Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Я. Мазалов, П. В. Парамонов, Критерии C^m -приближаемости бианалитическими функциями на плоских компактах, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 2, 77–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8334>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:26:43

УДК 517.53+517.548.4

М. Я. Мазалов, П. В. Парамонов

Критерии C^m -приближаемости бианалитическими функциями на плоских компактах

В работе получены критерии приближаемости бианалитическими функциями в нормах пространств C^m типа Уитни на плоских компактах при $m \in (0, 2)$. Эти результаты, являющиеся аналогами известных критериев А. Г. Витушкина для равномерных рациональных аппроксимаций, вместе с результатами А. Г. О'Фаррелла и Дж. Вердеры (случай $m \geq 2$) и М. Я. Мазалова (случай $m = 0$) дают полный список критериев приближаемости бианалитическими функциями для всех $m \geq 0$. Указанные условия приближаемости получены как для индивидуальных функций, так и (как следствия) для классов функций в терминах геометрической теории меры.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: C^m -аппроксимация бианалитическими функциями, C^m -бианалитическая емкость, обхват по Хаусдорфу порядка m , локализационный оператор типа Витушкина.

DOI: 10.4213/sm8334

§ 1. Обозначения. Формулировка результатов

Мы не будем здесь касаться истории вопроса, она подробно представлена в обзоре [1; гл. 2].

Пусть $\bar{\partial} = \partial/\partial\bar{z}$ – оператор Коши–Римана в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Функция f называется *бианалитической* на открытом множестве D в $\mathbb{C}$ (для краткости пишем $f \in A_2(D)$), если $f \in C^2(D)$ и $\bar{\partial}^2 f = 0$ в D . Нетрудно показать, что условие $f \in A_2(D)$ эквивалентно возможности представления функции f в виде

$$f(z) = f_0(z) + \bar{z}f_1(z), \quad (1.1)$$

где функции f_0 и f_1 голоморфны в D .

Для полноты изложения вначале напомним определения *нормированных* пространств C^m гладких функций порядка $m \geq 0$ на открытых множествах в $\mathbb{C}$. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ – непустое открытое множество. Для $m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ через $BC^m(U)$ обозначим класс всех (комплекснозначных) функций f , имеющих на U непрерывные и ограниченные частные производные до порядка m включительно, с нормой

$$\|f\|_{m,U} = \max_{|\beta| \leq m} \{\|\partial^\beta f\|_U\}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2900.2014.1), работа первого автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00434-а).

и “однородной” полунормой

$$\|f\|'_{m,U} = \max_{|\beta|=m} \{\|\partial^\beta f\|_U\}.$$

Здесь и далее $\|g\|_V = \sup_{z \in V} |g(z)|$ – равномерная норма ограниченной функции g на произвольном непустом множестве $V \subset \mathbb{C}$,

$$\partial^\beta f(z) = \frac{\partial^{|\beta|} f(z)}{\partial x^{\beta_1} \partial y^{\beta_2}}, \quad z = x + iy,$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $\beta_j \in \mathbb{Z}_+$ при $j \in \{1, 2\}$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$.

Для функции g , ограниченной на неототочечном множестве V , и $s \in [0, 1]$ определим s -модуль непрерывности g в V :

$$\omega_V^s(g, \delta) = \sup \frac{|g(z) - g(z')|}{|z - z'|^s}, \quad \delta \in (0, +\infty],$$

где указанный супремум берется по всем $z \neq z' \in V$ с условием $0 < |z - z'| < \delta$.

При $m = l + s$ (для нецелых m полагаем $l = [m] \in \mathbb{Z}_+$ и $s \in (0, 1)$; при целых $m \geq 1$ полагаем $l = m - 1$ и $s = 1$) определим пространства функций (здесь U открыто и непусто)

$$B \operatorname{Lip}^m(U) = \{f \in BC^l(U) \mid \omega_U^m(f, \infty) < \infty\},$$

где $\omega_U^m(f, \delta) = \max\{\omega_U^s(\partial^\beta f, \delta)\}$ и максимум берется по всем бииндексам β таким, что $|\beta| = l$; для указанных m определим также следующие пространства:

$$B \operatorname{lip}^m(U) = \{f \in BC^l(U) \mid \omega_U^m(f, \infty) < \infty, \omega_V^m(f, \delta) \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0_+\},$$

где V – произвольное компактное подмножество в U . А при $m = l + s$ нецелых ($l = [m] \in \mathbb{Z}_+$ и $s \in (0, 1)$) положим

$$BC^m(U) = B \operatorname{lip}^m(U).$$

Отметим, что $B \operatorname{lip}^1(U)$, в отличие от $BC^1(U)$, состоит только из констант.

Норма в пространствах $B \operatorname{Lip}^m(U)$ (при всех $m > 0$) и $BC^m(U)$ (только для нецелых $m > 0$) задается следующим образом:

$$\|f\|_{m,U} = \max\{\|f\|_{l,U}, \omega_U^m(f, \infty)\},$$

а также определяется соответствующая однородная полунорма

$$\|f\|'_{m,U} = \omega_U^m(f, \infty).$$

Нетрудно показать, что пространство $BC^m(U)$ является замыканием в $B \operatorname{Lip}^m(U)$ подпространства $B \operatorname{Lip}^m(U) \cap C^\infty(U)$.

Замыкание носителя функции (распределения) g будем обозначать $\operatorname{Spt}(g)$. При $m \in \mathbb{Z}_+$ (а также $m = \infty$), как обычно, полагаем $C_0^m(U) = \{\phi \in BC^m(U) \mid$

$\text{Spt}(\phi)$ – компакт в U }. Функции из $C_0^m(U)$, как правило, будут считаться продолженными (как нулевые вне U) на все $\mathbb{C}$. Через $C^m(U)$ обозначается пространство функций $\{f \mid f\phi \in BC^m(U) \text{ для всех } \phi \in C_0^m(U)\}$ с индуцированной метрикой Фреше. При $U = \mathbb{C}$ и $m = 0$ в обозначениях пространств, норм и модулей непрерывности зависимость от U и m будем опускать. Так, $BC^m = BC^m(\mathbb{C})$, $\omega(f, \delta) = \omega_{\mathbb{C}}^0(f, \delta)$.

Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$, $m \geq 0$, $f \in BC^m$. Основной вопрос, рассматриваемый в настоящей работе, состоит в следующем.

При каких условиях (налагаемых на X и f) существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset BC^m$ такая, что каждая из функций f_n является бианалитической в (своей) окрестности компакта X и $\|f - f_n\|_m \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$?

Без потери общности мы можем здесь считать функцию f финитной, т.е. равной нулю вне достаточно большого круга, содержащего компакт X .

При $m \geq 2$ ответ на этот вопрос получен в работах А.Г. О’Фаррелла [2] и Дж. Вердеры [3]. Именно, существование требуемой последовательности $\{f_n\}$ равносильно тому, что имеет место равенство $\partial^\beta \bar{\partial}^2 f(z) = 0$ при всех $z \in X$ и всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^2$ с условием $|\beta| \leq m - 2$ (в частности, для $m = 2$ равенство $\bar{\partial}^2 f(z) = 0$ при всех $z \in X$). Заметим, что А.Г. О’Фарреллу принадлежит случай всех нецелых $m > 2$, а Дж. Вердере – всех целых $m \geq 2$.

Случай $m = 0$ (равномерных приближений) изучен в [4]. Именно, для любого компакта X каждая функция $f \in C(X) \cap A_2(X^o)$ (простейшее необходимое условие приближаемости) равномерно приближается на X с любой степенью точности функциями, бианалитическими в окрестностях X . Основной причиной отсутствия требований к X здесь является ограниченность фундаментального решения оператора $\bar{\partial}^2$, т.е. функции

$$E(z) = \frac{\bar{z}}{\pi z}. \quad (1.2)$$

Случай $m \in (0, 2)$ будет подробно рассмотрен в настоящей работе. При $m \neq 1$ ответ на поставленный вопрос дается в терминах обхвата по Хаусдорфу порядка m – одного из основных понятий геометрической теории меры. Напомним, что при $m \in (0, 2]$ *обхватом по Хаусдорфу* порядка m ограниченного множества $U \subset \mathbb{C}$ называется величина

$$\mathcal{M}^m(U) = \inf_{\{B_j\}} \sum_j (r_j)^m, \quad (1.3)$$

где нижняя грань берется по всем покрытиям $\{B_j\}$ множества U кругами (каждое $\{B_j\}$ есть не более чем счетное покрытие множества U кругами B_j с радиусами r_j). Через $\Lambda(\cdot)$ обозначается мера Лебега в $\mathbb{C}$.

Открытый круг с центром a и радиусом r будем обозначать через $B(a, r)$; при этом для $B = B(a, r)$ и $\lambda > 0$ через λB обозначается круг $B(a, \lambda r)$. Положительные постоянные, которые могут зависеть только от показателя m пространства BC^m , будем обозначать через $A, A_1, A_2, \dots$ (значения каждой из них в разных соотношениях могут быть различными).

Сформулируем основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X \subset \mathbb{C}$ – компакт, $t \in (0, 1) \cup (1, 2)$, $f \in BC^m$ – финитная функция. Следующие условия эквивалентны:

(а) существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset BC^m$ такая, что каждая функция f_n бианалитична в (своей) окрестности X и $\|f - f_n\|_m \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$;

(б) существуют $k \geq 1$ и функция $\epsilon(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$ такие, что для любого круга $B = B(a, \delta)$ с границей ∂B выполнена оценка

$$\left| \oint_{\partial B} f(z)(z - a) dz \right| \leq \epsilon(\delta) \delta^2 \mathcal{M}^m(kB \setminus X) \quad (1.4)$$

или

$$\left| \int_B f(z)(z - a)^2 d\Lambda(z) \right| \leq \epsilon(\delta) \delta^4 \mathcal{M}^m(kB \setminus X); \quad (1.5)$$

(с) в условии (б) оценки (1.4) или (1.5) выполнены при $k = 1$ и $\epsilon(\delta) = A\omega^m(f, \delta)$, где $A = A(m) > 0$ – постоянная.

В случае $m = 1$ критерий (б)–(с) сохраняется при замене в правой части (1.4) и (1.5) выражения $\mathcal{M}^1(\cdot)$ на $\varkappa^1(\cdot)$, где $\varkappa^1(\cdot)$ – бианалитическая Lip^1 -емкость (см. (2.8)). При этом в качестве $\epsilon(\delta)$ в (с) можно взять $A\omega(\nabla f, \delta)$.

В частности, из условия (а) теоремы 1 легко вытекает простейшее необходимое условие приближаемости $f \in A_2(X^\circ)$ для всех $m \geq 0$.

Свойства емкости $\varkappa^1(\cdot)$ обсуждаются в § 6 (см. (6.7)–(6.8)).

Доказательство теоремы 1 опирается на следующую основную лемму.

ЛЕММА 1.1. Пусть X и f те же, что и в теореме 1, $t \in (0, 1) \cup (1, 2)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) существует последовательность $\{f_n\}$ из условия (а) теоремы 1;

(б) существуют $k \geq 1$ и функция $\varepsilon(r) \downarrow 0$ при $r \downarrow 0$ такие, что для любого круга $B = B(a, r)$ и любой функции $\psi \in C_0^\infty(B)$ выполнена оценка

$$\left| \int_B f(z) \bar{\partial}^2 \psi(z) d\Lambda(z) \right| \leq \varepsilon(r) \|\psi\|_2' r^2 \mathcal{M}^m(kB \setminus X); \quad (1.6)$$

(с) условие (1.6) имеет место при $k = 1$ и $\varepsilon(r) = A\omega^m(f, r)$, где $A = A(m) > 0$.

В случае $m = 1$ критерий (б)–(с) сохраняется при замене в правой части (1.6) выражения $\mathcal{M}^1(\cdot)$ на $\varkappa^1(\cdot)$, а в качестве $\varepsilon(r)$ в (с) можно взять $A\omega(\nabla f, r)$.

Лемма 1.1 по форме аналогична основной лемме А. Г. Витушкина [5; гл. 4, § 2, лемма 1] о равномерных голоморфных аппроксимациях, теореме П. В. Парамонова [6; теорема 5.1] о гармонических приближениях в C^1 -норме и теореме А. Г. О’Фаррелла о приближениях голоморфными функциями в пространствах BC^m при $m \in (0, 1)$ [7; гл. 3, теорема 1.1]. Доказательство леммы 1.1 состоит из двух частей: стандартной: (а) $\Rightarrow$ (с) и существенно более содержательной: (б) $\Rightarrow$ (а); утверждение (с) $\Rightarrow$ (б) тривиально.

В § 2 излагаются подготовительные результаты.

В § 3 при $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$ теорема 1 сводится к лемме 1.1, а также доказывается импликация (а) $\implies$ (с) в лемме 1.1. Вид оценок (1.4) и (1.5) предложен П. В. Парамоновым, они фактически представляют собой специальные случаи оценки (1.6), но только для одной функции ψ (см. формулы (3.1) и (3.12)); тем самым, (1.4) или (1.5) существенно проще для проверки, чем (1.6). В доказательстве теоремы 1 используется ряд идей из работ [8] и [9].

Доказательство утверждения (b) $\implies$ (а) леммы 1.1 при $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$ проводится в § 4, 5 с помощью усовершенствованной схемы А. Г. Витушкина [5], однако возникающая здесь ситуация существенно сложнее, чем для голоморфных функций. В § 4 рассматривается случай $m \in (1, 2)$, а в § 5 – соответственно случай $m \in (0, 1)$, который оказывается технически наиболее сложным. В доказательствах используются теорема Фростмана [10; гл. 2, теорема 1] и классические свойства операторов типа Кальдерона–Зигмунда, некоторые промежуточные результаты работы Дж. Вердеры [3]. В § 5 существенную роль играет геометрическая конструкция (идея которой предложена в [11]) для оценки и “уравнивания” лорановских коэффициентов локализаций при первых производных фундаментального решения.

Доказательство теоремы 1 (и леммы 1.1) для случая $m = 1$ излагается отдельно в § 6. Здесь в основном используется подход, развитый в [6]. В § 7 в качестве следствий приводятся известные критерии C^m -бианалитических аппроксимаций для классов функций.

§ 2. Подготовительные результаты. Бианалитические C^m - и Lip^m -емкости

В этом параграфе докажем лемму 2.1 об оценках локализаций, рассмотрим определения бианалитических C^m - и Lip^m -емкостей и их связь при $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$ с обхватами по Хаусдорфу.

Напомним, что *схема А. Г. Витушкина* [5] состоит в следующем:

- 1) с помощью подходящего разбиения единицы представить функцию f в виде конечной суммы локализаций;
- 2) разложить локализации в ряд Лорана и оценить лорановские коэффициенты;
- 3) уравнять у локализаций необходимое число лорановских коэффициентов так, чтобы это привело к приближению функции.

Разбиением единицы на компакте $K \subset \mathbb{C}$ назовем конечное семейство функций $\varphi_j: \mathbb{C} \rightarrow [0, 1]$ таких, что $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ и $\sum_j \varphi_j(z) \equiv 1$ в некоторой окрестности K .

Так как функция f леммы 1.1 финитна, она представима (в обобщенном смысле) в виде свертки $f = E * (\bar{\partial}^2 f)$, где E из (1.2).

Разбиение единицы на компакте $\text{Spt}(\bar{\partial}^2 f)$ порождает разложение f в конечную сумму следующих функций f_j

$$f = \sum_j f_j, \quad \text{где } f_j = E * (\varphi_j \bar{\partial}^2 f).$$

Функции f_j будем называть *локализациями* f , а оператор

$$f \mapsto V_\varphi f = E * (\varphi \bar{\partial}^2 f) \quad (2.1)$$

(где $\varphi \in C_0^\infty$ фиксирована) – *оператором Витушкина* (с индексом φ).

Положим $\nabla^c f(z) = \{\bar{\partial} f(z), -\partial f(z)\}$, где $\partial f(z) = \partial f(z)/\partial z$. Как обычно, $\nabla f(z) = \{\partial f(z)/\partial x, \partial f(z)/\partial y\}$. Для вектор-функции $F = \{f_1, f_2\}$ пишем $F \in BC^s$, если обе функции f_1 и f_2 принадлежат BC^s . При этом $\|F\|'_s = \max\{\|f_1\|'_s, \|f_2\|'_s\}$ и $\omega_U^m(F, \delta) = \max\{\omega_U^m(f_1, \delta), \omega_U^m(f_2, \delta)\}$. Ясно, что $\nabla^c f$ и ∇f принадлежат BC^s одновременно, а полунормы $\|\nabla^c f\|'_s$ и $\|\nabla f\|'_s$ сравнимы (что обозначается как $\|\nabla^c f\|'_s \asymp \|\nabla f\|'_s$).

Следующее утверждение аналогично [12; предложения 2.4 и 2.5], где рассмотрены случаи $m = 0$ и $m = 1$ (в несколько ослабленной формулировке).

Отметим сразу, что случай $m = 1$, имеющий свою специфику, вынесен в § 6, это, в частности, касается и утверждения (с') следующей леммы при $m = 1$, которое доказывается в лемме 6.1.

ЛЕММА 2.1. Пусть $B = B(a, r)$ – (открытый) круг, и пусть $\varphi \in C_0^\infty(B)$, $g \in B \text{Lip}^m$, где $m \in (0, 2)$. Тогда для локализации $V_\varphi g$ из (2.1) имеет место следующее:

- (а) $\bar{\partial}^2(V_\varphi g) = \varphi \bar{\partial}^2 g$ и, следовательно, $\text{Spt}(\bar{\partial}^2(V_\varphi g)) \subset (\text{Spt}(\varphi) \cap \text{Spt}(\bar{\partial}^2 g))$;
- (б) выполнена оценка $\|V_\varphi g\| \leq Ar^2 \|\varphi\|'_2 \omega_B(g, r)$;
- (с) при $m \in (0, 1)$ имеем $V_\varphi g \in B \text{Lip}^m$, причем

$$\omega^m(V_\varphi g, \infty) \leq Ar^2 \|\varphi\|'_2 \omega_B^m(g, r);$$

- (с') при $m \in [1, 2)$ имеем $V_\varphi g \in B \text{Lip}^m$, причем

$$\omega^m(V_\varphi g, \infty) \leq Ar \|\varphi\|'_1 \omega_B^m(g, r);$$

- (д) при всех $m \in (0, 2)$: если $g \in BC^m$, то $V_\varphi g \in BC^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (а) очевидно; утверждение (б) установлено в [12; предложение 2.5, (2.12)]. Проведем доказательство (с) аналогично [12; предложение 2.4]. Достаточно рассмотреть случай $g \in C_0^\infty$ (общий случай получается предельным переходом). Тогда для $F = V_\varphi g$ имеет место равенство

$$F(z) = \langle E(w - z) \mid \varphi(w) \bar{\partial}^2 g \rangle,$$

(в угловых скобках записано действие распределения на C_0^∞ -функцию).

