Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Беляев, Об общем решении задачи о движении тяжелого твердого тела в случае Гесса, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 5, 5–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8335>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 14:42:12

УДК 517.927.75

А. В. Беляев

Об общем решении задачи о движении тяжелого твердого тела в случае Гесса

Решение уравнений Эйлера–Пуассона в случае Гесса представлено набором особых точек решения вместе с асимптотикой решения в этих точках. Указан полный список однозначных и конечнозначных решений случая Гесса. Получено представление для предельных периодических решений и найдено точное условие, при котором такие решения существуют.

Библиография: 25 названий.

Ключевые слова: первый интеграл, случай Гесса уравнений Эйлера–Пуассона, асимптотика решений, особые точки решений, аналитические функции.

DOI: 10.4213/sm8335

§ 1. Введение

Случай Гесса (см. [1]) задачи о движении тяжелого твердого тела интересен тем, что, несмотря на наличие четвертого интеграла для классических уравнений Эйлера–Пуассона, его решения в квадратурах не удалось получить никому. Тем не менее и без явного решения их свойства исследованы достаточно полно. Геометрическое истолкование искомого движения было дано Е. Н. Жуковским в [2], а П. А. Некрасов и Б. К. Млодзеевский в [3], [4] доказали, что при некоторых ограничениях решения могут быть асимптотическими. Представляет интерес также тот факт, что случай Гесса был переоткрыт Г. Г. Аппельротом (см. [5]), использовавшим идею С. В. Ковалевской (см. [6]) исследования на однозначность особых точек решений уравнений Эйлера–Пуассона. Отметим также, что П. А. Некрасовым в [7] показано, что решения в случае Гесса являются, вообще говоря, неоднозначными.

В настоящее время классическая задача о движении тяжелого твердого тела в первую очередь представляет интерес в связи тематикой интегрирования гамильтоновых систем методом ЛА-пары с параметром (см. монографию [8]). Для гамильтоновых систем на алгебрах Ли этот метод был представлен в работах [9]–[12].

К случаю Гесса метод ЛА-пары с параметром был применен в работе В. Драговича и Б. Гаджича [13]. Естественно, что этот метод не мог дать общего решения, так как оно не выражается в θ -функциях. Но все же были получены частные периодические решения и вдобавок сам факт существования ЛА-пары с параметром для, вообще говоря, неинтегрируемой задачи является весьма интересным.

Из современных работ, посвященных исследованию классического случая Гесса, необходимо также отметить статьи П. Любовецки и Х. Золадека [14], [15]. В этих работах исследуются топологические свойства потока на фазовом пространстве задачи Гесса и ее возмущения.

Итак, случай Гесса, как и общая задача о движении тяжелого твердого тела, является актуальным и сегодня.

Неоднозначность решений в случае Гесса и отсутствие интегрируемости по Лиувиллю (см. [16]) существенно усложняет исследование задачи, но, тем не менее, достаточно полное описание аналитических свойств решений возможно.

В настоящей статье мы рассматриваем аналитические свойства решений задачи Гесса, т.е. используем метод исследования, отличающийся от методов работ [13]–[15]. Мы представляем решения уравнений Эйлера–Пуассона в случае Гесса как аналитические функции времени с заданными асимптотиками в окрестностях заданных особых точек. Этот результат отличается от результатов классических и современных исследований тем, что в них не ставилась, а значит и не решалась, задача полного описания асимптотик всех особых точек данного решения вместе с указанием координат самих особых точек на комплексной временной плоскости. При этом необходимо отметить, что асимптотика особых точек имеет свободные параметры, однако для фиксированного решения они свободны лишь в одной заранее выбранной особой точке, а в остальных не являются свободными и связаны некоторой зависимостью. Эта зависимость может быть описана в терминах отображения, которое мы называем параметрическим отображением последования (см. [17]).

Мы полагаем, что можно считать, что найдено аналитическое решение дифференциальных уравнений, в данном случае задачи Гесса, если для данного решения или класса решений указаны координаты особых точек, асимптотики всех особых точек и соотношения, связывающие свободные параметры особых точек. Отметим, что представление такого же типа с тождественным отображением последования имеют и классические эллиптические функции (см. [18]), и это представление позволяет получить все известные как локальные, так и глобальные свойства. Хотя классическим решением дифференциального уравнения считается решение в квадратурах, оно не всегда эффективно с точки зрения исследования свойств полученного решения, если интегралы явно не берутся.

