Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Р. Джукашев, А. М. Шелехов, Многомерные гладкие луны с универсальным свойством эластичности, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 5, 35–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8331>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 10:18:45

УДК 514.763.7+512.548.77

К. Р. Джукашев, А. М. Шелехов

Многомерные гладкие лупы с универсальным свойством эластичности

Пусть $\tilde{E}$ – универсальное (изотопически инвариантное) тождество, производное от тождества эластичности $E: (xy)x = x(yx)$. Одним из авторов было ранее доказано, что: а) всякая локальная лупа размерности r с тождеством $\tilde{E}$ (короче, лупа $\tilde{E}$) является гладкой средней лупой Бола размерности r ; б) гладкие двумерные лупы $\tilde{E}$ являются группами Ли; в) с точностью до изотопии существует всего две трехмерные лупы $\tilde{E}$ – лупы E_1 и E_2 . В настоящей работе лупы E_1 и E_2 обобщаются на многомерный случай. В исследовании существенную роль играет тот факт, что всякой гладкой лупе $\tilde{E}$ размерности r однозначно соответствует многомерная три-ткань на многообразии размерности $2r$. При этом исследуемый класс луп характеризуется тем, что у соответствующей ткани тензор кручения имеет ранг 1 (т.е. определяемая им алгебра имеет одномерную производную алгебру). Это дает возможность записать в инвариантной форме дифференциальные уравнения проблемы. Полученную систему уравнений удалось проинтегрировать в самом общем случае и найти уравнения искомым луп в локальных координатах.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: лупа, тождество эластичности, универсальное тождество, три-ткань Бола, эластичная три-ткань.

DOI: 10.4213/sm8331

Введение

Интерес к неассоциативным структурам возник с открытием Сильвестром и Кэли алгебры октав. Неассоциативные структуры, не являющиеся, вообще говоря, алгебрами и в некотором смысле близкие к группам, начала изучать, по-видимому, Рут Муфанг (см. [1]). Она рассматривала группоиды со свойством однозначной разрешимости и с двусторонней единицей (лупы), в которых выполняется тождество $M: (xy)(zx) = x((yz)x)$ (теперь они называются лупами Муфанг или M). Тождество Муфанг вытекает из тождества ассоциативности, но обратное, вообще говоря, неверно. Муфанг доказала, что такие лупы диаассоциативны – любые два элемента в них порождают ассоциативную подлупу.

Аналитические лупы, близкие у группам Ли, начал рассматривать А. И. Мальцев. Напомним, что гладкое отображение $f: X \times Y \rightarrow Z$ (X, Y, Z – гладкие r -мерных многообразия) называется локальной гладкой квазигруппой, если оно является локальным диффеоморфизмом: а) при фиксированном x ; б) при фиксированном y . Согласно этому определению уравнение $z = f(x, y)$

локально однозначно разрешимо как относительно переменной x , так и относительно переменной y . Отображение f называется *умножением* и обозначается точкой и другими знаками, как это принято в алгебраической теории: $z = f(x, y) \equiv x \cdot y$.

Локальной гладкой лупой называется r -мерное дифференцируемое многообразие Q с фиксированной точкой e , ее окрестностью U и функцией $f: U \times U \rightarrow Q$ такой, что: а) f является локальной гладкой квазигруппой; б) $f(x, e) = f(e, x) = x$ для любого x из U . Элемент e называется единицей.

В [2] А. И. Мальцев ввел понятие касательной алгебры локальной аналитической лупы и показал, что теория аналитических луп Муфанг во многом повторяет теорию групп Ли. Например, для первых также имеет место формула Кэмпбелла–Хаусдорфа, а их касательная алгебра (теперь она называется алгеброй Мальцева) определяется некоторым кубическим тождеством на структурный тензор (тождество Сейгла) – аналогом тождества Якоби. Лупам Муфанг и алгебрам Мальцева посвящено много работ, которых мы не касаемся. Отметим только, что интенсивные исследования неассоциативных луп и нелиевых алгебр вызваны их многочисленными приложениями, в частности в теоретической физике (см. об этом, например, в [3]).

Следующие (по сложности) за лупами Муфанг многообразия луп¹ – левые и правые лупы Бола B_l и B_r , введенные в [4]. Они определяются соответственно тождествами $B_l: (x(yx))z = x(y(xz))$ и $B_r: x((yz)y) = ((xy)z)y$. Эти тождества вытекают из тождества Муфанг, т.е. $\{M\} \subset \{B_l\}$ и $\{M\} \subset \{B_r\}$. Более точно, можно показать, что $\{M\} = \{B_l\} \cap \{B_r\}$. Гладкие лупы Бола интересны, в частности, тем, что на них естественным образом возникает структура симметрического пространства (см. [5]).

Как правило, квазигруппы рассматриваются с точностью до изотопии (см. [6]). Напомним, что изотопией или изотопическим преобразованием квазигруппы (в частности, лупы) $Q(\cdot)$ в квазигруппу $\tilde{Q}(\circ)$ называется тройка биекций (α, β, γ) такая, что $\alpha(x) \circ \beta(y) = \gamma(x \cdot y)$. В частности, если $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma$, то изотопия есть изоморфизм.

Изоморфизм сохраняет тождества: если в квазигруппе выполняется тождество T , то оно выполняется и во всякой квазигруппе, изоморфной T . Но при изотопии тождества, вообще говоря, не сохраняются. Тождество T называется универсальным, если оно сохраняется при изотопии (см. [6]). В лупах тождество ассоциативности, тождество Муфанг, левое и правое тождества Бола являются универсальными; тождество коммутативности, тождества левой и правой альтернативности – $(xx)y = x(xy)$ и $(xy)y = x(yu)$ – нет. В связи с этим в теории квазигрупп и луп актуальна следующая задача: для заданного (не универсального, вообще говоря) тождества T найти такое подмногообразие луп, в котором это тождество будет универсальным. Например, тождество коммутативности будет универсальным в многообразии групп; тождества левой и правой альтернативности будут универсальными в многообразии левых и правых луп Бола соответственно. Наиболее общий результат здесь следующий: всякое тождество T универсально в многообразии луп, определяемых

¹Множество квазигрупп, в которых выполняется тождество T , в алгебре принято называть многообразием квазигрупп (variety of quasigroups), определяемым тождеством T ; такое многообразие мы будем обозначать $\{T\}$.

универсальным тождеством $\tilde{T}$, производным от тождества T . Производное тождество $\tilde{T}$ получается из исходного тождества T заменой каждого произведения $x \cdot y$ на произведение вида $x/u \cdot v \setminus y$ (здесь символы $\setminus$ и $/$ обозначают левую и правую обратные операции относительно операции $\cdot$, т.е. если $u \cdot v = w$, то $v = u \setminus w$ и $u = w/v$).

В [7] (см. также [8], [9]) рассматривались гладкие лупы, определяемые универсальным тождеством

$$\tilde{E}: (x/u \cdot v \setminus y)/u \cdot v \setminus x = x/u \cdot v \setminus (y/u \cdot v \setminus x),$$

производным от тождества эластичности $(xy)x = x(yx)$. Как доказано в [7], всякая гладкая лупа $\{\tilde{E}\}$ является средней лупой Бола (лупой B_m), т.е. в ней выполняется универсальное тождество (см. [6])

$$B_m: w \circ ((u \circ v) \setminus w) = (w/v) \circ (u \setminus w).$$

Легко доказывается, что всякая лупа Муфанг является лупой $\tilde{E}$. Заметим, что в настоящее время не известно других изотопически инвариантных многообразий гладких луп, промежуточных между многообразиями $\{M\}$ и $\{B_m\}$.

Отметим также, что включение $\{\tilde{E}\} \subset \{B_m\}$, доказанное в [7] для гладких луп, не доказано, например, для конечных луп. Точнее, этот факт установлен только для луп порядка меньше 7; см. [10], [11].

Настоящая работа посвящена локальной классификации аналитических луп $\tilde{E}$, начатой в [7]. В [7] было доказано, что с точностью до изотопии существуют всего две трехмерные аналитические лупы $\tilde{E}$ – лупы E_1 и E_2 , не являющиеся лупами Муфанг, и найдены их уравнения в некоторых локальных координатах. Что касается следующих размерностей, то в [12] и [13] найдены три класса четырехмерных луп $\tilde{E}$, и других примеров до настоящей работы не было.

В настоящей статье мы используем тот же подход, что и в [7]: гладкой лупе $\tilde{E}$ размерности r сопоставляется единственным образом многомерная три-ткань E на гладком многообразии размерности $2r$. Это дает возможность использовать развитый дифференциально-геометрический аппарат теории тканей и универсальный метод Картана–Лаптева.

В [7] были получены соотношения на тензоры кривизны и кручения ткани B_m , необходимо выполняющиеся для подкласса тканей E . В настоящей статье к этим соотношениям мы добавляем другие, вытекающие из требования, что тензор кручения рассматриваемой ткани (как и тензоры кручения тканей E_1 и E_2 работы [7]) должен иметь ранг 1. В силу всех этих соотношений тензор кривизны рассматриваемой ткани B_m оказывается ковариантно постоянным, и за счет сужения семейства адаптированных реперов его компоненты можно сделать постоянными на всем многообразии ткани. Мы показываем, что система структурных уравнений рассматриваемой ткани B_m является вполне интегрируемой. Нам удалось ее проинтегрировать и найти уравнения этой ткани (или, что то же самое, уравнения ее координатной лупы) в локальных координатах. Мы доказываем, что найденные ткани действительно являются тканями E , т.е. исходные тензорные соотношения, необходимо выполняющиеся для тканей E , оказываются также и достаточными.

Основной результат статьи есть следующая

ТЕОРЕМА 1. *Существуют только два класса $2r$ -мерных эластичных немужанговых три-тканей с тензором кривизны ранга 1 и соответствующие им классы r -мерных локальных аналитических луп с универсальным свойством эластичности. В некоторых локальных координатах уравнения этих тканей (луп) имеют соответственно вид*

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + e^{2a_{1\widehat{k}}^1 x^{\widehat{k}}} (y^1 - \lambda_{\widehat{j}\widehat{l}} x^{\widehat{j}} y^{\widehat{l}}), \\ z^{\widehat{i}} &= x^{\widehat{i}} + y^{\widehat{i}}, \end{aligned} \quad (0.1)$$

где $\widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k} = 2, 3, \dots, r$, постоянные $a_{1\widehat{k}}^1$, как и постоянные $\lambda_{\widehat{j}\widehat{l}} = -\lambda_{\widehat{l}\widehat{k}}$, не все равны нулю и

$$z^1 = x^1 + y^1 - \frac{1}{2} \left(c_{\widehat{j}\widehat{k}}^1 + \frac{1}{3} b_{\widehat{l}\widehat{j}\widehat{k}}^1 (x^{\widehat{l}} - y^{\widehat{l}}) \right) (x^{\widehat{j}} y^{\widehat{k}} - x^{\widehat{k}} y^{\widehat{j}}), \quad (0.2)$$

$$z^{\widehat{i}} = x^{\widehat{i}} + y^{\widehat{i}}, \quad (0.3)$$

где $c_{\widehat{j}\widehat{k}}^1 = -c_{\widehat{k}\widehat{j}}^1$ и $b_{\widehat{l}\widehat{j}\widehat{k}}^1$ – постоянные, причем величины $b_{\widehat{l}\widehat{j}\widehat{k}}^1$ не все равны нулю и выполняются соотношения $b_{[\widehat{j}\widehat{k}\widehat{l}]}^1 = 0$. Эти лупы не являются лупами Мужанг, т.е. в них не выполняется тождество Мужанг $(xy)(zx) = x((yz)x)$.

§ 1. Структурные уравнения три-ткани E

Пусть Q – локальная аналитическая квазигруппа с операцией $z = f(x, y) \equiv x \cdot y \equiv xy$, где $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$ и X, Y, Z – области в $\mathbb{R}^r$. Тогда на прямом произведении $M = X \times Y$ определена три-ткань W , образованная слоениями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $z = f(x, y) = \text{const}$. Уравнение $z = f(x, y)$ называется уравнением ткани W , квазигруппа Q называется координатной квазигруппой ткани W .

В окрестности точки $(x, y) = (a, b)$ многообразия M на Z вводится новая операция

$$u \circ v = R_b^{-1}(u) L_a^{-1}(v)$$

(как обычно, $xy = R_y(x) = L_x(y)$). При любых a и b эта операция является локальной аналитической лупой с единицей $e = ab$. Она обозначается $l(a, b)$ и называется координатной лупой ткани W . Непосредственно из определения лупы $l(a, b)$ следует, что она изотопна координатной квазигруппе Q , поэтому можно считать, что исходная квазигруппа Q – одна из координатных луп.

Поскольку все координатные лупы $l(a, b)$ изотопны координатной квазигруппе Q , то они изотопны между собой. Таким образом, три-ткани W соответствует совокупность изотопных между собой координатных луп. С точностью до изоморфизма эта совокупность исчерпывает все изотопные между собой лупы. Поэтому если во всех координатных лупах ткани W выполняется некоторое тождество T , то в них выполняется и производное от него тождество² $\widetilde{T}$. Итак, если во всех координатных лупах ткани W выполняется некоторое тождество T , то эта ткань адекватно представляет изотопически

²Сравните определение координатной лупы с определением производного тождества.

инвариантное многообразие луп, определяемых универсальным тождеством $\tilde{T}$, производным от тождества³ T .