Фиксируем z и z' в $\mathbb{C}$, $z \neq z'$. Вводя обозначение $g_a(w) = g(w) - g(a)$ и интегрируя по частям, получим (ввиду $\bar{\partial}^2 g = \bar{\partial}^2 g_a$)

$$\begin{aligned} F(z) - F(z') &= (g_a(z)\varphi(z) - g_a(z')\varphi(z')) \\ &+ 2 \int_B g_a(w) \bar{\partial} \varphi(w) \left(\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z'} \right) d\Lambda(w) \\ &+ \int_B g_a(w) (E(w - z) - E(w - z')) \bar{\partial}^2 \varphi(w) d\Lambda(w). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Обозначив через I, II и III соответственно модули первого, второго и третьего слагаемого в правой части (2.2), получим

$$|F(z) - F(z')| \leq I + II + III.$$

При оценке I мы можем считать, что хотя бы одна из точек (например, z) лежит в B , а вторая (z') – в $2B$, поскольку

$$I = |g_a(z)\varphi(z) - g_a(z')\varphi(z')| \leq |g_a(z)(\varphi(z) - \varphi(z'))| + |(g_a(z) - g_a(z'))\varphi(z')|.$$

Из определения $\omega_B^m(g, \cdot)$ легко показать, что $\|g_a\|_B \leq \omega_B^m(g, r)r^m$ и $|g_a(z) - g_a(z')| \leq A\omega_B^m(g, r)|z - z'|^m$, откуда

$$I \leq A\omega_B^m(g, r)(r^m\|\varphi\|_1'|z - z'| + |z - z'|^m\|\varphi\|) \leq A_1r^2\|\varphi\|_2'\omega_B^m(g, r)|z - z'|^m,$$

так как $\|\varphi\| \leq r\|\varphi\|_1' \leq r^2\|\varphi\|_2'$. Далее,

$$\begin{aligned} II &= 2 \left| \int_B g_a(w) \bar{\partial} \varphi(w) \left(\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z'} \right) d\Lambda(w) \right| \\ &\leq A\omega_B^m(g, r)r^m\|\varphi\|_1' \int_B \left| \frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z'} \right| d\Lambda(w). \end{aligned}$$

При $|z - z'| > r$ воспользуемся очевидной оценкой

$$\int_B \left| \frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z'} \right| d\Lambda(w) \leq A_2r,$$

а при $|z - z'| \leq r$ имеет место (напомним, что здесь $m \in (0, 1)$)

$$\begin{aligned} \int_B \left| \frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z'} \right| d\Lambda(w) &= |z - z'| \int_B \left| \frac{1}{(w - z)(w - z')} \right| d\Lambda(w) \\ &\leq A_3|z - z'| \log \left(\frac{r}{|z - z'|} + 1 \right) \leq A_4|z - z'|^m r^{1-m}, \end{aligned}$$

поэтому в каждом из двух указанных случаев имеем оценку

$$II \leq A_5r^2\|\varphi\|_2'\omega_B^m(g, r)|z - z'|^m.$$

Аналогично рассуждая, получим

$$\begin{aligned} III &= \left| \int_B g_a(w) (E(w - z) - E(w - z')) \bar{\partial}^2 \varphi(w) d\Lambda(w) \right| \\ &\leq A_6\omega_B^m(g, r)r^m\|\varphi\|_2' \int_B \left| \frac{\overline{w - z}}{w - z} - \frac{\overline{w - z'}}{w - z'} \right| d\Lambda(w), \end{aligned}$$

причем

$$\int_B \left| \frac{\overline{w - z}}{w - z} - \frac{\overline{w - z'}}{w - z'} \right| d\Lambda(w) \leq A_7 \min(r^2, |z - z'|r),$$

откуда

$$III \leq A_8r^2\|\varphi\|_2'\omega_B^m(g, r)|z - z'|^m.$$

Таким образом, (с) доказано.

Докажем (с') при $m \in (1, 2)$. Рассмотрим функцию

$$g_a(z) = g(z) - g(a) - \partial g(a)(w - a) - \bar{\partial} g(a)(\bar{w} - \bar{a}).$$

При этом (поскольку $\bar{\partial}^2 g_a(w) = \bar{\partial}^2 g(w)$)

$$\nabla^c V_\varphi(g)(z) = -\langle \nabla_w^c E(w - z) \mid \varphi(w) \bar{\partial}_w^2 g_a(w) \rangle.$$

Используя формулу

$$\varphi(w) \bar{\partial}^2 g_a(w) = \bar{\partial}(\varphi(w) \bar{\partial} g_a(w)) - \bar{\partial} \varphi(w) \bar{\partial} g_a(w)$$

и интегрируя по частям в предпоследнем равенстве, находим

$$\nabla^c V_\varphi(g)(z) = \langle \bar{\partial}_w \nabla_w^c E(w - z) \mid \varphi(w) \bar{\partial} g_a(w) \rangle + \langle \nabla_w^c E(w - z) \mid \bar{\partial} \varphi(w) \bar{\partial} g_a(w) \rangle.$$

Величина ω^s у последнего слагаемого оценивается так же, как слагаемое II в доказательстве оценки (b). Напомним, что $\bar{\partial}_w^2 E(w - z) = \delta(w - z)$ (где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака) и $\partial_w \bar{\partial}_w E(w - z) = -(\pi)^{-1}/(w - z)^2$ – ядро Кальдерона–Зигмунда (Берлинга), свертка с которым действует непрерывно из пространства функций BC^s с фиксированным компактным носителем в пространство BC^s (доказательство этого классического факта элементарно, см., например, для сравнения оценку интеграла (4.2) ниже). Остается учесть простую оценку

$$\omega^s(\varphi(w) \bar{\partial} g_a(w), r) \leq Ar \|\varphi\|'_1 \omega_B^s(g_a, r) \leq Ar \|\varphi\|'_1 \omega_B^m(g, r).$$

Свойство (d) следует из (c), (с') и из упомянутого выше факта о том, что при нецелых m пространство $BC^m(U)$ является замыканием в $B \text{Lip}^m(U)$ подпространства $B \text{Lip}^m(U) \cap C^\infty(U)$.

Лемма 2.1 доказана.

Рассмотрим разложение локализаций в ряд Лорана. Пусть $\bar{B} = \overline{B(a, r)}$ – замкнутый круг, T – распределение, $\text{Spt}(T) \subset \bar{B}$. Тогда в силу (1.1) и лорановского разложения для аналитических функций функция $T * E$ разлагается в ряд Лорана, сходящийся в $C^\infty(\mathbb{C} \setminus \bar{B})$:

$$T * E(z) = c_0 \frac{\overline{z - a}}{z - a} + \frac{b_1}{z - a} + c_1 \frac{\overline{z - a}}{(z - a)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z - a)^n} + c_n \frac{\overline{z - a}}{(z - a)^{n+1}} + \cdots, \quad (2.3)$$

где лорановские коэффициенты вычисляются по формулам

$$b_n = -\pi^{-1} \langle T \mid \overline{z - a} (z - a)^{n-1} \rangle, \quad c_n = \pi^{-1} \langle T \mid (z - a)^n \rangle \quad (2.4)$$

(см. [12; предложение 2.3 (2)] как частный случай [3; п. 1B]).

Очевидно, коэффициент $c_0 = c_0(T * E) = \pi^{-1} \langle T \mid 1 \rangle$ не зависит от центра разложения a . В частности, для локализаций (2.1) имеют место равенства

$$c_0(V_\varphi f) = \pi^{-1} \langle \varphi \bar{\partial}^2 f \mid 1 \rangle = \pi^{-1} \langle \bar{\partial}^2 f \mid \varphi \rangle. \quad (2.5)$$

В дальнейшем будет использоваться конструкция разбиений единицы из леммы 2.2, которая представляет собой частный случай леммы Р. Харви и Дж. Полкинга [13; лемма 3.1].

Предварительно сделаем ряд пояснений. Квадратом $Q = Q(a, \delta)$ будем называть квадрат со сторонами, параллельными осям координат (в зависимости от контекста, открытый или замкнутый), с центром a и длиной стороны $s(Q) = \delta$; при этом для $\lambda > 0$ полагаем $\lambda Q = Q(a, \lambda\delta)$. Двоичными квадратами будем называть (замкнутые) квадраты вида

$$Q = Q_p^{\beta_1, \beta_2} = [\beta_1 2^{-p}, (\beta_1 + 1) 2^{-p}] \times [\beta_2 2^{-p}, (\beta_2 + 1) 2^{-p}], \quad (2.6)$$

где $(p, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Z}^3$. Рассматривая покрытия подмножеств $\mathbb{C}$ семействами двоичных квадратов, всегда будем считать, что квадраты раздельные (не имеют общих внутренних точек).

ЛЕММА 2.2. Пусть $\{Q_j\}$ – конечное семейство раздельных двоичных квадратов. Тогда существует $\{\varphi_j\}$ – разбиение единицы на $\bigcup_j Q_j$ такое, что $\varphi_j \in C_0^\infty((3/2)Q_j)$ и $\|\varphi_j\|'_n \leq c_n(s(Q_j))^{-n}$, где $n \in \mathbb{Z}_+$, а положительная постоянная c_n зависит только от n (но не от $\{Q_j\}$).

Кратко напомним доказательство леммы 2.2. Семейство $\{\varphi_j\}$ строится так. Пусть $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, $\psi: \mathbb{C} \rightarrow [0, 1]$ – функция такая, что $\psi \in C_0^\infty((3/2)Q)$ и $\psi(z) \equiv 1$ на $(11/10)Q$. Упорядочим множество номеров j квадратов $Q_j(a_j, \delta_j)$ так, что $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_j \geq \delta_{j+1} \dots$. Рассмотрим для всех j функции $\psi_j(z) = \psi((z - a_j)/\delta_j)$ и возьмем $\varphi_1 = \psi_1$ и $\varphi_j = \psi_j \prod_{l=1}^{j-1} (1 - \psi_l)$ для всех $j \geq 2$. Как легко проверить по индукции, $\sum_{l=1}^j \varphi_l = 1 - \prod_{l=1}^j (1 - \psi_l)$ и, следовательно, $\{\varphi_j\}$ – разбиение единицы на $\bigcup_j Q_j$, а требуемые оценки производных следуют из невозрастания δ_j .

Для заданного квадрата Q мы часто будем использовать функции φ следующего вида:

$$\varphi \in C_0^\infty\left(\frac{3}{2}Q\right), \quad \|\varphi\|'_n \leq c_n(s(Q))^{-n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.7)$$

где постоянные c_n – из леммы 2.2.

Дадим определения бианалитических Lip^m - и C^m -емкостей.

Пусть $m \in (0, 2)$; бианалитической Lip^m -емкостью (соответственно C^m -емкостью) ограниченного множества V в $\mathbb{C}$ называется величина

$$\varkappa^m(V) = \sup\{\bar{\partial}^2 g \mid 1\} \quad (2.8)$$

(соответственно величина $\varkappa_*^m(V)$, определяемая по той же формуле), где супремум берется по всем $g \in B\text{Lip}^m(\mathbb{C})$ (соответственно по всем $g \in BC^m(\mathbb{C})$) с условиями $\|g\|'_m \leq 1$, $\text{Spt}(\bar{\partial}^2 g) \subset V$ (т.е. g бианалитична вне некоторого компакта из V) и $g = E * (\bar{\partial}^2 g)$ (т.е. g “регулярна” на ∞).

Полезно отметить (и нетрудно показать), что для всякого ограниченного открытого множества U в $\mathbb{C}$ справедливо равенство $\varkappa_*^m(U) = \varkappa_m(U)$.

Следующее утверждение хорошо известно для широкого класса эллиптических операторов; оно не используется в настоящей работе и приводится для пояснения смысла (2.8). Его доказательство для C^m -гармонических емкостей, приведенное, например, в [1; теорема 1.12], с минимальными изменениями подходит и для нашего случая.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Компакт K в $\mathbb{C}$ удовлетворяет условию $\varkappa_*^m(K) = 0$ (соответственно $\varkappa^m(K) = 0$), если и только если K является множеством C^m -устранимых (соответственно Lip^m -устранимых) особенностей для бианалитических функций. Последнее означает, что если U – какая-либо окрестность компакта K и $f \in C^m(U) \cap A_2(U \setminus K)$ (соответственно $f \in \text{Lip}^m(U) \cap A_2(U \setminus K)$), то $f \in A_2(U)$.*

Иначе говоря, $\varkappa_*^m(\cdot)$ (соответственно $\varkappa^m(\cdot)$) представляет собой “меру бианалитической неустранимости” для функций класса C^m (соответственно Lip^m).

Напомним, что через $\mathcal{M}_*^m(V)$ (при $m \in (0, 2)$) обозначается нижний обхват по Хаусдорфу порядка m ограниченного множества V в $\mathbb{C}$, т.е.

$$\mathcal{M}_*^m(V) = \sup_h \left(\inf_{\{B_j\}} \sum_j h(r_j) \right),$$

где инфимум берется по всем (не более чем счетным) покрытиям $\{B_j\}$ множества V кругами B_j с радиусами r_j , а супремум берется по всем неотрицательным непрерывным функциям h на $(0, \infty)$ с условиями $h(t) \leq t^m$ и $h(t)t^{-m} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Нетрудно показать, что при $0 < m < 2$ для любого ограниченного открытого множества U в $\mathbb{C}$ имеем

$$A^{-1} \mathcal{M}^m(U) \leq \mathcal{M}_*^m(U) \leq A \mathcal{M}^m(U), \quad (2.9)$$

где $A > 1$ – абсолютная константа.

Замечательным является то, что емкости $\varkappa_m(\cdot)$ (соответственно $\varkappa_*^m(\cdot)$) при $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$ описываются в метрических терминах – они сравнимы с соответствующими обхватами (соответственно нижними обхватами) по Хаусдорфу (при $m = 1$ это не так). Как следует из [3; с. 178], при $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$ для любого σ -компактного ограниченного множества V в $\mathbb{C}$ справедливы оценки

$$A^{-1} \mathcal{M}^m(V) \leq \varkappa^m(V) \leq A \mathcal{M}^m(V), \quad A^{-1} \mathcal{M}_*^m(V) \leq \varkappa_*^m(V) \leq A \mathcal{M}_*^m(V), \quad (2.10)$$

где $A > 1$ зависит только от m .

Отметим, что оценки указанного типа были впервые получены М. С. Мельниковым [14] для аналитических емкостей в классах Lip^m , $0 < m < 1$.

§ 3. Связь теоремы 1 и леммы 1.1. Импликации

(а) $\implies$ (с) в теореме 1 и лемме 1.1 при $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$

В настоящем параграфе теорема 1 сводится к доказательству импликации (б) $\implies$ (а) в основной лемме 1.1 при $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$.

Докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 3.1. Пусть $t \in (0, 1) \cup (1, 2)$, компакт $X \subset \mathbb{C}$ и финитная функция $f \in BC^m$ таковы, что для любого открытого круга B выполнена оценка (1.4) с некоторым $k \geq 1$. Тогда:

- (а) для произвольного открытого круга B и функции $\psi \in C_0^\infty(B)$ имеет место оценка (1.6);
- (б) для произвольного открытого круга B имеет место оценка (1.5); при этом в оценках (1.5) и (1.6) достаточно взять $k = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основная часть доказательства – утверждение (а); утверждение (б) будет получено в качестве следствия.

Прежде всего покажем, что оценка (1.4) фактически представляет собой специальный случай (1.6) для функции $\psi = \psi_r^a \in B\text{Lip}^1$, зависящей только от B , радиально симметричной и равной нулю всюду вне B .

Пусть

$$\begin{aligned}\psi_1^0(z) &= \frac{2}{\pi} \aleph_{B(0,1)}(z)(1 - \bar{z}z), \\ \psi_r^a(z) &= r^{-2} \psi_1^0\left(\frac{z-a}{r}\right) = \frac{2}{\pi} \aleph_{B(a,r)}(z) \frac{r^2 - \overline{z-a}(z-a)}{r^4},\end{aligned}\tag{3.1}$$

где $\aleph_V(\cdot)$ – характеристическая функция (индикатор) множества $V \neq \emptyset$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$; постоянная $2/\pi$ взята для нормировки: $\int_{B(a,r)} \psi_r^a(z) d\Lambda(z) = 1$; ясно, что $\psi_r^a \in B\text{Lip}^1$.

Распространим действие

$$\langle \bar{\partial}^2 f \mid \psi \rangle = \langle f \mid \bar{\partial}^2 \psi \rangle = \int_B f(z) \bar{\partial}^2 \psi(z) d\Lambda(z)$$

(интеграла в левой части (1.6) на функцию $\psi \in C_0^\infty$) на функции ψ_r^a с помощью формулы Грина и подходящего предельного перехода.

Пусть сначала $t \in (0, 1)$. Фиксируем $g \in C_0^\infty$ и положим $g_a(z) = g(z) - g(a)$. Согласно определению

$$\langle \bar{\partial}^2 g \mid \psi_r^a \rangle = \int_{B(a,r)} \bar{\partial}^2 g_a(z) \psi_r^a(z) d\Lambda(z).$$

В силу определения функций ψ_r^a и формулы Грина имеем

$$\begin{aligned}\langle \bar{\partial}^2 g \mid \psi_r^a \rangle &= - \int_{B(a,r)} \bar{\partial} g_a(z) \bar{\partial} \psi_r^a(z) d\Lambda(z) = \frac{2}{\pi r^4} \int_{B(a,r)} (z-a) \bar{\partial} g_a(z) d\Lambda(z) \\ &= \frac{1}{\pi i r^4} \oint_{\partial B(a,r)} g_a(z) (z-a) dz.\end{aligned}$$

Приближая исходную функцию $f \in BC^m$ функциями $g \in C_0^\infty$ в норме $\|\cdot\|_m$, определим действие $\langle \bar{\partial}^2 f \mid \psi_r^a \rangle$ по следующей формуле:

$$\langle \bar{\partial}^2 f \mid \psi_r^a \rangle = \frac{1}{\pi i r^4} \oint_{\partial B(a,r)} f_a(z) (z-a) dz.\tag{3.2}$$

Аналогично (с учетом фундаментальности E из (1.2), формулы Грина и равенства $\bar{\partial}^2 g = \bar{\partial}^2 g_a$) определим для $g \in C_0^\infty$ локализации $V_r^a g$ относительно функций ψ_r^a :

$$\begin{aligned} V_r^a g(z) &\stackrel{\text{def}}{=} (\psi_r^a \bar{\partial}^2 g) * E(z) = - \int_{B(a,r)} \bar{\partial} g_a(\zeta) \bar{\partial} (\psi_r^a(\zeta) E(z - \zeta)) d\Lambda(\zeta) \\ &= \frac{2}{\pi r^4} \int_{B(a,r)} \bar{\partial} g_a(\zeta) (\zeta - a) E(\zeta - z) d\Lambda(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int_{B(a,r)} \frac{\bar{\partial} g_a(\zeta) \psi_r^a(\zeta)}{\zeta - z} d\Lambda(\zeta) \\ &= \frac{1}{\pi i r^4} \oint_{\partial B(a,r)} g_a(\zeta) (\zeta - a) E(\zeta - z) d\zeta \\ &\quad + \frac{4}{\pi^2 r^4} \int_{B(a,r)} \frac{g_a(\zeta) (\zeta - a)}{\zeta - z} d\Lambda(\zeta) + g_a(z) \psi_r^a(z). \end{aligned}$$

Так как сумма трех последних выражений не содержит производных g , а ядра сингулярных интегралов локально интегрируемы, для $g \in BC^m$ определим локализации $V_r^a g$ в соответствии с формулой

$$\begin{aligned} V_r^a g(z) &= \frac{1}{\pi i r^4} \oint_{\partial B(a,r)} g_a(\zeta) (\zeta - a) E(\zeta - z) d\zeta \\ &\quad + \frac{4}{\pi^2 r^4} \int_{B(a,r)} \frac{g_a(\zeta) (\zeta - a)}{\zeta - z} d\Lambda(\zeta) + g_a(z) \psi_r^a(z). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Имеет место следующее утверждение, аналогичное лемме 2.1.

ЛЕММА 3.2. Пусть $B = B(a, r)$ – круг, ψ_r^a – функция из (3.1), соответствующая B , $g \in B \text{Lip}^m$, где $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$, $V_r^a g$ – локализация g из (3.3). Тогда имеет место следующее:

- (a) $\text{Spt}(\bar{\partial}^2(V_r^a g)) \subset (\bar{B} \cap \text{Spt}(\bar{\partial}^2 g))$;
- (b) выполнена оценка $\|V_r^a g\| \leq A r^{-2} \omega_B^0(g, r)$;
- (c) $V_r^a g \in B \text{Lip}^m$, причем $\omega^m(V_r^a g, \infty) \leq A r^{-2} \omega_B^m(g, r)$;
- (d) если $g \in BC^m$, то $V_r^a g \in BC^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (a) очевидно для $g \in C_0^\infty$, так как определено поточечное умножение $\psi_r^a \bar{\partial}^2 g$, общий случай получается регуляризацией. Утверждение (b) очевидно в силу (3.3).