Чтобы показать содержательность полученного в статье представления решения задачи Гесса, мы доказываем полноту списка известных однозначных решений, а также доказываем, что конечнозначных решений, не являющихся однозначными, нет.

В статье мы используем представление решений задачи Гесса с помощью уравнения Риккати, позволяющее получить точную оценку для границы предельных периодических решений.

Выражаем искреннюю признательность А. Т. Фоменко за поддержку.

§ 2. Формулировка основных результатов

В соответствии с изложенным подходом основной результат статьи сформулируем следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. *Решение уравнений Эйлера–Пуассона*

$$\begin{cases} A\dot{p} = Ap \times p + \gamma \times r, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times p, \end{cases} \quad (2.1)$$

где

$$p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{C}^3, \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{C}^3, \\ A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3,$$

в случае Гесса, задаваемого условиями

$$A_1 B_{23} r_1^2 = A_2 B_{31} r_2^2, \quad r_3 = 0, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{I} = A_1 r_1 p_1 + A_2 r_2 p_2 = 0 \quad (2.3)$$

(индексы можно циклически переставлять), имеет следующее представление, выражающее переменные p_i , γ_i , $i = 1, 2, 3$, через функции $\mathcal{F}$, φ :

$$\begin{cases} p_i = k_i \sqrt{\mathcal{F}} \frac{\varphi}{1 + \varphi^2}, & i = 1, 2, \\ p_3 = k_3 \sqrt{\mathcal{F}} \frac{1 - \varphi^2}{1 + \varphi^2}, \\ \gamma_1 = \frac{1}{\mathcal{R}} (r_1 (\mathcal{H} - F) + r_2 (A_3 \dot{p}_3 - B_{12} p_1 p_2)), \\ \gamma_2 = \frac{1}{\mathcal{R}} (r_2 (\mathcal{H} - \mathcal{F}) - r_1 (A_3 \dot{p}_3 - B_{12} p_1 p_2)), \\ \gamma_3 = \frac{1}{r_2} (B_{23} p_2 p_3 - A_1 \dot{p}_1); \end{cases} \quad (2.4)$$

здесь

$$k_2 = -\frac{A_1 r_1}{A_2 r_2} k_1, \quad k_1 = 2 \sqrt{\frac{2B_{23}}{-B_{12}A_1}}, \quad k_3 = \sqrt{\frac{2}{A_3}}, \\ A_1 < A_3 < A_2, \quad B_{ij} = A_i - A_j.$$

Функция $\mathcal{F}$ является в общем случае эллиптической и задается дифференциальным уравнением

$$A_3^2 (\dot{\mathcal{F}})^2 = 2A_3 \mathcal{I} \mathcal{R} \mathcal{F} - 2A_3 \mathcal{F} (\mathcal{F} - \mathcal{H})^2 - \mathcal{M}^2 \mathcal{R} = A_3^2 \mathcal{P}_3(\mathcal{F}); \quad (2.5)$$

здесь $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \langle Ap, p \rangle + \langle \gamma, r \rangle$, $\mathcal{M} = \langle Ap, \gamma \rangle$, $\mathcal{I} = \langle \gamma, \gamma \rangle$, – первые интегралы исходной системы уравнений Эйлера–Пуассона, $\mathcal{R} = \langle r, r \rangle$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$ – $\mathbb{C}$ -скалярное произведение в $\mathbb{C}^3$.

