| &= \left| \sum_{n: j_n(x) \leq N} \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} f(y) \overline{g(y)} dy \left(\int_{\Delta_{j_n(x)}} |g(y)|^2 dy \right)^{-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (1 + \varepsilon_{j_n(x)}) \prod_{m: m > n, j_m(x) \leq N} (-\varepsilon_{j_m(x)}) \right) g(x) \right| \\ &\leq \frac{C^2}{c^2} \sum_{n=1}^{s(x;N)} \left(\frac{1}{|\Delta_{j_n(x)}|} \int_{\Delta_{j_n(x)}} |f(y)| dy \cdot |1 + \varepsilon_{j_n(x)}| \prod_{m=n+1}^{s(x;N)} |\varepsilon_{j_m(x)}| \right) \\ &\leq \frac{C^2}{c^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n: E_k \subset \Delta_n \in \Xi_{l;N}} \left(\frac{1}{|\Delta_n|} \int_{\Delta_n} |f(y)| dy \cdot \beta(l; N) \prod_{m=1}^{l-1} \tilde{\varepsilon}(m; N) \right) \end{aligned}$$

(отметим, что так как начиная с некоторого номера $l_0 = l_0(N)$ множества $\Xi_{l;N}$ пусты, во внешней сумме слагаемых, отличных от нуля, лишь конечное число). Отсюда вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \|S_{N,\varepsilon}\|_1 &\leq \frac{C^2}{c^2} \sum_{k=1}^N \left[|E_k| \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n: E_k \subset \Delta_n \in \Xi_{l;N}} \left(\frac{1}{|\Delta_n|} \int_{\Delta_n} |f(y)| dy \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \beta(l; N) \prod_{m=1}^{l-1} \tilde{\varepsilon}(m; N) \right) \right] \\ &= \frac{C^2}{c^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k: n: E_k \subset \Delta_n \in \Xi(l;N)} \left(\frac{|E_k|}{|\Delta_n|} \int_{\Delta_n} |f(y)| dy \cdot \beta(l; N) \prod_{m=1}^{l-1} \tilde{\varepsilon}(m; N) \right) \\ &= \frac{C^2}{c^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\beta(l; N) \prod_{m=1}^{l-1} \tilde{\varepsilon}(m; N) \sum_{n: \Delta_n \in \Xi_{l;N}} \left(\int_{\Delta_n} |f(y)| dy \cdot \sum_{k: E_k \subset \Delta_n} \frac{|E_k|}{|\Delta_n|} \right) \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что для любого натурального числа n , $1 \leq n \leq N$, из условия (E3) следует соотношение $\sum_{k: E_k \subset \Delta_n} |E_k|/|\Delta_n| \leq 1$. Применим это неравенство, а также условие (E4):

$$\begin{aligned} \|S_{N,\varepsilon}\|_1 &\leq \frac{C^2}{c^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\beta(l; N) \prod_{m=1}^{l-1} \tilde{\varepsilon}(m; N) \sum_{n: \Delta_n \in \Xi_{l;N}} \int_{\Delta_n} |f(y)| dy \right] \\ &\leq \frac{MC^2}{c^2} \|f\|_1 \sum_{l=1}^{\infty} \left[\beta(l; N) \prod_{m=1}^{l-1} \tilde{\varepsilon}(m; N) \right]. \end{aligned}$$

Используя условие $(\overline{A2})$, получаем окончательную оценку

$$\|S_{N,\varepsilon}\|_1 \leq \frac{AMC^2}{c^2} \|f\|_1,$$

справедливую для любой функции $f \in L^1(I, \mu)$.

