Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Малыхин, К. С. Рютин, О концентрации L_1 -нормы тригонометрических полиномов и целых функций, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 11, 95–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8332>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 12:51:47

УДК 517.51

Ю. В. Малыхин, К. С. Рютин

О концентрации L_1 -нормы тригонометрических полиномов и целых функций

Для достаточно больших n доказано, что минимальная мера подмножества $[-\pi, \pi]$, на котором некоторый ненулевой тригонометрический полином порядка не выше n набирает половину L_1 -нормы, равна $\pi/(n+1)$. Получен аналогичный результат для целых функций экспоненциального типа.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: тригонометрические полиномы, целые функции, экстремальные задачи, L_1 -норма.

DOI: 10.4213/sm8332

§ 1. Введение

Пусть $\mathcal{T}_n = \{a_0/2 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx\}$ – пространство вещественных тригонометрических полиномов порядка не выше n . Мы рассматриваем задачу о нахождении минимальной меры множества $E \subset \mathbb{T} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, на котором некоторый ненулевой полином $T \in \mathcal{T}_n$ набирает половину L_1 -нормы:

$$\int_E |T(x)| dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} |T(x)| dx. \quad (1.1)$$

Данная задача является одной из изучавшихся в [1], где была в общей ситуации рассмотрена следующая величина. Пусть $M \subset L_1(X, \mu)$ – множество функций,

$$\lambda(M) = \inf \left\{ \mu(E) : E \subset X, \exists m \in M \setminus \{0\}, \int_E |m| d\mu \geq \frac{1}{2} \int_X |m| d\mu \right\}.$$

Величина $\lambda(M)$ играет важную роль в L_1 -аппроксимации функций с малым носителем и, в частности, в теории сжатых измерений (Compressed Sensing). Относительно $\lambda(M)$ в [1] был установлен ряд свойств и сформулировано несколько вопросов.

Пример полиномов Rogozinskogo

$$r_n(x) = \frac{\cos(n+1)x}{\cos x - \cos \frac{\pi}{2n+2}}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00332).

показывает, что в (1.1) можно взять множество $E = [-\pi/(2n+2), \pi/(2n+2)]$ меры $\pi/(n+1)$. Действительно, функция $\sigma(x) = \text{sign} \cos(n+1)x$ ортогональна $\mathcal{T}_n$ и меняет знак в точках $(k+1/2)\pi/(n+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Полином r_n меняет знак в тех же точках, кроме $\pm\pi/(2n+2)$, следовательно,

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(x) r_n(x) dx = \int_{-\pi/(2n+2)}^{\pi/(2n+2)} r_n(x) dx - \int_{\pi/(2n+2) \leq |x| \leq \pi} |r_n(x)| dx,$$

откуда сразу следует (1.1).

Оценка снизу минимально возможной меры E проводится в [1] с помощью неравенств между C и L_1 -нормами. Будем использовать следующие обозначения:

$$\|T\|_{\infty} = \max_{x \in \mathbb{T}} |T(x)|, \\ \|T\|_{L(E)} = \int_E |T(x)| dx, \quad \|T\|_1 = \|T\|_{L(\mathbb{T})}.$$

Пусть

$$C_n = \max_{T \in \mathcal{T}_n, \|T\|_1=1} \|T\|_{\infty}.$$

С. Б. Стечкин показал (см. [2], [3]), что $C_n = Cn + o(n)$ для некоторой константы $C > 0$. Оценки C были получены Л. В. Тайковым в [3] и усиливались рядом авторов. По-видимому, наилучший на сегодня результат получен Д. В. Горбачевым в [4]:

$$1.08185 \dots \leq 2\pi C \leq 1.09769 \dots$$

Нам достаточно будет оценки $2\pi C < 1.1$. Кроме того, в [4] было установлено неравенство $Cn \leq C_n \leq C(n+1)$, откуда

$$\frac{\|T\|_{\infty}}{\|T\|_1} \leq C(n+1) \quad \forall T \in \mathcal{T}_n. \quad (1.2)$$

Из этого неравенства следует оценка снизу на меру E в (1.1)

$$\frac{1}{2} \|T\|_1 = \|T\|_{L(E)} \leq \mu(E) \|T\|_{\infty} \leq C(n+1) \|T\|_1 \mu(E), \quad \mu(E) \geq \frac{1}{2C(n+1)}.$$

Итак, в [1] были получены следующие оценки на минимально возможную меру E :

$$\frac{\pi}{1.1(n+1)} < \frac{\pi}{2C(n+1)} \leq \mu(E) \leq \frac{\pi}{n+1}.$$

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть n достаточно велико, полином $T \in \mathcal{T}_n \setminus \{0\}$ набирает на множестве $E \subset \mathbb{T}$ половину L_1 -нормы:

$$\int_E |T(x)| dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} |T(x)| dx.$$

Тогда $\mu(E) \geq \pi/(n+1)$. Равенство достигается только в случае, когда E – отрезок, а T – полином Рогозинского ($T(x) = cr_n(x - x_0)$).

Тем самым, минимально возможная мера E в (1.1) равна $\pi/(n+1)$ при достаточно большом n . Величина $\pi/(n+1)$ также будет постоянно возникать в наших вычислениях, и мы будем использовать для нее обозначение

$$\hbar := \frac{\pi}{n+1}.$$

Случай, когда экстремальное множество E является отрезком, разбирается в начале §3. Основная трудность заключается в доказательстве того, что E не может состоять из $K \geq 2$ непересекающихся отрезков. Доказательство проводится разбором случаев различных K . Случай $K = 2$ следует из необходимых условий экстремума и известного описания канонических наборов, при $K \geq 5$ используются неравенство Рисса (2.1) и неравенство Бернштейна для производных в L_1 -метрике; см. §3. Случай $K = 4$ аналогичен $K \geq 5$, но несколько труднее, ему посвящен §4. При $K = 3$ приходится преодолевать основные технические сложности и комбинировать разные подходы (§5). Отметим, что предположение теоремы о том, что n достаточно велико, используется только при $K = 3$. Мы предполагаем, что утверждение теоремы верно при любом n , однако доказать это не удалось.

Рассматриваемую нами задачу можно считать частным случаем задачи нахождения точной константы в аналоге неравенства Ремеза (для тригонометрических полиномов – в метрике L_1):

$$\|T\|_{L(\mathbb{T})} \leq \mathcal{C}_1(n, \beta) \|T\|_{L(B)}, \quad \mu(B) = \beta, \quad T \in \mathcal{T}_n,$$

т.е.

$$\mathcal{C}_1(n, \beta) = \sup_{T \in \mathcal{T}_n} \sup_{B: \mu(B) = \beta} \frac{\|T\|_{L(\mathbb{T})}}{\|T\|_{L(B)}}.$$

Мы показали, что $\mathcal{C}_1(n, 2\pi - \pi/(n+1)) = 2$ для достаточно больших n , т.е. на любом множестве меры $2\pi - \pi/(n+1)$ полином набирает не менее половины L_1 -нормы. Было бы интересно найти $\mathcal{C}_1(n, \beta)$ для других значений $\beta \in (0, 2\pi)$. Точное решение не известно даже в случае, когда в качестве множеств B берутся всевозможные отрезки; последнее приводит к задаче (в которой $\mathbb{T} \setminus B = [-a, a]$)

$$\int_{-a}^a |T| dx \rightarrow \sup \quad \text{при} \quad \|T\|_1 \leq 1, \quad T \in \mathcal{T}_n.$$

Отметим, что в задачах поиска экстремалей в сходных неравенствах точные решения находятся редко. Например, в задаче о точной константе в неравенстве Ремеза для тригонометрических полиномов в C :

$$\|T\|_{C(\mathbb{T})} \leq \mathcal{C}(n, \beta) \|T\|_{C(B)}, \quad \mu(B) = \beta, \quad T \in \mathcal{T}_n.$$

Другими словами,

$$\mathcal{C}(n, \beta) = \sup_{T \in \mathcal{T}_n} \sup_{B: \mu(B) = \beta} \frac{\|T\|_{C(\mathbb{T})}}{\|T\|_{C(B)}}.$$

Известно, что $\mathcal{C}(n, \beta) \geq (1/2)((\operatorname{tg}^{2n}(\beta/8) + \operatorname{ctg}^{2n}(\beta/8)))$. Имеется гипотеза о том, что эта оценка точна, но доказана она для четных тригонометрических полиномов или в случае, когда множество B – отрезок. Современное состояние дел в этой задаче описано, например, в [5].

Отметим, что в уже упомянутом неравенстве типа Никольского $\|T\|_\infty \leq C_n \|T\|_1$ не известна экстремальная функция и точное значение константы $C = \lim C_n/n$.

В теории экстремальных задач хорошо известна связь задач для тригонометрических полиномов и их аналогов для целых функций (см., например, [4], [6]). Пользуясь этим, из теоремы 1 выводим (достаточно просто) следующий результат о целых функциях экспоненциального типа. Мы рассматриваем класс $\mathcal{E}_\tau^1(\mathbb{R})$ (где $\tau > 0$) целых функций, для которых $|F(z)| \leq A(\varepsilon)e^{(\tau+\varepsilon)|z|}$ при всех $z \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ (т.е. экспоненциальный тип $\leq \tau$), $F \in L_1(\mathbb{R})$ и предполагается, что $F(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Нас будет интересовать только поведение таких функций на $\mathbb{R}$. Известно, что этот класс совпадает со множеством функций вида $F(z) = \int_{-\tau}^{\tau} f(t)e^{izt} dt$, где f – непрерывная четная функция, с абсолютно сходящимся рядом Фурье на $[-\tau, \tau]$ и $f(\tau) = f(-\tau) = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть F – целая функция класса $\mathcal{E}_\tau^1(\mathbb{R})$ и E – измеримое подмножество $\mathbb{R}$. Если $\|F\|_{L(E)} \geq (1/2)\|F\|_{L(\mathbb{R})}$, то $\mu(E) \geq \pi/\tau$. Равенство достигается для

$$F = \frac{\cos \tau x}{\pi^2/4 - \tau^2 x^2} \quad \text{и} \quad E = \left[-\frac{\pi}{2\tau}, \frac{\pi}{2\tau}\right].$$

Известно (см. [7; теорема 6.7.9]), что класс $\mathcal{E}_0^1$ состоит из одной функции 0, что согласуется с нашим результатом.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить С. В. Конягина за информацию о статье [1], многочисленные полезные обсуждения и стимулирование авторов к работе над настоящей статьей.

§ 2. Используемые факты

1. Соотношение L_∞ - и L_1 -норм. Из неравенств, приведенных в § 1, следует

$$\frac{\|T\|_\infty}{\|T\|_1} \leq C(n+1) \leq \frac{1.1(n+1)}{2\pi}, \quad T \in \mathcal{T}_n.$$

2. Важным инструментом для контроля поведения тригонометрического полинома будет следующее неравенство: пусть $T \in \mathcal{T}_n$, $M := \|T\|_\infty$, $T(x_0) = M \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$; тогда

$$\begin{aligned} T(x_0 \pm \delta) &\leq M \cos(\theta - n\delta), & 0 \leq \delta \leq \frac{\theta}{n}, \\ T(x_0 \pm \delta) &\geq M \cos(\theta + n\delta), & 0 \leq \delta \leq \frac{\pi - \theta}{n}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Следуя [8; гл. 5, Е.13], где оно формулируется для $\theta = 0$, будем называть (2.1) *неравенством Рисса*. В сформулированном нами виде оно содержится

в [9; леммы 3.5.1, 3.2.1]. Отметим, что сходные неравенства возникали в работах С. Н. Бернштейна, С. Б. Стечкина и других.

3. *Неравенство Бернштейна* (см. [9; § 3.5]):

$$\|T'\|_p \leq n\|T\|_p, \quad T \in \mathcal{T}_n, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Мы будем пользоваться этим неравенством при $p = 1$ и $p = \infty$.

4. *Канонические наборы*. Множество точек $t_1 < \dots < t_{2r}$ (где $t_{2r} < t_1 + 2\pi$) называется *каноническим набором* для $\mathcal{T}_n$, если $\sigma \perp \mathcal{T}_n$, где $\sigma(x) = \pm 1$ и σ меняет знак в t_j .

Много полезного о свойствах канонических наборов содержится в серии работ А. Г. Бабенко, Ю. В. Крякина, В. А. Юдина [10], [11]. Отметим, что понятие канонического набора естественным образом возникает в теории наилучших приближений в L_1 -метрике и встречалось неоднократно.