Напомним структурные уравнения многомерной три-ткани W , образованной слоениями λ_α , $\alpha = 1, 2, 3$, размерности r на $2r$ -мерном многообразии M . Согласно [16] на многообразии M кобазис дифференциальных форм ω_1^i и ω_2^i (далее всюду $i, j, k, \dots = 1, \dots, r$) можно выбрать так, что формы ω_1^i , ω_2^i и $\omega_1^i + \omega_2^i$ аннулируются соответственно на первом, втором и третьем слоениях ткани W . Такие кореперы определены с точностью до преобразований вида

$$\tilde{\omega}_1^i = A_j^i \omega_1^j, \quad \tilde{\omega}_2^i = A_j^i \omega_2^j, \quad \det(A_j^i) \neq 0,$$

и называются адаптированными кореперами три-ткани. В соответствии с принципом двойственности на M определяются адаптированные реперы e_1^i , e_2^i такие, что векторы e_1^i , e_2^i и $e_1^i + e_2^i$ касаются слов первого, второго и третьего слоения ткани W соответственно.

В качестве локальных координат на M естественно выбрать параметры первых двух слоений ткани W , тогда базисные формы ω_1^i и ω_2^i являются линейными комбинациями дифференциалов этих параметров.

Из определения форм ω_1^i и ω_2^i вытекает, что системы $\omega_1^i = 0$, $\omega_2^i = 0$ и $\omega_1^i + \omega_2^i = 0$ должны быть вполне интегрируемыми. Условия их интегрируемости записываются в терминах внешнего дифференцирования и называются структурными уравнениями три-ткани. Эти уравнения были впервые получены в работе [16] в следующей симметричной форме:

$$d\omega_1^i = \omega_1^j \wedge \omega_j^i + a_{jk}^i \omega_1^j \wedge \omega_1^k, \quad (1.1)$$

$$d\omega_2^i = \omega_2^j \wedge \omega_j^i - a_{jk}^i \omega_2^j \wedge \omega_2^k, \quad (1.2)$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + b_{jkl}^i \omega_1^k \wedge \omega_2^l. \quad (1.3)$$

Здесь ω_j^i – некоторые 1-формы, зависящие от дифференциалов главных параметров и так называемых вторичных параметров, которые вместе с главными являются локальными координатами на многообразии адаптированных кореперов. Базисные формы ω_1^i и ω_2^i вместе с формами ω_j^i образуют базис на расслоении адаптированных реперов ткани W , причем M является базой этого расслоения. Величины $a = (a_{jk}^i)$ и $b = (b_{jkl}^i)$ образуют тензоры относительно преобразований адаптированных кореперов ткани и называются соответственно тензорами кручения и кривизны ткани.

Как видно, структурные уравнения ткани (1.1)–(1.3) представляют собой уравнения Картана–Лаптева некоторой аффинной связности Γ , которая называется связностью Черна три-ткани W .

Внешнее дифференцирование структурных уравнений приводит к соотношениям

$$b_{[jkl]}^i = 2a_{[jk}^m a_{m|l]}^i, \quad (1.4)$$

³Более детальные рассуждения см. в [14] или [15].

которые в совокупности называются обобщенным тождеством Якоби, и к дифференциальным уравнениям на тензоры кручения и кривизны

$$\nabla a_{jk}^i = b_{[j|l|k]}^i \omega_1^l + b_{[jk]l}^i \omega_2^l, \quad (1.5)$$

$$\nabla b_{jkl}^i = c_{1jklm}^i \omega_1^m + c_{2jklm}^i \omega_2^m \quad (1.6)$$

(квадратные скобки, как обычно, обозначают альтернацию).

Дифференциальный оператор ∇ , определяемый формулой

$$\nabla a_{jk}^i \stackrel{\text{def}}{=} da_{jk}^i + a_{jk}^m \omega_m^i - a_{mk}^i \omega_j^m - a_{jm}^i \omega_k^m,$$

является ковариантным дифференциалом относительно связности Черна Г.

С помощью тензоров кручения и кривизны могут быть охарактеризованы важнейшие классы тканей. Например, тензорное условие $b_{jkl}^i = 0$ характеризует групповые ткани, у которых координатные лупы являются группами Ли; условие $a_{jk}^i = 0$, $b_{jkl}^i = 0$ характеризует параллелизуемые ткани, у которых координатные лупы являются абелевыми группами. Ткани Муфанг характеризуются условием $b_{jkl}^i = b_{[jkl]}^i$, из которого следует, что тензор кривизны ткани Муфанг кососимметричен по нижним индексам, а из (1.4) вытекает, что он выражается через тензор кручения.

Напомним, что через E мы обозначаем класс три-тканей, в координатных лупах которых выполняется тождество эластичности

$$(xy)x = x(yx) \quad (1.7)$$

и производное от него тождество. Три-ткани E характеризуются также геометрическим условием: на них замыкаются все так называемые конфигурации (фигуры) E , образованные слоями ткани (см. [14]). Произвольная фигура E приведена на рис. 1, где слои первого, второго и третьего слоений изображаются соответственно вертикальными, горизонтальными и наклонными линиями. Вертикальные и горизонтальные линии отмечены параметрами соответствующих слоев.

Рис. 1. Фигура E

Средние ткани Бола (ткани B_m) характеризуются тем, что на них замыкаются средние фигуры Бола, изображенные на рис. 2. Согласно [14] тензор кривизны тканей B_m и только таких тканей частично кососимметричен:

$$b_{j(kl)}^i = 0. \quad (1.8)$$

Рис. 2. Фигура B_m

Тензоры кручения и кривизны ткани B_m связаны также соотношениями (см. [14])

$$b_{jpk}^i a_{lm}^p - b_{kpj}^i a_{lm}^p = a_{jk}^i b_{plm}^i - a_{pk}^i b_{jlm}^p - a_{jp}^i b_{klm}^p, \quad (1.9)$$

а ковариантные производные тензора кривизны выражаются через них по формулам

$$c_{jklm}^i = -c_{jklm}^i = b_{jpm}^i a_{kl}^p - b_{jpk}^i a_{lm}^p - b_{jpl}^i a_{mk}^p \equiv c_{jklm}^i. \quad (1.10)$$

Для тканей B_m уравнения (1.5) и (1.6) принимают следующий вид (см. [14]):

$$\nabla a_{jk}^i = -b_{[jk]l}^i (\omega_1^l - \omega_2^l), \quad (1.11)$$

$$\nabla b_{jkl}^i = c_{jklm}^i (\omega_1^m - \omega_2^m). \quad (1.12)$$

Как уже было отмечено, ткани E образуют подкласс средних тканей Бола, причем согласно [8] тензоры кручения и кривизны ткани E связаны еще следующими соотношениями:

$$b_{jkp}^i a_{lm}^p + b_{lkp}^i a_{jm}^p + b_{jmp}^i a_{lk}^p + b_{jmp}^i a_{lk}^p = 0. \quad (1.13)$$

Последние соотношения необходимы для того, чтобы три-ткань B_m была тканью E , но их достаточность пока не доказана. Тем не менее, как мы увидим далее, в рассматриваемом нами случае они оказываются достаточными.

§ 2. Три-ткани E с тензором кручения ранга 1

Будем записывать умножение в алгебре A , определяемой тензором кручения, в виде $z = [xy]$. Тогда равенство (1.13) можно переписать в виде $b(x, y, [xy]) = 0$. Так как $[xy] \in A'$, то имеет смысл классифицировать три-ткани E по размерности алгебры A' . Как уже было отмечено, в настоящей работе рассматриваются три-ткани E , для которых $\dim A' = 1$. Будем говорить в этом случае, что тензор кручения имеет ранг 1.

Сузим семейство адаптированных реперов ткани таким образом, чтобы пространство A' определялось базисным вектором e_1 , тогда

$$\hat{a}_{jk}^i = 0, \quad \hat{i} \neq 1, \quad (2.1)$$

и допустимыми являются только такие преобразования репера, при которых вектор e_1 сохраняет направление.

Рассмотрим соотношения (1.13). В силу (2.1) они запишутся в виде

$$b_{jk1}^i a_{lm}^1 + b_{jm1}^i a_{lk}^1 + b_{lk1}^i a_{jm}^1 + b_{lm1}^i a_{jk}^1 = 0. \quad (2.2)$$

Так как мы рассматриваем ткань ранга 1, то найдутся такие j_0, k_0 , что $a_{j_0 k_0}^1 \neq 0$.

1) Полагая в (2.2) $j = l = j_0, k = m = k_0$, получим

$$b_{j_0 k_0 1}^i a_{j_0 k_0}^1 = 0, \quad (2.3)$$

при этом по индексам j_0, k_0 суммирование не производится. Так как $a_{j_0 k_0}^1 \neq 0$, то $b_{j_0 k_0 1}^i = 0$ для любого i .

2) Полагая в (2.2) $j = l = j_0, k = k_0$, получим

$$b_{j_0 k_0 1}^i a_{j_0 m}^1 + b_{j_0 m 1}^i a_{j_0 k_0}^1 = 0, \quad (2.4)$$

где по j_0 суммирования нет. Так как $a_{j_0 k_0}^1 \neq 0, b_{j_0 k_0 1}^i = 0$, то $b_{j_0 m 1}^i = 0$ для любых i, m .

3) Полагая в (2.2) $k = m = k_0, j = j_0$, получим

$$b_{j_0 k_0 1}^i a_{lk_0}^1 + b_{lk_0 1}^i a_{j_0 k_0}^1 = 0. \quad (2.5)$$

Так как $a_{j_0 k_0}^1 \neq 0, b_{j_0 k_0 1}^i = 0$, то $b_{lk_0 1}^i = 0$ для любых i, l .

4) Полагая в (2.2) $j = j_0, k = k_0$, получим

$$b_{j_0 k_0 1}^i a_{lm}^1 + b_{j_0 m 1}^i a_{lk_0}^1 + b_{lk_0 1}^i a_{j_0 m}^1 + b_{lm1}^i a_{j_0 k_0}^1 = 0.$$

Так как $a_{j_0 k_0}^1 \neq 0, b_{j_0 m 1}^i = 0, b_{lk_0 1}^i = 0, b_{j_0 k_0 1}^i = 0$, то $b_{lm1}^i = 0$ для любых i, l, m .

Учитывая (1.8), приходим к следующему утверждению: *если тензор кручения эластичной ткани имеет структуру (2.1), то компоненты тензора кривизны удовлетворяют соотношениям*

$$b_{jk1}^i = b_{j1k}^i = 0. \quad (2.6)$$

С учетом полученных соотношений равенства (2.2) удовлетворяются тождественно. Таким образом, других соотношений из (2.2) мы не получим.

Рассмотрим теперь соотношения (1.4). Полагая в них $j = 1$ и используя (2.1), получим

$$b_{1kl}^i + b_{kl1}^i + b_{l1k}^i = 2a_{1k}^1 a_{1l}^i + 2a_{kl}^1 a_{11}^i + 2a_{l1}^1 a_{1k}^i = 0.$$

Используя (2.6), придем к равенствам

$$b_{1kl}^i = 0.$$

С учетом ранее доказанного получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если тензор кручения эластичной ткани имеет структуру (2.1), то компоненты тензора кривизны этой ткани удовлетворяют соотношениям $b_{jk1}^i = b_{j1l}^i = b_{1kl}^i = 0$.*

В результате обобщенные тождества Якоби (1.4) для рассматриваемой ткани сведутся к следующим:

$$\begin{aligned} \widehat{b}_{jkl}^1 + \widehat{b}_{klj}^1 + \widehat{b}_{ljk}^1 &= 2a_{jk}^1 a_{1l}^1 + 2a_{kl}^1 a_{1j}^1 + 2a_{lj}^1 a_{1k}^1, \\ \widehat{b}_{jkl}^i + \widehat{b}_{klj}^i + \widehat{b}_{ljk}^i &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Рассмотрим далее соотношения (1.9) и преобразуем их с учетом соотношений (2.1) и предложения 1. Получим

$$a_{kp}^1 b_{j\widehat{l}\widehat{m}}^p = a_{jp}^1 b_{kl\widehat{m}}^p. \quad (2.8)$$

Найдем значение ковариантной производной тензора кривизны b . Из соотношений (1.10), учитывая (2.1), находим

$$c_{jklm}^i = -b_{j1k}^i a_{lm}^1 + b_{j1m}^i a_{kl}^1 + b_{j1l}^i a_{km}^1.$$

Отсюда в силу предложения 1 получаем $c_{jklm}^i = 0$. Из (1.12) следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если тензор кручения эластичной ткани имеет структуру (2.1), то тензор кривизны этой ткани является ковариантно постоянным относительно связности Черны.