Перейдем непосредственно к доказательству сходимости. Выберем произвольное число $\delta > 0$. Для данной функции f найдем такой интервал $I_0 = (\alpha, \beta) \subset I$ и такую функцию $\varphi \in L^2(I, \mu)$, что $\varphi = 0$ вне I_0 и справедлива оценка $\|f - \varphi\|_1 < \delta$ (см. [10; гл. 4, §23, теорема 23.3]). Обозначим через α_1 и β_1 соответственно левый конец промежутка $\Delta_{j_1(\alpha)}$ и правый конец промежутка $\Delta_{j_1(\beta)}$. Имеет место неравенство

$$\|f - S_{N,\varepsilon}(f)\|_1 \leq \|f - \varphi\|_1 + \|\varphi - S_{N,\varepsilon}(\varphi)\|_1 + \|S_{N,\varepsilon}(\varphi) - S_{N,\varepsilon}(f)\|_1.$$

Первое слагаемое правой части оценивается через δ , последнее слагаемое равняется $\|S_{N,\varepsilon}(\varphi - f)\|_1$ и оценивается через $AMC^2\delta/c^2$. Для завершения доказательства достаточно показать, что при $N \rightarrow \infty$ второе слагаемое стремится к нулю. Из условия $(\Xi 2)$ следует, что для всех натуральных k промежутки Δ_k либо целиком входят в отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$, либо не перекрываются с этим отрезком. Отсюда и из равенства $\varphi(x) = 0$ ($x \notin [\alpha_1, \beta_1]$) получаем, что для всех целых неотрицательных N частичная сумма $S_{N,\varepsilon}(\varphi)$ равна нулю вне $[\alpha_1, \beta_1]$. Заметим, что из условия $(\overline{A2})$ следует условие $(A2)$. Тогда согласно теореме 3 и неравенству Гёльдера (см. [10; гл. 4, §22, теорема 22.1]) имеем:

$$\|\varphi - S_{N,\varepsilon}(\varphi)\|_1 \leq \|\varphi - S_{N,\varepsilon}(\varphi)\|_2 \cdot \sqrt{\beta_1 - \alpha_1} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функция f принадлежит пространству $L^1(I, \mu)$, а функция g такова, что g измерима, g и $1/g$ существенно ограничены. Пусть также существует такое действительное число q , $0 \leq q < 1$, что при всех натуральных n имеет место неравенство $|\varepsilon_n| \leq q$. Кроме того, пусть система промежутков Ξ удовлетворяет требованию $(\Xi 4)$. Тогда орторекурсивное разложение функции f по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ с ошибками $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к f в метрике L^1 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы 5 видно, что в случае нулевых ошибок ($\varepsilon_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$) условие $(\Xi 4)$ можно немного ослабить, а именно требовать его справедливость лишь при $l = 1$. Однако полностью отказаться от условия $(\Xi 4)$ в теореме 5 нельзя даже в этом случае (соответствующий пример можно найти в статье [4]).

В заключение для промежутка $I = [0, 1)$ приведем пример системы Ξ , удовлетворяющей условиям $(\Xi 1)$ – $(\Xi 4)$. Представим натуральное число n в виде

$$n = 2^m + i,$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$, а $i \in \{0, 1, \dots, 2^m - 1\}$. Положим

$$\Delta_n = \left[\frac{i}{2^m}, \frac{i+1}{2^m} \right).$$

Система $\Xi = \{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$ является искомой.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за ценные замечания, которые помогли значительно улучшить работу.

Список литературы

1. *Стечкин Б. С., Стечкин С. Б.* Среднее квадратическое и среднее арифметическое // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. №2. С. 287–290.
2. *Галатенко В. В.* Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. №1. С. 59–70.
3. *Лукашенко Т. П.* Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера–Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 10-й Саратовской зимней математической школы. 27 января–2 февраля 2000 г. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2000. С. 83.
4. *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2001. №1. С. 6–10.
5. *Gribonval R., Nielsen M.* Approximate weak greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 2001. V. 14. №4. P. 361–378.
6. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
7. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. СПб.: Лань, 1999.
8. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984.
9. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999.
10. *Дьяченко М. И., Ульянов П. Л.* Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: vvgalatenko@yahoo.com

Поступила в редакцию
20.01.2003 и 04.12.2003