Если корни полинома $\mathcal{P}_3(\mathcal{F})$ обозначить $x_1 < x_2 < x_3$, то

$$\mathcal{F}(t) = a \operatorname{dn}^2(\omega t, k) + b, \quad (2.6)$$

где

$$b = x_1, \quad a = x_3 - x_1, \quad k^2 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}, \quad \omega^2 = \frac{x_3 - x_1}{2A_3}.$$

Кроме того,

$$2\mathcal{M}\sqrt{\mathcal{R}} = x_1x_2x_3, \quad 2\mathcal{H} = x_1 + x_2 + x_3, \quad \mathcal{H}^2 - \mathcal{R}\mathcal{I} = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1. \quad (2.7)$$

Функция φ задается дифференциальным уравнением Риккати

$$\dot{\varphi} = \nu\sqrt{\mathcal{F}}\varphi - \frac{\kappa}{\mathcal{F}}(1 + \varphi^2), \quad \nu = -\frac{\sqrt{2B_{23}B_{31}}}{\sqrt{A_1A_2A_3}}, \quad \kappa = \frac{\mathcal{M}\sqrt{\mathcal{R}}}{4A_3}. \quad (2.8)$$

Нули и полюсы функции $\mathcal{F}$ являются особыми точками функции φ , в окрестностях которых ее асимптотика имеет вид:

– в окрестности одной из сопряженных точек $\mathcal{F} = 0$ –

$$\varphi = -i + ct^{1/2} + \frac{ic^2}{2}t - \left(\frac{ic\sigma}{16\kappa} + \frac{c^3}{4} + 2\nu i\sqrt{\kappa i} \right) t^{3/2} + \dots, \quad (2.9)$$

где $c \in \mathbb{C}$ – свободный параметр, определяющий решение из однопараметрического семейства решений на двумерном торе, задаваемом интегралами $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$, либо

$$\varphi = i + \nu i\sqrt{\kappa i}t^{3/2} + \dots; \quad (2.10)$$

– в окрестности точки $\mathcal{F} = \infty$ –

$$\varphi = ct^{\lambda\nu} + \dots + \frac{\kappa t^3}{2A_3(3 - \lambda\nu)} + \dots, \quad (2.11)$$

где $c \in \mathbb{C}$ – свободный параметр, определяющий решение из однопараметрического семейства решений на двумерном торе, задаваемом интегралами $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$, либо

$$\varphi = -\frac{2A_3(3 + \lambda\nu)}{\kappa t^3} - \frac{2H(3 + \nu\lambda)(A_3\nu - (3 + \nu\lambda)\lambda)}{3\kappa\lambda(5 + \lambda\nu)t} + \dots, \quad (2.12)$$

где $\lambda = \pm i\sqrt{2A_3}$.

В пределах двух соседних параллелограммов периодов эллиптической функции $\mathcal{F}$ свободные параметры асимптотик с различных особых точек связаны дробно-линейными преобразованиями, которые, вообще говоря, не коммутируют друг с другом в силу неоднозначности решений. Дробно-линейные преобразования, связывающие свободные параметры асимптотик произвольных особых точек $\mathcal{F} = \infty$, представляют собой композиции следующих преобразований:

$$\Phi_{\tau_1+} : c \rightarrow \frac{a_{11}c + a_{12}}{a_{21}c + a_{22}}, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 1, \quad (2.13)$$

$$\Phi_{\tau_1-} : c \rightarrow -\frac{a_{22}c - a_{21}}{a_{12}c - a_{11}}, \quad (2.14)$$

$$\Phi_{\tau_2+}: c \rightarrow \frac{b_{11}c + b_{12}}{b_{21}c + b_{22}}, \quad \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = 1, \quad (2.15)$$

$$\Phi_{\tau_2-}: c \rightarrow -\frac{b_{22}c - b_{21}}{b_{12}c - b_{11}}. \quad (2.16)$$

В формулах (2.13)–(2.16) τ_1 – вещественный, $i\tau_2$ – мнимый периоды функции $\mathcal{F}$,

$$\Phi_{\tau_1\pm}: s_{\pm} \rightarrow s_{\pm}, \quad \Phi_{\tau_2\pm}: s_{\mp} \rightarrow s_{\pm}$$

– параметрические отображения последования вдоль вещественной и мнимой осей соответственно; $s_{\pm}$ – особые точки $\mathcal{F} = \infty$ со значением параметра $\lambda = \pm i\sqrt{2A_3}$,

$$a_{11} = \delta^2 a_{22} \in \mathbb{R}, \quad a_{12} = -\delta^2 \bar{a}_{21}, \quad \delta^2 = \exp(2\pi\nu\sqrt{2A_3}), \quad (2.17)$$

$$b_{22} = \bar{b}_{11}, \quad b_{21} = -\delta^2 b_{12} \in i\mathbb{R}, \quad (2.18)$$

$$a_{11} - a_{22} = 2 \operatorname{Re} \left(a_{21} \frac{b_{11}}{b_{21}} \right). \quad (2.19)$$