Если записать определение канонического набора $\{t_1, \dots, t_{2r}\}$ в явном виде, получим следующие равенства (считаем $t_{2r+1} = t_1 + 2\pi$):

$$\sum_{k=1}^r t_{2k+1} - t_{2k} = \sum_{k=1}^r t_{2k} - t_{2k-1} = \pi, \quad \sum_{k=1}^r e^{ilt_{2k}} = \sum_{k=1}^r e^{ilt_{2k+1}}, \quad l = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Нам будет полезна характеристика Пейерсторфера (см. [12]) канонических наборов. Пусть $r \geq n + 1$,

$$g(x) = \operatorname{Re}(e^{i\xi} p(e^{ix})), \quad p(z) = z^{2(n+1)-r} \prod_{j=1}^{r-n-1} (z - z_j)^2, \quad \xi \in [0, 2\pi), \quad |z_j| < 1.$$

Полином g имеет $2r$ различных нулей; они составляют канонический набор для $\mathcal{T}_n$, и любой канонический набор получается таким образом.

Мы отождествляем $\mathbb{T}$ с окружностью $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, точке $t \in \mathbb{T}$ соответствует $e^{it} \in S^1$. Отметим дополнительно, что точка $0 \in \mathbb{T}$ будет точкой максимума экстремального полинома. Точки канонического набора разбивают окружность на дуги. Им соответствуют отрезки $I_k = [t_k, t_{k+1}]$ ($I_{2r} = [t_{2r}, t_1 + 2\pi]$).

Запишем характеристику Пейерсторфера в другом виде. Можно проверить, что

$$\psi(q, x) := \frac{d}{dx} \operatorname{Arg}(e^{ix} - q) = \frac{1 - q \cos x}{1 - 2q \cos x + q^2}, \quad q \in [0, 1).$$

Положим $z_j = q_j e^{i\beta_j}$, $q_j \in [0, 1)$, $\beta_j \in \mathbb{T}$. Из формулы для g следует что отрезки I_k характеризуются тем, что $\nu(I_k) = \pi$, где мера ν на $\mathbb{T}$ имеет плотность

$$\rho(x) = 2(n+1) - r + 2 \sum_{j=1}^{r-n-1} \psi(q_j, x - \beta_j). \quad (2.3)$$

Длины всех отрезков канонического набора из $2n + 2$ точек равны $\hbar := \pi/(n+1)$. Рассмотрим канонический набор из $2r > 2n + 2$ точек. В силу неравенства $\psi(q, x) \geq \psi(q, \pi) > 1/2$ имеем $\rho(x) > n + 1$, откуда длина каждого отрезка I_k меньше $\hbar$:

$$l_k := |I_k| = t_{k+1} - t_k < \hbar. \quad (2.4)$$

Мы будем использовать в дальнейшем следующие обозначения, связанные с каноническим набором: $t_k, I_k, l_k, \psi, \nu, \rho$.

§ 3. Свойства экстремального полинома

Соглашения и обозначения. Начнем доказательство теоремы с того, что зафиксируем n и возьмем *экстремальную* пару (T, E) , т.е. полином $T \in \mathcal{T}_n \setminus \{0\}$ и множество $E \subset \mathbb{T}$ минимально возможной меры такие, что выполнено (1.1). Всюду далее T и E обозначают именно экстремальный полином и множество соответственно.

Без ограничения общности считаем, что $\|T\|_1 = 1$, $T(0) = M := \|T\|_\infty$. В силу экстремальности T и E имеем $\mu(E) \leq \hbar$. Отсюда, используя (1.2), получаем

$$\frac{n+1}{2\pi} \leq M \leq \frac{1.1(n+1)}{2\pi}. \quad (3.1)$$

Очевидно, множество E имеет вид

$$E = \{x \in \mathbb{T} : |T(x)| \geq c_0\}$$

и состоит из невырожденных отрезков:

$$E = E_1 \sqcup E_2 \sqcup \dots \sqcup E_K$$

(если отрезок вырождается в точку, его можно выкинуть). Кроме того, $0 \in E$; для определенности пусть $0 \in E_1$. Для удобства вычислений обозначим

$$c_0 = M \cos \theta_0, \quad \theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Обозначения $T, E, M, c_0, \theta_0, K, E_j$ ($j = 1, \dots, K$) будут использоваться на протяжении всей работы.

Случай $K = 1$. Пусть E состоит из одного отрезка. Воспользуемся ортогональностью $\sigma(x) = \text{sign} \cos(n+1)x \perp \mathcal{T}_n$. Из нее следует, что для любого множества $A \subset \Sigma_+ := \{x \in \mathbb{T} : \sigma(x) = +1\}$ имеем $\int_A T(x) dx = \int_{\mathbb{T} \setminus A} \tilde{\sigma}(x) T(x) dx$, где $\tilde{\sigma} = -\sigma$. Сдвинем E так, что $E \subset [-\hbar/2, \hbar/2] \subset \Sigma_+$. При этом T сохраняет знак на E и из равенства, приведенного выше, следует, что на E набирается не более половины нормы. Ясно, что равенство возможно только для $E = [-\hbar/2, \hbar/2]$ и для полинома, который меняет знак там же, где и r_n , т.е. $T = cr_n$.

ЛЕММА 1. *Выполнено неравенство $c_0 > 0.56M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу наших соглашений $\max_{x \in E_1} T(x) = T(0) = M$. Обозначим $E_1 = [a_1, b_1]$. Тогда $T(a_1) = M \cos \theta_0$, $T(a_1 + \delta) \leq M \cos(\theta_0 - n\delta)$ при $0 \leq \delta \leq \theta_0/n$. Отсюда

$$\int_{a_1}^{a_1 + \theta_0/n} (M - T(x)) dx \geq M \frac{\theta_0}{n} - \int_0^{\theta_0/n} M \cos(\theta_0 - n\delta) d\delta = \frac{M}{n} (\theta_0 - \sin \theta_0).$$

Аналогичная оценка верна для $\int_{b_1 - \theta_0/n}^{b_1}$, причем $a_1 + \theta_0/n \leq b_1 - \theta_0/n$, так как $T(x) < M$ при $a_1 < x < a_1 + \theta_0/n$ и $b_1 - \theta_0/n < x < b_1$, а $T(0) = M$. Следовательно,

$$\|T\|_{L(E_1)} \leq M\mu(E_1) - \frac{2M}{n}(\theta_0 - \sin \theta_0), \quad (3.2)$$

$$\|T\|_{L(E)} \leq M\mu(E) - \frac{2M}{n}(\theta_0 - \sin \theta_0).$$

Подставляя неравенство $\mu(E) \leq \hbar$, получим

$$\|T\|_{L(E)} \leq \frac{M}{n+1}(\pi - 2(\theta_0 - \sin \theta_0)). \quad (3.3)$$

С другой стороны,

$$\|T\|_{L(E)} = \frac{1}{2}\|T\|_1 \geq \frac{\|T\|_\infty}{2C(n+1)} \geq \frac{\pi M}{1.1(n+1)},$$

откуда

$$\frac{\pi M}{1.1(n+1)} \leq \frac{M}{n+1}(\pi - 2(\theta_0 - \sin \theta_0)), \quad \theta_0 - \sin \theta_0 \leq \frac{\pi}{22}.$$

Отсюда $\theta_0 < 0.97$, $\cos \theta_0 > 0.56$.

ЛЕММА 2 (С.В. Конягин, устное сообщение). *Полином T имеет $2n$ вещественных нулей (с учетом кратности).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, это не так. Тогда T представим в виде произведения тригонометрических полиномов $T = RS$, причем $S \in \mathcal{T}_m$, $S \neq \text{const}$ и $S > 0$. Рассмотрим вариацию полинома $\tilde{T} = R\tilde{S}$, где $\tilde{S} = S + \Delta S$, $\Delta S \in \mathcal{T}_m$ — достаточно малый полином. Тогда $\tilde{T}$ имеет те же нули, что и T , поэтому приращение L -нормы линейно по ΔS :

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}\|_{L(E)} &= \|T\|_{L(E)} + \int_E \text{sign}(T) R \Delta S \, dx, \\ \|\tilde{T}\|_1 &= \|T\|_1 + \int_{\mathbb{T}} \text{sign}(T) R \Delta S \, dx. \end{aligned}$$

Следовательно, вторые слагаемые отличаются ровно в два раза для всех достаточно малых ΔS (иначе T не был бы экстремальным) и $\|\tilde{T}\|_{L(E)} = \frac{1}{2}\|\tilde{T}\|_1$, т.е. $\tilde{T}$ образуют целое семейство экстремальных полиномов. Но тогда $|\tilde{T}| = \text{const}$ на ∂E для всех достаточно малых $\Delta S \in \mathcal{T}_m$. Пусть $t_1, t_2 \in \partial E$; тогда

$$\frac{|\tilde{T}(t_1)|}{|\tilde{T}(t_2)|} = \frac{|R(t_1)|}{|R(t_2)|} \frac{|\tilde{S}(t_1)|}{|\tilde{S}(t_2)|} = 1,$$

и отношение $|\tilde{S}(t_1)|/|\tilde{S}(t_2)|$ постоянно для всех достаточно малых ΔS . Ясно, что этого не может быть.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Между любыми двумя отрезками E_j множества E содержится хотя бы один нуль T .*

Действительно, между соседними нулями монотонность T меняется лишь один раз, иначе у T' будет более $2n$ нулей.

Случай $K \geq 5$. Из вышесказанного сразу следует, что невозможен случай, когда E состоит из $K \geq 5$ отрезков. Оценим вариацию T . Каждый из отрезков E_j лежит на соответствующем отрезке между двумя соседними нулями T . Следовательно, вариация T на отрезке, содержащем E_1 , равна $2M$, а на каждом из остальных отрезков вариация не меньше $2c_0$:

$$\text{Var } T \geq 2M + (K - 1) \cdot 2c_0.$$

Воспользуемся неравенством Бернштейна в L_1 -норме:

$$\|T\|_1 \geq \frac{1}{n} \|T'\|_1 = \frac{1}{n} \text{Var } T \geq \frac{2M}{n} (1 + (K - 1) \cos \theta_0). \quad (3.4)$$

При $K \geq 5$ с учетом $c_0 = M \cos \theta_0 > 0.56M$ получаем

$$1 = \|T\|_1 \geq \frac{2M}{n} (1 + 4 \cdot 0.56) = \frac{2M}{n} \cdot 3.24 \geq \frac{2(n+1)}{2\pi n} \cdot 3.24 > 1.$$

Противоречие.

Канонические наборы. Рассмотрим необходимое условие экстремальности первого порядка. Имеем

$$\begin{aligned} \|T + \Delta T\|_{L(E)} &= \|T\|_{L(E)} + \int_E \text{sign}(T) \Delta T \, dx + o(\Delta T), \\ \|T + \Delta T\|_1 &= \|T\|_1 + \int_{\mathbb{T}} \text{sign}(T) \Delta T \, dx + o(\Delta T). \end{aligned}$$

В силу экстремальности T должно выполняться равенство

$$\int_E \text{sign}(T) \Delta T \, dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \text{sign}(T) \Delta T \, dx \quad \forall \Delta T \in \mathcal{T}_n.$$

Иными словами, функция $\sigma = \text{sign}(T)(1 - 2 \cdot \mathbf{1}_E)$ ортогональна $\mathcal{T}_n$ (через $\mathbf{1}_E$ обозначена характеристическая функция E). Очевидно, функция σ принимает значения ± 1 и меняет знак на границе E , а также в точках перемены знака полинома T . Тем самым, доказана

ЛЕММА 3. *Множество $\partial E \cup \{x : T \text{ меняет знак в } x\}$ является каноническим набором для $\mathcal{T}_n$.*

Итак, канонический набор, соответствующий T и E , имеет

$$2r = (\text{количество перемен знака } T) + 2K$$

точек.

Пусть $\{t_1, \dots, t_{2n+2K}\}$ – какой-то канонический набор для $\mathcal{T}_n$ и I_k – соответствующие отрезки. Пусть среди этих $2n + 2K$ отрезков выделено K штук не ближе чем через два отрезка (например, среди выделенных отрезков могут встретиться $I_1 = [t_1, t_2]$ и $I_4 = [t_4, t_5]$ и не могут I_1 и I_3). Такую структуру назовем (n, K) -набором.

Если полином T не имеет кратных нулей, то в силу леммы 3 полиному T и множеству E соответствует (n, K) -набор; в качестве выделенных отрезков берем отрезки, составляющие E (то, что они идут не ближе чем через два, следует из того, что все нули T вещественны и различны).