Утверждения (c) и (d) при $m \in (0, 1)$ доказываются аналогично соответствующим утверждениям леммы 2.1, так как слагаемые в правой части (3.3) оцениваются аналогично соответствующим слагаемым из (2.2) для $F(z)$.

В случае $m \in (1, 2)$ для доказательства (c) и (d) нужно воспользоваться утверждением (c') леммы 2.1 для функции $\varphi = \psi_r^a$ и регуляризацией.

Лемма 3.2 доказана.

Будет полезно заметить, что из (2.3), (2.4), (3.2) и (3.3) следует равенство, аналогичное (2.5):

$$c_0(V_r^a f) = \pi^{-1} \langle \bar{\partial}^2 f \mid \psi_r^a \rangle = \frac{1}{\pi^2 r^4 i} \oint_{\partial B(a,r)} f(z) (z - a) dz. \quad (3.4)$$

Продолжим доказательство утверждения (а) леммы 3.1. Не ограничивая общности, будем рассматривать случай $\mathcal{M}^m(2B \setminus X) > 0$, так как случай $\mathcal{M}^m(2B \setminus X) = 0$ легко получается из него предельным переходом.

Покроем круг $B = B(a, r)$ сеткой двоичных квадратов $\{Q_j\} = \{Q_j(a_j, \delta)\}$ одного размера такого, что $\mathcal{M}^m(2B \setminus X) < \delta^m \leq 4\mathcal{M}^m(2B \setminus X)$. Пусть $B_j = B(a_j, \delta)$; не ограничивая общности, считаем, что все круги $(3+k)B_j$, где k из (1.4), содержатся в $2B$, иначе величина δ сравнима с r , и оценка (1.6) является следствием очевидной оценки

$$\left| \int_B f(z) \bar{\partial}^2 \psi(z) d\Lambda(z) \right| = \left| \int_B f_a(z) \bar{\partial}^2 \psi(z) d\Lambda(z) \right| \leq A\omega_B^m(f_a, r) \|\psi\|'_2 r^{2+m}.$$

Рассуждая так же, как в [8], введем специальное разбиение единицы на $\bigcup_j Q_j$. Пусть $\psi_{2,\delta}^0 = \psi_\delta^0 * \psi_\delta^0$, где ψ_δ^0 из (3.1). Ясно, что $\psi_{2,\delta}^0(z) \geq 0$, $\text{Spt}(\psi_{2,\delta}^0) \subset B(0, 2\delta)$, и в силу нормировки функций ψ_δ^0 имеем равенства $\int \psi_{2,\delta}^0(z) d\Lambda(z) = 1$.

Пусть $\{\varphi_j\}$ – разбиение единицы из леммы 2.2, соответствующее покрытию $\{Q_j\}$. Напомним, что, в частности, $\varphi_j \in C_0^\infty(2B_j)$ и $\|\varphi_j\|'_2 \leq A\delta^{-2}$. Используя функции $\psi_{2,\delta}^0$, получим на $\bigcup_j Q_j$ новое разбиение единицы $\{\varphi_{2,j}\} = \{\psi_{2,\delta}^0 * \varphi_j\}$; при этом $\text{Spt}(\varphi_{2,j}) \subset 4B_j$ и $\|\varphi_{2,j}\|'_2 \leq A_1\delta^{-2}$.

В силу (3.2) оценку (1.4) можно переписать в равносильном виде

$$|\langle \bar{\partial}^2 f \mid \psi_\delta^a \rangle| \leq A\epsilon(\delta)\delta^{-2}\mathcal{M}^m(kB \setminus X). \quad (3.5)$$

Прежде чем выводить (1.6) из (3.5) в общем случае, сначала обобщим (3.5) с использованием свертки аналогично лемме 2.5 из [8] (см. также [15; формула (4.3)]).

ЛЕММА 3.3. Пусть имеет место оценка (3.5), $\Psi \in C_0^\infty(B(a, \lambda\delta))$ для некоторого $\lambda > 0$. Тогда выполнена оценка

$$|\langle \bar{\partial}^2 f \mid \psi_\delta^0 * \Psi \rangle| \leq A\epsilon(\delta)\delta^{-2}\mathcal{M}^m((k+\lambda)B \setminus X) \int |\Psi(z)| d\Lambda(z). \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\Psi \in C_0^\infty$, левая часть (3.6) определена корректно. Для функции $g \in C_0^\infty$ изменяя порядок интегрирования, получим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\partial}^2 g \mid \psi_\delta^0 * \Psi \rangle &= \iint \bar{\partial}_z^2 g(z + \zeta) \psi_\delta^0(z) \Psi(\zeta) d\Lambda(z) d\Lambda(\zeta) \\ &= \int \Psi(\zeta) d\Lambda(\zeta) \int \bar{\partial}_t^2 g(t) \psi_\delta^0(t - \zeta) d\Lambda(t) \\ &= \int \Psi(\zeta) d\Lambda(\zeta) \int \bar{\partial}_t^2 g(t) \psi_\delta^\zeta(t) d\Lambda(t) = \int \Psi(\zeta) \langle \bar{\partial}^2 g \mid \psi_\delta^\zeta \rangle d\Lambda(\zeta). \end{aligned}$$

Отсюда в силу (3.2) предельным переходом для $f \in BC^m$ получим равенство

$$\langle \bar{\partial}^2 f \mid \psi_\delta^0 * \Psi \rangle = \int \Psi(\zeta) \langle \bar{\partial}^2 f \mid \psi_\delta^\zeta \rangle d\Lambda(\zeta).$$

Учитывая, что $\zeta \in \text{Spt } \Psi \subset B(a, \lambda\delta)$, в силу (3.5) получим оценку (3.6). Лемма доказана.

Рассмотрим введенные выше функции φ_j и $\psi_{2,\delta}^0 = \psi_\delta^0 * \psi_\delta^0$. Очевидно, решением уравнения $\psi_{2,\delta}^0 * \varphi_j = \psi_\delta^0 * \Psi_{0,j}$ является функция $\Psi_{0,j} = \psi_\delta^0 * \varphi_j$, причем $\Psi_{0,j} \in C_0^\infty(B(a_j, 3\delta))$ и $\|\Psi_{0,j}\| \leq A$. Нам понадобится следующая лемма о решениях некоторых уравнений свертки; она доказывается аналогично лемме 2.5 из [8].

ЛЕММА 3.4. *Пусть для $z = x + iy$ и $a_j = x_j + iy_j$ функции $\Psi_{1,j}$ и $\Psi_{2,j}$ – решения следующих уравнений свертки:*

$$(\psi_{2,\delta}^0 * \varphi_j)(x - x_j) = \psi_\delta^0 * \Psi_{1,j}, \quad (\psi_{2,\delta}^0 * \varphi_j)(y - y_j) = \psi_\delta^0 * \Psi_{2,j}. \quad (3.7)$$

Тогда для $p \in \{1, 2\}$ имеем $\Psi_{p,j} \in C_0^\infty(B(a_j, 3\delta))$, причем выполнены оценки $\|\Psi_{p,j}\| \leq A\delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим преобразование Фурье функций в $\mathbb{R}^2$. Именно для $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ и $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ прямое преобразование Фурье определяется формулой

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\xi \cdot \tau} u(\tau) d\Lambda(\tau),$$

причем для функции $u = u(z)$, где $z = x + iy$, имеем

$$\widehat{xu} = -i \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \xi_1}, \quad \widehat{yu} = -i \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \xi_2}.$$

Применим к обеим частям равенств (3.7) прямое преобразование Фурье; с помощью элементарных свойств свертки получим

$$\widehat{\Psi_{1,j}} = -i \frac{\frac{\partial}{\partial(x-x_j)}((\psi_\delta^0)^2 \widehat{\varphi_j})}{\widehat{\psi_\delta^0}}, \quad \widehat{\Psi_{2,j}} = -i \frac{\frac{\partial}{\partial(y-y_j)}((\psi_\delta^0)^2 \widehat{\varphi_j})}{\widehat{\psi_\delta^0}}.$$

После дифференцирования, деления на $\widehat{\psi_\delta^0}$ (именно для возможности этого были введены функции $\psi_{2,\delta}^0$) и применения обратного преобразования Фурье получим

$$\Psi_{1,j} = (x - x_j)\varphi_j * \psi_\delta^0 + 2(x - x_j)\psi_\delta^0 * \varphi_j, \quad \Psi_{2,j} = (y - y_j)\varphi_j * \psi_\delta^0 + 2(y - y_j)\psi_\delta^0 * \varphi_j.$$

Отсюда в силу определения функций ψ_δ^0 и φ_j непосредственно вытекает заключение леммы. Лемма 3.4 доказана.

Из лемм 3.3 и 3.4 для разбиения единицы $\{\varphi_{2,j}\} = \{\psi_{2,\delta}^0 * \varphi_j\}$ непосредственно вытекает оценка

$$|\langle \bar{\partial}^2 f \mid \varphi_{2,j} \rangle| = |\langle \bar{\partial}^2 f \mid \psi_\delta^0 * \Psi_{0,j} \rangle| \leq A\epsilon(\delta) \mathcal{M}^m(B(a_j, (k+3)\delta) \setminus X) \quad (3.8)$$

и следующие две оценки:

$$\begin{aligned} |\langle \bar{\partial}^2 f \mid (x - x_j)\varphi_{2,j} \rangle| &= |\langle \bar{\partial}^2 f \mid \psi_\delta^0 * \Psi_{1,j} \rangle| \leq A\epsilon(\delta)\delta \mathcal{M}^m(B(a_j, (k+3)\delta) \setminus X), \\ |\langle \bar{\partial}^2 f \mid (y - y_j)\varphi_{2,j} \rangle| &= |\langle \bar{\partial}^2 f \mid \psi_\delta^0 * \Psi_{2,j} \rangle| \leq A\epsilon(\delta)\delta \mathcal{M}^m(B(a_j, (k+3)\delta) \setminus X). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Теперь, используя оценки (3.8), (3.9), завершим доказательство утверждения (а) леммы 3.1.

Применив разбиение единицы $\{\varphi_{2,j}\}$ и формулу Тейлора, запишем левую часть (1.6) следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_B f(z) \bar{\partial}^2 \psi(z) d\Lambda(z) &= \langle \bar{\partial}^2 f \mid \psi \rangle = \sum_j \langle \bar{\partial}^2 f \mid \varphi_{2,j} \psi \rangle \\ &= \sum_j \psi(a_j) \langle \bar{\partial}^2 f \mid \varphi_{2,j} \rangle + \sum_j \psi'_x(a_j) \langle \bar{\partial}^2 f \mid (x - x_j) \varphi_{2,j} \rangle \\ &\quad + \sum_j \psi'_y(a_j) \langle \bar{\partial}^2 f \mid (y - y_j) \varphi_{2,j} \rangle + \sum_j \langle \bar{\partial}^2 f \mid \varphi_{2,j} R_{2,j} \rangle, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где для всех j функции $\psi(z) - R_{2,j}(z)$ линейны, причем $\partial^\alpha R_{2,j}(a_j) = 0$ при $|\alpha| \in \{0, 1\}$.

Следовательно, при $z \in \text{Spt}(\varphi_{2,j}) \subset B(a_j, 3\delta)$ и $|\alpha| \leq 2$ имеют место оценки $|\partial^\alpha R_{2,j}(z)| \leq A\delta^{2-|\alpha|} \|\psi\|'_2$. Так как, напомним, $\|\varphi_{2,j}\|'_2 \leq A_1\delta^{-2}$, отсюда получим оценку $\|\bar{\partial}^2(\varphi_{2,j} R_{2,j})\| \leq A\|\psi\|'_2$.

Сначала оценим выражение $\sum_j \langle \bar{\partial}^2 f \mid \varphi_{2,j} R_{2,j} \rangle$ из правой части (3.10). Интегрируя по частям и учитывая, что число индексов суммирования j не превосходит $A(r/\delta)^2$, получим:

$$\left| \sum_j \langle \bar{\partial}^2 f \mid \varphi_{2,j} R_{2,j} \rangle \right| \leq A_1 \omega(f, \delta) \delta^2 \|\psi\|'_2 \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 \leq A_1 \omega^m(f, \delta) \|\psi\|'_2 r^2 \delta^m.$$

Напомним, что δ было выбрано так, что $\mathcal{M}^m(2B \setminus X) < \delta^m \leq 4\mathcal{M}^m(2B \setminus X)$. Тем самым, $\left| \sum_j \langle \bar{\partial}^2 f \mid \varphi_{2,j} R_{2,j} \rangle \right|$ не превосходит правой части (1.6) при $\varepsilon(r) = A_1 \omega^m(f, r)$ и $k = 2$.

Так как $\|\psi\| \leq A\|\psi\|'_2 r^2$ и $\|\psi\|'_1 \delta \leq A\|\psi\|'_2 r^2$, в силу (3.8), (3.9) модуль суммы всех остальных слагаемых в правой части (3.10) не превосходит величины

$$A_1 \varepsilon(r) \|\psi\|'_2 r^2 \sum_j \mathcal{M}^m(B(a_j, (k+3)\delta) \setminus X).$$

Таким образом, для завершения доказательства утверждения (а) леммы 3.1 осталось доказать следующую лемму.

ЛЕММА 3.5. Пусть $\delta > 0$ выбрано так, что имеет место $\mathcal{M}^m(2B \setminus X) < \delta^m \leq 4\mathcal{M}^m(2B \setminus X)$, где $m \in (0, 2)$, $\{B(a_j, \delta)\}$ – конечное множество кругов таких, что a_j – центры двоичных квадратов со стороной δ , и для некоторого $k \geq 1$ круги $B(a_j, (k+3)\delta)$ содержатся в $2B$. Тогда выполнена оценка

$$\sum_j \mathcal{M}^m(B(a_j, (k+3)\delta) \setminus X) \leq Ak^2 \mathcal{M}^m(2B \setminus X). \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим (не более чем счетное) семейство кругов D_ι радиусов r_ι , покрывающих множество $2B \setminus X$ и таких, что

$$\sum_\iota (r_\iota)^m \leq 4\mathcal{M}^m(2B \setminus X) < 4\delta^m.$$

Так как все круги $B(a_j, (k+3)\delta)$ содержатся в $2B$, то семейство $\{D_\iota\}$ покрывает множество $\bigcup_j (B(a_j, (k+3)\delta) \setminus X)$. Следовательно, левая часть (3.11) не превосходит $4N\mathcal{M}^m(2B \setminus X)$, где N – максимальное число кругов $B(a_j, (k+3)\delta)$, которые может пересекать фиксированный круг D_ι .

Так как, очевидно, $r(D_\iota) < 2\delta$ для всех ι , и a_j – центры двоичных квадратов с длиной стороны δ , то $4N \leq Ak^2$.

Лемма 3.5 доказана. Тем самым утверждение (а) леммы 3.1 доказано.

Покажем, что утверждение (b) леммы 3.1 сводится к частному случаю (а). Действительно, если оценка (1.6) имеет место при $k = 2$, то соответствующая оценка

$$\left| \int_B f(z) \bar{\partial}^2 \psi(z) d\Lambda(z) \right| \leq \varepsilon(r) \|\psi\|'_2 r^2 \mathcal{M}^m(2B \setminus X),$$

очевидно, верна и в несколько более общей ситуации: $\psi \in B\text{Lip}^2$, и носитель функции ψ является подмножеством замкнутого круга $\overline{B(a, r)}$.

Пусть

$$\begin{aligned} \phi_1^0(z) &= \frac{3}{\pi} \Re_{B(0,1)}(z)(1 - \bar{z}z)^2, \\ \phi_r^a(z) &= r^{-2} \phi_1^0\left(\frac{z-a}{r}\right) = \frac{3}{\pi} \Re_{B(a,r)}(z) \frac{(r^2 - z - \overline{a}(z-a))^2}{r^6}; \end{aligned} \quad (3.12)$$

тогда

$$\phi_r^a \in B\text{Lip}^2, \quad \int_{B(a,r)} \phi_r^a(z) d\Lambda(z) = 1, \quad \bar{\partial}^2 \phi_r^a(z) = \frac{6}{\pi r^6} (z-a)^2, \quad z \in B(a, r).$$

В силу (1.6) имеем

$$\left| \int_B f(z) \bar{\partial}^2 \phi_r^a(z) d\Lambda(z) \right| = \frac{6}{\pi r^6} \left| \int_B f(z) (z-a)^2 d\Lambda(z) \right| \leq A\varepsilon(r) r^{-2} \mathcal{M}^m(2B \setminus X),$$

что равносильно (1.5). Лемма 3.1 доказана.

ЛЕММА 3.6. Пусть при $t \in (0, 1) \cup (1, 2)$ для любого открытого круга B выполнена оценка (1.5). Тогда для произвольного открытого круга B и функции $\psi \in C_0^\infty(B)$ имеет место оценка (1.6), в которой достаточно взять $k = 2$.

Лемма 3.6 доказывается точно так же, как утверждение (а) в лемме 3.1 с единственным отличием: функции ψ_r^a из (3.1) в разбиении единицы, леммах 3.3 и 3.4 заменяются на функции ϕ_r^a из (3.12). Доказательство опустим в силу очевидности.

Теперь докажем импликации (а) $\implies$ (с) в теореме 1 и лемме 1.1 при $t \in (0, 1) \cup (1, 2)$. Сначала докажем импликацию (а) $\implies$ (с, (1.4)) в теореме 1.

ЛЕММА 3.7. Пусть $X \subset \mathbb{C}$ – компакт, $t \in (0, 1) \cup (1, 2)$, $f \in BC^m$ – финитная функция, причем имеет место утверждение (а) теоремы 1.

Тогда для любого круга $B = B(a, \delta)$ с границей ∂B выполнена оценка (1.4) при $k = 1$ и $\epsilon(\delta) = A\omega^m(f, \delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как имеет место утверждение (а) теоремы 1, не ограничивая общности, можем считать, что исходная функция f является бианалитической в некоторой окрестности U компакта X (общий случай получается предельным переходом).

Зафиксируем $\lambda \in (0, 1)$ и рассмотрим функцию $V_{\lambda\delta}^a f$ из (3.3). Из леммы 3.2 следует, что $\text{Spt}(\bar{\partial}^2(V_{\lambda\delta}^a f)) \subset (\bar{\lambda B} \setminus X)$, и выполнена оценка $\omega^m(V_{\lambda\delta}^a f, \infty) \leq A(\lambda\delta)^{-2}\omega^m(f, \delta)$. Из (2.8), (2.10) и (2.4) при $n = 0$ следует, что

$$|c_0(V_{\lambda\delta}^a f)| \leq A_1(\lambda\delta)^{-2}\omega^m(f, \delta)\mathcal{M}^m(\bar{\lambda B} \setminus X).$$

Отсюда и из (3.4) следует

$$\left| \oint_{\partial B(a, \lambda\delta)} f(z)(z - a) dz \right| \leq A(\lambda\delta)^2\omega^m(f, \delta)\mathcal{M}^m\left(\frac{1}{2}(\lambda + 1)B \setminus X\right).$$

Устремляя λ к 1, получим требуемую оценку

$$\left| \oint_{\partial B(a, \delta)} f(z)(z - a) dz \right| \leq A\omega^m(f, \delta)\delta^2\mathcal{M}^m(B \setminus X).$$

Лемма 3.7 доказана.

Доказательства импликаций (а) $\implies$ (с, (1.5)) в теореме 1 и (а) $\implies$ (с, (1.6)) в лемме 1.1 проводятся совершенно аналогично доказательству леммы 3.7, поэтому ограничимся пояснениями.

1. Импликация (а) $\implies$ (с, (1.6)). Как и выше, в силу условия (а) считаем, что функция f является бианалитической в некоторой окрестности X . Рассмотрим локализацию $V_\psi f$, где ψ из (1.6), применив утверждения (с) и (с') леммы 2.1, формулы (2.8), (2.5) и (2.4) при $n = 0$, в итоге получим оценку

$$|\langle \psi \bar{\partial}^2 f | 1 \rangle| \leq A\omega^m(f, r)\|\psi\|_2' r^2 \mathcal{K}^m(B \setminus X).$$

С учетом (2.10) в случае $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$ получим требуемую оценку.