Параметры $a_{12} \in \mathbb{C}$, $|b_{11}| \in \mathbb{R}$ с учетом зависимостей (2.13), (2.15) и (2.17)–(2.19) можно считать свободными, определяющими $\mathbb{R}$ -трехпараметрическое семейство вещественных инвариантных торов задачи случая Гесса, точно так же, как и параметры x_i , $i = 1, 2, 3$, или $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{I}$ при фиксированных параметрах твердого тела A_i , r_i , $i = 1, 2, 3$.

В случае $|a_{11} + a_{22}| > 2$ решения задачи Гесса предельно-периодичны, в случае $|a_{11} + a_{22}| < 2$ – квазипериодичны (см. [19]).

Доказательство теоремы 1 составляет основное содержание статьи, которую мы разбиваем на параграфы следующим образом. В § 3 изложены классические результаты, характеризующие случай Гесса, а также доказываются формулы (2.4)–(2.8). При этом уравнения (2.1) случая Гесса сводятся к уравнению Риккати и к системе линейных уравнений. Сам факт возможности такого сведения является хорошо известным классическим результатом (см. [4]), однако виды уравнений Риккати и соответственно линейных систем могут быть самыми различными, поэтому мы приводим соответствующий вывод. В § 4 доказываются формулы (2.9)–(2.12), а также приводятся асимптотики особых точек решений этого случая. В § 5 исследуется зависимость между параметрами асимптотик особых точек задачи Гесса, доказываются формулы (2.13)–(2.18) и, тем самым, завершается доказательство теоремы 1.

В § 6 в качестве приложения теоремы 1 мы доказываем теорему 2 о полном списке однозначных решений случая Гесса задачи о движении тяжелого твердого тела и предложение 9 о полном списке конечнозначных решений. В § 7 доказывается теорема 3 о квазипериодических и предельно-периодических решениях случая Гесса. Наконец, в § 8 в теореме 4 дается представление предельно-периодических решений и найдено точное условие, при выполнении которого эти решения существуют.

§ 3. Уравнения Эйлера–Пуассона в случае Гесса

В этом параграфе доказываются формулы (2.4)–(2.8) теоремы 1.

Классические уравнения Эйлера–Пуассона (2.1), описывающие движение тяжелого твердого тела, в случае Гесса, т.е. при условии (2.2)

$$A_1 B_{23} r_1^2 = A_2 B_{31} r_2^2, \quad r_3 = 0,$$

на параметры твердого тела имеют дополнительный четвертый интеграл:

$$\mathcal{I} = \langle Ap, r \rangle = 0, \quad (3.1)$$

кроме общих первых интегралов

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \langle Ap, p \rangle + \langle \gamma, r \rangle, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{M} = \langle Ap, \gamma \rangle, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{I} = \langle \gamma, \gamma \rangle, \quad (3.4)$$

где $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$ – $\mathbb{C}$ -скалярное произведение в $\mathbb{C}^3$.

Заметим, что четвертый интеграл сохраняется только на нулевой поверхности уровня самого интеграла и именно эта его особенность приводит к целому ряду необычных свойств случая Гесса.

Далее для определенности будем считать, что

$$A_1 < A_3 < A_2.$$

Введем функции $\mathcal{F} = \frac{1}{2} \langle Ap, p \rangle$, $\mathcal{G} = \frac{1}{2} \langle Ap, Ap \rangle$, для которых

$$\dot{\mathcal{F}} = \langle Ap \times p, p \rangle + \langle \gamma \times r, p \rangle = \langle \gamma \times r, p \rangle,$$

$$\dot{\mathcal{G}} = \langle Ap \times p, Ap \rangle + \langle \gamma \times r, Ap \rangle = \langle \gamma \times r, Ap \rangle.$$