Возможен и обратный переход: рассмотрим (n, K) -набор. По этому набору следующим образом строится полином $R \in \mathcal{T}_n$: в качестве нулей R берутся концы всех отрезков набора, кроме выделенных. В силу ортогональности функции σ , соответствующей каноническому набору, пространству $\mathcal{T}_n$ имеем $\int_{\mathbb{T}} \sigma(x)R(x) dx = 0$. Поскольку R меняет знак в тех же точках, что и σ , за исключением концов выделенных отрезков, получаем равенство

$$\int_E |R(x)| dx = \int_{\mathbb{T} \setminus E} |R(x)| dx,$$

равносильное (1.1). В силу экстремальности T отсюда следует

ЛЕММА 4. Пусть T не имеет кратных нулей. Тогда:

- сумма длин отмеченных отрезков (n, K) -набора, полученного из T и E , минимальна среди всех (n, K) -наборов;
- полином $\tilde{T}$ и множество $\tilde{E}$, построенные по какому-либо (n, K) -набору с минимальной суммарной длиной отмеченных отрезков, также являются экстремальными в исходной задаче.

Случай $K = 2$. Мы имеем канонический набор для $\mathcal{T}_n$ из $\leq 2n + 4$ точек. Возможны только случаи $2n + 2$ и $2n + 4$ точек. В первом случае все отрезки равны $\hbar$ и $\mu(E) = 2\hbar$.

Во втором случае плотность имеет вид $\rho(x) = n + 2\psi(q_1, x - \beta_1)$. Заметим, что плотность максимальна в $x = \beta_1$, минимальна в $x = \pi + \beta_1$ и монотонна от максимума к минимуму. Следовательно, длины отрезков ведут себя так же: отрезок, содержащий β_1 , минимален, а слева и справа от него длины монотонно возрастают.

Отметим, что в рассматриваемом случае полином T не имеет кратных нулей и два отрезка канонического набора, составляющие E , находятся не ближе чем через два отрезка (рис. 1).

Рис. 1

Сумма длин четных отрезков равна сумме длин нечетных и равна π (см. (2.2)). Поэтому в силу (2.4) сумма длин любых двух отрезков одной четности больше $\pi - n\hbar = \hbar$. В силу монотонности длин один из двух отрезков E можно оценить снизу через соседний отрезок другой четности, поэтому сумма длин отрезков E тоже больше $\hbar$. Итак, случай $K = 2$ разобран.

§ 4. Случай $K = 4$

Разбор этого случая аналогичен $K \geq 5$, однако неравенства (3.4) при $K = 4$ уже недостаточно. Мы усилим (3.2), и в совокупности доказанные нами неравенства дадут противоречие. Усиление (3.2) будет достигнуто за счет улучшения оценки $\|T'\|_\infty \leq Mn$, вытекающей из неравенства Бернштейна.

Следующая лемма будет применяться для полинома T , однако удобно сформулировать ее в общем виде. Отметим, что требование монотонности t на $[0, x_0]$ можно отбросить, усложнив доказательство; впрочем, в интересующем нас случае монотонность заведомо будет иметь место.

ЛЕММА 5. Пусть $t \in \mathcal{T}_n$, $\|t\|_\infty = t(0) = 1$, $\|t'\|_\infty \leq \varkappa n$, где $\varkappa \in (0, 1)$. Пусть t монотонно убывает на отрезке $[0, x_0]$ и $t(x_0) = \cos \theta \geq 1 - \varkappa$. Тогда

$$\int_0^{x_0} (1 - t(x)) dx \geq \frac{\varkappa}{n} (\beta - \sin \beta), \quad \text{где } \beta = \arccos \left(1 - \frac{1 - \cos \theta}{\varkappa} \right). \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $t'(0) = 0$. В силу неравенства Рисса $t'(x) \geq -\varkappa n \sin nx$ при $|x| \leq \pi/(2n)$. Рассмотрим полином $\hat{t} = 1 - \varkappa(1 - \cos nx)$, для которого $\hat{t}'(x) = -\varkappa n \sin nx$. Ясно, что при $\hat{x}_0 = \beta/n$ имеем $\hat{t}(\hat{x}_0) = t(x_0)$,

$$\int_0^{\hat{x}_0} (1 - \hat{t}(x)) dx = \int_0^{\beta/n} \varkappa(1 - \cos nx) dx = \frac{\varkappa}{n} (\beta - \sin \beta)$$

и $\hat{x}_0 \leq x_0$ в силу $|\hat{t}'| \geq |t'|$.

Докажем оптимальность полинома $\hat{t}$. Обозначим $v(x) = -t'(x_0 - x)$, $\hat{v}(x) = -\hat{t}'(\hat{x}_0 - x)$. Имеем

$$\int_0^{x_0} v(x) dx = t(0) - t(x_0) = 1 - \cos \theta, \quad \int_0^{x_0} x v(x) dx = \int_0^{x_0} (1 - t(x)) dx$$

и аналогично для $\hat{v}$

$$\int_0^{\hat{x}_0} \hat{v}(x) dx = 1 - \cos \theta, \quad \int_0^{\hat{x}_0} x \hat{v}(x) dx = \int_0^{\hat{x}_0} (1 - \hat{t}(x)) dx.$$

Кроме того, $v(x) \geq 0$ на $[0, x_0]$, $v(x_0) = 0$; $\hat{v}(x) \geq 0$ на $[0, \hat{x}_0]$, $\hat{v}(\hat{x}_0) = 0$.

В силу равенства $\int_0^{x_0} v(x) dx = \int_0^{\hat{x}_0} \hat{v}(x) dx$ и неотрицательности v , $\hat{v}$ в некоторой точке $c \in [0, \hat{x}_0]$ имеем $v(c) = \hat{v}(c)$. Тогда $v(x) \leq \hat{v}(x)$ при $0 \leq x \leq c$ и $v(x) \geq \hat{v}(x)$ при $c \leq x \leq \hat{x}_0$ в силу неравенства Рисса. Для удобства записи переопределим $\hat{v}(x) = 0$ при $x > \hat{x}_0$. Разность интересующих нас интегралов

для t и $\hat{t}$ есть

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} (1 - t(x)) dx - \int_0^{\hat{x}_0} (1 - \hat{t}(x)) dx &= \int_0^{x_0} x v(x) dx - \int_0^{\hat{x}_0} x \hat{v}(x) dx = I_2 - I_1, \\ I_1 &= \int_0^c x(\hat{v}(x) - v(x)) dx \leq c \int_0^c (\hat{v}(x) - v(x)) dx, \\ I_2 &= \int_c^{x_0} x(v(x) - \hat{v}(x)) dx \geq c \int_c^{x_0} (v(x) - \hat{v}(x)) dx. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что

$$\int_0^c (\hat{v}(x) - v(x)) dx = \int_c^{x_0} (v(x) - \hat{v}(x)) dx,$$

откуда $I_1 \leq I_2$. Лемма доказана.

Докажем, что имеет место неравенство

$$\|T'\|_\infty \leq 0.7M(n+1). \quad (4.2)$$

Для этого последовательно установим следующие факты:

- 1) $\cos \theta_0 < 0.65$;
 - 2) $\max_{x \in \mathbb{T} \setminus E_1} |T(x)| < 0.7M$;
 - 3) $\int_{H_1} T \geq 1/2 - 1/78$, где H_1 — отрезок длины $\hbar$, концентрический с E_1 ;
 - 4) $T \geq -0.4M$ на H_2 , где H_2 — отрезок длины $3\hbar$, концентрический с E_1 .
- 1) Обозначим для краткости $\widetilde{M} = 2M/(n+1)$. Применяя (3.3) и (3.4) с учетом

$$\|T\|_{L(E)} = \frac{1}{2} \|T\|_1 = \frac{1}{2},$$

получаем систему неравенств

$$\begin{cases} \widetilde{M} & \geq \frac{1}{\pi - 2(\theta_0 - \sin \theta_0)}, \\ \widetilde{M} & \leq \frac{1}{1 + 3 \cos \theta_0}. \end{cases}$$

Данная система несовместна при $\cos \theta_0 \geq 0.65$. Аналитически несовместность системы выражается следующим соотношением:

$$\min_{\theta_0 \in [0, \arccos 0.65]} \left\{ \frac{1}{\pi - 2(\theta_0 - \sin \theta_0)} - \frac{1}{1 + 3 \cos \theta_0} \right\} = 0.0017 \dots > 0.$$

Следовательно, $\cos \theta_0 < 0.65$.

2) Обозначим $\max_{x \in E_r} |T(x)| = M \cos \theta_r$. Величину вида $\int_A (M - |T(x)|) dx$ будем называть “потерей” в интеграле на множестве A . Рассмотрим $r > 1$, для которого достигается второй по величине максимум $|T|$, т.е. $\cos \theta_r$ максимален

для $r \geq 2$. Рассуждая для E_r так же, как для E_1 в доказательстве (3.2), получаем оценку потери на E_r

$$\int_{E_r} (M - |T(x)|) dx \geq \frac{2M}{n} (\theta_0 - \theta_r - (\sin \theta_0 - \sin \theta_r)).$$

Суммируя потери на E_1 и E_r , получим $\widetilde{M} \geq (\pi - 4(\theta_0 - \sin \theta_0) + 2(\theta_r - \sin \theta_r))^{-1}$. Далее, из (3.1) имеем $\widetilde{M} \leq 1.1/\pi$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} \widetilde{M} \geq \frac{1}{\pi - 4(\theta_0 - \sin \theta_0) + 2(\theta_r - \sin \theta_r)}, \\ \widetilde{M} \leq \frac{1}{1 + 3 \cos \theta_0}, \\ \widetilde{M} \leq \frac{1.1}{\pi}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Если $\cos \theta_0 < 0.65$ и $\cos \theta_r \geq 0.7$, то эта система несовместна:

$$\min_{\theta_0 \in [0, \arccos 0.65]} \left\{ f(\theta_0) - \min \left(\frac{1.1}{\pi}, \frac{1}{1 + 3 \cos \theta_0} \right) \right\} = 0.0069 \dots > 0,$$

где

$$f(\theta_0) = (\pi - 4(\theta_0 - \sin \theta_0) + 2(\arccos 0.7 - \sin \arccos 0.7))^{-1}.$$

Следовательно, $\cos \theta_r < 0.7$, т.е. $\max_{x \in E \setminus E_1} |T(x)| < 0.7$.

3) Покажем, что ситуация близка к случаю одного отрезка – весь интеграл сосредоточен на E_1 . Очевидно, потеря на $E \setminus E_1$ не меньше $0.3M\mu(E \setminus E_1)$. Отсюда с учетом (3.2)

$$\|T\|_{L(E)} \leq M\mu(E) - \frac{2M}{n} (\theta_0 - \sin \theta_0) - 0.3M\mu(E \setminus E_1),$$

что при $\cos \theta_0 < 0.65$ дает

$$\delta := \mu(E \setminus E_1) \leq \frac{\pi/22 - (\theta_0 - \sin \theta_0)}{0.15(n+1)} \leq \frac{0.27}{n+1}.$$

В силу оценки меры $\delta = \mu(E \setminus E_1)$ и неравенства Бернштейна значения $|T|$ на $E \setminus E_1$ отличаются от c_0 не более чем на $Mn\delta/2 < 0.27M/2$. Аналогично, для окрестности $U = U_{\delta/2}(E_1) \subset H_1$ значения $|T|$ на $U \setminus E_1$ отличаются от c_0 не более чем на $0.27M/2$. Следовательно, интеграл от $|T|$ по U отличается от интеграла по E не более чем на $0.27M\delta$, откуда

$$\int_{H_1} T(x) dx \geq \frac{1}{2} - 0.27M\delta \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{78}.$$

4) Пусть x_1 – середина E_1 . В силу $\text{sign} \cos((n+1)(x - x_1)) \perp \mathcal{T}_n$ имеем

$$2 \int_{H_1} T(x) dx = \int_{\mathbb{T}} T(x) s(x) dx,$$

где $s(x) = \pm 1$, $s(x_1) = 1$, и s меняет знак в $x = x_1 \pm 3\hbar/2, x_1 \pm 5\hbar/2, \dots$. А значит,

$$\int_{\mathbb{T}} T(x)s(x) dx \geq 1 - \frac{2}{78}. \quad (4.4)$$

Если $T(x_2) < -0.4M$ для некоторой точки $x_2 \in H_2$, то это даст отрицательный вклад в интеграл $\int_{\mathbb{T}} T(x)s(x) dx$ не меньше (по модулю)

$$2 \cdot \frac{M}{n} (1 - \sin \arccos 0.4) \geq \frac{1 - \sin \arccos 0.4}{\pi} > \frac{2}{77}$$

(рассуждения аналогичны доказательству неравенства (3.2)). Это противоречит левому неравенству в (4.4).