2. Импликация (а) $\implies$ (с, (1.5)). Доказательство аналогично; вместо ψ используется функция ϕ_r^α из (3.12).

Таким образом, импликации (а) $\implies$ (с) в лемме 1.1 и теореме 1 при $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$ установлены. Так как соответствующие импликации (с) $\implies$ (b) тривиальны, а в силу леммы 3.1 импликация (b) $\implies$ (а) в теореме 1 сведена к импликации (b) $\implies$ (а) в лемме 1.1, для завершения доказательства теоремы 1 при $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$ осталось доказать импликацию (b) $\implies$ (а) в лемме 1.1. Это будет проведено в § 4, 5. В § 6 теорема 1 будет доказана для $m = 1$.

§ 4. Доказательство импликации (b) $\implies$ (а) в лемме 1.1 при $m \in (1, 2)$

В доказательстве будем использовать усовершенствованную схему А. Г. Витушкина.

Напомним, что оценки локализаций и общая схема разбиений единицы рассмотрены в леммах 2.1 и 2.2; в силу лемм 3.1 и 3.6 в формуле (1.6) можно взять $k = 2$.

Рассмотрим следствие формулы (1.6) для оценки лорановских коэффициентов локализаций.

ЛЕММА 4.1. Пусть X и f те же, что и в лемме 1.1, $t \in (0, 1) \cup (1, 2)$, $B = B(a, \delta)$ – открытый круг, $\varphi \in C_0^\infty(B)$, $V_\varphi f$ – локализация из (2.1). Если для f , B и соответствующих ψ выполнена оценка (1.6) при $k = 2$, то для лорановских коэффициентов функции $V_\varphi f$ имеют место следующие оценки, где $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\max(|c_n(V_\varphi f, a)|, |b_n(V_\varphi f, a)|) \leq A_1 \varepsilon(\delta) \|\varphi\|_2' \left(\frac{11}{10} \delta\right)^{2+n} \mathcal{M}^m(2B \setminus X). \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.4) имеем

$$|c_n| = |\pi^{-1} \langle \varphi \bar{\partial}^2 f | (z - a)^n \rangle| = \pi^{-1} \left| \int_B f(z) \bar{\partial}^2(\varphi(z)(z - a)^n) d\Lambda(z) \right|.$$

Применив оценку (1.6) при $\psi(z) = \varphi(z)(z - a)^n$ и учитывая очевидную оценку $\|\psi\|_2' \leq A \|\varphi\|_2' ((11/10)\delta)^n$, получим

$$|c_n| \leq A_1 \varepsilon(\delta) \|\varphi\|_2' \left(\frac{11}{10} \delta\right)^{2+n} \mathcal{M}^m(2B \setminus X).$$

Коэффициенты b_n оцениваются аналогично. Лемма 4.1 доказана.

До конца этого раздела рассматривается случай $m = 1 + s \in (1, 2)$. Здесь доказательство (b) $\implies$ (a) в лемме 1.1 в принципе следует из промежуточных результатов работы [3], где рассматривались C^m -аппроксимации решениями общих однородных эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами. Однако в [3] речь не шла об индивидуальных аппроксимациях, и необходимые нам оценки технически весьма сложны, поэтому стоит согласовать обозначения и сделать некоторые упрощения в указанных доказательствах.

Сделаем одну полезную заготовку. В условиях леммы 4.1 (при $m = 1 + s \in (1, 2)$) пусть $\delta \|\varphi\|_1' \leq A_1$ – некоторой абсолютной константы. Тогда согласно лемме 2.1, (c') имеем $V_\varphi g \in BC^m$, причем

$$\begin{aligned} \|V_\varphi f\|_m' &\asymp \|\nabla^c V_\varphi f\|_s' \leq A \delta \|\varphi\|_1' \omega_B^m(f, \delta) \leq A_3 \omega_B^m(f, \delta), \\ |c_0(V_\varphi f)| &\leq A \varepsilon(\delta) \|\varphi\|_1' \delta \mathcal{M}^m(2B \setminus X) \leq A_3 \varepsilon(\delta) \mathcal{M}^m(2B \setminus X). \end{aligned}$$

Без ограничения общности будем считать, что $\omega_B^m(f, \delta) \leq \varepsilon(\delta)$. Поскольку $2B \setminus X$ открыто (т.е. справедлива оценка (2.9)), мы можем применить теорему Фростмана [10; гл. 2, теорема 1] (как это сделано в [3; лемма 3.1], где наш случай соответствует $L = \bar{\partial}^2$ и $r = n = 2$). А именно, найдется положительная борелевская мера μ с компактным носителем в $2B \setminus X$ такая, что для всякого круга $B(b, t)$ ($t > 0$) имеем $\mu(B(b, t)) \leq \sigma(t)t^m$ (где $0 \leq \sigma(t) \leq 1$, $\sigma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$), причем $\mu(2B \setminus X) \geq A_0 \mathcal{M}^m(2B \setminus X)$ с некоторой константой $A_0 = A_0(m) > 0$. Из последнего вытекает, что функция $g(z) = E * \mu$ удовлетворяет условиям $c_0(g) = \pi^{-1} \mu(2B \setminus X) \geq A_0 \mathcal{M}^m(2B \setminus X)$ (что очевидно), $g \in BC^m$

и $\|\nabla^c g\|'_s \leq A_1$. Для доказательства последних двух свойств достаточно доказать, что функции $g_1 = E_1 * \mu$ и $g_2 = E_2 * \mu$ (где $E_1(z) = 1/(\pi z) = \partial E(z)/\partial \bar{z}$ — ядро Коши и $E_2(z) = \bar{z}/(\pi z^2) = -\partial E/\partial z$) удовлетворяют условиям $g_{1,2} \in BC^s$ и $\|g_{1,2}\|'_s \leq A$. Последние факты являются хорошо известными для g_1 (преобразования Коши меры μ).

Кратко напомним, как оценивается $\|g_1\|'_s$. Фиксируем z_1 и $z_2 \neq z_1$. Пусть $z_0 = (z_1 + z_2)/2$, $\rho = |z_1 - z_2|$, $D_1 = B(z_1, \rho/2)$, $D_2 = B(z_2, \rho/2)$, а также $D_0 = B(z_0, \rho) \setminus (B_1 \cup B_2)$, $D_3 = \mathbb{C} \setminus D_0$. Тогда

$$|g_1(z_1) - g_1(z_2)| \leq \sum_{l=0}^{l=3} \int_{D_l} \frac{|z_1 - z_2|}{|\zeta - z_1| |\zeta - z_2|} d\mu(\zeta). \quad (4.2)$$

Обсудим оценку слагаемого в последней сумме при $l = 1$. Пусть

$$\Omega_p = B\left(z_1, \frac{\rho}{2^{p-1}}\right) \setminus B\left(z_1, \frac{\rho}{2^p}\right), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{D_1} \frac{|z_1 - z_2|}{|\zeta - z_1| |\zeta - z_2|} d\mu(\zeta) &\leq 2 \int_{D_1} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z_1|} \leq \sum_{p \in \mathbb{N}} 2 \int_{\Omega_p} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z_1|} \\ &\leq \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{\sigma(2^{-(p-1)}\rho)(2^{-(p-1)}\rho)^{1+s}}{2^{-p}\rho} \leq A\sigma(\rho)\rho^s. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\Omega_p = B(z_0, 2^p\rho) \setminus B(z_0, 2^{p-1}\rho)$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{D_3} \frac{|z_1 - z_2|}{|\zeta - z_1| |\zeta - z_2|} d\mu(\zeta) &\leq 4\rho \int_{D_3} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z_0|^2} \leq \sum_{p \in \mathbb{N}} 4\rho \int_{\Omega_p} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z_0|^2} \\ &\leq 4\rho \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{\sigma(2^p\rho)(2^p\rho)^{1+s}}{(2^{(p-1)}\rho)^2} \leq A\sigma_1(\rho)\rho^s, \end{aligned}$$

где $\sigma_1(\rho) \leq 1$ на $\mathbb{R}$ и $\sigma_1(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Остальные слагаемые оцениваются проще. Оценки для g_2 сводятся к соответствующим оценкам g_1 с помощью элементарного неравенства $|E_2(z_1) - E_2(z_2)| \leq A|z_1 - z_2|/|z_1 z_2|$.

Рассмотрим борелевскую меру $\mu^\delta = c_0(V_\varphi f)\mu/c_0(g)$ с компактным носителем $K^\delta \subset 2B \setminus X$. Тогда функция $g^\delta = E * \mu^\delta$ удовлетворяет условиям

$$c_0(g^\delta) = \pi^{-1} \int_{\mathbb{C}} d\mu^\delta = c_0(V_\varphi f), \quad g^\delta \in BC^m, \quad \|\nabla^c g^\delta\|'_s \leq A\varepsilon(\delta).$$

При этом функция $h^\delta = V_\varphi f - g^\delta = E * (\varphi \bar{\partial}^2 f - \mu^\delta) \in BC^m$ удовлетворяет асимптотике $\nabla^c h^\delta(z) = O(1/z^2)$ при $z \rightarrow \infty$ и оценке $\|\nabla^c h^\delta\|'_s \leq A\varepsilon(\delta)$.

Завершим рассмотрение случая $m = 1 + s \in (1, 2)$. В условиях леммы 1.1, (b) при каждом фиксированном $\delta \in (0, 1)$ сделаем (стандартное) разбиение единицы $\{B_j = B_j^\delta, \varphi_j = \varphi_j^\delta\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$ на $\mathbb{C}$, где при $j = (j_1, j_2)$ имеем $B_j = B(a_j, \delta)$, $a_j = (j_1\delta + ij_2\delta)$, $\varphi_j \in C_0^\infty(B_j)$, причем $\delta\|\varphi_j\|'_1 \leq A_1$.

Пусть $J = J^\delta$ – совокупность индексов $j \in \mathbb{Z}^2$ с условием $\overline{B_j} \cap X \neq \emptyset$ (тогда $\sum_{j \in J} \varphi_j = 1$ в некоторой окрестности компакта X). При $j \in J$ положим $f_j = f_j^\delta = V_{\varphi_j} f$ и найдем (согласно предыдущей заготовке) меры $\mu_j = \mu_j^\delta$ с компактными носителями в $2B_j \setminus X$ и соответствующие функции $g_j = g_j^\delta = E * \mu_j$ (ясно, что $\bar{\partial}^2 g_j = \mu_j^\delta = 0$ в окрестности X) с условиями

$$c_0(g_j) = \pi^{-1} \int_{\mathbb{C}} d\mu_j = c_0(f_j), \quad g_j \in BC^m, \quad \|\nabla^c g_j\|'_s \leq A\varepsilon(\delta).$$

Функции $h_j = h_j^\delta = f_j - g_j \in BC^m$ удовлетворяют условиям $\nabla^c h_j = O(1/z^2)$ при $z \rightarrow \infty$ и оценке $\|\nabla^c h_j\|'_s \leq A_1 \varepsilon(\delta)$. По лемме [3; лемма 3.2] имеем $\|\sum_{j \in J} \nabla h_j\|'_s \leq A_2 \varepsilon(\delta)$. Доказательство последней леммы технически не просто, но, надеемся, более доступно после согласования обозначений и в применении к конкретному оператору $L = \bar{\partial}^2$.

Наконец, пусть $f_\delta = f + \sum_{j \in J} (g_j - f_j)$. Заметим, что

$$\bar{\partial}^2 f_\delta = \sum_{j \in J} (\mu_j) + \sum_{j \notin J} (\varphi_j \bar{\partial}^2 f)$$

обращается в 0 в некоторой окрестности X (т.е. f_δ бианалитична в окрестности X), $f_\delta \in BC^m$ и $\|(f - f_\delta)\|'_m \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0+$. Пусть $\text{Spt } f \cup X \subset B(0, R)$ при некотором $R > 0$. Фиксируем $\psi \in C_0^\infty(B(0, R+1))$ с условием $\psi = 1$ на $B(0, R)$. Положим

$$L_\delta(z) = (f - f_\delta)|_0 + \partial(f - f_\delta)|_0 z + \bar{\partial}(f - f_\delta)|_0 \bar{z}.$$

Искомая аппроксимация функции f при $\delta \rightarrow 0+$ имеет вид $(f_\delta + L_\delta)\psi$.

§ 5. Доказательство импликации (b) $\implies$ (a) в лемме 1.1 при $m \in (0, 1)$

Пусть теперь $m \in (0, 1)$. Несколько уточним оценки (4.1), приспособив их для квадратов из леммы 2.2. Пусть $Q = Q(a, \delta)$ – квадрат, $\lambda > 0$ произвольно, $\psi \in C_0^\infty(Q)$. Рассмотрим конечное множество $\{Q_j\} = \{Q_j(a_j, \delta_1)\}$ двоичных квадратов одного размера таких, что $Q \subset \bigcup_j Q_j$ и $\bigcup_j B(a_j, 3\delta_1) \subset (1 + \lambda)Q$ (таким образом, для кругов B_j , описанных вокруг квадратов Q_j , круги $2B_j$ содержатся в $(1 + \lambda)Q$). Рассмотрим разбиение единицы $\{\varphi_j\}$ из леммы 2.2, соответствующее множеству $\{Q_j\}$. Тогда, очевидно, выполнена оценка

$$\left| \int_Q f(z) \bar{\partial}^2 \psi(z) d\Lambda(z) \right| \leq A \left(\frac{\delta}{\delta_1} \right)^2 \max_j \left| \int_{(3/2)Q_j} f(z) \bar{\partial}^2 (\psi(z) \varphi_j(z)) d\Lambda(z) \right|.$$

В силу оценок леммы 2.2 для функции φ_j имеем

$$\|\psi \varphi_j\|'_2 \leq A_1 \left(\frac{\delta}{\delta_1} \right)^2 \|\psi\|'_2;$$

поэтому в случае выполнения оценки (1.6) имеем оценку $(A(\lambda) > 0)$

$$\left| \int_Q f(z) \bar{\partial}^2 \psi(z) d\Lambda(z) \right| \leq A(\lambda) \varepsilon(\delta) \|\psi\|'_2 \delta^2 \mathcal{M}^m((1 + \lambda)Q \setminus X). \quad (5.1)$$

Пусть теперь $Q = Q(a, \delta)$ – двоичный квадрат, φ – функция из (2.7), $V_\varphi f$ – локализация. Зафиксируем $\lambda = 11/10$, тогда $(3/2)\lambda < 5/3$; в силу (5.1), рассуждая так же, как в доказательстве леммы 4.1, получим следующие оценки ($n \in \mathbb{Z}_+$, $\varepsilon_1(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0_+$):

$$\max(|c_n(V_\varphi f, a)|, |b_n(V_\varphi f, a)|) \leq \varepsilon_1(\delta)(2\delta)^n \mathcal{M}^m\left(\frac{5}{3}Q^o \setminus X\right). \quad (5.2)$$

Очевидно, увеличив в случае необходимости $\varepsilon_1(\delta)$, можем считать, что $\omega^m(f, \delta) \leq \varepsilon_1(\delta)$ и $\omega^0(f, \delta) \leq \varepsilon_1(\delta)\delta^m$.

Из (2.3) и (5.2), суммируя при $|z - a| \geq 3\delta$ геометрическую прогрессию со знаменателем $(2\delta)/|z - a|$ (а также леммы из 2.1), легко получить следующее утверждение.

ЛЕММА 5.1. Пусть для функции f выполнено условие (b) леммы 1.1, $Q = Q(a, \delta)$ – двоичный квадрат, $V_\varphi f$ – локализация f , причем φ – функция из (2.7).

Зафиксируем $n \in \{1, 2\}$; пусть при всех $p < n$ выполнено $c_p(V_\varphi f, a) = 0$ и $b_p(V_\varphi f, a) = 0$. Тогда выполнены оценки $\|V_\varphi f\| \leq A\varepsilon_1(\delta)\delta^m$, $\omega^m(V_\varphi f, \infty) \leq A\varepsilon_1(\delta)$, а при $z \notin B(a, 3\delta)$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} |V_\varphi f(z)| &\leq A\varepsilon_1(\delta)\delta^n \frac{\mathcal{M}^m((5/3)Q^o \setminus X)}{|z - a|^n}, \\ |\nabla V_\varphi f(z)| &\leq A\varepsilon_1(\delta)\delta^n \frac{\mathcal{M}^m((5/3)Q^o \setminus X)}{|z - a|^{1+n}}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Рассуждая так же, как при доказательстве оценки (5.1), оценки (5.3) нетрудно уточнить следующим образом.

ЛЕММА 5.2. В условиях леммы 5.1 оценки (5.3) (с несколько увеличенной постоянной A) имеют место всюду вне квадрата $2Q$.

Теперь рассмотрим вопрос об уравнивании лорановских коэффициентов локализаций. Напомним, что в силу теоремы Фростмана [10; гл. 2, теорема 1] для любого ограниченного борелевского множества U и $m \in (0, 2)$ существует неотрицательная мера μ , $\text{Spt}(\mu) \subset U$, такая, что $\text{Var}(\mu) \geq A_1 \mathcal{M}^m(U)$ (где $\text{Var}(\cdot)$ – полная масса, $A_1 > 0$ – абсолютная постоянная), и при этом для любого круга B радиуса r выполнено неравенство $\mu(B) \leq r^m$.

Рассмотрим для указанной меры μ функцию $F = \mu * E$, где, напомним, E из (1.2). Очевидно, $\|F\| \leq \pi^{-1} \text{Var}(\mu)$. Для произвольных $z, z' \in \mathbb{C}$ ($z \neq z'$) оценим $|F(z) - F(z')|$.

Рассмотрим (как и в предыдущем параграфе) круг $B = B((z + z')/2, 2|z - z'|)$ и кольца $B_p = 2^p B \setminus 2^{p-1} B$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда, так как $m \in (0, 1)$, имеем

$$\begin{aligned} |F(z) - F(z')| &\leq \int_B d\mu(\zeta) + A|z - z'| \sum_{p=1}^{\infty} \int_{B_p} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - a|} \\ &\leq A_1|z - z'|^m + A_2|z - z'| \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2^p|z - z'|)^m}{2^p|z - z'|} \leq A_3|z - z'|^m. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$F \in B \operatorname{Lip}^m, \quad \|F\| \leq \pi^{-1} \operatorname{Var}(\mu), \quad \omega^m(F, \infty) \leq A. \quad (5.4)$$

Если, кроме того, множество U открыто, то в силу (2.9) можно дополнительно потребовать, чтобы носитель меры μ был компактным подмножеством U , а мера μ удовлетворяла следующему условию: для любого круга $B(b, t)$ имеем $\mu(B(b, t)) \leq \sigma(t)t^m$, где $0 \leq \sigma(t) \leq 1$ и $\sigma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$. Из последнего условия вытекает, что дополнительно к (5.4) имеем $F \in BC^m$.

Так как множество $(5/3)Q^o \setminus X$ открыто, отсюда и из оценки (5.2) при $n = 0$ вытекает следующая лемма об уравнивании у локализаций коэффициента c_0 .

ЛЕММА 5.3. Пусть для функции f выполнено условие (b) леммы 1.1, $Q = Q(a, \delta)$ – двоичный квадрат, $V_\varphi f$ – локализация f , причем φ – функция из (2.7). Тогда существует функция $\Psi \in BC^m$ такая, что:

- (1) $\operatorname{Spt}(\bar{\partial}^2 \Psi) \subset ((5/3)Q^o \setminus X)$;
- (2) $c_0(V_\varphi f) = c_0(\Psi)$;
- (3) $\omega^m(\Psi, \infty) \leq A\varepsilon_1(\delta)$ и $\|\Psi\| \leq A\varepsilon_1(\delta)\delta^m$, где ε_1 из (5.2).