Используя соотношения

$$\langle a, b \rangle \langle c, d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle + \langle a \times d, b \times c \rangle, \quad (3.5)$$

$$(a \times b) \times c = \langle a, c \rangle b - \langle b, c \rangle a, \quad (3.6)$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{F}} \mathcal{G} &= \langle Ap, Ap \rangle \langle \gamma \times r, p \rangle = \mathcal{F} \dot{\mathcal{G}} + \langle Ap \times (\gamma \times r), Ap \times p \rangle \\ &= \mathcal{F} \dot{\mathcal{G}} - \mathcal{M} \langle Ap \times p, r \rangle = \mathcal{F} \dot{\mathcal{G}} - \mathcal{M} \langle Ap, r \rangle = \mathcal{F} \dot{\mathcal{G}}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует, что $\mathcal{G}/\mathcal{F} = \text{const}$. Найдём значение этой константы:

$$\begin{aligned} A_1 p_1 r_1 + A_2 p_2 r_2 = 0 &\implies p_2 = -\frac{A_1 p_1 r_1}{A_2 r_2} \implies p_2^2 = \frac{A_1^2 p_1^2 r_1^2}{A_2^2 r_2^2} \\ &\implies \begin{cases} 2\mathcal{G} = A_1^2 p_1^2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) + A_3^2 p_3^2, \\ 2\mathcal{F} = A_1 p_1^2 \left(1 + \frac{A_1 r_1^2}{A_2 r_2^2}\right) + A_3 p_3^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Используя соотношение (2.2), получим

$$\begin{cases} 2\mathcal{G}B_{23} = A_1p_1^2(A_1B_{23} + A_2B_{31}) + A_3^2B_{23}p_3^2, \\ 2\mathcal{F}B_{23} = A_1p_1^2(B_{23} + B_{31}) + A_3B_{23}p_3^2, \end{cases}$$

откуда следует, что $\mathcal{G} = A_3\mathcal{F}$.

Введем обозначение $\mathcal{R} = \langle r, r \rangle$ и воспользуемся соотношениями (3.5), (3.6):

$$\begin{aligned} (\dot{\mathcal{G}})^2 &= \langle Ap, \gamma \times r \rangle \langle Ap, \gamma \times r \rangle = 2\mathcal{G} \langle \gamma \times r, \gamma \times r \rangle \\ &\quad - \langle Ap \times (\gamma \times r), Ap \times (\gamma \times r) \rangle = 2\mathcal{G} \langle (\gamma \times r) \times \gamma, r \rangle - \mathcal{M}^2\mathcal{R} \\ &= 2\mathcal{G}(\mathcal{T}\mathcal{R} - \langle \gamma, r \rangle^2) - \mathcal{M}^2\mathcal{R} = 2\mathcal{G}\mathcal{T}\mathcal{R} - 2\mathcal{G}(\mathcal{F} - \mathcal{H})^2 - \mathcal{M}^2\mathcal{R}. \end{aligned}$$

Итак, мы можем найти функции $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ из уравнения (2.5)

$$A_3^2(\dot{\mathcal{F}})^2 = 2A_3\mathcal{T}\mathcal{R}\mathcal{F} - 2A_3\mathcal{F}(\mathcal{F} - \mathcal{H})^2 - \mathcal{M}^2\mathcal{R}.$$

Рассмотрим следующее представление для $p(t)$ (см. (2.4)):

$$\begin{cases} p_i = k_i \sqrt{\mathcal{F}} \frac{\varphi}{1 + \varphi^2}, & i = 1, 2, \\ p_3 = k_3 \sqrt{\mathcal{F}} \frac{1 - \varphi^2}{1 + \varphi^2}, \end{cases}$$

где

$$k_2 = -\frac{A_1r_1}{A_2r_2}k_1, \quad k_1 = 2\sqrt{\frac{2B_{23}}{-B_{12}A_1}}, \quad k_3 = \sqrt{\frac{2}{A_3}}.$$

Представление мы выбираем таким образом, чтобы тождественно выполнялись условия $\langle Ap, r \rangle = 0$, $\langle Ap, p \rangle = 2\mathcal{F}$. Естественно, что при этом общее количество свободных переменных уменьшается на 2.