Покажем, что не существует отрезка $[u, v]$ длины $\hbar$ такого, что $|T(u) - T(v)| > 1.4M$. Действительно, если, скажем, $u \in H_1$, то $v \in H_2$ и $|T(u) - T(v)| \leq M + 0.4M$. Если же $u, v \notin H_1$, то $|T(u)| \leq \max(c_0, 0.7M) = 0.7M$. Воспользуемся неравенством Стечкина (см. [9; теорема 3.5.3])

$$\|t'\|_{\infty} \leq \frac{n}{2 \sin(nh/2)} \|\Delta_h t\|_{\infty}, \quad 0 < h \leq \frac{2\pi}{n}, \quad t \in \mathcal{T}_n$$

(где $\Delta_h t(x) = t(x+h) - t(x)$), для $t = T \in \mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}_{n+1}$ и $h = \hbar$. Получим в точности неравенство (4.2):

$$\|T'\|_{\infty} \leq \frac{n+1}{2} \|\Delta_h T\|_{\infty} \leq 0.7(n+1)M.$$

Теперь мы можем применить лемму 5. Положим $t = T/M \in \mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}_{n+1}$, $\varkappa = 0.7$, $\theta = \theta_0$. Роль отрезка $[0, x_0]$ будут играть отрезки $[0, b_1]$ и $[a_1, 0]$, где $E_1 = [a_1, b_1]$; ясно, что T на них монотонен. Отметим, что $\cos \theta > 0.56 > 1 - \varkappa = 0.3$. Лемма дает оценку потери на E_1

$$\int_{E_1} (M - T(x)) dx \geq \frac{1.4M}{n} (\beta_0 - \sin \beta_0), \quad \beta_0 = \arccos \left(1 - \frac{1 - \cos \theta_0}{0.7} \right),$$

откуда аналогично рассуждениям леммы 1 получаем оценку снизу на $\widetilde{M}$. В совокупности со вторым и третьим неравенствами из (4.3) получаем систему неравенств

$$\begin{cases} \widetilde{M} \geq \frac{1}{\pi - 1.4(\beta_0 - \sin \beta_0)}, & \beta_0 = \arccos \left(1 - \frac{1 - \cos \theta_0}{0.7} \right), \\ \widetilde{M} \leq \frac{1.1}{\pi}, \\ \widetilde{M} \leq \frac{1}{1 + 3 \cos \theta_0}. \end{cases}$$

Эта система несовместна при всех $\theta_0 \in (0, \arccos(0.56))$:

$$\min_{\theta_0 \in [0, \arccos 0.56]} \left\{ \frac{1}{\pi - 1.4(\beta_0 - \sin \beta_0)} - \min \left(\frac{1.1}{\pi}, \frac{1}{1 + 3 \cos \theta_0} \right) \right\} = 0.00065 \dots > 0.$$

Получено противоречие. Тем самым, случай $K = 4$ невозможен.

§ 5. Случай $K = 3$

Всюду далее мы будем считать, что n достаточно велико. Обозначение $o(\cdot)$ предполагает, что $n \rightarrow \infty$.

5.1. Дополнительные свойства канонических наборов. В случае $K = 3$ полиному T и множеству E соответствует канонический набор из $\leq 2n+6$ отрезков. Случаи $2n+2$ и $2n+4$ отрезков невозможны: в первом все отрезки равны $\hbar$, во втором в E найдутся два отрезка одной четности, а их сумма больше $\hbar$ (см. случай $K = 2$).

Итак, пусть $\{t_1, \dots, t_{2n+6}\}$ – канонический набор для $\mathcal{T}_n$ и I_k – соответствующие отрезки.

В дальнейшем будем активно пользоваться следующими простыми неравенствами относительно длин отрезков канонического набора.

Сумма любых k отрезков больше $(k-4)\hbar$, поскольку сумма оставшихся $2n+6-k$ меньше $(2n+6-k)\hbar = 2\pi - (k-4)\hbar$.

Кроме того, сумма любых k отрезков, отличных от отрезков, составляющих E , больше $(k-2)\hbar$, поскольку E состоит из трех отрезков суммарной длины не больше $\hbar$.

Сумма длин любых трех отрезков одной четности больше $\hbar$. В самом деле, имеется $n+3$ отрезков заданной четности, каждый длины меньше $\hbar$, а в сумме длины π (свойство канонических наборов (2.2)). Откуда следует требуемое (аналогично соответствующему утверждению при $K = 2$).

Нетривиальные следствия о длинах отрезков I_k можно получить непосредственно из определения канонического набора. Напомним определение полиномов Рогозинского

$$r_n(x) = \frac{\cos(n+1)x}{\cos x - \cos(\hbar/2)}.$$

Очевидно, $r_n(x) \geq 0$ на $[-3\hbar/2, 3\hbar/2]$.

Введем функции $u_n: [0, 1] \rightarrow [0, 3]$. Пусть $s \in [0, 1]$. Положим $u_n(s) = 3$, если

$$\int_{s\hbar/2}^{3\hbar/2} r_n(x) dx < \int_0^{\hbar/2} r_n(x) dx.$$

Иначе положим $u_n(s) = u$, где $u \in [0, 3]$ таково, что

$$\int_{s\hbar/2}^{u\hbar/2} r_n(x) dx = \int_0^{\hbar/2} r_n(x) dx.$$

Ясно, что $u_n(0) = 1$ и u_n возрастает. Поскольку $\|r_n\|_{L[-\hbar/2; \hbar/2]} = \frac{1}{2}\|r_n\|_1$, то $\|r_n\|_{L[0; \hbar/2]} > \|r_n\|_{L[\hbar/2; 3\hbar/2]}$ и $u_n(s) = 3$ при s , близких к единице.

ЛЕММА 6. Для любого k сумма длин k -го отрезка канонического набора и его соседей $l_{k-1} + l_k + l_{k+1}$ не больше $\hbar u_n(l_k/\hbar)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отрезок I , образованный $k-1$, k и $k+1$ отрезками, и полином $r_n(x-x_0)$ с центром в x_0 – центре I . Ясно, что $|I| \leq 3\hbar$,

откуда $r(x - x_0) \geq 0$ на I . Обозначим через σ сигнум-функцию, соответствующую каноническому набору, для которой $\sigma|_{I_k} = -1$. В силу ортогональности $\sigma \perp \mathcal{T}_n$

$$0 = \int_{\mathbb{T}} r_n(x - x_0) \sigma(x) dx = \int_I r_n(x - x_0) \sigma(x) dx + \int_{\mathbb{T} \setminus I} r_n(x - x_0) \sigma(x) dx.$$

Оценим снизу первый интеграл, воспользовавшись четностью и монотонностью r_n :

$$\begin{aligned} \int_I r_n(x - x_0) \sigma(x) dx &= \int_I r_n(x - x_0) dx - 2 \int_{I_k} r_n(x - x_0) dx \\ &\geq \int_{-|I|/2}^{|I|/2} r_n(x) dx - 2 \int_{-|I_k|/2}^{|I_k|/2} r_n(x) dx. \end{aligned}$$

Оценим второй интеграл:

$$\left| \int_{\mathbb{T} \setminus I} r_n(x - x_0) \sigma(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{T} \setminus I} |r_n(x - x_0)| dx = \|r_n\|_1 - \int_{-|I|/2}^{|I|/2} r_n(x) dx.$$

Суммируя, получаем

$$0 = \int r_n(x - x_0) \sigma(x) dx \geq 2 \int_{-|I|/2}^{|I|/2} r_n(x) dx - \|r_n\|_1 - 2 \int_{-|I_k|/2}^{|I_k|/2} r_n(x) dx.$$

Учитывая равенство $\|r_n\|_1 = 2\|r_n\|_{L[-\hbar/2; \hbar/2]}$ и четность r_n , окончательно получаем

$$\int_0^{|I|/2} r_n(x) dx \leq \int_0^{\hbar/2} r_n(x) dx + \int_0^{|I_k|/2} r_n(x) dx.$$

Теперь неравенство $|I| \leq \hbar u_n(|I_k|/\hbar)$ следует из определения $u_n(\cdot)$. Лемма доказана.

Легко проверить, что $(\hbar^2/2)r_n(\hbar x) \rightarrow r_\infty(x)$ при $n \rightarrow \infty$, где

$$r_\infty(x) = \frac{\cos(\pi x)}{1/4 - x^2}.$$

Более того, сходимость равномерна на любом компакте. Отсюда следует, что $u_n(s)$ равномерно сходится к $u(s)$ при $n \rightarrow \infty$, где $u(s) \in [0, 3]$ определяется для $s \in [0, 1]$ аналогичным соотношением

$$\int_{s/2}^{u/2} r_\infty(x) dx = \int_0^{1/2} r_\infty(x) dx \quad (5.1)$$

($u(s) = 3$, если левая часть (5.1) меньше правой при $u = 3$).

По определению $u(0) = 1$. Приведем для примера несколько других значений $u(\cdot)$:

$$1.47 < u\left(\frac{1}{3}\right) < 1.48, \quad 1.7 < u\left(\frac{1}{2}\right) < 1.8, \quad u\left(\frac{3}{4}\right) = 3.$$

Возьмем три отрезка множества E : I_i, I_j, I_k . Сумма длин их и трех пар их соседей не меньше $2\pi - \hbar(2n + 6 - 9) = 5\hbar$. При этом в силу леммы эта сумма не больше $\hbar(u_n(s_1) + u_n(s_2) + u_n(s_3))$, где $s_1 = l_i/\hbar$, $s_2 = l_j/\hbar$, $s_3 = l_k/\hbar$. Кроме того, $s_1 + s_2 + s_3 = \mu E/\hbar \leq 1$. Оказывается, из этих условий можно получить сильные следствия.

ЛЕММА 7. Пусть числа s_1, s_2, s_3 удовлетворяют условиям

$$s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq 0, \quad s_1 + s_2 + s_3 \leq 1, \quad u(s_1) + u(s_2) + u(s_3) \geq 5.$$

Тогда $s_1 > 2/3$, $u(s_2) < 1.5$, $u(s_2) + u(s_3) < 2.5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости пусть $r = r_\infty$. Пусть s_0 таково, что

$$\int_{s_0/2}^{3/2} r(x) dx = \int_0^{1/2} r(x) dx$$

(по определению $u(s) = 3$ при $s \geq s_0$ и $u(s) < 3$ при $s < s_0$). Вычисления показывают, что $0.73 < s_0 < 0.75$; для наших целей достаточно неравенства $s_0 > 2/3$. Докажем, что функция $u(\cdot)$ выпукла на $[0, s_0]$. Из определения u и убывания r на $[0, 3/2]$ понятно, что разность $\delta(s) = u(s) - s$ возрастает. Далее, дифференцируя равенство (5.1), получаем

$$0 = \frac{d}{ds} \int_{s/2}^{u(s)/2} r(x) dx = \frac{1}{2} u'(s) r\left(\frac{u(s)}{2}\right) - \frac{1}{2} r\left(\frac{s}{2}\right),$$

откуда

$$u'(s) = \frac{r(s/2)}{r(u(s)/2)} = \frac{r(s/2)}{r(s/2 + \delta(s)/2)}.$$

Так как $\delta(\cdot)$ возрастает, нам достаточно показать, что отношение $r(x)/r(x+h)$ возрастает при фиксированном h . Это в свою очередь означает, что

$$\left(\ln \frac{r(x)}{r(x+h)} \right)' = \frac{r(x)'}{r(x)} - \frac{r'(x+h)}{r(x+h)} > 0,$$

т.е. логарифмическая производная r убывает. Это техническое утверждение будет доказано позже.