Из лемм 2.1, 5.1, 5.3 и оценок (5.2) сразу же вытекает

ЛЕММА 5.4. Пусть $V_\varphi f$ из леммы 5.1, Ψ из леммы 5.3, $r = V_\varphi f - \Psi$. Тогда:

(1) выполнены оценки $\|r\| \leq A\varepsilon_1(\delta)\delta^m$ и $\omega^m(r, \infty) \leq A\varepsilon_1(\delta)$, а при $z \notin 2Q$ имеют место оценки

$$a) |r(z)| \leq A\varepsilon_1(\delta)\delta \frac{\mathcal{M}^m((5/3)Q \setminus X)}{|z - a|}, \quad b) |\nabla r(z)| \leq A\varepsilon_1(\delta)\delta \frac{\mathcal{M}^m((5/3)Q \setminus X)}{|z - a|^2}; \quad (5.5)$$

(2) $\max(|c_1(r)|, |b_1(r)|) \leq A\varepsilon_1(\delta)\delta \mathcal{M}^m((5/3)Q \setminus X)$ (так как $c_0(r) = 0$, эти коэффициенты не зависят от центра разложения функции r в ряд Лорана).

Следующее утверждение – лемма о приближении функции по частям при $t \in (0, 1)$; для ее применимости достаточно построить функции, уравнивающие у локализаций исходной функции f не только коэффициент c_0 , но также c_1 и b_1 с соответствующими оценками. Так как нас будет интересовать только случай малых δ , далее будем считать, что $\delta \leq 1$ и $2\delta \leq d_f$, где d_f – максимальное из попарных расстояний между точками компакта $\operatorname{Spt}(\bar{\partial}^2 f)$.

ЛЕММА 5.5. Пусть $X \subset \mathbb{C}$ – компакт, $t \in (0, 1)$, $f \in BC^m$ – финитная функция, $\delta = 2^{-N}$, где $N \in \mathbb{N}$.

Проведем покрытие компакта $\operatorname{Spt}(\bar{\partial}^2 f)$ сеткой двоичных квадратов одного размера $\{Q_j\} = \{Q_j(a_j, \delta)\}$. Построим разбиение единицы $\{\varphi_j\}$ из леммы 2.2, и пусть $f_j = V_{\varphi_j} f$ – соответствующие локализации.

Пусть для каждого j существует функция $\Phi_j \in BC^m$ такая, что:

- (1) $\operatorname{Spt}(\bar{\partial}^2 \Phi_j) \subset (4Q_j \setminus X)$;
- (2) выполнены равенства $c_0(f_j) = c_0(\Phi_j)$, $c_1(f_j, a) = c_1(\Phi_j, a)$ и $b_1(f_j, a) = b_1(\Phi_j, a)$;
- (3) имеют место оценки $\omega^m(\Phi_j, \infty) \leq A\varepsilon_1(\delta)$ и $\|\Phi_j\| \leq A\varepsilon_1(\delta)\delta^m$.

Тогда при всех достаточно малых δ имеет место оценка

$$\left\| \sum_j \rho_j \right\|_m \leq A\varepsilon_1(\delta), \quad (5.6)$$

где $\rho_j = f_j - \Phi_j$ (и, следовательно, выполнены условие (а) леммы 1.1 и условие (а) теоремы 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 5.1 при $n = 2$ для $z \notin B(a_j, 3\delta)$ имеем оценки

$$\text{а) } |\rho_j(z)| \leq A_2\varepsilon_1(\delta) \frac{\delta^{2+m}}{|z - a_j|^2}, \quad \text{б) } |\nabla \rho_j(z)| \leq A_2\varepsilon_1(\delta) \frac{\delta^{2+m}}{|z - a_j|^3}. \quad (5.7)$$

Сначала оценим $\|\sum_j \rho_j\|$. Зафиксировав $z \in \mathbb{C}$, в силу (5.7), а) получим оценку

$$\sum_j |\rho_j(z)| \leq A_3\varepsilon_1(\delta)\delta^m \int_{\delta \leq |z-\zeta| \leq 2d_f} \frac{d\Lambda(\zeta)}{|z - \zeta|^2} \leq A_4\varepsilon_1(\delta)\delta^m \log\left(\frac{d_f}{\delta}\right).$$

Последнее выражение не превосходит $\varepsilon_1(\delta)$, если $\delta > 0$ достаточно мало.

Зафиксируем точки $z, z' \in \mathbb{C}$, $z \neq z'$. Разобьем $\{Q_j\}$ на три части P_ι , $\iota = 1, 2, 3$.

1. Рассмотрим множество P_1 всех квадратов Q_j , для которых расстояние до множества $\{z\} \cup \{z'\}$ меньше 10δ . Число квадратов из P_1 ограничено сверху абсолютной постоянной, поэтому для суммы по соответствующим j в силу условия (2) леммы 5.5 имеем (5.6).

2. Рассмотрим множество P_2 всех квадратов Q_j , для которых расстояние до $\{z\} \cup \{z'\}$ не меньше 10δ и не больше $10|z - z'|$ (при $|z - z'| < \delta$ множество P_2 пусто). В силу оценки (5.7), а) при суммировании по индексам j квадратов P_2 имеем ($\zeta \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} \sum_j |\rho_j(z) - \rho_j(z')| &\leq \sum_j (|\rho_j(z)| + |\rho_j(z')|) \leq A_2\varepsilon_1(\delta)\delta^m \int_{10\delta \leq |\zeta| \leq 10|z-z'|} \frac{d\Lambda(\zeta)}{|\zeta|^2} \\ &\leq A_3\varepsilon_1(\delta)\delta^m \log\left(\frac{|z - z'|}{\delta} + 1\right) \leq A_4\varepsilon_1(\delta)|z - z'|^m. \end{aligned}$$

3. Пусть $P_3 = \{Q_j\} \setminus (P_1 \cup P_2)$; тогда для каждого квадрата $Q_j \in P_3$ расстояние до $\{z\} \cup \{z'\}$ превосходит $\max(10\delta, 10|z - z'|)$. При суммировании по индексам j квадратов P_3 в силу оценки (5.7), б) имеем

$$\begin{aligned} \sum_j |\rho_j(z) - \rho_j(z')| &\leq A_5|z - z'| \sum_j \max_{\{\xi | \xi \in [z, z']\}} |\nabla \rho_j(\xi)| \\ &\leq A_6\varepsilon_1(\delta)\delta^m|z - z'| \int_{|\zeta| \geq \max(10\delta, 10|z-z'|)} \frac{d\Lambda(\zeta)}{|\zeta|^3} \leq A_7\varepsilon_1(\delta)|z - z'|^m. \end{aligned}$$

Оценка (5.6) установлена. Доказательство леммы 5.5 завершено.

Таким образом, доказательство импликации (b) $\implies$ (a) в лемме 1.1 сводится к следующему утверждению.

ЛЕММА 5.6. Пусть $f \in BC^m$ – финитная функция, $m \in (0, 1)$.

Пусть для произвольного двоичного квадрата $Q = Q(a, \delta)$ с $\delta \leq 1$, произвольной функции φ , удовлетворяющей условиям (2.7) относительно Q , и соответствующей локализации $V_\varphi f$ существует функция Ψ , удовлетворяющая условиям (1)–(3) леммы 5.3.

Тогда для любого двоичного квадрата $Q = Q(a, \delta)$ с $\delta \leq 1$, любой функции φ , удовлетворяющей (2.7) относительно Q , и соответствующей локализации $V_\varphi f$ существует функция Φ , удовлетворяющая условиям (1)–(3) леммы 5.5, т.е.

- (1) $\text{Spt}(\bar{\partial}^2 \Phi) \subset (4Q \setminus X)$;
- (2) $c_0(V_\varphi f) = c_0(\Phi)$, $c_1(V_\varphi f, a) = c_1(\Phi, a)$, $b_1(V_\varphi f, a) = b_1(\Phi, a)$;
- (3) $\omega^m(\Phi, \infty) \leq A\varepsilon_1(\delta)$, $\|\Phi\| \leq A\varepsilon_1(\delta)\delta^m$.

Начинаем доказательство леммы 5.6, которое завершится в конце параграфа. Заметим, что переход от условия (2) леммы 5.3 к условию (2) леммы 5.5 весьма нетривиален (как показывают примеры из [16; § 4], подобные переходы возможны далеко не всегда).

Заметим, что из условия (b) леммы 1.1 немедленно следует равенство $\bar{\partial}^2 f = 0$ в X^o в смысле теории распределений, и, следовательно, в силу эллиптичности оператора $\bar{\partial}^2$ имеем $f \in A_2(X^o)$; поэтому в силу леммы 2.1, (a) имеем $V_\varphi f \in A_2(X^o)$.

Зафиксируем двоичный квадрат $\mathbf{Q}$; пусть $s(\mathbf{Q}) = \delta \leq 1$. Введем обозначение $g = V_\varphi f$ (где φ из (2.7) относительно $\mathbf{Q}$); с учетом $z = x + iy \in \mathbb{C}$, (1.2) и (2.3) имеем тождество

$$\frac{b_1}{z-a} + c_1 \frac{\overline{z-a}}{(z-a)^2} \equiv -c_h \frac{\partial}{\partial x} E(z-a) - c_v \frac{\partial}{\partial y} E(z-a),$$

где коэффициент c_h будем называть *горизонтальным*, а c_v – *вертикальным*.

Так как

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{2iy}{\pi z^2}, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{-2ix}{\pi z^2},$$

нетрудно убедиться, что

$$c_h = \frac{(c_1 - b_1)\pi}{2}, \quad c_v = \frac{(b_1 + c_1)\pi}{2i}, \quad (5.8)$$

в частности, для коэффициентов c_h и c_v локализаций функции f верны оценки (5.2) при $n = 1$. Как легко следует из (5.8), (2.3) и (2.4), имеем

$$c_h(T * E) = \langle T \mid \text{Re}(z-a) \rangle, \quad c_v(T * E) = \langle T \mid \text{Im}(z-a) \rangle. \quad (5.9)$$

Название коэффициентов объясняется их геометрическим смыслом. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $a = a_1 + ia_2$. Тогда в силу (5.9)

$$c_h(E(z-a) - E(z)) = a_1, \quad c_v(E(z-a) - E(z)) = a_2, \quad (5.10)$$

в частности, коэффициенты c_h и c_v функции $E(z - a) - E(z)$ вещественны и “соответствуют своим направлениям”.

Рассмотрим очевидное следствие формул (5.9)–(5.10). Пусть U_1 и U_2 – борелевские множества, причем для произвольных точек $z_1 \in U_1$ и $z_2 \in U_2$ выполнены неравенства $x_1 < \operatorname{Re}(z_2 - z_1) < x_2$ и $y_1 < \operatorname{Im}(z_2 - z_1) < y_2$ (где x_s и y_s вещественны при $s \in \{1, 2\}$, $x_2 > x_1$ и $y_2 > y_1$). Пусть ν_1 и ν_2 – неотрицательные меры такие, что $\operatorname{Spt}(\nu_1) \subset U_1$, $\operatorname{Spt}(\nu_2) \subset U_2$ и $\operatorname{Var}(\nu_1) = \operatorname{Var}(\nu_2) = 1$. Тогда выполнены неравенства

$$x_1 < c_h((\nu_2 - \nu_1) * E) < x_2, \quad y_1 < c_v((\nu_2 - \nu_1) * E) < y_2, \quad (5.11)$$

причем указанные коэффициенты c_h и c_v вещественны, а $c_0((\nu_2 - \nu_1) * E) = 0$.

Считаем, что квадрат $(3/2)\mathbf{Q}$ не является подмножеством X° (иначе, так как $g \in A_2(X^\circ)$, имеем $g \equiv 0$ и возьмем $\Phi \equiv 0$). В дальнейшем будем использовать очевидное следствие этого факта: пересечение компакта $(5/3)\mathbf{Q} \setminus X^\circ$ и дополнения к X содержит непустое открытое множество.

Лемма 5.6 сводится к следующему утверждению (искомая функция Φ “собирается” из четырех функций как линейная комбинация).

ЛЕММА 5.7. *Пусть выполнены условия леммы 5.6. Тогда существуют четыре функции $G_{\operatorname{dir}}^p \in BC^m$, где $p = 1$ или 2 , dir (направление) означает v или h такие, что:*

- (1) $\operatorname{Spt}(\bar{\partial}^2 G_{\operatorname{dir}}^p) \subset (4\mathbf{Q} \setminus X)$, $g - G_{\operatorname{dir}}^1(z) = O(|z|^{-1})$ и $G_{\operatorname{dir}}^2(z) = O(|z|^{-1})$ при $z \rightarrow \infty$;
- (2) $c_v(G_v^2) \geq |c_v(g - G_v^1)| + |c_h(g - G_v^1)|$ и $c_h(G_h^2) \geq |c_v(g - G_h^1)| + |c_h(g - G_h^1)|$;
- (3) $c_v(G_v^2) \geq 3|c_h(G_v^2)|$ и $c_h(G_h^2) \geq 3|c_v(G_h^2)|$;
- (4) $\omega^m(G_{\operatorname{dir}}^p, \infty) \leq A\varepsilon_1(\delta)$ и $\|G_{\operatorname{dir}}^p\| \leq A\varepsilon_1(\delta)\delta^m$.

Заметим, что условие $c_0(g - G_{\operatorname{dir}}^1) = c_0(G_{\operatorname{dir}}^2) = 0$ следует из асимптотики функций, и, следовательно, коэффициенты c_v и c_h функций $g - G_{\operatorname{dir}}^1$ и G_{dir}^2 не зависят от центра разложения; коэффициенты c_v и c_h функций G_{dir}^2 по построению будут вещественными.

Функция Φ леммы 5.6, уравнивающая у функции g коэффициенты c_0 , c_v и c_h , в силу леммы 5.7 строится так. Если выполнено неравенство

$$|c_v(g - G_v^1)| + |c_h(g - G_v^1)| \leq |c_v(g - G_h^1)| + |c_h(g - G_h^1)|, \quad (5.12)$$

то в силу условия (2) леммы 5.7 имеем неравенство

$$|c_v(g - G_v^1)| + |c_h(g - G_v^1)| \leq \min(c_v(G_v^2), c_h(G_h^2));$$

возьмем $\Phi = G_v^1 + t_1 G_v^2 + t_2 G_h^2$ и в силу условия (3) леммы 5.7 получим неравенство $\max(|t_1|, |t_2|) \leq A$, так как нахождение (комплексных) коэффициентов t_1 и t_2 сводится к решению хорошо обусловленной системы двух линейных алгебраических уравнений.

Аналогично, если неравенство (5.12) не выполнено, возьмем $\Phi = G_h^1 + t_1 G_v^2 + t_2 G_h^2$, причем $\max(|t_1|, |t_2|) \leq A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.7. Построим пару функций (G_v^1, G_v^2) ; пара (G_h^1, G_h^2) строится совершенно аналогично.

Напомним, что $g = (\varphi \bar{\partial}^2 f) * E$, где φ – из (2.7) относительно квадрата $\mathbf{Q}$. Далее будем рассматривать покрытия компакта $(5/3)\mathbf{Q} \setminus X^\circ$ подходящими конечными семействами двоичных квадратов Q_j и получать соответствующие функции φ_j из леммы 2.2 и локализации $g_j = V_{\varphi_j} g$. Так как $\bar{\partial}^2 g = \varphi \bar{\partial}^2 f$ и, следовательно, $g_j = (\varphi_j \varphi \bar{\partial}^2 f) * E$, то для функций g_j мы будем применять лемму 5.3 и оценки (5.2).

Нужное покрытие $\{Q_j\} = \mathbf{Cover1}$ будет получено в два этапа. Сначала (в основной части конструкции) построим покрытие $\mathbf{Cover}$, а затем (в дополнительной части конструкции) преобразуем его в $\mathbf{Cover1}$. Начнем с определений, вспомогательных построений и оценок.

Пусть $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 3$, $N = 2^p$ (по завершении доказательства леммы 5.9 зафиксируем N в зависимости от показателя пространства $m \in (0, 1)$). Пусть $Q = Q(a, \delta_0)$ – двоичный квадрат. Разобьем Q на N^2 двоичных квадратов одного размера с длиной стороны $s_0 = \delta_0/N$; множество таких квадратов D из них, для которых $((5/3)D^\circ \setminus X) \neq \emptyset$, обозначим через $\mathcal{Q}_N(Q)$.

Вертикальным рядом назовем подмножество $\mathcal{Q}_N(Q)$ тех квадратов, у которых совпадает индекс β_1 из (2.6), отличаться может только β_2 . Вертикальный ряд назовем “хорошим”, если он содержит хотя бы два квадрата (обозначим их Q^1 и Q^2) таких, что $\beta_2(Q^2) - \beta_2(Q^1) \geq 7$, и при этом выполнено неравенство

$$\min \left(\mathcal{M}^m \left(\frac{5}{3} Q^{1^\circ} \setminus X \right), \mathcal{M}^m \left(\frac{5}{3} Q^{2^\circ} \setminus X \right) \right) \geq N^{-1} (s_0)^m. \quad (5.13)$$

Указанную упорядоченную пару квадратов (Q^1, Q^2) назовем *согласованной парой*; исходный квадрат Q назовем “хорошим”, если он содержит хотя бы один “хороший” вертикальный ряд, иначе (т.е. Q не содержит ни одного “хорошего” вертикального ряда) назовем Q “плохим”.

Рассмотрим “хороший” вертикальный ряд; пусть (Q^1, Q^2) – согласованная пара, $z_1 \in (5/3)Q^1$ и $z_2 \in (5/3)Q^2$ – произвольные точки, $h_0 = E(z - z_2) - E(z - z_1)$. Ясно в силу (5.10) и расположения точек z_1 и z_2 , что для функции h_0 выполнены следующие условия: $c_0(h_0) = 0$, коэффициенты c_v и c_h функции h_0 вещественны, и имеют место неравенства $c_v(h_0) > 3|c_h(h_0)|$ и $c_v(h_0) > 5s_0$. Поэтому в силу (5.11), (5.13) и теоремы Фростмана [10; гл. 2, теорема 1] имеет место следующее утверждение, аналогичное совокупности лемм 5.3 и 5.4.

ЛЕММА 5.8. Для любой согласованной пары (Q^1, Q^2) существует функция $h_{2,1} = (\nu_2 - \nu_1) * E$ такая, что $\text{Spt}(\nu_1) \subset ((5/3)Q^{1^\circ} \setminus X)$, $\text{Spt}(\nu_2) \subset ((5/3)Q^{2^\circ} \setminus X)$, ν_p – неотрицательные меры ($p = 1, 2$), и при этом выполнены следующие условия:

(i) $\text{Var}(\nu_1) = \text{Var}(\nu_2)$ (и, следовательно, $c_0(h_{2,1}) = 0$), а коэффициенты $c_v(h_{2,1})$ и $c_h(h_{2,1})$ вещественны и не зависят от центра разложения функции $h_{2,1}$ в ряд Лорана;

(ii) $N^{-1}(s_0)^m \leq \text{Var}(\nu_1) \leq (s_0)^m$, и, следовательно, имеет место неравенство $5N^{-1}(s_0)^{1+m} < c_v(h_{2,1}) < (\delta_0)^{1+m}$ (т.е. $c_v(h_{2,1})$ оценивает величину $(\delta_0)^{1+m}$ с точностью до положительных постоянных, зависящих только от N);

(iii) выполнено неравенство $c_v(h_{2,1}) > 3|c_h(h_{2,1})|$;

(iv) $h_{2,1} \in BC^m$, причем $\omega^m(h_{2,1}, \infty) \leq A$ и $\|h_{2,1}\| \leq 2(\delta_0)^m$;

(v) для соответствующего “хорошего” квадрата $Q = Q(a, \delta)$ вне $2Q$ выполнены оценки

$$|h_{2,1}(z)| \leq A \frac{\delta^{1+m}}{|z-a|}, \quad |\nabla h_{2,1}(z)| \leq A \frac{\delta^{1+m}}{|z-a|^2}.$$

Для каждого “хорошего” квадрата Q функцию $h_{2,1} = h_{2,1}(Q)$ строим по произвольно выбранной согласованной паре. В следующих двух замечаниях разъясним, как будут использоваться функции $h_{2,1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Роль функций $h_{2,1}$ в следующем. Построим для локализации $V_\varphi g$, соответствующей “хорошему” двоичному квадрату $Q = Q(a, \delta_0)$, функцию Ψ из леммы 5.3, и пусть, как и в лемме 5.4, $r = V_\varphi g - \Psi$. Тогда в силу условия (ii) леммы 5.8 величина $\varepsilon_1(\delta_0)c_v(h_{2,1})$ оценивает сверху (с постоянной, зависящей от N) сумму $|c_v(r)| + |c_h(r)|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Функцию G_v^2 будем строить как конечную линейную комбинацию функций $h_{2,1}$ с положительными коэффициентами, тем самым, в силу условия (iii) леммы 5.8 условие (3) леммы 5.7 для G_v^2 будет выполнено автоматически.