§ 3. Структурные уравнения три-ткани E с тензором кручения ранга 1

С учетом найденных ограничений на компоненты тензоров структурные уравнения (1.1)–(1.3) рассматриваемой три-ткани примут вид

$$\begin{aligned} d\omega_1^1 &= \omega_1^j \wedge \omega_j^1 + a_{jk}^1 \omega_1^j \wedge \omega_1^k, & d\omega_1^{\widehat{i}} &= \omega_1^j \wedge \omega_j^{\widehat{i}}, \\ d\omega_2^1 &= \omega_2^j \wedge \omega_j^1 - a_{jk}^1 \omega_2^j \wedge \omega_2^k, & d\omega_2^{\widehat{i}} &= \omega_2^j \wedge \omega_j^{\widehat{i}}, \\ d\omega_1^i &= \omega_1^k \wedge \omega_k^i, & d\omega_j^i &= \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \widehat{b}_{jkl}^i \omega_1^k \wedge \omega_2^l, \end{aligned}$$

где $\widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k}, \widehat{l} \neq 1$. Как видно из этих уравнений, подсистема пфаффовых уравнений $\omega_1^i = 0$ является вполне интегрируемой. Ее интегральными многообразиями являются подрасслоения адаптированных кореперов ткани с базой M . Следовательно, можно сузить семейство кореперов, положив в дальнейшем $\omega_1^i = 0$. В результате сузятся и группа допустимых преобразований корепера, а структурные уравнения рассматриваемой ткани примут вид

$$\begin{aligned} d\omega_1^1 &= \omega_1^{\widehat{j}} \wedge \omega_j^1 + a_{jk}^1 \omega_1^{\widehat{j}} \wedge \omega_1^k, & d\omega_1^{\widehat{i}} &= \omega_1^{\widehat{j}} \wedge \omega_j^{\widehat{i}}, \\ d\omega_2^1 &= \omega_2^{\widehat{j}} \wedge \omega_j^1 - a_{jk}^1 \omega_2^{\widehat{j}} \wedge \omega_2^k, & d\omega_2^{\widehat{i}} &= \omega_2^{\widehat{j}} \wedge \omega_j^{\widehat{i}}, \\ d\omega_j^i &= \omega_j^{\widehat{k}} \wedge \omega_k^i + \widehat{b}_{jkl}^i \omega_1^{\widehat{k}} \wedge \omega_2^l. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Рассмотрим дифференциальные уравнения (1.11). С учетом найденных соотношений они примут вид

$$\nabla a_{1\widehat{k}}^1 = da_{1\widehat{k}}^1 - a_{1\widehat{m}}^1 \omega_{\widehat{k}}^{\widehat{m}} = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla a_{\hat{j}\hat{k}}^1 = da_{\hat{j}\hat{k}}^1 - a_{m\hat{k}}^1 \omega_j^m - a_{\hat{j}m}^1 \omega_k^m = -b_{[\hat{j}\hat{k}]l}^1 (\omega_1^{\hat{l}} - \omega_2^{\hat{l}}), \quad (3.3)$$

$$\nabla a_{\hat{j}\hat{k}}^i \equiv 0 = -b_{[\hat{j}\hat{k}]l}^i (\omega_1^{\hat{l}} - \omega_2^{\hat{l}}). \quad (3.4)$$

Так как формы $\omega_1^{\hat{l}}$ и $\omega_2^{\hat{l}}$ линейно независимы, то из последних равенств следует $b_{\hat{j}\hat{k}l}^i = b_{k\hat{j}l}^i$. А поскольку $b_{\hat{j}\hat{k}l}^i = -b_{l\hat{j}\hat{k}}^i$, то

$$b_{\hat{j}\hat{k}l}^i = b_{k\hat{j}l}^i = -b_{k\hat{l}j}^i = -b_{l\hat{k}j}^i = b_{l\hat{j}k}^i = b_{\hat{j}lk}^i = -b_{\hat{j}kl}^i.$$

Отсюда находим, что $b_{\hat{j}\hat{k}l}^i = 0$, т.е. тензор кривизны имеет ненулевые компоненты только вида $b_{\hat{j}\hat{k}l}^1$. Это означает, что тернарная алгебра с операцией $\zeta = b(\xi, \eta, \theta)$, определяемая тензором кривизны, имеет одномерную производную алгебру с базисом e_1 . Доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если эластичная три-ткань E имеет тензор кручения ранга 1, то тензор кривизны этой ткани E также имеет ранг 1, причем производные алгебры от алгебр, определяемых этими тензорами, совпадают (в случае канонизации (2.1) $A' = B' = \{e_1\}$).

С учетом полученных соотношений структурные уравнения (3.1) рассматриваемой ткани E принимают вид

$$\begin{aligned} d\omega_1^1 &= \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 + a_{jk}^1 \omega_1^j \wedge \omega_k^1, & d\omega_1^{\hat{i}} &= \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^{\hat{i}}, \\ d\omega_2^1 &= \omega_2^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 - a_{jk}^1 \omega_2^j \wedge \omega_k^1, & d\omega_2^{\hat{i}} &= \omega_2^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^{\hat{i}}, \\ d\omega_{\hat{j}}^1 &= \omega_{\hat{j}}^{\hat{k}} \wedge \omega_k^1 + b_{\hat{j}kl}^1 \omega_1^{\hat{k}} \wedge \omega_l^{\hat{i}}, & d\omega_{\hat{j}}^{\hat{i}} &= \omega_{\hat{j}}^{\hat{k}} \wedge \omega_{\hat{k}}^{\hat{i}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Как видно, система уравнений $\omega_{\hat{j}}^{\hat{i}} = 0$ является вполне интегрируемой. Следовательно, можно сузить семейство адаптированных реперов, положив $\omega_{\hat{j}}^{\hat{i}} = 0$. В результате уравнения (3.5) сведутся к следующим:

$$d\omega_1^1 = \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 + a_{jk}^1 \omega_1^j \wedge \omega_k^1, \quad (3.6)$$

$$d\omega_1^{\hat{i}} = 0, \quad (3.7)$$

$$d\omega_2^1 = \omega_2^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 - a_{jk}^1 \omega_2^j \wedge \omega_k^1, \quad (3.8)$$

$$d\omega_2^{\hat{i}} = 0, \quad (3.9)$$

$$d\omega_{\hat{j}}^1 = b_{\hat{j}kl}^1 \omega_1^{\hat{k}} \wedge \omega_l^{\hat{i}}. \quad (3.10)$$

Дифференциальные уравнения (3.2), (3.3) на тензор кручения с учетом сделанных ограничений на корепер примут вид

$$\begin{aligned} \nabla a_{1\hat{k}}^1 &= da_{1\hat{k}}^1 = 0, \\ \nabla a_{\hat{j}\hat{k}}^1 &= da_{\hat{j}\hat{k}}^1 - a_{1\hat{k}}^1 \omega_{\hat{j}}^1 - a_{\hat{j}1}^1 \omega_k^1 = -b_{[\hat{j}\hat{k}]l}^1 (\omega_1^{\hat{l}} - \omega_2^{\hat{l}}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

откуда, в частности, получаем $a_{1\hat{k}}^1 = \text{const.}$

Дифференциальные уравнения (1.6) на тензор кривизны сведутся к следующему: $\nabla b_{\widehat{jk}\widehat{l}}^1 = db_{\widehat{jk}\widehat{l}}^1 = 0$, откуда $b_{\widehat{jk}\widehat{l}}^1 = \text{const}$. Таким образом, в рассматриваемом репере компоненты тензоров $a_{\widehat{1k}}^1$ и $b_{\widehat{jk}\widehat{l}}^1$ являются постоянными, т.е. инвариантами ткани; компоненты вида $a_{\widehat{jk}}^1$, вообще говоря, переменные, остальные компоненты равны нулю.

Из обобщенных тождеств Якоби остаются только соотношения (2.7), а соотношения (2.8) примут вид

$$a_{\widehat{1k}}^1 b_{\widehat{jl}\widehat{m}}^1 = a_{\widehat{1j}}^1 b_{\widehat{kl}\widehat{m}}^1. \quad (3.12)$$

Возможны два случая: существует по крайней мере один ненулевой инвариант $a_{\widehat{1k}}^1$ (ткани E_1^r); все инварианты $a_{\widehat{1k}}^1$ равны нулю (ткани E_2^r).

§ 4. Структурные уравнения три-ткани E_1^r

Рассмотрим ткани E_1^r . Согласно (3.12) положим

$$b_{\widehat{jl}\widehat{m}}^1 = 2\lambda_{\widehat{l}\widehat{m}} a_{\widehat{1j}}^1, \quad (4.1)$$

где величины $\lambda_{\widehat{l}\widehat{m}}$ постоянные и кососимметричные. Будем считать также, что они одновременно не равны нулю; тогда (в силу того, что существует по крайней мере одна ненулевая компонента $a_{\widehat{1k}}^1$; см. выше) тензор кривизны будет также иметь по крайней мере одну ненулевую компоненту. Следовательно, рассматриваемая три-ткань не является групповой.

В силу (4.1) обобщенные тождества Якоби (2.7) примут вид

$$2a_{\widehat{1j}}^1 \lambda_{\widehat{kl}} + 2a_{\widehat{1k}}^1 \lambda_{\widehat{lj}} + 2a_{\widehat{1l}}^1 \lambda_{\widehat{jk}} = 2a_{\widehat{jk}}^1 a_{\widehat{1l}}^1 + 2a_{\widehat{kl}}^1 a_{\widehat{1j}}^1 + 2a_{\widehat{lj}}^1 a_{\widehat{1k}}^1,$$

или

$$(a_{\widehat{jk}}^1 - \lambda_{\widehat{jk}}) a_{\widehat{1l}}^1 + (a_{\widehat{kl}}^1 - \lambda_{\widehat{kl}}) a_{\widehat{1j}}^1 + (a_{\widehat{lj}}^1 - \lambda_{\widehat{lj}}) a_{\widehat{1k}}^1 = 0. \quad (4.2)$$

Соотношения (4.2) представляют собой тождества Якоби некоторой r -мерной нильпотентной алгебры Ли $\mathcal{G}$ со структурным тензором c_{jk}^i , где $c_{\widehat{1k}}^1 = a_{\widehat{1k}}^1$, $c_{\widehat{kl}}^1 = a_{\widehat{kl}}^1 - \lambda_{\widehat{kl}}$, остальные компоненты равны нулю, $\mathcal{G}' = \{e_1\}$. Так как величины $a_{\widehat{jk}}^1$ являются, вообще говоря, переменными, а $\lambda_{\widehat{jk}}$ — произвольные постоянные, то $\mathcal{G}$ — семейство алгебр Ли. Доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть W — три-ткань E_1^r с тензором кручения ранга 1, причем адаптированный репер этой ткани выбран так, что $a_{\widehat{jk}}^1 \neq 0$, остальные компоненты — нули. Тогда семейство адаптированных реперов допускает сужение, на котором ненулевые компоненты тензора кривизны ткани W могут быть записаны в виде (4.1). При этом величины $a_{\widehat{1j}}^1$ и $a_{\widehat{kl}}^1 - \lambda_{\widehat{kl}}$ образуют структурный тензор некоторого семейства нильпотентных алгебр Ли $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}' = \{e_1\}$.

Итак, ткани E_1^r определяются системой уравнений (3.6)–(3.11), причем входящие в нее тензоры связаны соотношениями (4.1) и (4.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Система (3.6)–(3.11) замкнута относительно внешнего дифференцирования.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что внешнее дифференцирование уравнений (3.7), (3.9), (3.10) приводит к тождествам.

1) Рассмотрим уравнение (3.6), переписанное в следующей форме:

$$d\omega_1^1 = \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_j^1 + 2a_{1\hat{k}}^1 \omega_1^1 \wedge \omega_1^{\hat{k}} + a_{j\hat{k}}^1 \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_1^{\hat{k}}. \quad (4.3)$$

Продифференцировав его внешним образом, получим

$$\begin{aligned} d\omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_j^1 - \omega_1^{\hat{j}} \wedge d\omega_j^1 + 2a_{1\hat{k}}^1 d\omega_1^1 \wedge \omega_1^{\hat{k}} - 2a_{1\hat{k}}^1 \omega_1^1 \wedge d\omega_1^{\hat{k}} \\ + da_{j\hat{k}}^1 \wedge \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_1^{\hat{k}} + a_{j\hat{k}}^1 d\omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_1^{\hat{k}} - a_{j\hat{k}}^1 \omega_1^{\hat{j}} \wedge d\omega_1^{\hat{k}} = 0. \end{aligned}$$

Используя уравнения (3.6)–(3.11), после преобразований получим

$$\begin{aligned} -\omega_1^{\hat{j}} \wedge 2a_{1\hat{j}}^1 \lambda_{k\hat{l}} \omega_1^{\hat{k}} \wedge \omega_2^{\hat{l}} + 2a_{1\hat{k}}^1 \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_j^1 \wedge \omega_1^{\hat{k}} \\ + 4a_{1\hat{k}}^1 a_{1\hat{j}}^1 \omega_1^1 \wedge \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_1^{\hat{k}} + 2a_{1\hat{k}}^1 a_{j\hat{p}}^1 \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_1^{\hat{p}} \wedge \omega_1^{\hat{k}} + da_{j\hat{k}}^1 \wedge \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_1^{\hat{k}} = 0, \end{aligned}$$

или

$$(-2a_{1\hat{j}}^1 \lambda_{k\hat{l}} \omega_2^{\hat{l}} - 2a_{1\hat{k}}^1 \omega_j^1 + 4a_{1\hat{k}}^1 a_{1\hat{j}}^1 \omega_1^1 - 2a_{1\hat{k}}^1 a_{j\hat{p}}^1 \omega_1^{\hat{p}} + da_{j\hat{k}}^1) \wedge \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_1^{\hat{k}} = 0.$$