Тот факт, что u выпукла на $[0, s_0]$, упростит дальнейшие оценки. Докажем, что $s_1 > 2/3$. Предположим, это не так. Пусть $s_1 \leq 2/3$ фиксировано. Максимум выпуклой функции на выпуклом множестве достигается в крайней точке, поэтому

$$\max_{s_2+s_3+s_1 \leq 1} u(s_2) + u(s_3) = \max_{s_2+s_3=1-s_1} u(s_2) + u(s_3) = u(1-s_1) + u(0).$$

Следовательно, максимум суммы $u(s_1) + u(s_2) + u(s_3)$ при фиксированном s_1 равен $u(s_1) + u(1-s_1) + u(0)$. Максимизируя по $s_1 \leq 2/3$, получаем $u(2/3) + u(1/3) + u(0) = 1 + u(1/3) + u(2/3)$. Вычисления показывают, что

$$u\left(\frac{1}{3}\right) < 1.5, \quad u\left(\frac{2}{3}\right) < 2.3.$$

Следовательно, при $s_1 \leq 2/3$ будет $u(s_1) + u(s_2) + u(s_3) < 5$, что невозможно. Итак, $s_1 > 2/3$, откуда $s_2 < 1/3$ и $u(s_2) \leq u(1/3) < 1.5$.

Поскольку $s_2 + s_3 = 1 - s_1 < 1/3$, то $u(s_2) + u(s_3) < u(1/3) + u(0) < 2.5$, и мы получаем последнее неравенство леммы.

Итак, нам осталось доказать следующее: функция r логарифмически вогнута на $(-3/2, 3/2)$.

Нетрудно вычислить

$$(\ln r)'' = -\frac{\pi^2}{\cos^2 \pi x} + \frac{2(1/4 + x^2)}{(1/4 - x^2)^2}.$$

Тем самым, требуется доказать неравенство

$$\frac{\cos \pi x}{1/4 - x^2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2(1/4 + x^2)}}, \quad |x| < \frac{3}{2}. \quad (5.2)$$

В силу четности считаем $x \geq 0$. Пусть $0 \leq x \leq 1/5$. Тогда

$$\frac{\pi}{\sqrt{2(1/4 + x^2)}} > \frac{\pi}{\sqrt{2(1/4 + 1/25)}} > 4.1.$$

В левой части (5.2) стоит функция r , которая не превосходит 4.

Пусть $1/5 \leq x \leq 3/2$. Докажем, что имеет место неравенство

$$\frac{\cos \pi x}{1/4 - x^2} \leq \pi \left(\frac{3}{2} - x \right) \leq \frac{\pi}{\sqrt{2(1/4 + x^2)}}. \quad (5.3)$$

В точке $x = 1/2$ имеет место равенство этих трех функций, а также их первых производных. При $x \geq 1/\sqrt{8}$ правое неравенство в (5.3) имеет место по соображениям выпуклости: функция $(1/4 + x^2)^{-1/2}$ выпукла при $|x| \geq 1/\sqrt{8}$. При $1/5 \leq x \leq 1/\sqrt{8}$ имеем

$$\left(\frac{3}{2} - x \right) \sqrt{2 \left(\frac{1}{4} + x^2 \right)} \leq \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{5} \right) \sqrt{2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right)} = 0.975 < 1,$$

т.е. правое неравенство (5.3) выполнено. Осталось проверить левое неравенство в (5.3). Положим $x = 1/2 + h$; тогда неравенство запишется в виде

$$\frac{\sin \pi h}{\pi h} \leq 1 - h^2.$$

Но дробь слева разлагается в бесконечное произведение:

$$\frac{\sin \pi h}{\pi h} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{h^2}{n^2} \right) \leq 1 - h^2.$$

Таким образом, неравенства (5.3), (5.2), а вместе с ними и лемма полностью доказаны.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $l_i \geq l_j \geq l_k$ – длины отрезков, составляющих E . При достаточно большом n выполняются неравенства

$$\begin{aligned} l_j &< \frac{\hbar}{3}, & l_k &< \frac{\hbar}{6}, & (l_{j-1} + l_j + l_{j+1}) + (l_{k-1} + l_k + l_{k+1}) &< 2.5\hbar, \\ l_{i-1} + l_i + l_{i+1} &> 2.5\hbar, & l_{j-1} + l_j + l_{j+1} &< 1.5\hbar, & l_{k-1} + l_k + l_{k+1} &< 1.5\hbar. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, числа $s_1 = l_i/\hbar$, $s_2 = l_j/\hbar$, $s_3 = l_k/\hbar$ удовлетворяют условиям $s_1, s_2, s_3 \geq 0$, $s_1 + s_2 + s_3 = \mu E/\hbar \leq 1$ и $u_n(s_1) + u_n(s_2) + u_n(s_3) \geq 5$. Следовательно, $u(s_1) + u(s_2) + u(s_3) \geq 5 - o(1)$. В силу непрерывности функции $u(\cdot)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ из неравенства $u(s_1) + u(s_2) + u(s_3) > 5 - \varepsilon$ вытекают неравенства $s_1 > 2/3 + \varepsilon$, $u(s_2) < 1.5 - \varepsilon$ и $u(s_2) + u(s_3) < 2.5 - \varepsilon$. Следовательно, при достаточно большом n эти неравенства выполняются, откуда $u_n(s_2) < 1.5$, $u_n(s_2) + u_n(s_3) < 2.5$. Применим лемму 6 и получим $l_{j-1} + l_j + l_{j+1} < 1.5\hbar$, $l_{j-1} + l_j + l_{j+1} + l_{k-1} + l_k + l_{k+1} < 2.5\hbar$. Остальные неравенства следуют из уже доказанных.

Свойства функции ψ . Напомним, что отрезки I_k характеризуются свойством $\nu(I_k) = \pi$, где мера ν имеет плотность (2.3). Рассмотрим подробнее функцию $\psi(q, x) = (1 - q \cos x)/(1 - 2q \cos x + q^2)$ для $q \in [0, 1]$. Во-первых, нетрудно вычислить ψ' , ψ'' :

$$\psi'(q, x) = -q(1 - q^2) \frac{\sin x}{(1 - 2q \cos x + q^2)^2}, \quad (5.4)$$

$$\psi''(q, x) = q(1 - q^2) \frac{4q - 2q \cos^2 x - (1 + q^2) \cos x}{(1 - 2q \cos x + q^2)^3}. \quad (5.5)$$

Пусть $q \neq 0$. Тогда функция ψ имеет две точки перегиба $\pm t_q$, вогнута на $[-t_q, t_q]$ и выпукла на дополнительных отрезках к $[-t_q, t_q]$. Поскольку $\psi''(\pi/2) > 0$, то на множестве $\pi/2 \leq |x| \leq \pi$ функция ψ выпукла. При $q = 0$ функция ψ вырождается в константу.

Нетрудно найти мажоранту плотностей $\psi(q, x)$:

$$\psi(q, x) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \sin |x|}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (5.6)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Для $r, x > 0$, $r = O(1)$, $x = o(1)$ имеем

$$\int_x^{rx} \psi(q, t) dt < \frac{1}{2} \ln r + o(1). \quad (5.7)$$

Очевидно, максимум ψ достигается в нуле, откуда

$$\psi(q, x) \leq \frac{1}{1 - q}, \quad x \in \mathbb{T}. \quad (5.8)$$

Кроме того,

$$\int_0^x \psi(q, t) dt \leq \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}, \quad x \in [0, \pi]. \quad (5.9)$$

Это ясно из геометрического смысла функции ψ : интеграл $\int_a^b \psi(q, t) dt$ суть угол, под которым видна дуга AB окружности из точки q , где $A = \exp(ia)$, $B = \exp(ib)$.

5.2. Расположение отрезков E . Оценим диаметр множества E .

ЛЕММА 8. $E \subset [-6\hbar, 6\hbar]$ при достаточно большом n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, $T(0) = M = \|T\|_\infty$ и $\|T\|_1 = 1$. Лемма сразу следует из двух неравенств

$$\|T\|_{L_1[-3.5\hbar, 3.5\hbar]} > 0.69, \quad (5.10)$$

$$\|T\|_{L_1[x_0 - 2.5\hbar, x_0 + 2.5\hbar]} > 0.31, \quad \text{если } x_0 \in E. \quad (5.11)$$

Для доказательства нам потребуется полином Ремеза

$$R_{m,\sigma} = T_m \left(\frac{2 \cos x + 1 - \cos \sigma}{1 + \cos \sigma} \right),$$

где T_m – полином Чебышёва, $\sigma \in [0, \pi)$. Основное свойство $R_{m,\sigma}$ в том, что $|R_{m,\sigma}(x)| \leq 1$ при $\sigma \leq |x| \leq \pi$ и $R_{m,\sigma}(0)$ максимально возможное.

Полином T обладает большим по величине отношением

$$d(T) = \frac{\|T\|_\infty}{\|T\|_1(\deg(T) + 1)},$$

где под $\deg(T)$ понимается порядок полинома T . Именно, $d(T) \geq 1/(2\pi)$, в то время как по неравенству (1.2) для любого полинома $d(T) \leq 1.1/(2\pi)$. Перейдем от T к полиному $\tilde{T}(x) = T(x)R_{m,\sigma}(x)/R_{m,\sigma}(0)$. Тогда $\|\tilde{T}\|_\infty = \|T\|_\infty$, $\deg(\tilde{T}) = n + m$. Если мы установим оценку сверху

$$\|\tilde{T}\|_1 < \frac{1}{1.1} \frac{n+1}{n+m+1},$$

то получим, что $d(\tilde{T}) > 1.1d(T) > 1.1/(2\pi)$, и придем к противоречию. Очевидно, что если $\|T\|_{L_1[-\sigma, \sigma]} \leq \alpha$, то

$$\|\tilde{T}\|_1 \leq \alpha + (1 - \alpha)R_{m,\sigma}(0)^{-1}. \quad (5.12)$$

Вычислим асимптотически $R_{m,\sigma}(0)$. Воспользуемся формулой

$$T_m(z) = \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^m + (z - \sqrt{z^2 - 1})^m}{2}, \quad z \geq 1.$$

Имеем

$$R_{m,\sigma}(0) = T_m \left(\frac{3 - \cos \sigma}{1 + \cos \sigma} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1 + \sin(\sigma/2)}{\cos(\sigma/2)} \right)^{2m} + \left(\frac{1 - \sin(\sigma/2)}{\cos(\sigma/2)} \right)^{2m} \right\}.$$

При фиксированных $\delta, \gamma > 0$, $n \rightarrow \infty$, $m = \lfloor \gamma n \rfloor$, $\sigma = \delta/(n+1)$ имеем $R_{m,\sigma}(0) \rightarrow \cosh(\gamma\delta)$. Предположим, что неравенство (5.10) не выполнено. Тогда возьмем $\alpha = 0.69$, $\delta = 3.5\pi$ и воспользуемся оценкой (5.12):

$$\|\tilde{T}\|_1 \leq 0.69 + 0.31 \cosh^{-1}(3.5\pi\gamma) + o(1).$$

Нам требуется установить неравенство

$$0.69 + 0.31 \cosh^{-1}(3.5\pi\gamma) < \frac{1}{1.1(1+\gamma)} = \frac{n+1}{1.1(n+m+1)} + o(1).$$

Можно проверить, что оно выполнено при $\gamma = 0.218$. Следовательно, неравенство (5.10) имеет место при больших n .

Доказательство (5.11) вполне аналогично доказательству (5.10), только нужно использовать тот факт, что $|T(x_0)| \geq c_0 > 0.56M$. Требуемая оценка на норму $\tilde{T}$:

$$\|\tilde{T}\|_1 < \frac{0.56(n+1)}{1.1(n+m+1)}.$$

Неравенство на γ :

$$0.31 + 0.69 \cosh^{-1}(2.5\pi\gamma) < \frac{0.56}{1.1(1+\gamma)}.$$

Оно выполняется при $\gamma = 0.491$. Лемма доказана.

Напомним, что мы имеем канонический набор и соответствующие ему $2n+6$ отрезков, причем три из этих отрезков составляют множество E . В силу доказанной выше леммы $E \subset [-6\hbar, 6\hbar]$, а значит, расстояние между любыми двумя отрезками E не превосходит $12\hbar$. Поскольку сумма любых k отрезков нашего канонического набора не меньше $(k-4)\hbar$, то между любыми двумя отрезками E не более 16 отрезков.

Занумеруем все отрезки канонического набора, начиная с левого отрезка E . Понятия “левее” и “правее” определены корректно для отрезков E (дуг на окружности), поскольку все они лежат в малой окрестности нуля. В силу вышесказанного $E \subset I_1 \cup \dots \cup I_{18}$.