Рассмотрим произвольный “плохой” квадрат Q . Так как условие (5.13) не выполняется ни в одном его вертикальном ряду, то, очевидно, для каждого вертикального ряда сумма $\mathcal{M}^m((5/3)D^o \setminus X)$ по всем соответствующим квадратам не превосходит $8(s_0)^m$. Суммируя по вертикальным рядам, отсюда получим следующую оценку. Пусть D' – квадрат с длиной стороны $s(D')$, содержащийся в Q . Тогда

$$\sum_{\{D_j | D_j \in \mathcal{Q}_N(Q), D_j \subset D'\}} (s_0)^{1-m} \mathcal{M}^m\left(\frac{5}{3}D_j^o \setminus X\right) \leq 8 \frac{s_0^{1-m+m} s(D')}{s_0} = 8s(D'). \quad (5.14)$$

ЛЕММА 5.9. Существует (достаточно большое) число $N = N(m)$ такое, что для каждого “плохого” квадрата $Q = Q(a, \delta_0)$ при суммировании по всем квадратам Q_j из $\mathcal{Q}_N(Q)$ выполнена оценка

$$\sum_{\mathcal{Q}_N(Q)} s_0 \mathcal{M}^m\left(\frac{5}{3}Q_j^o \setminus X\right) \leq \frac{1}{2} \delta_0 \mathcal{M}^m\left(\frac{5}{3}Q^o \setminus X\right). \quad (5.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $N = \delta_0/s_0$. Установим оценку

$$\sum_{\mathcal{Q}_N(Q)} (s_0)^{1-m} \mathcal{M}^m\left(\frac{5}{3}Q_j^o \setminus X\right) \leq (\delta_0)^{1-m} A \mathcal{M}^m\left(\bigcup_{\mathcal{Q}_N(Q)} \frac{5}{3}Q_j^o \setminus X\right), \quad (5.16)$$

из которой сразу же следует оценка (5.15), если $A/N^m \leq 1/2$.

Заметим [10; гл. 2, (1.3)], что если в определении обхвата по Хаусдорфу (1.3) покрытия кругами B_j заменить на покрытия двоичными квадратами D_j и вместо $(r_j)^m$ взять $(s(D_j))^m$, где $s(D_j)$ – длины сторон квадратов D_j , то соответствующая величина $\mathbf{M}^m(\cdot) = \inf_{\{D_j\}} \sum_j (s(D_j))^m$ будет соизмерима с $\mathcal{M}^m(\cdot)$. Рассмотрим (не более чем счетное) семейство двоичных квадратов D_ι , покрывающих $\bigcup_{\mathcal{Q}_N(Q)} ((5/3)Q_j^o \setminus X)$ таких, что

$$\mathbf{M}^m \left(\bigcup_{\mathcal{Q}_N(Q)} \frac{5}{3} Q_j^o \setminus X \right) \leq \sum_{\iota} (s(D_\iota))^m \leq 2\mathbf{M}^m \left(\bigcup_{\mathcal{Q}_N(Q)} \frac{5}{3} Q_j^o \setminus X \right);$$

достаточно доказать оценку (5.16), заменив на $(\delta_0)^{1-m} A_1 \sum_{\iota} (s(D_\iota))^m$ ее правую часть.

Разобьем множество $\mathcal{Q}_N(Q)$ на две непересекающиеся части $\mathcal{Q}_N^1(Q)$ и $\mathcal{Q}_N^2(Q)$ так:

квадрат Q_j из $\mathcal{Q}_N(Q)$ принадлежит множеству $\mathcal{Q}_N^1(Q)$ тогда и только тогда, когда для любого квадрата покрытия D_ι , пересекающего Q_j , выполнено неравенство $s(D_\iota) < s_0$ (таким образом, Q_j из $\mathcal{Q}_N(Q)$ принадлежит $\mathcal{Q}_N^2(Q)$ тогда и только тогда, когда существует квадрат D_ι , пересекающий Q_j , такой, что $s(D_\iota) \geq s_0$).

Следовательно, множество $\bigcup_{\mathcal{Q}_N^1(Q)} ((5/3)Q_j^o \setminus X)$ покрывается объединением квадратов D_ι таких, что $s(D_\iota) < s_0$, причем каждый такой квадрат D_ι в силу того, что $s(D_\iota) < s(Q_j) = s_0$, пересекает не более четырех различных квадратов Q_j из $\mathcal{Q}_N^1(Q)$. Поэтому

$$\sum_{\mathcal{Q}_N^1(Q)} \mathbf{M}^m \left(\frac{5}{3} Q_j^o \setminus X \right) \leq 4 \sum_{\iota} (s(D_\iota))^m, \quad (5.17)$$

откуда следует оценка (5.16) с заменой в ее левой части множества $\mathcal{Q}_N(Q)$ на $\mathcal{Q}_N^1(Q)$.

Так как любой квадрат $Q_j \in \mathcal{Q}_N^2(Q)$ пересекает хотя бы один квадрат покрытия D_ι с $s(D_\iota) \geq s(Q_j) = s_0$, то Q_j содержится в $3D_\iota$ для соответствующего ι . В силу (5.14), где $D' = 3D_\iota$, и неравенства $s(D_\iota) \leq 2s(Q) = 2\delta_0$ имеем

$$\sum_{\mathcal{Q}_N^2(Q)} (s_0)^{1-m} \mathcal{M}^m \left(\frac{5}{3} Q_j^o \setminus X \right) \leq 24 \sum_{\iota} s(D_\iota) \leq 24(\delta_0)^{1-m} \sum_{\iota} (s(D_\iota))^m. \quad (5.18)$$

В силу (5.17), (5.18) и соизмеримости $(\delta_0)^{1-m} A_1 \sum_{\iota} (s(D_\iota))^m$ и правой части (5.16) установлена оценка (5.16) и, следовательно, оценка (5.15). Лемма 5.9 доказана.

С этого момента зафиксируем $N = N(m)$ в соответствии с леммой 5.9. Проведем геометрическую конструкцию, состоящую из двух частей: основной и дополнительной.

Основная часть. Проведем индукцию по номеру шага. Перед первым шагом имеем множество $\mathcal{Q}^{(0)}$, состоящее из девяти двоичных квадратов с длиной стороны δ , составляющих квадрат $3\mathbf{Q}$. В общем случае перед n -м шагом, где

$n \in \mathbb{N}$, имеем конечное множество $\mathcal{Q}^{(n-1)}$ двоичных квадратов с длиной стороны $N^{1-n}\delta$.

На n -м шаге исключим из рассмотрения все квадраты $\mathcal{Q}^{(n-1)}$, не пересекающие компакт $(5/3)\mathbf{Q} \setminus X^\circ$, зафиксируем все “хорошие” квадраты из $\mathcal{Q}^{(n-1)}$ и построим соответствующие им функции $h_{2,1}$. Проверим два условия остановки, указанные ниже. Если хотя бы одно из этих условий выполнено, то основная часть конструкции завершена. В противном случае каждый из незафиксированных квадратов $\mathcal{Q}^{(n-1)}$ (это “плохой” квадрат, пересекающий $(5/3)\mathbf{Q} \setminus X^\circ$) разделим на N^2 двоичных квадратов с длиной стороны $N^{-n}\delta$; множество полученных квадратов и образует $\mathcal{Q}^{(n)}$.

Условия остановки.

1. Множество $\mathcal{Q}^{(n-1)}$ не содержит “плохих” квадратов, пересекающих $(5/3)\mathbf{Q} \setminus X^\circ$.
2. Выполнена оценка $\delta^{1+m}/2^{n-1} < \sum_j (s(Q_j))^{1+m}$, где в правой части берется сумма по всем зафиксированным ранее “хорошим” квадратам.

Так как пересечение компакта $(5/3)\mathbf{Q} \setminus X^\circ$ и дополнения к X содержит непустое открытое множество, а квадрат, содержащийся в дополнении к X , заведомо “хороший”, то при достаточно больших n хотя бы один “хороший” квадрат фиксируется; таким образом, построение завершается на некотором (конечном) шаге.

По окончании основной части конструкции имеем покрытие компакта $(5/3)\mathbf{Q} \setminus X^\circ$, состоящее из квадратов множества $\mathcal{Q}^{(n)}$ для последнего номера n , пересекающих $(5/3)\mathbf{Q} \setminus X^\circ$, и из всех зафиксированных ранее “хороших” квадратов; покрытие обозначим **Cover** (в результате дополнительной конструкции покрытие **Cover** будет преобразовано в нужное покрытие **Cover1**).

В силу построения для покрытия **Cover** выполнены оценки (5.19), (5.20).

$$\sum_{\{j|Q_j \in \mathbf{Cover}\}} s(Q_j) \mathcal{M}^m \left(\frac{5}{3} Q_j^\circ \setminus X \right) \leq A \sum_l c_v(h_{2,1})_l, \quad (5.19)$$

где в левой части $s(Q_j)$ – длины сторон квадратов Q_j , а в правой части сумма берется по всем построенным функциям $h_{2,1}$, соответствующим “хорошим” квадратам покрытия **Cover**.

Действительно, для суммы по “хорошим” квадратам Q_j оценка (5.19) следует из условия (ii) леммы 5.8 и очевидной оценки $\mathcal{M}^m((5/3)Q_j^\circ \setminus X) \leq (5/3)(s(Q_j))^m$, а для суммы по “плохим” квадратам – из второго условия остановки и оценки (5.15), так как на каждом шаге делятся только “плохие” квадраты, и соответствующая сумма $s(Q_j) \mathcal{M}^m((5/3)Q_j^\circ \setminus X)$ уменьшается не менее чем в 2 раза.

Для произвольного квадрата D с длиной стороны $s(D)$ имеем

$$\sum_{\{j|Q_j \in \mathbf{Cover}, Q_j \subset D\}} s(Q_j) \mathcal{M}^m \left(\frac{5}{3} Q_j^\circ \setminus X \right) \leq A(s(D))^{1+m}. \quad (5.20)$$

Действительно, пусть D – двоичный квадрат, $s(D) \leq \delta$, n – первый номер, для которого существует квадрат $Q \in \mathcal{Q}^{(n)}$, содержащийся в D ; тогда

$s(D)/s(Q) \leq N$, и если n – номер последнего шага, то оценка (5.20), очевидно, выполняется (с постоянной $A = A(N)$), причем, напомним, что N зависит только от m). Если же номер n не последний, то оценка (5.20) по индукции следует из (5.15), так как делятся только “плохие” квадраты. Оценка (5.20) для произвольного квадрата D следует из такой же оценки для двоичного квадрата с длиной стороны, не большей δ .

В следующем замечании разъясним значение оценок (5.19), (5.20) и необходимость дополнительной части конструкции.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Смысл оценки (5.19) в следующем. Если взять функцию G_v^2 как сумму всех построенных функций $h_{2,1}$, то (после построения разбиения единицы по покрытию **Cover**) из (5.19) легко получить утверждение (2) леммы 5.7, а утверждения (1) и (3) очевидны. Ситуация с утверждением (4) леммы 5.7 сложнее: оценка (5.20) здесь необходима, но не достаточна, так как в покрытии **Cover** кратность пересечения увеличенных квадратов $(5/3)Q_j^o$ может быть произвольно большой. Цель дополнительной части конструкции – увеличив некоторые квадраты покрытия **Cover**, добиться контроля над указанной кратностью пересечения, “не испортив” оценки (5.19), (5.20) (см. условия (1) и (4) леммы 5.10).

Конструкция: дополнительная часть. Пусть $\delta_{\min}$ – минимальная длина стороны квадратов покрытия **Cover**, D – произвольный квадрат из **Cover**; построим для D конечное множество двоичных квадратов $\text{halo}(D)$. Соответствующее построение аналогично проведенному в [17; п. 2.3].

Положим $D^{(0)} = D$, $D^{(1)}$ – множество, состоящее из D и всех двоичных квадратов с длиной стороны $s(D)/2$, не содержащихся в D , но касающихся D ; аналогично, при $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ множество $D^{(n)}$ состоит из всех квадратов $D^{(n-1)}$ и всех двоичных квадратов с длиной стороны $s(D)/2^n$, не содержащихся в квадратах $D^{(n-1)}$, но касающихся их. Возьмем $\text{halo}(D) = D^{(n)}$, где n – максимальный номер, такой, что для всех квадратов $Q \in D^{(n)}$ имеем $s(Q) \geq \delta_{\min}$.

Отметим очевидные свойства $\text{halo}(D)$:

- 1) если квадраты Q и Q' из $\text{halo}(D)$ касаются, то отношение $s(Q)/s(Q')$ может принимать значения только $1/2$, 1 или 2 ;
- 2) $\text{halo}(D)$ содержит D (если $s(D) = \delta_{\min}$, то $\text{halo}(D) = D$), при этом все квадраты $\text{halo}(D)$ содержатся в $3D$;
- 3) сумма $(s(Q_j))^{1+m}$ по всем квадратам $Q_j \in \text{halo}(D)$ не превосходит величины $A(s(D))^{1+m}$, где $A = A(m)$ (что легко показать суммированием геометрической прогрессии со знаменателем $(1/2)^m$).

Возьмем множество всех квадратов $\text{halo}(D)$ для всех $D \in \mathbf{Cover}$; исключим из этого множества все квадраты, которые не являются максимальными по включению (т.е. содержатся в других) или не пересекают компакт $(5/3)\mathbf{Q} \setminus X^o$. Множество всех оставшихся (не исключенных) квадратов образует покрытие **Cover1** компакта $(5/3)\mathbf{Q} \setminus X^o$, нужное для доказательства леммы 5.7. Дополнительная часть конструкции завершена.

Пусть $\mathcal{Q}'_b$ – множество “плохих” квадратов покрытия **Cover** (длина стороны каждого из них минимальна и равна $\delta_{\min}$); $\mathcal{Q}'_g$ – множество “хороших” квадратов покрытия **Cover**. В силу построения множество **Cover1** состоит из трех попарно непересекающихся частей:

- 1) $\mathcal{Q}_b$ – подмножество $\mathcal{Q}'_b$;
- 2) $\mathcal{Q}_g$ – подмножество $\mathcal{Q}'_g$;
- 3) $\mathcal{Q}_h = \mathbf{Cover1} \setminus (\mathcal{Q}_b \cup \mathcal{Q}_g)$; квадраты из $\mathcal{Q}_h$ принадлежат объединению $\bigcup_{\{D|D \in \mathcal{Q}'_g\}} \text{halo}(D)$.

ЛЕММА 5.10. *Имеет место следующее:*

- (1) если $\aleph(\cdot)$ – характеристическая функция, то

$$\left\| \sum_{\{j|Q_j \in \mathbf{Cover1}\}} \aleph_{(9/4)Q_j} \right\| \leq 12;$$

- (2) выполняется неравенство

$$\sum_{\{j|Q_j \in \mathcal{Q}_h\}} (s(Q_j))^{1+m} \leq A_1 \sum_{\{j|Q_j \in \mathcal{Q}_g\}} (s(Q_j))^{1+m};$$

- (3) пусть D – произвольный двоичный квадрат, тогда

$$\sum_{\{j|Q_j \in \mathcal{Q}_h, Q_j \subset D\}} (s(Q_j))^{1+m} \leq A_2 (s(D))^{1+m};$$

- (4) для покрытия **Cover1** сохраняются оценки (5.19), (5.20) с несколько увеличенной по сравнению с **Cover** постоянной A (с учетом замены соответствующих кубов покрытия).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (1) следует из свойства 1) $\text{halo}(D)$ и того, что кратность пересечения двоичных квадратов одного размера не превосходит 4.

Рассмотрим оценку (2). Предварительно заметим, что каждый квадрат из $\mathcal{Q}_h$, принадлежащий по определению $\bigcup_{\{D|D \in \mathcal{Q}'_g\}} \text{halo}(D)$, принадлежит также $\bigcup_{\{D|D \in \mathcal{Q}'_g\}} \text{halo}(D)$, где, напомним, $\mathcal{Q}'_g$ и $\mathcal{Q}_g$ – множества “хороших” квадратов покрытий **Cover** и **Cover1** соответственно, $\mathcal{Q}_g \subset \mathcal{Q}'_g$. (Действительно, из того, что квадрат $D_0 \in \mathcal{Q}'_g \setminus \mathcal{Q}_g$ не является в $\bigcup_{\{D|D \in \mathbf{Cover}\}} \text{halo}(D)$ максимальным по включению, в силу определения $\text{halo}(\cdot)$ следует, что максимальным по включению не может быть и никакой квадрат из $\text{halo}(D_0)$.) Поэтому оценка (2) следует из свойства 3) $\text{halo}(D)$.

Рассмотрим оценку (3). Для всех квадратов Q_j , каждый из которых принадлежит $\text{halo}(Q)$ подходящего квадрата $Q \in \mathcal{Q}_g$ такого, что $Q \subset D$, оценка (3) следует из соизмеримости $\mathcal{M}^m((5/3)Q^o \setminus X)$ и $(s(Q))^m$ для “хороших” квадратов, (5.20) и свойства 3) $\text{halo}(Q)$.

Каждый из остальных квадратов Q_j в силу построения принадлежит $\text{halo}(Q)$ для квадрата Q , касающегося границы D , причем $s(Q) \leq 2s(D)$. Ясно, что сумма $(s(Q))^{1+m}$ по всем таким квадратам Q не превосходит $A(s(D))^{1+m}$, и в силу свойства 3) $\text{halo}(Q)$ оценка (3) доказана.

Утверждение (4) леммы 5.10 следует из доказанных выше оценок (2), (3). Действительно, в силу (2), соизмеримости $\mathcal{M}^m((5/3)Q^o \setminus X)$ и $(s(Q))^m$ для “хороших” квадратов и (5.19) имеем

$$\sum_{\{j|Q_j \in \mathcal{Q}_h\}} (s(Q_j))^{1+m} \leq A_1 \sum_{\{j|Q_j \in \mathcal{Q}_g\}} (s(Q_j))^{1+m} \leq A \sum_{\{j|Q_j \in \mathcal{Q}_g\}} c_v(h_{2,1})_j,$$

откуда следует сохранение (5.19). Сохранение (5.20) следует из оценки (3). Лемма 5.10 доказана.

Завершим доказательство леммы 5.7. Построим разбиение единицы $\{\varphi_j\}$ из леммы 2.2, соответствующее покрытию $\{Q_j(a_j, s_j)\} = \mathbf{Cover1}$; построим семейство локализаций $\{g_j = V_{\varphi_j} g\}$, где $g = \sum_j g_j$.

В силу леммы 5.3 для каждой функции g_j построим функцию $\Psi_j \in BC^m$ такую, что $\text{Spt}(\bar{\partial}^2 \Psi_j) \subset ((5/3)Q_j^o \setminus X)$, $c_0(g_j) = c_0(\Psi_j)$, $\omega^m(\Psi_j, \infty) \leq A\varepsilon_1(s_j)$ и $\|\Psi_j\| \leq A(s_j)^m \varepsilon_1(s_j)$, причем для разностей $r_j = g_j - \Psi_j$ имеют место оценки леммы 5.4.

Возьмем $G_v^1 = \sum_{\{j|Q_j \in \mathbf{Cover1}\}} \Psi_j$ и $\widetilde{G}_v^2 = \varepsilon_1(\delta) \sum_{\{j|Q_j \in \mathcal{Q}_g\}} (h_{2,1})_j$. В силу определения Ψ_j , условий (i) и (iii) леммы 5.8 для функций G_v^1 и $\widetilde{G}_v^2$ имеют место утверждения (1) и (3) леммы 5.7.