Значения $da_{j\hat{k}}^1$ найдем из (3.11) и подставим в предыдущие равенства. Получим

$$\begin{aligned} (-2a_{1\hat{j}}^1 \lambda_{k\hat{l}} \omega_2^{\hat{l}} - 2a_{1\hat{k}}^1 \omega_j^1 + 4a_{1\hat{k}}^1 a_{1\hat{j}}^1 \omega_1^1 - 2a_{1\hat{k}}^1 a_{j\hat{p}}^1 \omega_1^{\hat{p}} \\ + a_{1\hat{k}}^1 \omega_j^1 + a_{j\hat{1}}^1 \omega_k^1 - 2a_{1[\hat{j}}^1 \lambda_{k]\hat{l}} (\omega_1^{\hat{l}} - \omega_2^{\hat{l}})) \wedge \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_1^{\hat{k}} = 0. \end{aligned}$$

Далее альтернируем по j, k :

$$\begin{aligned} (-2a_{1[\hat{j}}^1 \lambda_{k]\hat{l}} \omega_2^{\hat{l}} - 2a_{1[\hat{k}}^1 \omega_{j]}^1 + 4a_{1[\hat{k}}^1 a_{1]\hat{j}}^1 \omega_1^1 - 2a_{1[\hat{k}}^1 a_{j]\hat{p}}^1 \omega_1^{\hat{p}} \\ + a_{1[\hat{k}}^1 \omega_{j]}^1 + a_{[j\hat{1}}^1 \omega_{k]}^1 - 2a_{1[\hat{j}}^1 \lambda_{k]\hat{l}} (\omega_1^{\hat{l}} - \omega_2^{\hat{l}})) \wedge \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_1^{\hat{k}} = 0. \end{aligned}$$

После упрощения приходим к равенствам

$$(-a_{1[\hat{k}}^1 a_{j]\hat{p}}^1 \omega_1^{\hat{p}} - a_{1[\hat{j}}^1 \lambda_{k]\hat{l}} \omega_1^{\hat{l}}) \wedge \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_1^{\hat{k}} = 0,$$

или

$$(-a_{[\hat{j}}^1 a_{1]\hat{k}}^1 + a_{1[\hat{j}}^1 \lambda_{k]\hat{l}}) \omega_1^{\hat{l}} \wedge \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_1^{\hat{k}} = 0.$$

Эти равенства тождественно удовлетворяются в силу тождеств Якоби (4.2). Аналогично находим, что уравнение (3.8) при дифференцировании дает тождество.

2) Продифференцируем внешним образом (3.11). С учетом структурных уравнений получим

$$-a_{1\hat{k}}^1 d\omega_j^1 - a_{j\hat{1}}^1 d\omega_k^1 = 0,$$

или

$$(-a_{1\hat{k}}^1 a_{1\hat{j}}^1 - a_{j\hat{1}}^1 a_{1\hat{k}}^1) \lambda_{\hat{p}\hat{q}} \omega_1^{\hat{p}} \wedge \omega_2^{\hat{q}} = 0.$$

В силу кососимметричности величин $\lambda_{\hat{p}\hat{q}}$ последние равенства удовлетворяются тождественно.

Из предложения 5 вытекает, что три-ткани E_1^T существуют.

Отметим, что соотношения (4.1) и (4.2) единственные, связывающие компоненты тензоров ткани E_1^r . Действительно, новые соотношения могли бы появиться при дифференцировании уравнений системы (3.6)–(3.11) (что не произошло) и при дифференцировании самих соотношений (4.1) и (4.2), но первое из них содержит только постоянные, а при дифференцировании вторых, как несложно проверить, получаются тождества. Как следствие получаем, что рассматриваемая ткань E_1^r не является муфанговой, так как ее тензор кривизны (см. (4.1)) не является, вообще говоря, кососимметричным.

§ 5. Уравнения ткани E_1^r в локальных координатах

Проинтегрируем систему (3.6)–(3.11).

1) Из уравнений (3.7) и (3.9) следует, что формы $\hat{\omega}_1^i$ и $\hat{\omega}_2^i$ являются полными дифференциалами:

$$\hat{\omega}_1^i = du^{\hat{i}}, \quad \hat{\omega}_2^i = dv^{\hat{i}}. \quad (5.1)$$

Подставим найденные формы в оставшиеся уравнения системы:

$$d\omega_1^1 = du^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 + 2a_{1\hat{k}}^1 \omega_1^1 \wedge du^{\hat{k}} + a_{\hat{j}\hat{k}}^1 du^{\hat{j}} \wedge du^{\hat{k}}, \quad (5.2)$$

$$d\omega_2^1 = dv^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 - 2a_{1\hat{k}}^1 \omega_2^1 \wedge dv^{\hat{k}} - a_{\hat{j}\hat{k}}^1 dv^{\hat{j}} \wedge dv^{\hat{k}}, \quad (5.3)$$

$$d\omega_{\hat{j}}^1 = 2a_{1\hat{j}}^1 \lambda_{\hat{k}\hat{l}}^{\sim} du^{\hat{k}} \wedge dv^{\hat{l}}. \quad (5.4)$$

2) Рассмотрим последние уравнения. Так как величины $a_{1\hat{k}}^1$ и $\lambda_{\hat{k}\hat{l}}^{\sim}$ являются постоянными, то, интегрируя (5.4), находим

$$\omega_{\hat{j}}^1 = 2a_{1\hat{j}}^1 \lambda_{\hat{k}\hat{l}}^{\sim} u^{\hat{k}} dv^{\hat{l}} + d\varphi_{\hat{j}}^1, \quad (5.5)$$

где $\varphi_{\hat{j}}^1$ – некоторые новые функции.

3) Подставляя в (3.11) найденные формы (5.5) и (5.1), получим уравнения

$$da_{\hat{j}\hat{k}}^1 = a_{1\hat{k}}^1 (2a_{1\hat{j}}^1 \lambda_{\hat{p}\hat{l}}^{\sim} u^{\hat{p}} dv^{\hat{l}} + d\varphi_{\hat{j}}^1) + a_{\hat{j}1}^1 (2a_{1\hat{k}}^1 \lambda_{\hat{p}\hat{l}}^{\sim} u^{\hat{p}} dv^{\hat{l}} + d\varphi_{\hat{k}}^1) - 2a_{1[\hat{j}}^1 \lambda_{\hat{k}]\hat{l}}^{\sim} (du^{\hat{l}} - dv^{\hat{l}}),$$

или

$$da_{\hat{j}\hat{k}}^1 = 2(a_{1\hat{k}}^1 a_{1\hat{j}}^1 + a_{\hat{j}1}^1 a_{1\hat{k}}^1) \lambda_{\hat{p}\hat{l}}^{\sim} u^{\hat{p}} dv^{\hat{l}} + a_{1\hat{k}}^1 d\varphi_{\hat{j}}^1 + a_{\hat{j}1}^1 d\varphi_{\hat{k}}^1 - 2a_{1[\hat{j}}^1 \lambda_{\hat{k}]\hat{l}}^{\sim} (du^{\hat{l}} - dv^{\hat{l}}).$$

В силу кососимметричности тензора кручения сумма в первой скобке равна нулю. Интегрируя, находим

$$a_{\hat{j}\hat{k}}^1 = a_{1\hat{k}}^1 \varphi_{\hat{j}}^1 - a_{1\hat{j}}^1 \varphi_{\hat{k}}^1 - 2a_{1[\hat{j}}^1 \lambda_{\hat{k}]\hat{l}}^{\sim} (u^{\hat{l}} - v^{\hat{l}}) + c_{\hat{j}\hat{k}}^1, \quad (5.6)$$

где $c_{\hat{j}\hat{k}}^1 = -c_{\hat{k}\hat{j}}^1 = \text{const}$.

4) В наших уравнениях появились новые функции $\varphi_{\hat{j}}^1$ и постоянные $c_{\hat{j}\hat{k}}^1$. Найдем соотношения, которым они удовлетворяют. Из нетривиальных соотношений на тензоры $a_{\hat{j}\hat{k}}^1$ остались только соотношения (4.2). Подставляя в них

найденные компоненты тензора кручения (5.6), после преобразований придем к равенствам

$$a_{1\widehat{l}}^1(c_{\widehat{j}\widehat{k}}^1 - \lambda_{\widehat{j}\widehat{k}}) + a_{1\widehat{j}}^1(c_{\widehat{k}\widehat{l}}^1 - \lambda_{\widehat{k}\widehat{l}}) + a_{1\widehat{k}}^1(c_{\widehat{l}\widehat{j}}^1 - \lambda_{\widehat{l}\widehat{j}}) = 0. \quad (5.7)$$

ЛЕММА. Соотношения (5.7) эквивалентны соотношениям

$$c_{\widehat{j}\widehat{k}}^1 - \lambda_{\widehat{j}\widehat{k}} = a_{1\widehat{j}}^1 p_{\widehat{k}} - a_{1\widehat{k}}^1 p_{\widehat{j}}, \quad (5.8)$$

где $p_{\widehat{k}}$ – некоторые параметры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по размерности.

а) При $r = 4$ система будет состоять всего из одного равенства (для удобства обозначим $c_{\widehat{j}\widehat{k}}^1 - \lambda_{\widehat{j}\widehat{k}} = C_{\widehat{j}\widehat{k}}^1$)

$$a_{12}^1 C_{34}^1 + a_{13}^1 C_{42}^1 + a_{14}^1 C_{23}^1 = 0.$$

Это соотношение означает, что вектор $a = (a_{12}^1; a_{13}^1; a_{14}^1)$ ортогонален вектору $C = (C_{34}^1; C_{42}^1; C_{23}^1)$. Следовательно, существует вектор $p = (p_2, p_3, p_4)$ (данная индексация означает, что компоненты вектора p зависят от компонент вектора a) такой, что $C = p \times a$. Таким образом,

$$C_{34}^1 = a_{13}^1 p_4 - a_{14}^1 p_3,$$

$$C_{42}^1 = a_{12}^1 p_2 - a_{14}^1 p_2,$$

$$C_{23}^1 = a_{12}^1 p_3 - a_{13}^1 p_2.$$

б) Рассмотрим систему уравнений при $r = n - 1$

$$a_{1\widehat{l}}^1 C_{\widehat{j}\widehat{k}}^1 + a_{1\widehat{j}}^1 C_{\widehat{k}\widehat{l}}^1 + a_{1\widehat{k}}^1 C_{\widehat{l}\widehat{j}}^1 = 0, \quad (5.9)$$

где $\widehat{j}, \widehat{k}, \widehat{l} = 2, 3, \dots, n - 1$. Предположим, что данная система уравнений разрешается относительно $C_{\widehat{j}\widehat{k}}^1$ в виде (5.8):

$$C_{\widehat{j}\widehat{k}}^1 = a_{1\widehat{j}}^1 p_{\widehat{k}} - a_{1\widehat{k}}^1 p_{\widehat{j}}. \quad (5.10)$$

в) Рассмотрим аналогичную систему при $r = n$. Она будет состоять из системы (5.9) и уравнений следующего вида:

$$a_{1n}^1 C_{\widehat{j}\widehat{k}}^1 + a_{1\widehat{j}}^1 C_{\widehat{k}n}^1 + a_{1\widehat{k}}^1 C_{n\widehat{j}}^1 = 0. \quad (5.11)$$

Таким образом, к системе (5.9) добавилось $(n - 2)(n - 3)$ уравнений и $n - 1$ переменных. Переменные $C_{\widehat{j}\widehat{k}}^1$, где $\widehat{j}, \widehat{k} \neq 1, n$, записаны в виде (5.10). Подставим их в (5.11):

$$a_{1\widehat{j}}^1 (C_{\widehat{k}n}^1 + a_{1n}^1 p_{\widehat{k}}) = a_{1\widehat{k}}^1 (C_{\widehat{j}n}^1 + a_{1n}^1 p_{\widehat{j}}).$$

Так как мы рассматриваем нетривиальный случай (существует ненулевая компонента $a_{1k_0}^1$), то, введя коэффициент пропорциональности p_n , последнее равенство запишем в эквивалентной форме

$$C_{\widehat{j}n}^1 + a_{1n}^1 p_{\widehat{j}} = p_n a_{1\widehat{j}}^1,$$

откуда

$$C_{jn}^1 = p_n a_{1j}^1 - a_{1n}^1 p_{\hat{j}}.$$

Равенства (5.8) доказаны.

Из (5.8) находим

$$c_{\hat{j}\hat{k}}^1 = \lambda_{\hat{j}\hat{k}} + a_{1\hat{j}}^1 p_{\hat{k}} - a_{1\hat{k}}^1 p_{\hat{j}}. \quad (5.12)$$

В результате соотношения (5.6) перепишутся в виде

$$a_{\hat{j}\hat{k}}^1 = a_{1\hat{k}}^1 (\varphi_{\hat{j}}^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{l}}(u^{\hat{l}} - v^{\hat{l}}) - p_{\hat{j}}) - a_{1\hat{j}}^1 (\varphi_{\hat{k}}^1 + \lambda_{\hat{k}\hat{l}}(u^{\hat{l}} - v^{\hat{l}}) - p_{\hat{k}}) + \lambda_{\hat{j}\hat{k}},$$

или

$$a_{\hat{j}\hat{k}}^1 = a_{1\hat{k}}^1 \Phi_{\hat{j}}^1 - a_{1\hat{j}}^1 \Phi_{\hat{k}}^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{k}}, \quad (5.13)$$

где обозначено $\Phi_{\hat{j}}^1 = \varphi_{\hat{j}}^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{l}}(u^{\hat{l}} - v^{\hat{l}}) - p_{\hat{j}}$.