Используя имеющиеся интегралы, получим дифференциальное уравнение для φ :

$$A_1\dot{p}_1 = B_{23}p_2p_3 - r_2\gamma_3 \implies \gamma_3 = \frac{1}{r_2}(B_{23}p_2p_3 - A_1\dot{p}_1).$$

Из системы

$$\begin{cases} \gamma_1r_1 + \gamma_2r_2 = \mathcal{H} - \mathcal{F}, \\ \gamma_1r_2 - \gamma_2r_1 = A_3\dot{p}_3 - B_{12}p_1p_2 \end{cases}$$

найдем γ_1 и γ_2 (см. (2.4)):

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{\mathcal{R}}(r_1(\mathcal{H} - \mathcal{F}) + r_2(A_3\dot{p}_3 - B_{12}p_1p_2)), \\ \gamma_2 = \frac{1}{\mathcal{R}}(r_2(\mathcal{H} - \mathcal{F}) - r_1(A_3\dot{p}_3 - B_{12}p_1p_2)). \end{cases}$$

Заметим, что

$$A_1p_1r_2 - A_2p_2r_1 = A_1p_1r_2 + A_2r_1\frac{A_1r_1}{A_2r_2}p_1 = \frac{A_1p_1}{r_2}\mathcal{R},$$

и подставим имеющиеся представления переменных p_i , γ_i в интеграл момента $\mathcal{M}$. Мы получим

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{A_1 p_1}{r_2} (A_3 \dot{p}_3 - B_{12} p_1 p_2) + \frac{A_3 p_3}{r_2} (-A_1 \dot{p}_1 + B_{23} p_2 p_3) \\ &= \frac{A_1 A_3}{r_2} (p_1 \dot{p}_3 - \dot{p}_1 p_3) + \frac{p_2}{r_2} (A_3 B_{23} p_3^2 - A_1 B_{12} p_1^2) \\ &= \frac{A_1 A_3}{r_2} \left(\frac{p_3}{p_1} \right)' p_1^2 + \frac{2B_{23}}{r_2} \mathcal{F} p_2 \\ &= \frac{A_1 A_3}{r_2} k_1 k_3 \mathcal{F} \left(\frac{1 - \varphi^2}{\varphi} \right)' \frac{\varphi^2}{(1 + \varphi^2)^2} + \frac{2B_{23}}{r_2} k_2 \mathcal{F}^{3/2} \frac{\varphi}{1 + \varphi^2}.\end{aligned}$$

Наконец, поскольку

$$\left(\frac{1 - \varphi^2}{\varphi} \right)' = -\dot{\varphi} \frac{1 + \varphi^2}{\varphi^2},$$

мы получаем (см. (2.8))

$$\dot{\varphi} = \nu \sqrt{\mathcal{F}} \varphi - \frac{\kappa}{\mathcal{F}} (1 + \varphi^2), \quad \nu = -\frac{\sqrt{2B_{23}B_{31}}}{\sqrt{A_1 A_2 A_3}}, \quad \kappa = \frac{\mathcal{M} \sqrt{R}}{4A_3}. \quad (3.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 (см. [1]). Если $\mathcal{M} = 0$, то $\kappa = 0$ и уравнения (3.7) явно интегрируются.

Полагая $\varphi = \theta_1/\theta_2$, получим линейную систему для $\theta = (\theta_1, \theta_2)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\theta_2^2} (\dot{\theta}_1 \theta_2 - \theta_1 \dot{\theta}_2) &= \nu \sqrt{\mathcal{F}} \frac{\theta_1}{\theta_2} - \frac{\kappa}{\mathcal{F}} \left(1 + \frac{\theta_1^2}{\theta_2^2} \right) \\ \implies \dot{\theta}_1 \theta_2 - \theta_1 \dot{\theta}_2 &= \nu \sqrt{\mathcal{F}} \theta_1 \theta_2 - \frac{\kappa}{\mathcal{F}} (\theta_1^2 + \theta_2^2) \\ &= \left(\frac{\nu}{2} \sqrt{\mathcal{F}} \theta_1 - \frac{\kappa}{\mathcal{F}} \theta_2 \right) \theta_2 - \left(-\frac{\nu}{2} \sqrt{\mathcal{F}} \theta_2 + \frac{\kappa}{\mathcal{F}} \theta_1 \right) \theta_1 \\ \implies \begin{cases} \dot{\theta}_1 = \frac{\nu}{2} \sqrt{\mathcal{F}} \theta_1 - \frac{\kappa}{\mathcal{F}} \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = \frac{\kappa}{\mathcal{F}} \theta_1 - \frac{\nu}{2} \sqrt{\mathcal{F}} \theta_2. \end{cases} \quad (3.8)\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [7] П. А. Некрасов свел динамические уравнения в случае Гесса к уравнению Риккати, для которого записал линейную систему дифференциальных уравнений. Однако мы предпочитаем не пользоваться этим результатом, поскольку неизвестная величина этой линейной системы связана с исходными переменными (p, γ) дифференциальными соотношениями.