В силу утверждения (ii) леммы 5.8, оценки (5.19), утверждения (2) леммы 5.4 и утверждения (4) леммы 5.10 для G_v^1 и $G_v^2 = A_1 \widetilde{G}_v^2$ при подходящем $A_1 > 0$ имеет место утверждение (2) леммы 5.7.

Осталось доказать утверждение (4) леммы 5.7. Сначала рассмотрим функцию G_v^1 ; очевидно, достаточно установить (4) для функции $g - G_v^1 = \sum_j r_j$.

Докажем, что

$$\left\| \sum_j r_j \right\| \leq A\varepsilon_1(\delta) \delta^m. \quad (5.21)$$

Зафиксируем произвольное $z \in \mathbb{C}$ и оценим сверху $\sum_j |r_j(z)|$; можем считать, что $z \in 5\mathbf{Q}$, иначе оценка $\sum_j |r_j(z)| \leq A\varepsilon_1(\delta) \delta^m$ очевидна в силу (5.5) и (5.20).

В силу утверждения (1) леммы 5.10 число квадратов $Q_j \in \mathbf{Cover1}$ таких, что $z \in (9/4)Q_j$, не превосходит 12, поэтому в силу леммы 5.4 сумма $|r_j(z)|$ по всем таким квадратам не превосходит $A\varepsilon_1(\delta) \delta^m$.

Рассмотрим сумму $|r_j(z)|$ по всем остальным квадратам $Q_j \in \mathbf{Cover1}$, т.е. таким, что $z \notin (9/4)Q_j$. Заметим, что для каждого Q_j расстояние от произвольной точки $a'_j \in 2Q_j$ до z соизмеримо с расстоянием от центра a_j квадрата Q_j до z , причем вне $2Q_j$ для функций r_j имеют место оценки (5.5).

Поэтому из (5.20) с учетом утверждения (4) леммы 5.10 вытекает следующее. Пусть $O_\iota(z)$ – множество всех квадратов Q_j таких, что расстояние от a_j до z заключено в пределах $[2^\iota, 2^{\iota+1}]$, где $\iota \in \mathbb{Z}$, причем $2^\iota \leq 5\delta$. Тогда

$$\sum_{\{j|Q_j \in O_\iota(z)\}} |r_j(z)| \leq A\varepsilon_1(\delta) 2^{-\iota} \sum_{\{j|Q_j \in O_\iota(z)\}} s_j \mathcal{M}^m\left(\frac{5}{3}Q_j^o \setminus X\right) \leq A_1 \varepsilon_1(\delta) 2^{\iota m}; \quad (5.22)$$

суммируя по всем соответствующим ι , получим, что

$$\sum_j |r_j(z)| \leq A_1 \varepsilon_1(\delta) \sum_{\{\iota \in \mathbb{Z} | 2^\iota \leq 5\delta\}} 2^{\iota m} \leq A \varepsilon_1(\delta) \delta^m.$$

Оценка (5.21) доказана.

Теперь докажем оценку

$$\omega^m \left(\sum_j r_j, \infty \right) \leq A \varepsilon_1(\delta). \quad (5.23)$$

Рассуждаем так же, как при доказательстве (5.21). Зафиксируем произвольные точки $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq w$.

1. Пусть P_1 – множество всех квадратов $Q_j \in \mathbf{Cover1}$, для которых $(9/4)Q_j$ пересекает множество $\{z\} \cup \{w\}$. Так как число квадратов из P_1 ограничено сверху абсолютной постоянной, в силу лемм 2.1 и 5.3 для суммы по всем квадратам из P_1 имеем оценку (5.23).

2. Пусть $\iota_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что $2^{\iota_0} \leq |z - w| < 2^{\iota_0+1}$; P_2 – множество всех квадратов $Q_j \in \mathbf{Cover1} \setminus P_1$ таких, что выполнена оценка

$$\min(|a_j - z|, |a_j - w|) \leq 10|z - w|.$$

Так как при этом в силу неравенства треугольника

$$\max(|a_j - z|, |a_j - w|) \leq 11|z - w|,$$

то в силу (5.22) при суммировании по индексам j квадратов P_2 (и, следовательно, по соответствующим ι) имеем

$$\sum_j |r_j(z) - r_j(w)| \leq \sum_j (|r_j(z)| + |r_j(w)|) \leq A_2 \varepsilon_1(\delta) \sum_{\{\iota | \iota \leq \iota_0\}} 2^{\iota m} \leq A_3 \varepsilon_1(\delta) |z - w|^m.$$

3. Пусть $P_3 = \mathbf{Cover1} \setminus (P_1 \cup P_2)$. Аналогично (5.22) в силу (5.5) и (5.20) получим

$$\sum_{\{j | Q_j \in O_\iota(z)\}} |\nabla r_j(z)| \leq A_2 \varepsilon_1(\delta) 2^{\iota(m-1)} \quad (5.24)$$

и аналогичную оценку для $|\nabla r_j(w)|$.

С учетом неравенства $\min(|a_j - z|, |a_j - w|) > 10|z - w|$ при суммировании по индексам j квадратов P_3 отсюда следует

$$\begin{aligned} \sum_j |r_j(z) - r_j(w)| &\leq A_3 |z - w| \sum_j \max_{\{\xi | \xi \in [z, w]\}} |\nabla r_j(\xi)| \\ &\leq A_4 |z - w| \varepsilon_1(\delta) \sum_{\{\iota | \iota \geq \iota_0\}} 2^{\iota(m-1)} \leq A_5 \varepsilon_1(\delta) |z - w|^m. \end{aligned}$$

Оценка (5.23) доказана.

Теперь рассмотрим функцию G_v^2 . Для завершения доказательства леммы 5.7 осталось доказать оценки

$$\left\| \sum_j (h_{2,1})_j \right\| \leq A\delta^m, \quad \omega^m\left(\sum_j (h_{2,1})_j, \infty\right) \leq A.$$

Эти оценки доказываются аналогично (5.21) и (5.23) (даже проще), так как в силу леммы 5.8 выполнена оценка $\omega^m((h_{2,1})_j, \infty) \leq A$, а вне квадратов $2Q_j$ имеют место оценки

$$|(h_{2,1})_j(z)| \leq A \frac{(s_j)^{1+m}}{|z - a_j|}, \quad |\nabla(h_{2,1})_j(z)| \leq A \frac{(s_j)^{1+m}}{|z - a_j|^2},$$

и в силу (5.20) для произвольного квадрата D выполнено неравенство

$$\sum_{\{j|Q_j \in \mathcal{Q}_g, Q_j \subset D\}} (s_j)^{1+m} \leq A(s(D))^{1+m}.$$

Лемма 5.7 доказана.

Тем самым, доказательство импликаций (b) $\implies$ (a) в лемме 1.1 и теореме 1 при $m \in (0, 1)$ завершено.

Таким образом, доказательство теоремы 1 при $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$ завершено.

§ 6. Доказательство теоремы 1 для случая $m = 1$

Установим аналог лемм 2.1 и 4.1 для $m = 1$.

ЛЕММА 6.1. Пусть $\varphi \in C^1(B(a, r))$, $\text{Spt } \varphi \subset B(a, r) = B$. Тогда для любой функции $f \in C^1(\overline{B})$ локализация $V_\varphi(f) \in BC^1(\mathbb{C})$ корректно определена и верна оценка

$$\|V_\varphi(f)\|'_1 \leq A_1 \omega_{\overline{B}}(\nabla^c f, r) r \|\varphi\|'_1. \quad (6.1)$$

В частности, в правой части (6.1) можно вместо $r \|\varphi\|'_1$ взять $r^2 \|\varphi\|'_2$, если $\varphi \in C_0^2(B(a, r))$. Для коэффициентов (2.4) разложения функции $V_\varphi(f)$ в ряд Лорана (2.3) справедливы оценки

$$\begin{aligned} & |b_n(V_\varphi(f), a)| + |c_n(V_\varphi(f), a)| \\ & \leq A_2(n+1) \omega_{\overline{B}}(\nabla^c f, r) r^{n+1} \|\varphi\|'_1 \varkappa_*^1(B(a, r) \cap \text{Spt}(\overline{\partial}^2 f)). \end{aligned} \quad (6.2)$$

В частности, при $|z - a| > 2r$ справедливы оценки

$$|\nabla^c V_\varphi(f)(z)| \leq A_3 \omega_{\overline{B}}(\nabla^c f, r) r \|\varphi\|'_1 \frac{\varkappa_*^1(B(a, r) \cap \text{Spt}(\overline{\partial}^2 f))}{|z - a|}. \quad (6.3)$$

Обратим внимание, что полученное в последней лемме уточнение хорошо известных оценок [3; лемма 2.1] и [6; лемма 4.2] весьма существенно при доказательстве (a) $\implies$ (b) теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.1. По теореме Уитни продолжим f с $\bar{B}$ до функции $f \in BC^1(\mathbb{C})$ с условием $\omega(\nabla^c f, r) \leq A\omega_{\bar{B}}(\nabla^c f, r)$. Из соображений регуляризации достаточно установить надлежащие оценки для $f \in C^\infty(\mathbb{C})$, $\varphi \in C_0^\infty(B)$. Нетрудно видеть, что при этом $V_\varphi(f) \in C^\infty(\mathbb{C})$. Сначала оценим $\|V_\varphi(f)\|'_{2B,1}$. Фиксируем $z \in 2B$ и определим

$$F_z(w) = f(w) - f(z) - \partial f(z)(w - z) - \bar{\partial} f(z)(\bar{w} - \bar{z}).$$

При $w \in 2B$ и $M = \omega_{\bar{B}}(\nabla^c f, r)$ имеем

$$|F_z(w)| \leq AM|w - z|, \quad |\nabla_w^c F_z(w)| \leq AM, \quad \nabla_w^c F_z|_{w=z} = 0. \quad (6.4)$$

При этом (поскольку $\bar{\partial}_w^2 F_z(w) = \bar{\partial}^2 f(w)$)

$$\nabla_z^c V_\varphi(f)(z) = -\langle \nabla_w^c E(w - z), \varphi(w) \bar{\partial}_w^2 F_z(w) \rangle.$$

Действуя обобщенной вектор-функцией $\nabla_w^c E(w - z)$ на обе части равенства

$$\bar{\partial}_w^2 (\varphi(w) F_z(w)) = F_z(w) \bar{\partial}^2 \varphi(w) + \varphi(w) \bar{\partial}_w^2 F_z(w) + 2\bar{\partial} \varphi(w) \bar{\partial}_w F_z(w),$$

учитывая (5.1) и равенство $\bar{\partial}_w^2 \nabla_w^c E(w - z) = \nabla_w^c \delta(w - z)$ (где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака), получаем

$$\begin{aligned} & \langle \nabla_w^c E(w - z), \varphi(w) \bar{\partial}_w^2 F_z(w) \rangle \\ &= -\langle \nabla_w^c E(w - z), F_z(w) \bar{\partial}^2 \varphi(w) \rangle - 2\langle \nabla_w^c E(w - z), \bar{\partial} \varphi(w) \bar{\partial}_w F_z(w) \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку

$$F_z(w) \bar{\partial}^2 \varphi(w) = \bar{\partial}_w (F_z(w) \bar{\partial} \varphi(w)) - \bar{\partial}_w F_z(w) \bar{\partial} \varphi(w),$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \langle \nabla_w^c E(w - z), \varphi(w) \bar{\partial}_w^2 F_z(w) \rangle &= \langle \bar{\partial}_w \nabla_w^c E(w - z), F_z(w) \bar{\partial} \varphi(w) \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_w^c E(w - z), \bar{\partial} \varphi(w) \bar{\partial}_w F_z(w) \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, нам достаточно оценить следующие выражения:

$$\langle \partial_w \bar{\partial}_w E(w - z), F_z(w) \bar{\partial} \varphi(w) \rangle, \quad (6.5)$$

$$\langle \partial_w E(w - z), \bar{\partial} \varphi(w) \bar{\partial}_w F_z(w) \rangle, \quad \langle \bar{\partial}_w E(w - z), \bar{\partial} \varphi(w) \bar{\partial}_w F_z(w) \rangle. \quad (6.6)$$

Абсолютная величина выражений в (6.6), очевидно, не превосходит значения

$$A\|\varphi\|'_1 M \int_B |z - w|^{-1} d\Lambda(w) \leq A_1 M \|\varphi\|'_1 r.$$

Оценка (6.5) на первый взгляд представляется более деликатной, поскольку

$$|\partial_w \bar{\partial}_w E(w - z)| \simeq |w - z|^{-2}.$$

Как хорошо известно (и нетрудно проверить), свертка распределения $\partial\bar{\partial}E$ с финитной функцией $\psi \in C^1(\mathbb{C})$ в точке z задается интегралом

$$\int_{\mathbb{C}} \partial_w \bar{\partial}_w E(w - z) \psi(w) d\Lambda(w)$$

при условии, что $\psi(w)$ стремится к нулю достаточно быстро при $w \rightarrow z$. В нашем случае функция $\psi(w) = F_z(w) \bar{\partial}\varphi(w)$ стремится к нулю не медленнее, чем $|w - z|$ при $w \rightarrow z$. Таким образом, последний интеграл абсолютно сходится и

$$\begin{aligned} & \int |\partial_w \bar{\partial}_w E(w - z) F_z(w) \bar{\partial}\varphi(w)| d\Lambda(w) \\ & \leq AM \|\varphi\|'_1 \int_B |w - z|^{-1} d\Lambda(w) \leq A_1 M \|\nabla\varphi\| r. \end{aligned}$$

Для оценки $\nabla^c V_\varphi(f)(z)$ при $z \notin 2B$ используем равенство

$$\nabla_z^c V_\varphi(f)(z) = -\langle \nabla_w^c E(w - z), \varphi(w) \bar{\partial}_w^2 F_a(w) \rangle$$

и, после надлежащего интегрирования по частям, делаем стандартные оценки.

Для доказательства (6.2) используем (2.4) при $T = \varphi \bar{\partial}^2 f$, оценку 6.1 с заменой $\varphi(z)$ на $\overline{(z - a)}(z - a)^{n-1} \varphi(z)$ и $(z - a)^n \varphi(z)$ и определение емкости $\varkappa_*^1$.

Оценка (6.3) следует из почленного дифференцирования (взятия ∇^c) в (2.3), неравенств (6.2) и суммирования геометрической прогрессии. Лемма 6.1 доказана.

Докажем (a) $\implies$ (c) в теореме 1 при $m = 1$. Фиксируем произвольный круг $B = B(a, \delta)$ и определим функцию $\psi = \psi_\delta^a$ как в (3.1). Пусть (пока) $f \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ является бианалитической в некоторой окрестности U компакта X . Локализация $F = V_\psi(f)$ регулярно определена (интеграл $\int E(z - w) \psi(w) \bar{\partial}^2 f(w) d\Lambda(w)$ сходится абсолютно и после взятия частных производных у ядра $E(z - w)$), причем $F \in C^1(\mathbb{C})$. Выберем последовательность $\{\psi_l\}_{l \in \mathbb{N}}$, $\psi_l \in C^1(\mathbb{C})$ имеют компактный носитель в B , $\|\psi_l\|'_1 \leq 2\|\psi\|'_1 \leq 4/(\pi\delta^3)$, $\psi_l \rightarrow \psi$ равномерно на $\bar{B}$. Нетрудно видеть, что $F_l = V_{\psi_l} \rightarrow F$ по норме пространства $BC^1(\mathbb{C})$. По лемме 6.1 получаем

$$\|F_l\|'_1 \leq A\omega_{\bar{B}}(\nabla^c f, \delta) \delta \|\psi_l\|'_1 \leq \frac{A\omega_{\bar{B}}(\nabla^c f, \delta)}{\delta^2},$$

откуда $\|F\|'_1 \leq A\omega(\delta)/\delta^2$, где $\omega(\delta) = \omega_{\bar{B}}(\nabla^c f, \delta)$. Поскольку

$$\text{Spt}(\bar{\partial}^2 F_l) \subset \text{Spt}(\psi_l) \cap \text{Spt}(\bar{\partial}^2 f) \subset (B \setminus X),$$

по определению емкости $\varkappa_*^1(B \setminus X) = \varkappa^1(B \setminus X)$ (последнее равенство доказывается стандартной регуляризацией, как для аналитических емкостей) имеем

$$|\langle \bar{\partial}^2 F_l | 1 \rangle| \leq A\omega(\delta) \delta^{-2} \varkappa^1(B \setminus X).$$

Следовательно, учитывая равенства

$$\langle \bar{\partial}^2 F_l | 1 \rangle = \langle \bar{\partial}^2 f | \psi_l \rangle \rightarrow \langle \bar{\partial}^2 f | \psi \rangle = \langle \bar{\partial}^2 F | 1 \rangle,$$

мы получаем

$$|\langle \bar{\partial}^2 f \mid \psi \rangle| = |\langle \bar{\partial} f \mid \bar{\partial} \psi \rangle| \leq A\omega(\delta)\delta^{-2}\varkappa^1(B \setminus X).$$

Остается заметить, что по формуле Грина

$$|\langle \bar{\partial} f, \bar{\partial} \psi \rangle| = \frac{2}{\pi\delta^4} \left| \int_B \bar{\partial} f(z)(z-a) d\Lambda(z) \right| = \frac{1}{\pi\delta^4} \left| \oint_{\partial B} f(z)(z-a) dz \right|,$$

и свести общий случай $f \in BC^1$ к рассмотренному $f \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ стандартной регуляризацией.

Теперь мы можем установить следующий факт.

ЛЕММА 6.2. *Утверждения лемм 3.1, 3.6 и 3.7 справедливы и при $m = 1$.*

Доказательство проходит по той же схеме, что и при $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$, нужно только в соответствующих местах пользоваться результатами леммы 6.1 и вместо леммы 3.5 применить следующую лемму.

ЛЕММА 6.3. *Пусть V – ограниченное множество в $\mathbb{C}$, $\varkappa = \varkappa^1(V) > 0$, $\{Q_j\}$ – семейство раздельных замкнутых квадратов со сторонами $s(Q_j) = \varkappa$, в совокупности покрывающих V . Пусть $V_j = 2Q_j \cap V$, $\varkappa_j = \varkappa^1(V_j)$. Тогда выполнена оценка $\sum_j \varkappa_j \leq A\varkappa$ с абсолютной константой $A > 0$.*

Лемма 6.3 аналогична лемме Витушкина [5; гл. 2, § 6, лемма 2]. Ее доказательство полностью идентично доказательству леммы 2.4 из [7; гл. 2, § 2], где нужно вместо леммы 2.3 воспользоваться следующим утверждением.

Для непустого ограниченного множества $U \subset \mathbb{C}$ положим

$$\mathfrak{A}^1(U) = \{g \in B\text{Lip}^1(\mathbb{C}) \mid \|g\|'_1 \leq 1, \text{Spt}(\bar{\partial}^2 g) \subset U, g = E * \bar{\partial}^2 g\}.$$

В условиях леммы 6.3 если $h_j \in \mathfrak{A}^1(V_j)$, то при всех $z \in \mathbb{C} \setminus 6Q_j$ справедлива оценка

$$|\nabla^c h_j(z)| \leq A \frac{\varkappa_j}{|z - a_j|},$$

где a_j – центр Q_j .

Это утверждение непосредственно вытекает из леммы 6.1 (оценки (6.3)), если взять $a = a_j$, $r = \sqrt{2}\varkappa$, $f = h_j$, $\varphi \in C_0^\infty(B(a_j, 2r))$, $\varphi(z) = 1$ на $B(a_j, r)$, $\|\varphi\|'_1 \leq 3/r$.