Напомним, что структурный тензор алгебры Ли $\mathcal{G}$ имеет ненулевые компоненты $a_{1\hat{j}}^1$ и $a_{\hat{j}\hat{k}}^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{k}} = a_{1\hat{k}}^1 \Phi_{\hat{j}}^1 - a_{1\hat{j}}^1 \Phi_{\hat{k}}^1$. Таким образом, *семейство алгебр Ли $\mathcal{G}$ представляет собой линейную деформацию с параметрами $\Phi_{\hat{j}}^1$* .

5) Подставив найденные формы и компоненты тензора в уравнение (5.2), получим

$$\begin{aligned} d\omega_1^1 &= du^{\hat{j}} \wedge (2a_{1\hat{j}}^1 \lambda_{\hat{k}\hat{l}} u^{\hat{k}} dv^{\hat{l}} + d\varphi_{\hat{j}}^1) + 2a_{1\hat{k}}^1 \omega_1^1 \wedge du^{\hat{k}} \\ &\quad + (a_{1\hat{k}}^1 \Phi_{\hat{j}}^1 - a_{1\hat{j}}^1 \Phi_{\hat{k}}^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{k}}) du^{\hat{j}} \wedge du^{\hat{k}}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} d\omega_1^1 &= du^{\hat{j}} \wedge (2a_{1\hat{j}}^1 \lambda_{\hat{k}\hat{l}} u^{\hat{k}} dv^{\hat{l}} + d\Phi_{\hat{j}}^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{l}} dv^{\hat{l}}) \\ &\quad + 2a_{1\hat{k}}^1 (\omega_1^1 + \Phi_{\hat{j}}^1 du^{\hat{j}}) \wedge du^{\hat{k}}. \end{aligned}$$

Обозначим $\Omega_1^1 = \omega_1^1 + \Phi_{\hat{j}}^1 du^{\hat{j}}$. Тогда предыдущие уравнения примут вид

$$d\Omega_1^1 = du^{\hat{j}} \wedge (2a_{1\hat{j}}^1 \lambda_{\hat{k}\hat{l}} u^{\hat{k}} dv^{\hat{l}} + \lambda_{\hat{j}\hat{l}} dv^{\hat{l}}) + 2a_{1\hat{k}}^1 \Omega_1^1 \wedge du^{\hat{k}},$$

или

$$d\Omega_1^1 = \lambda_{\hat{j}\hat{l}} du^{\hat{j}} \wedge dv^{\hat{l}} + 2a_{1\hat{k}}^1 (\Omega_1^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{l}} u^{\hat{j}} dv^{\hat{l}}) \wedge du^{\hat{k}}.$$

Положив $\Theta_1^1 = \Omega_1^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{l}} u^{\hat{j}} dv^{\hat{l}}$, придем к уравнениям

$$d\Theta_1^1 = 2a_{1\hat{k}}^1 \Theta_1^1 \wedge du^{\hat{k}}.$$

Интегрируя, находим

$$\Theta_1^1 = e^{-2a_{1\hat{k}}^1 u^{\hat{k}}} du^1.$$

Производя обратные замены, придем к уравнению

$$\omega_1^1 = e^{-2a_{1\hat{k}}^1 u^{\hat{k}}} du^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{l}} u^{\hat{j}} dv^{\hat{l}} - (\varphi_{\hat{j}}^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{l}}(u^{\hat{l}} - v^{\hat{l}}) - p_{\hat{j}}) du^{\hat{j}}. \quad (5.14)$$

6) Подставляя найденные формы и компоненты тензора в уравнение (5.3), получим

$$\begin{aligned} d\omega_2^1 = & dv^{\hat{j}} \wedge (2a_{1\hat{j}}^1 \lambda_{\hat{k}\hat{l}} u^{\hat{k}} dv^{\hat{l}} + d\Phi_{\hat{j}}^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{l}}(du^{\hat{l}} - dv^{\hat{l}})) \\ & - 2a_{1\hat{k}}^1 \omega_2^1 \wedge dv^{\hat{k}} - (a_{1\hat{k}}^1 \Phi_{\hat{j}}^1 - a_{1\hat{j}}^1 \Phi_{\hat{k}}^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{k}}) dv^{\hat{j}} \wedge dv^{\hat{k}}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} d\omega_2^1 = & dv^{\hat{j}} \wedge (2a_{1\hat{j}}^1 \lambda_{\hat{k}\hat{l}} u^{\hat{k}} dv^{\hat{l}} + d\Phi_{\hat{j}}^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{l}} du^{\hat{l}}) \\ & - 2a_{1\hat{k}}^1 (\omega_2^1 + \Phi_{\hat{j}}^1 dv^{\hat{j}}) \wedge dv^{\hat{k}}. \end{aligned}$$

Полагая $\Omega_2^1 = \omega_2^1 + \Phi_{\hat{j}}^1 dv^{\hat{j}}$, приведем последнее уравнение к виду

$$d\Omega_2^1 = dv^{\hat{j}} \wedge (2a_{1\hat{j}}^1 \lambda_{\hat{k}\hat{l}} u^{\hat{k}} dv^{\hat{l}} - \lambda_{\hat{j}\hat{l}} du^{\hat{l}}) - 2a_{1\hat{k}}^1 \Omega_2^1 \wedge dv^{\hat{k}},$$

или

$$d\Omega_2^1 = -\lambda_{\hat{j}\hat{l}} dv^{\hat{j}} \wedge du^{\hat{l}} - 2a_{1\hat{k}}^1 (\Omega_2^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{l}} u^{\hat{j}} dv^{\hat{l}}) \wedge dv^{\hat{k}}.$$

Положив $\Theta_2^1 = \Omega_2^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{l}} u^{\hat{j}} dv^{\hat{l}}$, придем к уравнению

$$d\Theta_2^1 = d\Omega_2^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{l}} du^{\hat{j}} \wedge dv^{\hat{l}} = -2a_{1\hat{k}}^1 \Theta_2^1 \wedge dv^{\hat{k}},$$

откуда находим

$$\Theta_2^1 = e^{2a_{1\hat{k}}^1 dv^{\hat{k}}} dv^1.$$

Производя обратные замены, получаем

$$\omega_2^1 = e^{2a_{1\hat{k}}^1 v^{\hat{k}}} dv^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{l}} u^{\hat{j}} dv^{\hat{l}} - (\varphi_{\hat{j}}^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{l}}(u^{\hat{l}} - v^{\hat{l}}) - p_{\hat{j}}) dv^{\hat{j}}. \quad (5.15)$$

7) Найдем уравнения слоев ткани E_1^T .

(1) Уравнения $\omega_1^i = 0$ первого слоя с учетом (5.1) и (5.14) примут вид

$$du^{\hat{j}} = 0, \quad e^{-2a_{1\hat{k}}^1 u^{\hat{k}}} du^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{l}} u^{\hat{j}} dv^{\hat{l}} = 0,$$

откуда

$$u^{\hat{j}} = x^{\hat{j}}, \quad e^{-2a_{1\hat{k}}^1 x^{\hat{k}}} u^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{l}} x^{\hat{j}} v^{\hat{l}} = x^1. \quad (5.16)$$

Здесь x^i – параметры первого слоя.

(2) Уравнения $\omega_2^i = 0$ второго слоя с учетом (5.1) и (5.15) примут вид

$$dv^{\hat{j}} = 0, \quad e^{2a_{1\hat{k}}^1 y^{\hat{k}}} dv^1 = 0,$$

откуда

$$v^{\hat{j}} = y^{\hat{j}}, \quad e^{2a_{1\hat{k}}^1 y^{\hat{k}}} v^1 = y^1. \quad (5.17)$$

(3) Уравнения $\omega_1^i + \omega_2^i = 0$ третьего слоения в силу (5.1), (5.14) и (5.15) принимают вид

$$\begin{aligned} du^{\hat{i}} + dv^{\hat{j}} &= 0, \\ e^{-2a_{1\hat{k}}^1 u^{\hat{k}}} du^1 + e^{2a_{1\hat{k}}^1 v^{\hat{k}}} dv^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{l}} u^{\hat{j}} dv^{\hat{l}} - \lambda_{\hat{j}\hat{l}} u^{\hat{j}} dv^{\hat{l}} \\ &- (\varphi_{\hat{j}}^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{l}}(u^{\hat{l}} - v^{\hat{l}}) - p_{\hat{j}}) du^{\hat{j}} - (\varphi_{\hat{j}}^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{l}}(u^{\hat{l}} - v^{\hat{l}}) - p_{\hat{j}}) dv^{\hat{j}} = 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение после преобразований запишется в форме

$$du^1 + e^{2a_{1\hat{k}}^1(u^{\hat{k}} + v^{\hat{k}})} dv^1 = 0.$$

Интегрируя, находим

$$u^{\hat{i}} + v^{\hat{j}} = z^{\hat{i}}, \quad (5.18)$$

$$u^1 + e^{2a_{1\hat{k}}^1 z^{\hat{k}}} v^1 = z^1. \quad (5.19)$$

8) Найдём уравнения три-ткани E_1^r , связывающие параметры слоев, проходящих через одну точку. Для этого из уравнений (5.16)–(5.19) следует исключить переменные u^i и v^i . После преобразований придем к уравнениям

$$\begin{aligned} z^1 &= e^{2a_{1\hat{k}}^1 x^{\hat{k}}} (x^1 + y^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{l}} x^{\hat{j}} y^{\hat{l}}), \\ z^{\hat{i}} &= x^{\hat{i}} + y^{\hat{i}}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

С другой стороны (см. п. 1)), уравнения (5.20) есть уравнения координатной квазигруппы Q три-ткани E_1^r . Эта квазигруппа не является лупой, но после изотопического преобразования $e^{2a_{1\hat{k}}^1 x^{\hat{k}}} x^1 \rightarrow x^1$ уравнения (5.20) перейдут в уравнения

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + e^{2a_{1\hat{k}}^1 x^{\hat{k}}} (y^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{l}} x^{\hat{j}} y^{\hat{l}}), \\ z^{\hat{i}} &= x^{\hat{i}} + y^{\hat{i}}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

которые уже определяют лупу с единицей $(0, 0, \dots, 0)$.

В частности, при $r = 3$ уравнения (5.21) принимают вид

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + e^{2(a_{12}^1 x^2 + a_{13}^1 x^3)} (y^1 - \lambda_{23} (x^2 y^3 - x^3 y^2)), \\ z^2 &= x^2 + y^2, \\ z^3 &= x^3 + y^3. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Напомним, что у рассматриваемых тканей хотя бы одна из величин $\lambda_{\hat{j}\hat{k}}$ и хотя бы одна из величин a_{12}^1 , a_{13}^1 должны быть отличны от нуля. Следовательно, $\lambda_{23} \neq 0$, и пусть, например, $a_{12}^1 \neq 0$. Сделаем изоморфное преобразование

$$\begin{aligned} \tilde{x}^2 &= -a_{12}^1 x^2 - a_{13}^1 x^3, & \tilde{x}^3 &= -\frac{\lambda_{23}}{a_{12}^1} x^3, \\ \tilde{y}^2 &= -a_{12}^1 y^2 - a_{13}^1 y^3, & \tilde{y}^3 &= -\frac{\lambda_{23}}{a_{12}^1} y^3, \\ \tilde{z}^2 &= -a_{12}^1 z^2 - a_{13}^1 z^3, & \tilde{z}^3 &= -\frac{\lambda_{23}}{a_{12}^1} z^3. \end{aligned}$$

В результате уравнения (5.22) примут следующий вид (волну над переменными опускаем):

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + e^{-2x^2}(y^1 + (y^2x^3 - x^2y^3)), \\ z^2 &= x^2 + y^2, \\ z^3 &= x^3 + y^3. \end{aligned}$$

Эти уравнения с точностью до нумерации слоений совпадают с уравнениями ткани E_1 (см. [7]). Следовательно, можно считать, что ткани E_1^r являются обобщением тканей E_1 .

§ 6. Основная теорема о три-тканях E_1^r

ТЕОРЕМА 2. *Три-ткань E_1^r является тканью E .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо показать (см. § 1), что тождество эластичности выполняется во всех координатных лупах ткани E_1^r , или, что то же самое, что на ткани E_1^r замыкаются все конфигурации E , изображенные на рис. 1.