Напомним, что канонический набор строится в соответствии с мерой ν , имеющей плотность

$$\rho(x) = n - 1 + 2\psi(q_1, x - \beta_1) + 2\psi(q_2, x - \beta_2). \quad (5.13)$$

Без ограничения общности считаем, что $-\pi \leq \beta_1 \leq \beta_2 < \pi$. Покажем, что $\beta_1, \beta_2 = O(1/n)$. Действительно, рассмотрим два меньших отрезка E ; сумма их длин не больше $2\hbar/3$ (иначе $\mu E > \hbar$). Пусть, например, $n|\beta_2| = B$ достаточно велико. Тогда значение плотности $\psi(q_2, x - \beta_2)$ на E есть $O(n/B)$ в силу (5.6) и того, что $E \subset [-6\hbar, 6\hbar]$. Тем самым, вклад слагаемого $2\psi(q_2, x - \beta_2) - 1$ в ν -меру отрезков E есть $O(1/B)$. Следовательно, длины отрезков $O(\hbar/B)$ -близки к длинам отрезков канонического набора, получающегося из плотности $n + \psi(q_1, x - \beta_1)$. Но для таких наборов сумма длин двух не соседних отрезков не меньше $\hbar$ — это было установлено в случае $K = 2$. Поэтому исходная сумма длин не меньше $\hbar - O(\hbar/B)$, чего не может быть (при больших n и B).

Аналогично с использованием неравенства (5.8) доказывается, что $1 - q_j = O(1/n)$, $j = 1, 2$. В частности, $q_1 q_2 \neq 0$. Итак, имеют место соотношения

$$\beta_j = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad 1 - q_j = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad j = 1, 2.$$

Назовем отрезок I_k локально минимальным (кратко — минимальным), если $l_k \leq \min(l_{k-1}, l_{k+1})$. Докажем, что может существовать не более двух минимальных не соседних друг с другом отрезков, т.е. если отрезки I_i, I_j, I_k локально минимальны, то $|i - j| \leq 1$ или $|j - k| \leq 1$, или $|i - k| \leq 1$.

В силу равенства $\int_{I_k} \rho(x) dx = \pi$ имеем

$$l_k = \frac{\pi}{\rho(\xi_k)} \quad \text{для некоторого} \quad \xi_k \in (t_k, t_{k+1}). \quad (5.14)$$

На большей части окружности суммарная плотность ρ монотонна: она убывает при $\beta_2 \leq x \leq \beta_1 + \pi$ и возрастает при $\beta_2 - \pi \leq x \leq \beta_1$. Следовательно, монотонны (в обратную сторону) и длины отрезков набора, попадающих в указанные промежутки. Далее, если I_k минимален, то $\rho(\xi_k) \geq \max(\rho(\xi_{k-1}), \rho(\xi_{k+1}))$ и ρ имеет локальный максимум на (ξ_{k-1}, ξ_{k+1}) . Поскольку $\psi''(q, x) < 0$ при $\pi/2 \leq |x| \leq \pi$ и $\beta_j = O(1/n)$, то на отрезке $[\beta_1 + \pi, \beta_2 + \pi]$ нет локальных максимумов плотности ρ . Следовательно, минимальные отрезки должны пересекаться с $[\beta_1, \beta_2]$.

Рассмотрим отрезки $I_p \ni \beta_1$ и $I_q \ni \beta_2$. Если $q - p \leq 3$, то между I_p и I_q не может поместиться три (не соседних) минимальных отрезка. Рассмотрим случай $q - p \geq 4$. Если отрезки I_i и I_j не соседние и минимальные, то ρ имеет локальные максимумы в непересекающихся интервалах (ξ_{i-1}, ξ_{i+1}) и (ξ_{j-1}, ξ_{j+1}) . Поэтому достаточно доказать, что ρ имеет не более двух локальных максимумов. Покажем, что $|\beta_1 - \beta_2| > \pi/n - o(1/n)$. В силу (5.9) вклад от $2\psi_1 + 2\psi_2$ в ν -меру отрезка $[\beta_1, \beta_2]$ не больше $2\pi + 2|\beta_1 - \beta_2|$, в то же время этот отрезок содержит не менее трех отрезков канонического набора, а значит, его ν -мера не меньше 3π . В итоге $\beta_2 - \beta_1 > \pi/n + o(1/n)$. Теперь можно применить следующую лемму.

ЛЕММА 9. Пусть заданы $n \in \mathbb{N}$, $q_1, q_2 \in (0, 1)$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{T}$, причем

$$1 - q_j \leq \frac{C}{n}, \quad \frac{c}{n} \leq \beta_2 - \beta_1 \leq \frac{C}{n},$$

где c и C – положительные константы. Тогда при достаточно большом $n > N(c, C)$ плотность $\psi(q_1, x - \beta_1) + \psi(q_2, x - \beta_2)$ имеет не более двух локальных максимумов.

Отметим, что вопрос о количестве максимумов (мод) различных плотностей представляет интерес в теории вероятностей и статистике и активно изучался. Например, для смесей нормальных плотностей (в том числе многомерных) ряд результатов был получен в [13]. В своем доказательстве мы используем стандартную технику, применяемую в подобных задачах. Мы предполагаем, что утверждение леммы справедливо для произвольных $q_1, q_2, \beta_1, \beta_2$, однако доказать это нам не удалось.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 9. В доказательстве подсчеты количеств нулей ведутся с учетом кратности. Обозначим $\psi_j(x) = \psi(q_j, x - \beta_j)$, $j = 1, 2$. Как мы уже показали, сумма $\psi_1 + \psi_2$ может иметь локальные максимумы только на отрезке $[\beta_1, \beta_2]$. Если $\psi_1 + \psi_2$ имеет три локальных максимума на $[\beta_1, \beta_2]$, то $\psi'_1 + \psi'_2$ имеет не менее пяти нулей на этом отрезке и в пяти точках выполняется равенство $\psi'_1/\psi'_2 = -1$. Следовательно, производная $(\psi''_1\psi'_2 - \psi'_1\psi''_2)/(\psi'_2)^2$ имеет на $[\beta_1, \beta_2]$ не менее четырех нулей. Однако мы покажем, что функция

$$F = \psi''_1\psi'_2 - \psi'_1\psi''_2$$

имеет не более двух нулей на $[\beta_1, \beta_2]$. В силу (5.4), (5.5) имеем

$$-\frac{\psi'(q, x)}{\psi''(q, x)} = \frac{\sin x(1 - 2q \cos x + q^2)}{4q - 2q \cos^2 x - (1 + q^2) \cos x}. \quad (5.15)$$

Используя эту формулу, можно проверить, что F представляет собой дробь, в числителе которой – тригонометрический полином из $\mathcal{T}_3$ (при приведении к общему знаменателю и сложении дробей старший член $q_1 q_2 \sin(4x - 2\beta_1 - 2\beta_2)$ в числителе сокращается), а в знаменателе – положительный тригонометрический полином. Следовательно, F имеет не более шести нулей на $\mathbb{T}$. При этом в силу неравенств $\psi''(q, 0) < 0$ и $\psi''(q, \pi) > 0$ и известного характера монотонности функции ψ выполнено $F(\beta_1), F(\beta_2), F(\beta_1 + \pi), F(\beta_2 + \pi) < 0$. Поэтому нам достаточно доказать, что $F(x) > 0$ для некоторых $x \in (\beta_2, \beta_1 + \pi)$ и $x \in (\beta_2 - \pi, \beta_1)$ (ибо тогда найдутся не менее четырех нулей вне $[\beta_1, \beta_2]$).

В силу (5.15) при фиксированном $x \neq 0$ и $q \rightarrow 1$ имеем

$$-\frac{\psi'}{\psi''} \rightarrow \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

Докажем, что

$$-\frac{\psi'}{\psi''} = \frac{\sin x}{2 + \cos x} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right),$$

если x отделено от нуля на $\mathbb{T}$ и $1 - q = O(1/n)$. Действительно,

$$-\frac{\psi'(q, x)}{\psi''(q, x)} - \frac{\sin x}{2 + \cos x} = \frac{\sin x}{2 + \cos x} \frac{2(1 - q)^2(1 + \cos x)}{4q - 2q \cos^2 x - (1 + q^2) \cos x}.$$

Осталось учесть, что если x отделено от нуля, то знаменатель дроби также отделен от нуля.

Возьмем $x = \beta_2 + \pi/2$. В этой точке $\psi'_1, \psi'_2 < 0$, поэтому знак F совпадает со знаком разности $\psi'_2/\psi''_2 - \psi'_1/\psi''_1$. В точке $\pi/2$ функция $\sin x/(2 + \cos x)$ равна $1/2$ и имеет производную $1/4$, откуда

$$\begin{aligned} -\frac{\psi'_2}{\psi''_2} \left(\beta_2 + \frac{\pi}{2} \right) &= \frac{\sin x}{2 + \cos x} \Big|_{x=\pi/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ -\frac{\psi'_1}{\psi''_1} \left(\beta_2 + \frac{\pi}{2} \right) &= \frac{\sin x}{2 + \cos x} \Big|_{x=\pi/2+\beta_2-\beta_1} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\beta_2 - \beta_1) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \geq \frac{1}{2} + \frac{c}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ясно, что при больших n получается $\psi'_1/\psi''_1 < \psi'_2/\psi''_2$, т.е. $F(\beta_2 + \pi/2) > 0$. Аналогично $F(\beta_1 - \pi/2) > 0$, что и требовалось доказать.

Итак, имеется не более двух минимальных отрезков, не соседних друг с другом. Покажем, что два из трех отрезков, составляющих E , минимальны. Действительно, если, скажем, только I_k минимален, то остальные два отрезка можно заменить на небольшие отрезки той же четности, что I_k , а сумма трех отрезков одной четности больше $\hbar$. Ясно также, что два минимальных отрезка имеют разные четности, иначе опять работает соображение с тремя отрезками одной четности. Кроме того, третий отрезок находится не дальше чем через два от одного из других (минимальных) отрезков E . Действительно, третий отрезок не является минимальным; если он находится дальше чем через два отрезка от остальных, то можно заменить его на меньший соседний отрезок

и получить $(n, K = 3)$ набор с меньшей суммарной длиной, что противоречит лемме 4.

Для определенности пусть третий отрезок ближе к левому минимальному отрезку. С учетом всего вышесказанного получаем, что возможны следующие конфигурации (конфигурация описывается номерами отрезков, составляющих E): 1–4– $(7+2d)$, $d = 0, 1, \dots$, отрезки 4 и $7+2d$ минимальны; 1–4– $(8+2d)$, $d = 0, 1, \dots$, отрезки 1 и $8+2d$ минимальны. Поскольку $E \subset I_1 \cup \dots \cup I_{18}$, мы имеем $d \leq 5$ в обоих случаях.

5.3. Разбор различных конфигураций. Дальнейшая схема рассуждений одна для всех случаев. Именно, в силу следствия 2 из леммы 7 у полинома T есть два соседних нуля z_i, z_{i+1} на расстоянии $> 2.5\hbar$ и два соседних нуля z_j, z_{j+1} на расстоянии $< 1.5\hbar$, причем отрезок $J = [z_j, z_{j+1}]$ содержит точку из E . Нули полинома T расположены достаточно регулярно, поэтому значения T в некоторой точке x_1 вблизи середины $I = [z_i, z_{i+1}]$ должны быть намного больше значений полинома в любой точке $x_2 \in J$, что невозможно, поскольку

$$\left| \frac{T(x_1)}{T(x_2)} \right| \leq \frac{M}{c_0} \leq \frac{1}{0.56} < 1.786 \quad \text{при} \quad x_2 \in E.$$

Оставшаяся часть доказательства посвящена аккуратной реализации этого плана за счет правильного выбора точек $x_1 \in I$ и $x_2 \in J \cap E$. Для понимания вычислений полезно рисовать схему расположения точек в каждом из случаев.

Будем пользоваться формулой

$$T(x) = c \prod_{i=1}^{2n} \sin \frac{x - z_i}{2},$$

где $z_1, \dots, z_{2n}$ – нули T , и следующим простым наблюдением: пусть $a \leq b \leq a + 2\pi$; тогда для $x \in [a, b]$ величина

$$\left| 2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{b-x}{2} \right| = \left| \cos \left(x - \frac{a+b}{2} \right) - \cos \frac{b-a}{2} \right| \quad (5.16)$$

тем больше, чем ближе x к середине $[a, b]$.

Также мы будем использовать то, что дробь $(a+x)/(b+x)$ при $a > b > 0$ монотонно убывает на $[0, +\infty)$.