Нам остается доказать (b) $\implies$ (a) в лемме 1.1 при $m = 1$. Здесь практически полностью повторяется доказательство аналогичного утверждения для гармонических аппроксимаций (см. доказательство теоремы 5.1 в [6; § 5], случай плоскости). Мы наметим только основные моменты для согласования обозначений. Роль емкости $\varkappa(V)$ и соответствующего класса $\mathfrak{A}(V)$ в ее определении (см. формулу (2.2) в [6; § 2]) играют емкость

$$\varkappa_*^1(V) = \sup\{\langle \bar{\partial}^2 g \mid 1 \rangle \mid g \in \mathfrak{A}_*^1(V)\} \quad (6.7)$$

и соответствующий определяющий ее класс

$$\mathfrak{A}_*^1(V) = \{g \in BC^1(\mathbb{C}) \mid \|g\|'_1 \leq 1, \text{Spt}(\bar{\partial}^2 g) \subset V, g = E * \bar{\partial}^2 g\}$$

в формуле (2.8). Емкость $\varkappa_*^1(\cdot)$ (соответственно $\varkappa^1(\cdot)$) однородна порядка 1 и для нее нетрудно установить все основные свойства и оценки, известные для аналитической C -емкости $\alpha(\cdot)$ (соответственно аналитической емкости $\gamma(\cdot)$), см., например, [5; гл. 1]. Как сообщил нам К. Толса (в частном порядке), из основных результатов работ [18] (о сравнимости емкостей γ_+ и γ) и [19] (о сравнимости емкостей α_+ и α), а также из [20; теорема 1.1 и лемма 3.6] следует, что для произвольного ограниченного множества V в $\mathbb{C}$ имеем (с точностью до абсолютных констант)

$$\varkappa_*^1(V) \asymp \alpha(V) \asymp \varkappa_1(V), \quad \varkappa^1(V) \asymp \gamma(V) \asymp \varkappa'_1(V), \quad (6.8)$$

где $\varkappa_1(V)$ (соответственно $\varkappa'_1(V)$) – гармоническая C^1 - (соответственно Lip^1 -) емкость множества V в $\mathbb{C}$ (см., например, [1; п. 1.3]). В работах [18] и [19] найдена “метрическая” (в терминах так называемой кривизны мер) характеристика емкостей $\gamma(\cdot)$ и $\alpha(\cdot)$, в частности установлена их счетная субаддитивность.

Роль векторного коэффициента $\bar{c}_1$ из [6; § 4–5] (соответственно коэффициентов c_α при $|\alpha| = n \geq 1$) играет пара (b_1, c_1) (соответственно коэффициенты b_n и c_n) из разложения (2.3), (2.4). Отметим, что определение аналога гармонического центра (определение 4.3) и лемма 4.4 из [6; § 5] не потребуются. Фундаментальное решение Φ для лапласиана Δ заменяется на функцию E из (1.2).

В условиях (b) леммы 1.1 (мы можем взять $k = 2$) при каждом фиксированном $\delta \in (0, 1)$ сделаем (стандартное) разбиение единицы $\{B_j = B_j^\delta, \varphi_j = \varphi_j^\delta\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$ на $\mathbb{C}$, где при $j = (j_1, j_2)$ имеем $B_j = B(a_j, \delta)$, $a_j = (j_1\delta + i j_2\delta)$, $\varphi_j \in C_0^\infty(B_j)$, причем $\delta^2 \|\varphi_j\|_2' \leq A_1$. Будем считать, как и ранее, что $\omega(\nabla^c f, \delta) \leq \varepsilon(\delta)$. При $j \in \mathbb{Z}^2$ положим $f_j = f_j^\delta = V_{\varphi_j} f$. Легко показать, что $f = \sum f_j$, где последняя сумма конечна ($f_j = 0$, если $\text{Spt}(\varphi_j) \cap \text{Spt}(f) = \emptyset$). В приближении нуждаются только те f_j , для которых $\overline{B_j} \cap \partial X \neq \emptyset$. Совокупность таких индексов обозначим через $J = J^\delta$. По лемме 6.1 и условию (b) леммы 1.1 имеем

$$f_j \in BC^1(\mathbb{C}), \quad \|\nabla^c f_j\| \leq A\varepsilon(\delta),$$

$$|c_0(f_j)| = \left| \pi^{-1} \int_{B_j} f(z) \bar{\partial}^2 \varphi_j d\Lambda(z) \right| \leq A\varepsilon(\delta) \varkappa^1(G_j),$$

где $G_j = G_j^\delta = 2B_j \setminus X$ (в [6; § 5] было взято $G_j = B_j \setminus X$). Справедлив полный аналог леммы 5.3 из [6; § 5] (роль $\omega(\delta)$ играет $\varepsilon(\delta)$, $n = 2$ – размерность). Согласно определению $\varkappa_*^1(G_j) = \varkappa^1(G_j)$ найдутся функции $g_j = g_j^\delta = E * \bar{\partial}^2 g_j$ с условиями $\text{Spt}(\bar{\partial}^2 g_j) \subset G_j$ (так что все g_j – бианалитические в окрестности X), причем

$$c_0(g_j) = \pi^{-1} \langle \bar{\partial}^2 g_j | 1 \rangle = c_0(f_j), \quad g_j \in BC^1, \quad \|\nabla^c g_j\| \leq A\varepsilon(\delta).$$

Функции $\psi_j = \psi_j^\delta = f_j - g_j \in BC^1$ удовлетворяют условиям $\nabla^c \psi_j = O(1/z^2)$ при $z \rightarrow \infty$ и оценке $\|\nabla^c \psi_j\| \leq A_1 \varepsilon(\delta)$. Далее вводятся сокращенные обозначения и дается аналог определения 5.4 из [6]. При этом вместо (5.12) в [6; § 5] должно быть взято условие

$$|a_{j^1} - a_{j^3}| \geq k_1 \delta \quad \forall j^1 \in L_i^1 \quad \forall j^3 \in L_i^3, \quad (6.9)$$

где абсолютная константа $k_1 > 10$ будет фиксирована ниже (в конце § 6). Затем приводится процедура построения групп 5.5, доказываются аналоги лемм 5.6 и 5.7, как это сделано в [6; § 5]. Наконец, доказывается аналог леммы 5.8 из [6], в котором (у нас) индекс i принимает значение 1 (соответствующее горизонтальным цепям) или 2 (вертикальным цепям); мы обсудим случай $i = 2$ (другой случай рассматривается аналогично). Определим аналог функций (вертикальных “заготовок”) h^{13} из [6; (5.22)]. Для каждого $j \in \Gamma$ выберем $h_j \in 2\mathfrak{A}_*^1(G_j)$ с условием $c_0(h_j) = \varkappa_j = \varkappa_*^1(G_j)$. Пусть $T_j = \bar{\partial}^2 h_j$, так что $\varkappa_j = \langle T_j \mid 1 \rangle$. В обозначениях леммы 5.8 из [6] фиксируем $j^1 \in L_2^1$ и $j^3 \in L_2^3$, и положим при $\theta = 1$ и $\theta = 3$

$$B^\theta = B_{j^\theta}, \quad h^\theta = h_{j^\theta}, \quad T^\theta = \bar{\partial}^2 h_{j^\theta}, \quad a^\theta = a_{j^\theta}, \quad G^\theta = G_{j^\theta}, \quad \varkappa^\theta = \varkappa_{j^\theta}.$$

Положим $M = |a^1 - a^3|/\delta$ (в [6; (5.22)] аналогичный параметр обозначался через m). Пусть, для определенности, $0 < \varkappa^1 \leq \varkappa^3$ и $\varkappa^1 = \lambda \varkappa^3$. Определим

$$h^{13}(z) = h^{13}(j^1, j^3, z) = \frac{h^1(z) - \lambda h^3(z)}{M}. \quad (6.10)$$

Ясно, что $c_0(h^{13}) = 0$, причем

$$\begin{aligned} -(\pi M)b_1(h^{13}) &= \langle T^1 - \lambda T^3 \mid \bar{z} \rangle = \langle T^1 \mid \overline{z - a^1} \rangle + \langle T^1 \mid \bar{a^1} \rangle \\ &\quad - \lambda \langle T^3 \mid \overline{z - a^3} \rangle - \lambda \langle T^3 \mid \bar{a^3} \rangle \\ &= iM\delta\varkappa^1 + \langle T^1 \mid \overline{z - a^1} \rangle - \lambda \langle T^3 \mid \overline{z - a^3} \rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что $|\langle T^1 \mid \overline{z - a^1} \rangle| \leq A_4\delta\varkappa^1$, что непосредственно следует из оценки (6.1) при $r = 2\delta$, $f = h^1$, $\varphi(z) = \varphi_1(z)(\overline{z - a^1})$, где $\varphi_1 \in C_0^1(3B^1)$, $\varphi_1(z) = 1$ на $2B^1$ и $|\nabla\varphi_1| \leq 2/\delta$, а также из определения емкости $\varkappa_*^1(G_j)$. Точно так же $\lambda|\langle T^3 \mid \overline{z - a^3} \rangle| \leq A_4\delta\varkappa^1$. Следовательно, $b_1(h^{13}) = -i\pi^{-1}\delta\varkappa^1(1 + O(1/M))$. Аналогичное вычисление показывает, что $c_1(h^{13}) = -i\pi^{-1}\delta\varkappa^1(1 + O(1/M))$, откуда

$$(b_1(h^{13}), c_1(h^{13})) = -i\pi^{-1}\delta\varkappa^1 \left(1 + O\left(\frac{1}{M}\right), 1 + O\left(\frac{1}{M}\right) \right).$$

Для соответствующей горизонтальной “заготовки” h_-^{13} удастся сконструировать вектор-коэффициент

$$(b_1(h_-^{13}), c_1(h_-^{13})) = \pi^{-1}\delta\varkappa^1 \left(1 + O\left(\frac{1}{M}\right), -1 + O\left(\frac{1}{M}\right) \right).$$

Теперь фиксируем достаточно большое k_1 в (6.9) так, чтобы все встречающиеся $|O(1/M)|$ не превышали $1/4$. Аналог функции h_Γ из леммы 5.8 в [6] (с условиями $b_1(h_\Gamma) = b_1(\psi_\Gamma)$ и $c_1(h_\Gamma) = c_1(\psi_\Gamma)$) получается линейной комбинацией различных функций типа h^{13} и h_-^{13} . Все дальнейшие завершающие оценки полностью идентичны приведенным в [6; § 5] ((5.24)–(5.46) для плоского случая). Включение (b) $\implies$ (a) в лемме 1.1 при $m = 1$ доказано.

§ 7. Критерии C^m -приближаемости для классов функций

Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$. При $m \geq 0$ положим

$$J_0^m(X) = \{f \mid f \in BC^m(\mathbb{C}), f = 0 \text{ в некоторой окрестности } X\},$$

а через $J^m(X)$ обозначим замыкание $J_0^m(X)$ в $BC^m(\mathbb{C})$. При этом нетрудно показать, что

$$J_m(X) = \{f \in BC^m(\mathbb{C}) \mid \partial^\beta f|_X = 0 \text{ при } |\beta| \leq [m]\}.$$

Пространство $C_{\text{jet}}^m(X)$ (типа Уитни) определим как факторпространство $BC^m(\mathbb{C})/J^m(X)$ с соответствующей факторнормой. Точнее, каждая функция $f \in BC^m(\mathbb{C})$ единственным образом определяет элемент $f_X = f + J^m(X) \in C_{\text{jet}}^m(X)$ с нормой в $C_{\text{jet}}^m(X)$, равной $\|f_X\|_{m,X} = \inf\{\|f + g\|_m : g \in J^m(X)\}$. Аналогичным образом определяются пространства $B \text{Lip}_{\text{jet}}^m(X)$.

Эквивалентное определение пространств $C_{\text{jet}}^m(X)$ можно получить, используя вместо $\mathbb{C}$ любую фиксированную окрестность компакта X . В частности, для любой такой окрестности U и любой функции $g \in C^m(U)$ единственным образом определяется элемент $g_X \in C_{\text{jet}}^m(X)$ по формуле

$$g_X = \{f \in BC^m(\mathbb{C}) : \partial^\alpha(f - g)|_X \equiv 0 \text{ при } |\alpha| \leq [m]\}.$$

Указанные выше пространства можно определить “внутренним” способом, не выходя за пределы компакта X . Подробно эти факты, включая теорему Уитни о продолжении, изложены в [21; гл. VI].

Так как значения всех представителей f класса f_X совпадают на внутренности X° компакта X , то корректно определены пространства $A_2^m(X) = C_{\text{jet}}^m(X) \cap A_2(X^\circ)$. Обозначим через $R_2^m(X)$ замыкание в $C_{\text{jet}}^m(X)$ подпространства $\{f_X : f \text{ бианалитична в некоторой (своей) окрестности компакта } X\}$.

Следующий совокупный критерий (получен в [16] для $m \in (0, 1)$, в [3] для $m \in (1, 2)$, новый результат при $m = 1$) является непосредственным следствием теоремы 1. Он дает ответ на вопрос: при заданном $m \in (0, 2)$ для каких компактов X в $\mathbb{C}$ имеет место совпадение классов $A_2^m(X)$ и $R_2^m(X)$? Иными словами: когда простейшее необходимое условие C^m -бианалитической приближаемости ($f_X \in A_2^m(X)$) является одновременно и достаточным ($f_X \in R_2^m(X)$) для любого элемента $f_X \in A_2^m(X)$?

СЛЕДСТВИЕ 7.1. При $m \in (0, 2)$ следующие условия на компакт X эквивалентны:

- (а) $A_2^m(X) = R_2^m(X)$;
- (б) для всякой ограниченной области D в $\mathbb{C}$ справедливо равенство

$$\varkappa_*^m(D \setminus X^\circ) = \varkappa^m(D \setminus X);$$

- (с) найдутся $A > 0$ и $k \geq 1$ такие, что для каждого открытого круга $B(a, \delta)$ справедлива оценка

$$\varkappa_*^m(B(a, \delta) \setminus X^\circ) \leq A \varkappa^m(B(a, k\delta) \setminus X).$$

Таким образом, ввиду оценок (2.10) и (6.8) последний критерий приближаемости может быть для всех $m \in (0, 2)$ сформулирован в терминах геометрической теории меры.

Вывод следствия 7.1 из теоремы 1 проходит по стандартной схеме (см., например, [6; доказательство теоремы 6.1]).

Список литературы

- [1] М. Я. Мазалов, П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, “Условия C^m -приближаемости функций решениями эллиптических уравнений”, *УМН*, **67**:6(408) (2012), 53–100; англ. пер.: M. Ya. Mazalov, P. V. Paramonov, K. Yu. Fedorovskiy, “Conditions for C^m -approximability of functions by solutions of elliptic equations”, *Russian Math. Surveys*, **67**:6 (2012), 1023–1068.
- [2] A. G. O’Farrell, “Rational approximation in Lipschitz norms. II”, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, **79**:11 (1979), 103–114.
- [3] J. Verdera, “ C^m -approximation by solutions of elliptic equations, and Calderón–Zygmund operators”, *Duke Math. J.*, **55**:1 (1987), 157–187.
- [4] М. Я. Мазалов, “О равномерных приближениях бианалитическими функциями на произвольных компактах в $\mathbb{C}$ ”, *Матем. сб.*, **195**:5 (2004), 79–102; англ. пер.: M. Ya. Mazalov, “Uniform approximations by bianalytic functions on arbitrary compact subsets of $\mathbb{C}$ ”, *Sb. Math.*, **195**:5 (2004), 687–709.
- [5] А. Г. Витушкин, “Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений”, *УМН*, **22**:6(138) (1967), 141–199; англ. пер.: A. G. Vitushkin, “The analytic capacity of sets in problems of approximation theory”, *Russian Math. Surveys*, **22**:6 (1967), 139–200.
- [6] П. В. Парамонов, “О гармонических аппроксимациях в C^1 -норме”, *Матем. сб.*, **181**:10 (1990), 1341–1365; англ. пер.: P. V. Paramonov, “On harmonic approximation in the C^1 -norm”, *Math. USSR-Sb.*, **71**:1 (1992), 183–207.
- [7] J. Verdera, “Removability, capacity and approximation”, *Complex potential theory* (Montreal, PQ, 1993), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **439**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994, 419–473.
- [8] П. В. Парамонов, “Некоторые новые критерии равномерной приближаемости функций рациональными дробями”, *Матем. сб.*, **186**:9 (1995), 97–112; англ. пер.: P. V. Paramonov, “Some new criteria for uniform approximability of functions by rational fractions”, *Sb. Math.*, **186**:9 (1995), 1325–1340.
- [9] М. Я. Мазалов, “Критерий равномерной приближаемости гармоническими функциями на компактах в $\mathbb{R}^3$ ”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **279**, МАИК, М., 2012, 120–165; англ. пер.: M. Ya. Mazalov, “Criterion of uniform approximability by harmonic functions on compact sets in $\mathbb{R}^3$ ”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **279**:1 (2012), 110–154.
- [10] Л. Карлесон, *Избранные проблемы теории исключительных множеств*, Мир, М., 1971, 126 с.; пер. с англ.: L. Carleson, *Selected problems on exceptional sets*, Van Nostrand Math. Studies, **13**, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.–Toronto, Ont.–London, 1967, v+151 pp.
- [11] М. Я. Мазалов, “Критерий приближаемости гармоническими функциями в пространствах Липшица”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 40, Зап. научн. сем. ПОМИ, **401**, ПОМИ, СПб., 2012, 144–171; англ. пер.: M. Ya. Mazalov, “A criterion for approximability by harmonic functions in Lipschitz spaces”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **194**:6 (2013), 678–692.
- [12] П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, “О равномерной и C^1 -приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго

- порядка”, *Матем. сб.*, **190:2** (1999), 123–144; англ. пер.: P. V. Paramonov, K. Yu. Fedorovskiy, “Uniform and C^1 -approximability of functions on compact subsets of $\mathbb{R}^2$ by solutions of second-order elliptic equations”, *Sb. Math.*, **190:2** (1999), 285–307.
- [13] R. Harvey, J. Polking, “Removable singularities of solutions of linear partial differential equations”, *Acta Math.*, **125:1** (1970), 39–56.
- [14] М. С. Мельников, “Метрические свойства аналитической α -емкости и приближения аналитических функций с условием Гёльдера рациональными функциями”, *Матем. сб.*, **79(121):1(5)** (1969), 118–127; англ. пер.: M. S. Mel’nikov, “Metric properties of analytic α -capacity and approximation of analytic functions with a Hölder condition by rational functions”, *Math. USSR-Sb.*, **8:1** (1969), 115–124.
- [15] Дж. Вердера, М. С. Мельников, П. В. Парамонов, “ C^1 -аппроксимация и продолжение субгармонических функций”, *Матем. сб.*, **192:4** (2001), 37–58; англ. пер.: J. Verdera, M. S. Mel’nikov, P. V. Paramonov, “ C^1 -approximation and extension of subharmonic functions”, *Sb. Math.*, **192:4** (2001), 515–535.
- [16] J. Mateu, Yu. Netrusov, J. Orobitg, J. Verdera, “BMO and Lipschitz approximation by solutions of elliptic equations”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **46:4** (1996), 1057–1081.
- [17] J. Mateu, J. Orobitg, “Lipschitz approximation by harmonic functions and some applications to spectral synthesis”, *Indiana Univ. Math. J.*, **39:3** (1990), 703–736.
- [18] X. Tolsa, “Painlevé’s problem and the semiadditivity of analytic capacity”, *Acta Math.*, **190:1** (2003), 105–149.
- [19] X. Tolsa, “The semiadditivity of continuous analytic capacity and the inner boundary conjecture”, *Amer. J. Math.*, **126:3** (2004), 523–567.
- [20] X. Tolsa, “ L^2 -boundedness of the Cauchy transform implies L^2 -boundedness of all Calderón–Zygmund operators associated to odd kernels”, *Publ. Mat.*, **48:2** (2004), 445–479.
- [21] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973, 342 с.; пер. с англ.: Е. М. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970, xiv+290 pp.

Максим Яковлевич Мазалов

(Maksim Ya. Mazalov)

Национальный исследовательский университет

“Московский энергетический институт”, г. Смоленск

E-mail: maksimmazalov@yandex.ru

Поступила в редакцию

02.02.2014 и 24.04.2014

Петр Владимирович Парамонов

(Petr V. Paramonov)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: petr.paramonov@list.ru