Обозначим операцию (5.20) в координатной лупе ткани E_1^r , как и в § 1, через $\cdot$. Тогда условие замыкания конфигурации E равносильно так называемому условному тождеству: последнее из равенств

$$\begin{aligned} x_1 \cdot y_2 &= x_2 \cdot y_1, \\ x_1 \cdot y_3 &= x_3 \cdot y_1, \\ x_3 \cdot y_2 &= x_4 \cdot y_1, \\ x_2 \cdot y_3 &= x_1 \cdot y_4, \\ x_4 \cdot y_3 &= x_3 \cdot y_4 \end{aligned}$$

должно следовать из четырех первых. (Например, первое из этих равенств выражает тот факт, что точка пересечения слоя x_1 первого слоения (см. рис. 1) со слоем y_2 второго слоения лежит на том же слое третьего слоения, что и точка пересечения слоев x_2 и y_1 , и т.д. При этом параметр слоя x_1 мы также обозначаем x_1 .) В терминах уравнений (5.20) это означает, что из систем (6.1), (6.2) должна следовать система (6.3), где

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^i + \hat{y}_2^i &= \hat{x}_2^i + \hat{y}_1^i, \\ \hat{x}_1^i + \hat{y}_3^i &= \hat{x}_3^i + \hat{y}_1^i, \\ \hat{x}_3^i + \hat{y}_2^i &= \hat{x}_4^i + \hat{y}_1^i, \\ \hat{x}_1^i + \hat{y}_4^i &= \hat{x}_2^i + \hat{y}_3^i; \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} e^{2a_{1\hat{k}}^1 x_1^{\hat{k}}}(x_1^1 + y_2^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{l}} x_1^{\hat{j}} y_2^{\hat{l}}) &= e^{2a_{1\hat{k}}^1 x_2^{\hat{k}}}(x_2^1 + y_1^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{l}} x_2^{\hat{j}} y_1^{\hat{l}}), \\ e^{2a_{1\hat{k}}^1 x_1^{\hat{k}}}(x_1^1 + y_3^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{l}} x_1^{\hat{j}} y_3^{\hat{l}}) &= e^{2a_{1\hat{k}}^1 x_3^{\hat{k}}}(x_3^1 + y_1^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{l}} x_3^{\hat{j}} y_1^{\hat{l}}), \\ e^{2a_{1\hat{k}}^1 x_3^{\hat{k}}}(x_3^1 + y_2^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{l}} x_3^{\hat{j}} y_2^{\hat{l}}) &= e^{2a_{1\hat{k}}^1 x_4^{\hat{k}}}(x_4^1 + y_1^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{l}} x_4^{\hat{j}} y_1^{\hat{l}}), \\ e^{2a_{1\hat{k}}^1 x_1^{\hat{k}}}(x_1^1 + y_4^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{l}} x_1^{\hat{j}} y_4^{\hat{l}}) &= e^{2a_{1\hat{k}}^1 x_2^{\hat{k}}}(x_2^1 + y_3^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{l}} x_2^{\hat{j}} y_3^{\hat{l}}); \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$e^{2a_{1\hat{k}}^1(x_4^1 + y_3^1 - \lambda_{j\hat{l}}^j x_4^j y_3^{\hat{l}})} = e^{2a_{1\hat{k}}^1(x_3^1 + y_4^1 - \lambda_{j\hat{l}}^j x_3^j y_4^{\hat{l}})}, \quad (6.3)$$

$$x_4^{\hat{i}} + y_3^{\hat{i}} = x_3^{\hat{i}} + y_4^{\hat{i}}.$$

Докажем, что это действительно так.

Последнее уравнение системы (6.3) можно получить, сложив третье и четвертое уравнения системы (6.1) и вычтя из этой суммы первое уравнение. Повторим те же операции для системы (6.2) и покажем, что полученный результат в точности равен первому уравнению системы (6.3).

Для начала перепишем систему (6.2) и первое уравнение системы (6.3) в виде

$$\begin{aligned} e^{2a_{1\hat{k}}^1(x_1^{\hat{k}} - x_2^{\hat{k}})}(x_1^1 + y_2^1 - \lambda_{j\hat{l}}^j x_1^j y_2^{\hat{l}}) - (x_2^1 + y_1^1 - \lambda_{j\hat{l}}^j x_2^j y_1^{\hat{l}}) &= 0, \\ e^{2a_{1\hat{k}}^1(x_1^{\hat{k}} - x_3^{\hat{k}})}(x_1^1 + y_3^1 - \lambda_{j\hat{l}}^j x_1^j y_3^{\hat{l}}) - (x_3^1 + y_1^1 - \lambda_{j\hat{l}}^j x_3^j y_1^{\hat{l}}) &= 0, \\ e^{2a_{1\hat{k}}^1(x_3^{\hat{k}} - x_4^{\hat{k}})}(x_3^1 + y_2^1 - \lambda_{j\hat{l}}^j x_3^j y_2^{\hat{l}}) - (x_4^1 + y_1^1 - \lambda_{j\hat{l}}^j x_4^j y_1^{\hat{l}}) &= 0, \\ e^{2a_{1\hat{k}}^1(x_1^{\hat{k}} - x_2^{\hat{k}})}(x_1^1 + y_4^1 - \lambda_{j\hat{l}}^j x_1^j y_4^{\hat{l}}) - (x_2^1 + y_3^1 - \lambda_{j\hat{l}}^j x_2^j y_3^{\hat{l}}) &= 0; \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$e^{2a_{1\hat{k}}^1(x_3^{\hat{k}} - x_4^{\hat{k}})}(x_3^1 + y_4^1 - \lambda_{j\hat{l}}^j x_3^j y_4^{\hat{l}}) - (x_4^1 + y_3^1 - \lambda_{j\hat{l}}^j x_4^j y_3^{\hat{l}}) = 0. \quad (6.5)$$

Сложив третье и четвертое уравнения и вычтя первое, получим

$$\begin{aligned} e^{2a_{1\hat{k}}^1(x_1^{\hat{k}} - x_2^{\hat{k}})}(y_4^1 - y_2^1 - \lambda_{j\hat{l}}^j x_1^j(y_4^{\hat{l}} - y_2^{\hat{l}})) + e^{2a_{1\hat{k}}^1(x_3^{\hat{k}} - x_4^{\hat{k}})}(x_3^1 + y_2^1 - \lambda_{j\hat{l}}^j x_3^j y_2^{\hat{l}}) \\ - (y_3^1 + x_4^1 - \lambda_{j\hat{l}}^j x_2^j(y_3^{\hat{l}} - y_1^{\hat{l}}) - \lambda_{j\hat{l}}^j x_4^j y_1^{\hat{l}}) = 0. \end{aligned}$$

Покажем, что данное выражение совпадает с (6.5), для чего рассмотрим разность их левых частей (обозначим ее P):

$$\begin{aligned} P = e^{2a_{1\hat{k}}^1(x_1^{\hat{k}} - x_2^{\hat{k}})}(y_4^1 - y_2^1 - \lambda_{j\hat{l}}^j x_1^j(y_4^{\hat{l}} - y_2^{\hat{l}})) + e^{2a_{1\hat{k}}^1(x_3^{\hat{k}} - x_4^{\hat{k}})}(y_2^1 - y_4^1 - \lambda_{j\hat{l}}^j x_3^j(y_2^{\hat{l}} - y_4^{\hat{l}})) \\ + \lambda_{j\hat{l}}^j x_2^j(y_3^{\hat{l}} - y_1^{\hat{l}}) + \lambda_{j\hat{l}}^j x_4^j(y_1^{\hat{l}} - y_3^{\hat{l}}). \end{aligned}$$

Из системы (6.1) следует, что $x_1^{\hat{k}} - x_2^{\hat{k}} = x_3^{\hat{k}} - x_4^{\hat{k}}$. С учетом этих равенств выражение P принимает вид

$$P = e^{2a_{1\hat{k}}^1(x_1^{\hat{k}} - x_2^{\hat{k}})}\lambda_{j\hat{l}}^j(x_3^j - x_1^j)(y_4^{\hat{l}} - y_2^{\hat{l}}) - \lambda_{j\hat{l}}^j(x_4^j - x_2^j)(y_1^{\hat{l}} - y_3^{\hat{l}}).$$

С другой стороны, из системы (6.1) следуют соотношения $y_2^{\hat{i}} - y_4^{\hat{i}} = x_1^{\hat{i}} - x_3^{\hat{i}}$, $y_1^{\hat{i}} - y_3^{\hat{i}} = x_2^{\hat{i}} - x_4^{\hat{i}}$. В силу них и с учетом кососимметричности тензора λ_{jk} находим, что $P = 0$.

§ 7. Три-ткани E_2^r

Рассмотрим ткани E_2^r , для которых $a_{1\hat{k}}^1 = 0$. В этом случае равенства (2.8) удовлетворяются тождественно, а обобщенные тождества Якоби запишутся в следующей форме:

$$b_{[jkl]}^1 = 0. \quad (7.1)$$

Будем считать, что величины $b_{\widehat{jkl}}^1$ не все равны нулю, иначе рассматриваемая ткань является групповой. Но в этом случае ткань не может быть и тканью Муфанг, поскольку тензор кривизны ткани Муфанг кососимметричен по нижним индексам (см. введение), и условие (7.1) означает, что если рассматриваемая ткань является тканью Муфанг, то она является групповой.

Система структурных уравнений (3.6)–(3.11) для ткани E_2^T принимает вид

$$\begin{aligned} d\omega_1^1 &= \omega_1^{\widehat{j}} \wedge \omega_j^1 + a_{\widehat{jk}1}^1 \omega_1^{\widehat{j}} \wedge \omega_1^{\widehat{k}}, \\ d\omega_1^{\widehat{i}} &= 0, \\ d\omega_2^1 &= \omega_2^{\widehat{j}} \wedge \omega_j^1 - a_{\widehat{jk}2}^1 \omega_2^{\widehat{j}} \wedge \omega_2^{\widehat{k}}, \\ d\omega_2^{\widehat{i}} &= 0, \\ d\omega_{\widehat{j}}^1 &= b_{\widehat{jk}l1}^1 \omega_1^{\widehat{k}} \wedge \omega_2^{\widehat{l}}, \\ \nabla a_{\widehat{jk}}^1 &= da_{\widehat{jk}}^1 = -b_{[\widehat{jk}]l}^1 (\omega_1^{\widehat{l}} - \omega_2^{\widehat{l}}). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Непосредственно проверяется, что эта система при условии (7.1) замкнута относительно внешнего дифференцирования. Интегрируя второе, четвертое, пятое и шестое уравнения, находим

$$\begin{aligned} \omega_1^{\widehat{i}} &= du^{\widehat{i}}, \\ \omega_2^{\widehat{i}} &= dv^{\widehat{i}}, \\ \omega_{\widehat{j}}^1 &= \frac{1}{2} b_{\widehat{jk}l}^1 (u^{\widehat{k}} dv^{\widehat{l}} - v^{\widehat{l}} du^{\widehat{k}}) + d\varphi_{\widehat{j}}^1, \\ a_{\widehat{jk}}^1 &= -b_{[\widehat{jk}]l}^1 (u^{\widehat{l}} - v^{\widehat{l}}) + c_{\widehat{jk}}^1, \end{aligned}$$

где $c_{\widehat{jk}}^1$ – постоянные, причем $c_{\widehat{jk}}^1 = -c_{\widehat{kj}}^1$. С учетом этих равенств первое уравнение системы (7.2) примет вид

$$d\omega_1^1 = du^{\widehat{j}} \wedge \left(\frac{1}{2} b_{\widehat{jk}l}^1 (u^{\widehat{k}} dv^{\widehat{l}} - v^{\widehat{l}} du^{\widehat{k}}) + d\varphi_{\widehat{j}}^1 \right) + (-b_{[\widehat{jk}]l}^1 (u^{\widehat{l}} - v^{\widehat{l}}) + c_{\widehat{jk}}^1) du^{\widehat{j}} \wedge du^{\widehat{k}},$$

или

$$d\omega_1^1 = \frac{1}{2} b_{\widehat{jk}l}^1 du^{\widehat{j}} \wedge d(u^{\widehat{k}} v^{\widehat{l}}) + du^{\widehat{j}} \wedge d\varphi_{\widehat{j}}^1 - b_{\widehat{jk}l}^1 u^{\widehat{l}} du^{\widehat{j}} \wedge du^{\widehat{k}} + c_{\widehat{jk}}^1 du^{\widehat{j}} \wedge du^{\widehat{k}}. \quad (7.3)$$

Рассмотрим форму $b_{\widehat{jk}l}^1 u^{\widehat{l}} du^{\widehat{j}} \wedge du^{\widehat{k}}$. В силу (7.1) ее внешний дифференциал равен нулю, поэтому положим $b_{\widehat{jk}l}^1 u^{\widehat{l}} du^{\widehat{j}} \wedge du^{\widehat{k}} = d\theta(u)$. Запишем форму $d\theta(u)$ в следующем виде:

$$d\theta(u) = \frac{1}{3} (b_{\widehat{jk}l}^1 u^{\widehat{l}} du^{\widehat{j}} \wedge du^{\widehat{k}} + b_{\widehat{klj}}^1 u^{\widehat{j}} du^{\widehat{k}} \wedge du^{\widehat{l}} + b_{\widehat{ljk}}^1 u^{\widehat{k}} du^{\widehat{l}} \wedge du^{\widehat{j}}).$$

Используя тождества Якоби (7.1), далее получаем

$$d\theta(u) = \frac{1}{3} (b_{\widehat{jk}l}^1 u^{\widehat{l}} du^{\widehat{j}} \wedge du^{\widehat{k}} + b_{\widehat{klj}}^1 u^{\widehat{j}} du^{\widehat{k}} \wedge du^{\widehat{l}} - (b_{\widehat{jk}l}^1 + b_{\widehat{klj}}^1) u^{\widehat{k}} du^{\widehat{l}} \wedge du^{\widehat{j}}),$$

или

$$d\theta(u) = \frac{1}{3}(\widetilde{b_{jkl}^1} du^{\widehat{j}} \wedge d(u^{\widehat{k}} u^{\widehat{l}}) - \widetilde{b_{klj}^1} du^{\widehat{l}} \wedge d(u^{\widehat{j}} u^{\widehat{k}})) = -\frac{1}{3}\widetilde{b_{klj}^1} du^{\widehat{l}} \wedge d(u^{\widehat{j}} u^{\widehat{k}}).$$

Отсюда находим форму $\theta(u)$:

$$\theta(u) = \frac{1}{3}\widetilde{b_{klj}^1} u^{\widehat{k}} u^{\widehat{j}} du^{\widehat{l}} = -\frac{1}{3}\widetilde{b_{jkl}^1} u^{\widehat{j}} u^{\widehat{k}} du^{\widehat{l}}. \quad (7.4)$$