Напомним, что k -й отрезок канонического набора обозначается через $I_k = [t_k, t_{k+1}]$, $l_k = t_{k+1} - t_k$. Естественно (см. (2.4)), всегда $l_j \leq \hbar$. Введем обозначение

$$l_{i:j} = \sum_{i \leq k \leq j} l_k.$$

5.3.1. Конфигурация 1–4–7. Начнем с наиболее простого случая $E = I_1 \cup I_4 \cup I_7$, причем отрезки I_4, I_7 минимальны. В силу следствия леммы 7 имеют место неравенства

$$l_{0:2} > 2.5\hbar, \quad l_{3:5} < 1.5\hbar, \quad l_{6:8} < 1.5\hbar, \quad l_{3:8} < 2.5\hbar. \quad (5.17)$$

Рис. 2

Возьмем точку $x_1 = t_0 + 1.5\hbar$ и точку $x_2 \in I_7$ на расстоянии не более $\hbar$ от t_6 и t_9 ; это возможно по (5.17) (рис. 2).

Оценим снизу отношение $|T(x_1)/T(x_2)|$.

Мы знаем, что множество нулей T есть $\{t_k : k \neq 1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

Оценим вклады нулей вне отрезков 0–8 в произведения $T(x_1)$ и $T(x_2)$. Сгруппируем эти $2n - 4$ нулей по парам: $\{t_{-1}, t_{10}\}$, $\{t_{-2}, t_{11}\}$ и т.д. Докажем, что вклад пары $\{t_{-1}, t_{10}\}$ в $T(x_1)$ не меньше, чем в $T(x_2)$, т.е.

$$\frac{|\sin((x_1 - t_{-1})/2) \cdot \sin((x_1 - t_{10})/2)|}{|\sin((x_2 - t_{-1})/2) \cdot \sin((x_2 - t_{10})/2)|} \geq 1. \quad (5.18)$$

В силу (5.16) достаточно доказать, что x_1 ближе к середине $[t_{-1}, t_{10}]$, чем x_2 , а это равносильно тому, что $x_1 - t_{-1} \geq t_{10} - x_2$. Имеем

$$x_1 - t_{-1} = 1.5\hbar + l_{-1}, \quad t_{10} - x_2 = |x_2 - t_9| + l_9 \leq 2\hbar.$$

Докажем, что $l_{-1} \geq \hbar/2$. В силу (5.17) сумма шести отрезков 3–8 меньше $2.5\hbar$. Сумма длин $k+6$ отрезков всегда не меньше $(k+2)\hbar$, следовательно, сумма длин любых k отрезков, не содержащих отрезков из числа 3–8, не меньше $(k - 1/2)\hbar$. Отсюда $l_{-1} \geq \hbar/2$, и неравенство (5.18) установлено.

Общий случай – пары $\{t_{-1-k}, t_{10+k}\}$ – разбирается аналогично:

$$x_1 - t_{-1-k} = 1.5\hbar + \sum_{i=-1-k}^{-1} l_i \geq 1.5\hbar + \left(k + \frac{1}{2}\right)\hbar = (k+2)\hbar,$$

$$t_{10+k} - x_2 = |x_2 - t_9| + \sum_{i=9}^{9+k} l_i \leq (k+2)\hbar,$$

поэтому вклад пары $\{t_{-1-k}, t_{10+k}\}$ в $T(x_1)$ не меньше, чем в $T(x_2)$.

Теперь оценим вклады остальных нулей: t_0, t_3, t_6, t_9 . Обозначим $L = l_{0:8}$ и $l' = |x_2 - t_9| \leq \hbar$. Мы будем пользоваться тем, что $\sin x \sim x$ при $x = o(1)$.

Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \sin \frac{x_1 - t_0}{2} \cdot \sin \frac{x_1 - t_3}{2} \cdot \sin \frac{x_1 - t_6}{2} \cdot \sin \frac{x_1 - t_9}{2} \right| \\ & \sim 2^{-4} \cdot |x_1 - t_0| \cdot |x_1 - t_3| \cdot |x_1 - t_6| \cdot |x_1 - t_9| \\ & \geq 2^{-4} \cdot 1.5\hbar \cdot \hbar \cdot |x_1 - t_6| \cdot (L - 1.5\hbar) \end{aligned}$$

(мы применили неравенство $|x_1 - t_3| \geq 2.5\hbar - |x_1 - t_0| = \hbar$),

$$\begin{aligned} & \left| \sin \frac{x_2 - t_0}{2} \cdot \sin \frac{x_2 - t_3}{2} \cdot \sin \frac{x_1 - t_6}{2} \cdot \sin \frac{x_2 - t_9}{2} \right| \\ & \sim 2^{-4} \cdot |x_2 - t_0| \cdot |x_2 - t_3| \cdot |x_2 - t_6| \cdot |x_2 - t_9| \\ & \leq 2^{-4} (L - l') \cdot |x_2 - t_3| \cdot (1.5\hbar - l') \cdot l' \end{aligned}$$

(мы использовали, что $l_{6:8} < 1.5\hbar$).

Ясно, что $|x_1 - t_6| \geq \hbar + l_{3:5} \geq |x_2 - t_3|$. Следовательно, отношение вкладов не меньше

$$\frac{1.5\hbar \cdot \hbar (L - 1.5\hbar)}{(L - l')(1.5\hbar - l')l'} = \frac{1.5\hbar^2}{l'(1.5\hbar - l')} \cdot \frac{L - 1.5\hbar}{L - l'}.$$

Учитывая, что $L \geq 5\hbar$ (ибо L – сумма длин девяти отрезков) и обозначая $l' = c\hbar$, получим оценку снизу

$$\frac{1.5}{c(1.5 - c)} \cdot \frac{5 - 1.5}{5 - c} = \frac{1.5 \cdot 3.5}{c(1.5 - c)(5 - c)}.$$

Нетрудно проверить, что $c(1.5 - c)(5 - c) < 2.5$ при $c \in [0, 1]$, откуда отношение вкладов не меньше $1.5 \cdot 3.5 / 2.5 = 2.1$. Следовательно, $|T(x_1)/T(x_2)| \geq 2.1 + o(1)$, что невозможно, поскольку $x_2 \in E$ и $|T(x_1)/T(x_2)| \leq M/c_0 < 1.786$.

5.3.2. Конфигурации 1–4–(8 + 2d). Для краткости пусть $m = 8 + 2d$ – номер третьего отрезка E . Минимальные отрезки I_1, I_m . Проведем рассуждение в общем виде, для произвольного d (напомним, что интересен случай $d \leq 5$). Имеем

$$l_{3:5} > 2.5\hbar, \quad l_{0:2} < 1.5\hbar, \quad l_{m-1:m+1} < 1.5\hbar, \quad l_{0:2} + l_{m-1:m+1} < 2.5\hbar. \quad (5.19)$$

Возьмем $x_1 = t_6 - 1.5\hbar$, $x_2 \in I_1$ на расстоянии не более $\hbar$ от t_0 и t_3 и оценим снизу $|T(x_1)/T(x_2)|$. Конфигурация для $d = 0$ изображена на рис. 3.

Докажем, что вклад нулей вне отрезков 0–5 (“внешних” нулей) больше в $T(x_1)$, чем в $T(x_2)$. Как и раньше, сгруппируем соответствующие $2n - 3$ нулей по парам: $\{t_{-1}, t_7\}$, $\{t_{-2}, t_8\}$ и т.д. При этом один (“последний”) нуль останется без пары. Ясно, что этот нуль далек от x_j , поэтому вклады в $T(x_1)$ и $T(x_2)$ для него будут отличаться в $1 + o(1)$ раз. Покажем, что вклад пары $\{t_{-1}, t_7\}$ в $T(x_1)$ больше, чем в $T(x_2)$. Для этого достаточно показать, что $l_6 \geq \hbar/2$, что и делается так же, как и в случае 1–4–7.

Аналогично проводим рассуждение для остальных пар внешних нулей вплоть до пары $\{t_{7-m}, t_{m-1}\}$. Дальше ситуация меняется, так как t_m и t_{m+1} не являются нулями, а рассуждение про сумму длин $\geq (k - 1/2)\hbar$ применимо

Рис. 3

к любым k отрезкам, не включающим $0, 1, 2, m-1, m, m+1$. Поскольку сумма отрезков $0, 1, 2$ меньше $1.5\hbar$, то сумма любых других k отрезков не меньше $(k-2.5)\hbar$. Итак, для следующей за $\{t_{7-m}, t_{m-1}\}$ пары $\{t_{6-m}, t_{m+2}\}$ имеем

$$\begin{aligned} x_2 - t_{6-m} &= l_{6-m:-1} + x_2 - t_0 \leq (m-5)\hbar, \\ t_{m+2} - x_1 &= t_6 - x_1 + l_{6:m+1} \geq 1.5\hbar + (m-4-2.5)\hbar = (m-5)\hbar. \end{aligned}$$

Дальше рассуждения аналогичны.

Оценим вклад ближних нулей. Пусть $|x_2 - t_0| = a\hbar$, $|x_2 - t_3| = b\hbar$, $|x_1 - t_3| = c\hbar$; тогда отношение вкладов нулей t_0, t_3, t_6 в $T(x_1)$ и $T(x_2)$ асимптотически равно

$$\frac{|x_1 - t_0| \cdot |x_1 - t_3| \cdot |x_1 - t_6|}{|x_2 - t_0| \cdot |x_2 - t_3| \cdot |x_2 - t_6|} = \frac{(a+b+c)\hbar \cdot c\hbar \cdot 1.5\hbar}{a\hbar \cdot b\hbar \cdot (b+c+1.5)\hbar} = \frac{1.5c(a+b+c)}{ab(b+c+1.5)}.$$

Оценим это выражение снизу. В силу (5.19) выполнено $c \geq 1$, $a+b < 1.5$. При фиксированных $a \in (0, 1.5)$, $b \geq 0$ дробь $(a+b+c)/(b+c+1.5)$ минимальна при минимальном c , т.е. $c = 1$. Получаем оценку снизу $1.5(a+b+1)/(ab(b+2.5))$. Далее, пусть $a+b = l$; тогда $(a+b+1)/(ab) \geq (l+1)/(l/2)^2 = 4(l+1)/l^2$, что минимально при максимально возможном $l = 1.5$. Также $b+2.5 < 3.5$ (по определению x_2). Окончательно имеем

$$1.5 \frac{a+b+1}{ab(b+2.5)} \geq 1.5 \cdot 4 \frac{1.5+1}{1.5^2} \cdot \frac{1}{3.5} > 1.9.$$

Следовательно, отношение $T(x_1)$ и $T(x_2)$ асимптотически не меньше 1.9 – противоречие.

5.3.3. Конфигурация 1–4–9. Минимальны отрезки I_4, I_9 . В силу следствия леммы 7 имеют место неравенства

$$l_{0:2} > 2.5\hbar, \quad l_{3:5} < 1.5\hbar, \quad l_{8:10} < 1.5\hbar, \quad l_{3:5} + l_{8:10} < 2.5\hbar. \quad (5.20)$$

Возьмем точку x_1 – середину $I_0 \cup I_1 \cup I_2$ – и произвольную точку $x_2 \in I_9$ на расстоянии не более $\hbar$ и от t_8 , и от t_{11} (рис. 4). Цель (как и прежде) – оценить снизу $|T(x_1)|/|T(x_2)|$.

“Внешние” нули (т.е. $2n-6$ штук вне отрезков I_0-I_{10}) разобьем на пары: $\{t_{-1}, t_{12}\}$, $\{t_{-2}, t_{13}\}$ и т.д. Докажем, что вклад внешних нулей в $T(x_1)$ не меньше, чем в $T(x_2)$. Для этого сначала докажем, что k отрезков, начиная с I_{-1} -го

Рис. 4

и левее, на $\hbar/4$ больше суммы соответствующих k отрезков справа от I_{10} (для всех k):

$$l_{-k:-1} \geq l_{11:10+k} - \frac{\hbar}{4}. \quad (5.21)$$

Пусть $k = 3$ (случаи $k = 1, 2$ проще и разбираются аналогично). Пусть $l_{-3} + l_{-2} + l_{-1} = 3\hbar - \Delta$; тогда в силу монотонности $l_0 + l_1 + l_2 \leq 3\hbar - \Delta$. Но $l_{-3:2} \geq 5.5\hbar$, поскольку сумма любых k отрезков, не содержащих отрезки 3–5 и 8–10, не меньше $(k - 1/2)\hbar$, откуда $\Delta < \hbar/4$. Поскольку $l_{11} + l_{12} + l_{13} \leq 3\hbar$, то (5.21) выполнено при $k = 3$.