В результате уравнение (7.3) запишется в виде

$$d\omega_1^1 = \frac{1}{2}\widetilde{b_{jkl}^1} du^{\widehat{j}} \wedge d(u^{\widehat{k}} v^{\widehat{l}}) + du^{\widehat{j}} \wedge d\varphi_j^1 - d\theta(u) + c_{jk}^1 du^{\widehat{j}} \wedge du^{\widehat{k}}.$$

Интегрируя, получаем

$$\omega_1^1 = -\frac{1}{2}\widetilde{b_{jkl}^1} u^{\widehat{k}} v^{\widehat{l}} du^{\widehat{j}} - \varphi_j^1 du^{\widehat{j}} - \theta(u) + c_{jk}^1 u^{\widehat{j}} du^{\widehat{k}} + du^1. \quad (7.5)$$

Второе уравнение системы (7.2) с учетом найденных соотношений принимает вид

$$d\omega_2^1 = dv^{\widehat{j}} \wedge \left(\frac{1}{2}\widetilde{b_{jkl}^1} (u^{\widehat{k}} dv^{\widehat{l}} - v^{\widehat{l}} du^{\widehat{k}}) + d\varphi_j^1 \right) - (-\widetilde{b_{[jk]l}^1} (u^{\widehat{l}} - v^{\widehat{l}}) + c_{jk}^1) dv^{\widehat{j}} \wedge dv^{\widehat{k}},$$

или

$$d\omega_2^1 = -\frac{1}{2}\widetilde{b_{jkl}^1} dv^{\widehat{j}} \wedge d(u^{\widehat{k}} v^{\widehat{l}}) + dv^{\widehat{j}} \wedge d\varphi_j^1 - d\theta(v) - c_{jk}^1 dv^{\widehat{j}} \wedge dv^{\widehat{k}}.$$

Интегрируя аналогично предыдущему уравнению, находим

$$\omega_2^1 = \frac{1}{2}\widetilde{b_{jkl}^1} u^{\widehat{k}} v^{\widehat{l}} dv^{\widehat{j}} - \varphi_j^1 dv^{\widehat{j}} - \theta(v) - c_{jk}^1 v^{\widehat{j}} dv^{\widehat{k}} + dv^1. \quad (7.6)$$

Найдем уравнения слоений три-ткани E_2^T .

(1) Первое слоение задается уравнениями $\omega_1^i = 0$, или (см. формулу (7.5))

$$-\frac{1}{2}\widetilde{b_{jkl}^1} u^{\widehat{k}} v^{\widehat{l}} du^{\widehat{j}} - \varphi_j^1 du^{\widehat{j}} - \theta(u) + c_{jk}^1 u^{\widehat{j}} du^{\widehat{k}} + du^1 = 0, \\ du^{\widehat{i}} = 0.$$

Интегрируя, получим

$$u^i = x^i. \quad (7.7)$$

(2) Второе слоения задается уравнениями $\omega_2^i = 0$, или

$$\frac{1}{2}\widetilde{b_{jkl}^1} u^{\widehat{k}} v^{\widehat{l}} dv^{\widehat{j}} - \varphi_j^1 dv^{\widehat{j}} - \theta(v) - c_{jk}^1 v^{\widehat{j}} dv^{\widehat{k}} + dv^1 = 0, \\ dv^{\widehat{i}} = 0.$$

После интегрирования получим

$$v^i = y^i. \quad (7.8)$$

(3) Третье слоение задается уравнениями $\omega_1^i + \omega_2^i = 0$, или

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}b_{jkl}^1 u^{\widehat{k}} v^{\widehat{l}} du^{\widehat{j}} - \varphi_j^1 du^{\widehat{j}} - \theta(u) + c_{jk}^1 u^{\widehat{j}} du^{\widehat{k}} + \frac{1}{2}b_{jkl}^1 u^{\widehat{k}} v^{\widehat{l}} dv^{\widehat{j}} \\ & - \varphi_j^1 dv^{\widehat{j}} - \theta(v) - c_{jk}^1 v^{\widehat{j}} dv^{\widehat{k}} + du^1 + dv^1 = 0, \\ & du^{\widehat{i}} + dv^{\widehat{i}} = 0. \end{aligned}$$

После преобразований первое уравнение примет вид

$$-b_{jkl}^1 u^{\widehat{k}} v^{\widehat{l}} du^{\widehat{j}} - \theta(u) - \theta(v) + c_{jk}^1 (u^{\widehat{j}} + v^{\widehat{j}}) du^{\widehat{k}} + du^1 + dv^1 = 0,$$

а второе дает $u^{\widehat{i}} + v^{\widehat{i}} = z^{\widehat{i}}$. В силу этих равенств первое уравнение преобразуется к виду

$$-b_{jkl}^1 u^{\widehat{k}} z^{\widehat{l}} du^{\widehat{j}} - \frac{1}{3}b_{jkl}^1 z^{\widehat{j}} z^{\widehat{k}} du^{\widehat{l}} + \frac{1}{3}b_{jkl}^1 (z^{\widehat{j}} u^{\widehat{k}} + z^{\widehat{k}} u^{\widehat{j}}) du^{\widehat{l}} + c_{jk}^1 z^{\widehat{j}} du^{\widehat{k}} + du^1 + dv^1 = 0. \quad (7.9)$$

Преобразуем первое слагаемое $\tau = b_{jkl}^1 u^{\widehat{k}} z^{\widehat{l}} du^{\widehat{j}}$:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{3}(b_{jkl}^1 u^{\widehat{k}} z^{\widehat{l}} du^{\widehat{j}} + b_{klj}^1 u^{\widehat{l}} z^{\widehat{j}} du^{\widehat{k}} + b_{ljk}^1 u^{\widehat{j}} z^{\widehat{k}} du^{\widehat{l}}) \\ &= \frac{1}{3}(b_{jkl}^1 u^{\widehat{k}} z^{\widehat{l}} du^{\widehat{j}} + b_{klj}^1 u^{\widehat{l}} z^{\widehat{j}} du^{\widehat{k}} - (b_{jkl}^1 + b_{klj}^1) u^{\widehat{j}} z^{\widehat{k}} du^{\widehat{l}}) \\ &= \frac{1}{3}(b_{jkl}^1 u^{\widehat{k}} z^{\widehat{l}} du^{\widehat{j}} + b_{klj}^1 u^{\widehat{l}} z^{\widehat{j}} du^{\widehat{k}} + b_{jkl}^1 u^{\widehat{j}} z^{\widehat{l}} du^{\widehat{k}} + b_{klj}^1 u^{\widehat{l}} z^{\widehat{k}} du^{\widehat{j}}) \\ &= \frac{1}{3}(b_{jkl}^1 z^{\widehat{l}} d(u^{\widehat{k}} u^{\widehat{j}}) + b_{klj}^1 u^{\widehat{l}} (z^{\widehat{j}} du^{\widehat{k}} + z^{\widehat{k}} du^{\widehat{j}})) \\ &= \frac{1}{3}b_{jkl}^1 (z^{\widehat{l}} d(u^{\widehat{k}} u^{\widehat{j}}) - u^{\widehat{l}} (z^{\widehat{k}} du^{\widehat{j}} + z^{\widehat{j}} du^{\widehat{k}})). \end{aligned}$$

Подставляя форму τ обратно в уравнение (7.9), получим

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3}b_{jkl}^1 z^{\widehat{l}} d(u^{\widehat{k}} u^{\widehat{j}}) + \frac{1}{3}b_{jkl}^1 u^{\widehat{l}} (z^{\widehat{j}} du^{\widehat{k}} + z^{\widehat{k}} du^{\widehat{j}}) - \frac{1}{3}b_{jkl}^1 z^{\widehat{j}} z^{\widehat{k}} du^{\widehat{l}} \\ & + \frac{1}{3}b_{jkl}^1 (z^{\widehat{j}} u^{\widehat{k}} + z^{\widehat{k}} u^{\widehat{j}}) du^{\widehat{l}} + c_{jk}^1 z^{\widehat{j}} du^{\widehat{k}} + du^1 + dv^1 = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя, найдем первое уравнение третьего слоения. Таким образом, третье слоение описывается системой

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3}b_{jkl}^1 z^{\widehat{l}} u^{\widehat{k}} u^{\widehat{j}} + \frac{1}{3}b_{jkl}^1 u^{\widehat{l}} (z^{\widehat{j}} u^{\widehat{k}} + z^{\widehat{k}} u^{\widehat{j}}) - \frac{1}{3}b_{jkl}^1 z^{\widehat{j}} z^{\widehat{k}} u^{\widehat{l}} + c_{jk}^1 z^{\widehat{j}} u^{\widehat{k}} + u^1 + v^1 = z^1, \\ & u^{\widehat{i}} + v^{\widehat{i}} = z^{\widehat{i}}. \end{aligned}$$

Преобразуя первое уравнение с помощью последних и учитывая кососимметричность тензоров, придем к уравнениям

$$\begin{aligned} & u^1 + v^1 - \frac{1}{2}(c_{jk}^1 + \frac{1}{3}b_{ljk}^1 (u^{\widehat{l}} - v^{\widehat{l}}))(u^{\widehat{j}} v^{\widehat{k}} - u^{\widehat{k}} v^{\widehat{j}}) = z^1, \\ & u^{\widehat{i}} + v^{\widehat{i}} = z^{\widehat{i}}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Найдем уравнения три-ткани E_2^r , для чего исключим из найденных уравнений слоений локальные координаты u^i и v^i . После преобразований получим

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + y^1 - \frac{1}{2} \left(c_{\widehat{j}\widehat{k}}^1 + \frac{1}{3} b_{\widehat{l}\widehat{j}\widehat{k}}^1 (x^{\widehat{l}} - y^{\widehat{l}}) \right) (x^{\widehat{j}} y^{\widehat{k}} - x^{\widehat{k}} y^{\widehat{j}}), \\ z^{\widehat{i}} &= x^{\widehat{i}} + y^{\widehat{i}}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

С другой стороны, уравнения (7.10) представляют собой уравнения координатной квазигруппы три-ткани E_2^r , которая (квазигруппа) является лупой с единицей $(0, 0, \dots, 0)$.

В частности, при $r = 3$ и при условии $c_{23}^1 = 0$ уравнения (7.10) примут вид

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + y^1 - \frac{1}{6} (b_{223}^1 (x^2 - y^2) + b_{323}^1 (x^3 - y^3)) (y^3 x^2 - y^2 x^3), \\ z^2 &= x^2 + y^2, \\ z^3 &= x^3 + y^3. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Будем считать, что компоненты тензора кривизны b_{223}^1 и b_{323}^1 одновременно не равны нулю, в противном случае рассматриваемая ткань является групповой. Пусть $b_{223}^1 \neq 0$, тогда рассмотрим изоморфизм

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= b_{223}^1 x_1, & \tilde{y}_1 &= b_{223}^1 y_1, & \tilde{z}_1 &= b_{223}^1 x_1, \\ \tilde{x}_2 &= \frac{1}{3} (b_{223}^1 x^2 + b_{323}^1 x^3), & \tilde{y}_2 &= \frac{1}{3} (b_{223}^1 y^2 + b_{323}^1 y^3), & \tilde{z}_2 &= \frac{1}{3} (b_{223}^1 z^2 + b_{323}^1 z^3). \end{aligned}$$

В результате этого преобразования уравнения (7.11) примут следующий вид (волну над переменными опускаем):

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + y^1 + (x^2 - y^2)(y^2 x^3 - y^3 x^2), \\ z^2 &= x^2 + y^2, \\ z^3 &= x^3 + y^3. \end{aligned} \quad (7.13)$$

С помощью этих уравнений находим

$$z^1 - z^3(z^2)^2 = (x^1 - x^3(x^2)^2) + (y^1 - y^3(y^2)^2) - 3x^2 y^2 (x^3 + y^3).$$

Поэтому после изоморфизма

$$\frac{1}{3} (x^1 - x^3(x^2)^2) \rightarrow x^1, \quad \frac{1}{3} (y^1 - y^3(y^2)^2) \rightarrow y^1, \quad \frac{1}{3} (z^1 - z^3(z^2)^2) \rightarrow z^1$$

уравнения (7.13) примут вид

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + y^1 - (x^3 + y^3)x^2 y^2, \\ z^2 &= x^2 + y^2, \\ z^3 &= x^3 + y^3. \end{aligned}$$

Эти уравнения с точностью до нумерации переменных совпадают с уравнениями ткани E_2 (см. [7]). Поэтому можно считать, что ткани E_2^r являются обобщением тканей E_2 .

§ 8. Основная теорема о тканях E_2^r

ТЕОРЕМА 3. *Три-ткань E_2^r является эластичной тканью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо показать, что на ткани E_2^r замыкаются фигуры E , изображенные на рис. 1. Как это было сделано для тканей E_1^r , необходимо доказать импликацию (8.1), (8.2) $\implies$ (8.3), где

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^i + \hat{y}_2^i &= \hat{x}_2^i + \hat{y}_1^i, \\ \hat{x}_1^i + \hat{y}_3^i &= \hat{x}_3^i + \hat{y}_1^i, \\ \hat{x}_3^i + \hat{y}_2^i &= \hat{x}_4^i + \hat{y}_1^i, \\ \hat{x}_1^i + \hat{y}_4^i &= \hat{x}_2^i + \hat{y}_3^i; \end{aligned} \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned} x_1^1 + y_2^1 + \frac{1}{3}b_{jkl}^1 y_2^k \hat{x}_1^l (\hat{x}_1^j - \hat{y}_2^j) + c_{jk}^1 y_2^j \hat{x}_1^k &= x_2^1 + y_1^1 + \frac{1}{3}b_{jkl}^1 y_1^k \hat{x}_2^l (\hat{x}_2^j - \hat{y}_1^j) + c_{jk}^1 y_1^j \hat{x}_2^k, \\ x_1^1 + y_3^1 + \frac{1}{3}b_{jkl}^1 y_3^k \hat{x}_1^l (\hat{x}_1^j - \hat{y}_3^j) + c_{jk}^1 y_3^j \hat{x}_1^k &= x_3^1 + y_1^1 + \frac{1}{3}b_{jkl}^1 y_1^k \hat{x}_3^l (\hat{x}_3^j - \hat{y}_1^j) + c_{jk}^1 y_1^j \hat{x}_3^k, \\ x_3^1 + y_2^1 + \frac{1}{3}b_{jkl}^1 y_2^k \hat{x}_3^l (\hat{x}_3^j - \hat{y}_2^j) + c_{jk}^1 y_2^j \hat{x}_3^k &= x_4^1 + y_1^1 + \frac{1}{3}b_{jkl}^1 y_1^k \hat{x}_4^l (\hat{x}_4^j - \hat{y}_1^j) + c_{jk}^1 y_1^j \hat{x}_4^k, \\ x_1^1 + y_4^1 + \frac{1}{3}b_{jkl}^1 y_4^k \hat{x}_1^l (\hat{x}_1^j - \hat{y}_4^j) + c_{jk}^1 y_4^j \hat{x}_1^k &= x_2^1 + y_3^1 + \frac{1}{3}b_{jkl}^1 y_3^k \hat{x}_2^l (\hat{x}_2^j - \hat{y}_3^j) + c_{jk}^1 y_3^j \hat{x}_2^k; \end{aligned} \tag{8.2}$$

$$\begin{aligned} x_3^1 + y_4^1 + \frac{1}{3}b_{jkl}^1 y_4^k \hat{x}_3^l (\hat{x}_3^j - \hat{y}_4^j) + c_{jk}^1 y_4^j \hat{x}_3^k &= x_4^1 + y_3^1 + \frac{1}{3}b_{jkl}^1 y_3^k \hat{x}_4^l (\hat{x}_4^j - \hat{y}_3^j) + c_{jk}^1 y_3^j \hat{x}_4^k, \\ \hat{x}_3^i + \hat{y}_4^i &= \hat{x}_4^i + \hat{y}_3^i. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Последнее уравнение системы (8.3) можно получить, если сложить третье и четвертое уравнения системы (8.1) и из результата вычесть первое уравнение. Повторим те же операции для системы (8.2) и покажем, что полученный результат в точности равен первому уравнению системы (8.3). Для этого необходимо показать, что

$$P = (x_3 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 - x_1 \cdot y_2) - x_4 \cdot y_3 - ((x_4 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_4 - x_2 \cdot y_1) - x_3 \cdot y_4) = 0.$$

Подставляя уравнения из систем (8.2) и (8.3), находим

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3}b_{jkl}^1 (y_1^k (\hat{x}_2^l (\hat{x}_2^j - \hat{y}_1^j) - \hat{x}_4^l (\hat{x}_4^j - \hat{y}_1^j)) + y_2^k (\hat{x}_3^l (\hat{x}_3^j - \hat{y}_2^j) - \hat{x}_1^l (\hat{x}_1^j - \hat{y}_2^j)) \\ &\quad + y_3^k (\hat{x}_4^l (\hat{x}_4^j - \hat{y}_3^j) - \hat{x}_2^l (\hat{x}_2^j - \hat{y}_3^j)) + y_4^k (\hat{x}_1^l (\hat{x}_1^j - \hat{y}_4^j) - \hat{x}_3^l (\hat{x}_3^j - \hat{y}_4^j))) \\ &\quad + c_{jk}^1 (y_2^j \hat{x}_3^k + y_4^j \hat{x}_1^k - y_2^j \hat{x}_1^k - y_1^j \hat{x}_4^k - y_3^j \hat{x}_2^k + y_1^j \hat{x}_2^k - y_4^j \hat{x}_3^k + y_3^j \hat{x}_4^k). \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение

$$R = c_{jk}^1 (y_2^j \hat{x}_3^k + y_4^j \hat{x}_1^k - y_2^j \hat{x}_1^k - y_1^j \hat{x}_4^k - y_3^j \hat{x}_2^k + y_1^j \hat{x}_2^k - y_4^j \hat{x}_3^k + y_3^j \hat{x}_4^k)$$

$$\begin{aligned}
&= c_{jk}^1(\hat{y}_2^j(\hat{x}_3^k - \hat{x}_1^k) + \hat{y}_4^j(\hat{x}_1^k - \hat{x}_3^k) + \hat{y}_1^j(\hat{x}_2^k - \hat{x}_4^k) + \hat{y}_3^j(\hat{x}_4^k - \hat{x}_2^k)) \\
&= c_{jk}^1((\hat{y}_2^j - \hat{y}_4^j)(\hat{x}_3^k - \hat{x}_1^k) + (\hat{y}_3^j - \hat{y}_1^j)(\hat{x}_4^k - \hat{x}_2^k)).
\end{aligned}$$

Из системы (8.1) следует, что

$$\hat{y}_2^i - \hat{y}_4^i = \hat{y}_1^i - \hat{y}_3^i, \quad \hat{x}_3^i - \hat{x}_1^i = \hat{x}_4^i - \hat{x}_2^i.$$

С учетом этих равенств

$$R = c_{jk}^1((\hat{y}_2^j - \hat{y}_4^j)(\hat{x}_4^k - \hat{x}_2^k) + (\hat{y}_4^j - \hat{y}_2^j)(\hat{x}_4^k - \hat{x}_2^k)) = 0.$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\begin{aligned}
Q &= b_{jkl}^1(\hat{y}_1^k(\hat{x}_2^l(\hat{x}_2^j - \hat{y}_1^j) - \hat{x}_4^l(\hat{x}_4^j - \hat{y}_1^j)) + \hat{y}_2^k(\hat{x}_3^l(\hat{x}_3^j - \hat{y}_2^j) - \hat{x}_1^l(\hat{x}_1^j - \hat{y}_2^j)) \\
&\quad + \hat{y}_3^k(\hat{x}_4^l(\hat{x}_4^j - \hat{y}_3^j) - \hat{x}_2^l(\hat{x}_2^j - \hat{y}_3^j)) + \hat{y}_4^k(\hat{x}_1^l(\hat{x}_1^j - \hat{y}_4^j) - \hat{x}_3^l(\hat{x}_3^j - \hat{y}_4^j))).
\end{aligned}$$

Преобразуем его, используя кососимметричность тензора b :

$$\begin{aligned}
Q &= b_{jkl}^1((\hat{y}_4^k - \hat{y}_2^k)(\hat{x}_1^l\hat{x}_1^j - \hat{x}_3^l\hat{x}_3^j) - \hat{y}_2^k\hat{x}_3^l\hat{y}_2^j + \hat{y}_2^k\hat{x}_1^l\hat{y}_2^j - \hat{y}_4^k\hat{x}_1^l\hat{y}_4^j + \hat{y}_4^k\hat{x}_3^l\hat{y}_4^j \\
&\quad + (\hat{y}_1^k - \hat{y}_3^k)(\hat{x}_2^l\hat{x}_2^j - \hat{x}_4^l\hat{x}_4^j) - \hat{y}_1^k\hat{x}_2^l\hat{y}_1^j + \hat{y}_1^k\hat{x}_4^l\hat{y}_1^j - \hat{y}_3^k\hat{x}_4^l\hat{y}_3^j + \hat{y}_3^k\hat{x}_2^l\hat{y}_3^j) \\
&= b_{jkl}^1((\hat{y}_4^k - \hat{y}_2^k)(\hat{x}_1^l\hat{x}_1^j - \hat{x}_3^l\hat{x}_3^j) + (\hat{y}_1^k - \hat{y}_3^k)(\hat{x}_2^l\hat{x}_2^j - \hat{x}_4^l\hat{x}_4^j) \\
&\quad + (\hat{x}_1^k - \hat{x}_3^k)(\hat{y}_4^l\hat{y}_4^j - \hat{y}_2^l\hat{y}_2^j) + (\hat{x}_4^k - \hat{x}_2^k)(\hat{y}_3^l\hat{y}_3^j - \hat{y}_1^l\hat{y}_1^j)).
\end{aligned}$$

Из системы (8.1) находим, что

$$\hat{y}_2^i - \hat{y}_4^i = \hat{x}_1^i - \hat{x}_3^i = \hat{y}_1^i - \hat{y}_3^i = \hat{x}_2^i - \hat{x}_4^i \equiv \hat{p}^i. \quad (8.4)$$

Поэтому выражение Q примет вид

$$Q = -b_{jkl}^1\hat{p}^i(\hat{x}_1^l\hat{x}_1^j - \hat{x}_3^l\hat{x}_3^j - \hat{x}_2^l\hat{x}_2^j + \hat{x}_4^l\hat{x}_4^j - \hat{y}_4^l\hat{y}_4^j + \hat{y}_2^l\hat{y}_2^j + \hat{y}_3^l\hat{y}_3^j - \hat{y}_1^l\hat{y}_1^j).$$

Преобразуем сумму в скобках, полагая в силу (8.4)

$$\hat{x}_2^i = \hat{p}^i + \hat{x}_4^i, \quad \hat{x}_1^i = \hat{p}^i + \hat{x}_3^i, \quad \hat{y}_1^i = \hat{p}^i + \hat{y}_3^i, \quad \hat{y}_2^i = \hat{p}^i + \hat{y}_4^i.$$

Подставляя в Q , после преобразований получим $Q = 0$.

Таким образом, $P = \frac{1}{3}Q + R = 0$, и теорема 3 доказана.

Объединяя полученные результаты, приходим к теореме 1.

Выполнено в рамках государственного задания по проекту 1686.

Список литературы

- [1] R. Moufang, “Zur Struktur von Alternativkörpern”, *Math. Ann.*, **110**:1 (1935), 416–430.
- [2] А. И. Мальцев, “Аналитические луны”, *Матем. сб.*, **36(78)**:3 (1955), 569–576.

- [3] А. И. Нестеров, “Квазигрупповые идеи в физике”, *Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике*, Тр. Института физики, **66**, Тарту, 1990, 107–120.
- [4] G. Bol, “Gewebe und Gruppen”, *Math. Ann*, **114**:1 (1937), 414–431.
- [5] Л. В. Сабинин, П. О. Михеев, *Теория гладких луп Бола*, Ун-т дружбы народов, М., 1985, 80 с.
- [6] В. Д. Белоусов, *Основы теории квазигрупп и луп*, Наука, М., 1967, 223 с.
- [7] А. М. Шелехов, “Об аналитических решениях функционального уравнения $(xy)x = x(yx)$ ”, *Матем. заметки*, **50**:4 (1991), 132–140; англ. пер.: А. М. Shelekhov, “Analytic solutions of the functional equation $(xy)x = x(yx)$ ”, *Math. Notes*, **50**:4 (1991), 1073–1078.
- [8] А. М. Шелехов, *О три-тканях с эластичными координатными лупами*, деп. в ВИНТИ 02.12.1987, № 8465-В87, Калининский гос. ун-т, Калинин, 1987.
- [9] А. М. Шелехов, “The isotopically invariant loop variety lying between Moufang loops variety and Bol loops variety”, *Proc. of the 3rd Congress of Geometry* (Thessaloniki, 1991), Aristotle Univ. Thessaloniki, Thessaloniki, 1992, 376–384.
- [10] P. N. Syrbu, “Loops with universal elasticity”, *Quasigroups Related Systems*, **1**:1 (1994), 57–65.
- [11] P. N. Syrbu, “On loops with universal elasticity”, *Quasigroups Related Systems*, **3** (1996), 41–54.
- [12] М. В. Антипова, “О тканях Бола с почти нулевым тензором кривизны”, Изв. ПГПУ им. В. Г. Белинского, Пенза, 2011, 28–34.
- [13] М. В. Антипова, “Об одном приложении теории многомерных три-тканей”, *Вестн. Тверского гос. ун-та. Сер. Прикладная математика*, 2012, № 32, 81–89.
- [14] М. А. Акивис, А. М. Шелехов, *Многомерные три-ткани и их приложения*, Тверь, Тверской гос. ун-т, 2010, 307 с.
- [15] M. A. Akivis, A. M. Shelekhov, *Geometry and algebra of multidimensional three-webs*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **82**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992, xviii+358 pp.
- [16] М. А. Акивис, “О три-тканях многомерных поверхностей”, Тр. Геом. семин., **2**, ВИНТИ, М., 1969, 7–31.
- [17] G. A. Balandina, “On general theory of elastic webs”, *Webs and Quasigroups*, Tver State University, Tver, 1995, 62–74.

Камиль Рамилович Джукашев
(Kamil' R. Dzhukashev)
 Тверской государственный университет
E-mail: dzhukashev@gmail.com

Поступила в редакцию
 20.01.2014 и 04.08.2014

Александр Михайлович Шелехов
(Aleksandr M. Shelekhov)
 Тверской государственный университет
E-mail: amshelekhov@rambler.ru