Пусть $k > 3$. Покажем, что t_{-3} дальше от центров плотностей, чем t_{11} . Достаточно доказать, что $|t_{-3} - \beta_1| > |t_{11} - \beta_1|$. А это следует из $\beta_1 > t_4 - \hbar/2$, ибо тогда

$$\begin{aligned} |\beta_1 - t_{11}| &< 0.5\hbar + l_{4:10} < 0.5\hbar + l_{3:5} + l_{8:10} + l_6 + l_7 < 0.5\hbar + 2.5\hbar + 2\hbar = 5\hbar, \\ |\beta_1 - t_{-3}| &> l_{-3:2} - 0.5\hbar \geq 5.5\hbar - 0.5\hbar = 5\hbar. \end{aligned}$$

Предположим, что $\beta_1 \leq t_4 - \hbar/2$. Имеем

$$\pi = \int_{t_4}^{t_5} ((n-1) + 2\psi_1(x) + 2\psi_2(x)) dx.$$

Для вклада второго слагаемого в интеграл применим (5.7) с $x = |\beta_1 - t_4| > \hbar/2$, $rx - x = l_4 < \hbar/3$: вклад не больше $\ln(5/3) + o(1)$. Центр β_2 принадлежит отрезку I_s с $s \geq 9$, иначе отрезок I_9 не был бы минимальным. Для вклада третьего слагаемого применим то же неравенство с $x = |\beta_2 - t_5| \geq l_{5:8} > 2\hbar$, $rx - x = l_4$: вклад не больше $\ln(7/6) + o(1)$. Следовательно, вклад плотностей ψ меньше 0.67, вклад длины не больше $(n-1)\hbar/3 \leq \pi/3$, и в сумме получаем меньше π – противоречие.

Покажем теперь, что отрезок I_{-4} длиннее, чем I_{11} , отрезок I_{-5} длиннее I_{12} и т.д. Действительно, точка t_{-3} дальше от β_j , чем t_{11} , и значение плотностей ψ там меньше (ψ_j симметричны относительно β_j). Будем двигаться от t_{-3} влево, а от t_{11} вправо, замата фиксированную ν -меру в единицу времени. Понятно, что точка слева будет все время двигаться быстрее и еще сильнее удаляться от центров плотностей. Поэтому все отрезки будут длиннее, т.е. $l_{-4} \geq l_{11}, l_{-5} \geq l_{12}, \dots$

Таким образом, для сравнения длин соответствующих $k > 3$ отрезков мы оцениваем первые три отрезка слева как $(3 - 1/4)\hbar$, последние три отрезка справа как $3\hbar$, а оставшиеся отрезки слева длиннее соответствующих отрезков справа: $l_{-j} \geq l_{j+7}$, $l_{-3:-1} \geq (3 - 1/4)\hbar$, откуда

$$l_{-k:-1} = l_{-k:-4} + l_{-3:-1} \geq l_{11:7+k} + \left(3 - \frac{1}{4}\right)\hbar \geq l_{11:10+k} - \frac{\hbar}{4}.$$

Тем самым, неравенство (5.21) установлено. Окончательно получаем, что для пары нулей $\{t_{-k}, t_{11+k}\}$

$$x_1 - t_{-k} = l_{-k:-1} + |x_1 - t_0| \geq l_{-k:-1} + 1.25\hbar \geq l_{11:10+k} + \hbar \geq t_{11+k} - x_2,$$

и вклад этой пары в $T(x_1)$ не меньше, чем в $T(x_2)$.

Рассуждения могут нарушиться для пар нулей, $O(1/n)$ -близких к π (нарушается монотонность ψ_j). Ясно, что таких пар будет конечное количество, и отношение вкладов для них есть $1 + o(1)$, поэтому при больших n они не играют роли. Поэтому такие нули мы можем не рассматривать.

Оценим теперь вклады близких нулей: $t_0, t_3, t_6, t_7, t_8, t_{11}$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{|x_1 - t_0| \cdot |x_1 - t_3|}{|x_2 - t_8| \cdot |x_2 - t_{11}|} &\geq \frac{(1.25\hbar)^2}{\max_{0 \leq z \leq l \leq 1.5\hbar} z(l-z)} \geq \frac{(1.25\hbar)^2}{(0.75\hbar)^2}, \\ \frac{|x_1 - t_{11}|}{|x_2 - t_0|} &\geq \frac{l_{0:10} - 1.5\hbar}{l_{0:10}} \geq \frac{7 - 1.5}{7} = \frac{5.5}{7}, \\ \frac{|x_1 - t_8|}{|x_2 - t_3|} &\geq \frac{1.25\hbar + l_{3:7}}{\hbar + l_{3:7}} \geq \frac{1.25 + 3.5}{1 + 3.5} = \frac{4.75}{4.5} \end{aligned}$$

(используется, что $l_{3:7} \geq l_{3:5} + 2\hbar \geq 3.5\hbar$),

$$\frac{|x_1 - t_7|}{|x_2 - t_6|} \geq \frac{1.25\hbar + l_{3:5} + l_6}{\hbar + l_7 + l_6} \geq \frac{1.25 + 0.5 + 0.5}{1 + 1 + 0.5} = \frac{2.25}{2.5}$$

(используется, что $l_{3:5} \geq l_{3:5} + l_{8:10} - 1.5\hbar \geq 0.5\hbar$ и $l_6 \geq 0.5\hbar$),

$$\frac{|x_1 - t_6|}{|x_2 - t_7|} \geq \frac{1.25 + 0.5}{2} = \frac{1.75}{2}.$$

Перемножая полученные неравенства, получаем

$$\frac{1.25^2}{0.75^2} \cdot \frac{5.5}{7} \cdot \frac{4.75}{4.5} \cdot \frac{2.25}{2.5} \cdot \frac{1.75}{2} > 1.81.$$

Противоречие.

5.3.4. Конфигурации $1-4-(11+2d)$. Минимальными являются отрезки I_4 и I_{11+2d} . Максимум T не может достигаться на I_1 или I_{11+2d} в силу леммы 8 и оценки $|t_2 - t_{11+2d}| = l_{2:11+2d} > 6\hbar$ (как сумма не менее чем 10 отрезков канонического набора). Тем самым, M достигается на I_4 , и полином должен вырасти от $c_0 = M \cos \theta_0$ до M за время $\leq \hbar/6$ (ибо $l_4 \leq \hbar/3$), откуда в силу неравенства Рисса $\theta_0 \leq \pi/6$. Следовательно, $c_0/M > \sqrt{3}/2$. Далее, аналогично доказательству леммы 8 можно показать, что в $3\hbar$ -окрестности любой точки

из E набирается не менее половины L_1 -нормы: дело сводится к существованию решения неравенства

$$0.5 + 0.5 \frac{1}{\cosh(3\pi\gamma)} \leq \frac{\sqrt{3}}{2.2(1+\gamma)},$$

которое выполнено при $\gamma = 0.3$. Это дает противоречие: $3\hbar$ -окрестности точек t_1 и t_{12+2d} не пересекаются и на них уже набирается L_1 -норма T .

Итак, все случаи разобраны и теорема 1 доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 2

Доказательство проведем для случая $\tau = 1$; общий случай получается заменой переменной $x \mapsto x/\tau$. Предположим противное: существуют функция F , удовлетворяющая условиям теоремы, и измеримое множество $E \subset \mathbb{R}$ такие, что $\|F\|_{L(E)} \geq (1/2)\|F\|_{L(\mathbb{R})}$, но $\mu(E) < \pi$. Можно считать, что $E = \{x \in \mathbb{R} : |F(x)| \geq L\}$, где $L > 0$. Предполагаем для определенности, что $\|F\|_{L(\mathbb{R})} = 1$. Рассмотрим множество $E_1 \supset E$, для которого $\mu(E_1) < \pi$ и $\int_{E_1} |F(x)| dx = 1/2 + \delta_1$, $\delta_1 > 0$ – малое число; можно считать, что E_1 ограничено.

Докажем, что найдется тригонометрический полином, приближающий целую функцию F , для которого не выполнена теорема 1. В самом деле, воспользовавшись конструкцией полиномов Левитана (в нужном нам виде с перечислением необходимых свойств она изложена в [6]), имеем при любом n полином (со спектром частот $\{k/n : |k| \leq n+1\}$)

$$T_n(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(x + 2k\pi n) \left(\frac{2 \sin(x/(2n))}{x/n + 2k\pi} \right)^2 = \sum_{|k| \leq n+1} c_k e^{ikx/n},$$

для которого $\|T_n\|_\infty \leq \|F\|_\infty$ и

$$|F(x) - T_n(x)| \leq 2\|F\|_\infty \min \left\{ 1, \left(\frac{x}{2n} \right)^2 \right\}. \quad (6.1)$$

Кроме того, справедливо неравенство $\int_{-\pi n}^{\pi n} |T_n(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |F(x)| dx$.

Пусть $E_1 \subset [-A; A]$, где $A > 0$ достаточно велико. Возьмем столь большое n , что $\|T_n - F\|_{L[-A; A]} \leq \delta_1$. Это требование обеспечивается поточечным неравенством (6.1). Следовательно, $\|T_n\|_{L(E_1)} \geq \|F\|_{L(E_1)} - \delta_1 = 1/2$. С другой стороны, $\|T_n\|_{L[-\pi n; \pi n]} \leq \|F\|_{L(\mathbb{R})} = 1$. Однако из теоремы 1 следует, что

$$\mu(E_1) \geq \frac{2\pi n}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{n+2} = \pi + o(1).$$

Получено противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сходные рассуждения устанавливают связь между решением общей (с некоторым $\alpha \in (0; 1)$ вместо $1/2$) экстремальной задачи для полиномов и аналогичной задачей для целых функций экспоненциального типа.

Список литературы

- [1] Y. Benyamini, A. Kroó, A. Pinkus, “ L^1 -approximation and finding solutions with small support”, *Constr. Approx.*, **36**:3 (2012), 399–431.
- [2] Л. В. Тайков, “О наилучшем приближении ядер Дирихле”, *Матем. заметки*, **53**:6 (1993), 116–121; англ. пер.: L. V. Taikov, “On the best approximation of Dirichlet kernels”, *Math. Notes*, **53**:6 (1993), 640–643.
- [3] Л. В. Тайков, “Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов”, *УМН*, **20**:3(123) (1965), 205–211.
- [4] Д. В. Горбачев, “Интегральная задача Конягина и (C, L) -константы Никольского”, *Теория функций. Сборник научных трудов*, Тр. ИММ УрО РАН, **11**, 2005, 72–91; англ. пер.: D. V. Gorbachev, “An integral problem of Konyagin and the (C, L) -constants of Nikol’skii”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2005, №2, S117–S138.
- [5] E. Nursultanov, S. Tikhonov, “A sharp Remez inequality for trigonometric polynomials”, *Constr. Approx.*, **38**:1 (2013), 101–132.
- [6] Q. I. Rahman, G. Schmeisser, “ L^p inequalities for entire functions of exponential type”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **320**:1 (1990), 91–103.
- [7] R. P. Boas, Jr., *Entire functions*, Academic Press Inc., New York, 1954, x+276 pp.
- [8] P. Borwein, T. Erdélyi, *Polynomials and polynomial inequalities*, Grad. Texts in Math., **161**, Springer-Verlag, New York, 1995, x+480 pp.
- [9] Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, М., 1987, 424 с.; англ. пер.: N. Korneichuk, *Exact constants in approximation theory*, Encyclopedia Math. Appl., **38**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, xii+452 pp.
- [10] А. Г. Бабенко, Ю. В. Крякин, “Интегральное приближение характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **14**:3 (2008), 19–37; англ. пер.: A. G. Babenko, Yu. V. Kryakin, “Integral approximation of the characteristic function of an interval by trigonometric polynomials”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **264**:1 (2009), S19–S38.
- [11] А. Г. Бабенко, Ю. В. Крякин, В. А. Юдин, “Об одном результате Геронимуса”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **16**:4 (2010), 54–64; англ. пер.: A. G. Babenko, Yu. V. Kryakin, V. A. Yudin, “On a result by Geronimus”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **273**:1 (2011), S37–S48.
- [12] F. Peherstorfer, “Trigonometric polynomials approximation in L^1 -norm”, *Math. Z.*, **169**:3 (1979), 261–269.
- [13] S. Ray, B. Lindsay, “The topography of multivariate normal mixtures”, *Ann. Statist.*, **33**:5 (2005), 2042–2065.

Юрий Вячеславович Малыхин
(Yuriy V. Malykhin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: jura05@yandex.ru, malykhin@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
21.01.2014 и 03.07.2014

Константин Сергеевич Рютин
(Konstantin S. Ryutin)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: kriutin@yahoo.com