Как следует из классических результатов (см. [18]), функцию $\mathcal{F}$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (2.5), можно представить в виде (2.6):

$$\mathcal{F}(t) = a \operatorname{dn}^2(\omega t, k) + b.$$

Подставив это представление в дифференциальное уравнение (2.5) и выразив все эллиптические функции через $\operatorname{dn}^2(\omega t, k)$, приравняем коэффициенты

при $\text{dn}^{2n}(\omega t, k)$, $n = 0, \dots, 3$, к нулю. Мы получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 2A_3 \mathcal{T} \mathcal{R} b - 2A_3 b(b - \mathcal{H})^2 - \mathcal{M}^2 \mathcal{R} &= 0, \\ a^2 + 3ab - 2\mathcal{H}a + 3b^2 - 4\mathcal{H}b + \mathcal{H}^2 - \mathcal{R} \mathcal{T} &= 0, \\ 2A_3 \omega^2 - a &= 0, \quad ak^2 - 2a - 3b + 2\mathcal{H} = 0. \end{aligned}$$

Хотя параметр b удовлетворяет уравнению третьей степени (кстати, отметим, совпадающему с $\mathcal{P}_3(\mathcal{F}) = 0$), из трех корней только один подходит для рассматриваемого представления. В самом деле, дифференциальное уравнение (2.5) задает движение, только если

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \langle Ap, p \rangle > 0, \quad A_3^2(\dot{\mathcal{F}})^2 = 2A_3 \mathcal{T} \mathcal{R} \mathcal{F} - 2A_3 \mathcal{F}(\mathcal{F} - \mathcal{H})^2 - \mathcal{M}^2 \mathcal{R} > 0.$$

Но при этом полином третьей степени от $\mathcal{F}$ имеет один отрицательный корень x_1 и отрицательную производную при больших степенях $\mathcal{F}$. Это значит, что в рассматриваемом случае два оставшихся корня положительны: $x_3 > x_2 > 0 > x_1$, и значения $\mathcal{F}$ находятся между ними. Иначе говоря, $\mathcal{F}_{\min} = x_2$, а $\mathcal{F}_{\max} = x_3$. Учитывая свойства функции $\text{dn}^2(\omega t, k)$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\max} &= a \text{dn}^2(\omega t, k)_{\max} + x_i = a + x_i = x_3, \\ \mathcal{F}_{\min} &= a \text{dn}^2(\omega t, k)_{\min} + x_i = a(1 - k^2) + x_i = x_2, \end{aligned}$$

где $0 < k < 1$. Так как $a > 0$, то, очевидно, $x_i = x_1$.

Итак, мы имеем представления для a , b , k^2 , выраженные через корни полинома

$$\mathcal{P}_3(x) = x^3 - 2\mathcal{H}x^2 + (\mathcal{H}^2 - \mathcal{R} \mathcal{T})x + 8A_3 \kappa = 0.$$

Остается выразить ω^2 через x_i и убедиться, что полученные представления не противоречат оставшимся соотношениям.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *При обходе вокруг особой точки $\mathcal{F} = 0$ функция φ изменяется так, что*

$$\varphi_+ \varphi_- = -1, \tag{3.9}$$

где

$$\varphi_+ = \varphi|_{\sqrt{\mathcal{F}} > 0}, \quad \varphi_- = \varphi|_{\sqrt{\mathcal{F}} < 0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях теоремы 1 получаем, что

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{k_1}{k_3} \frac{\varphi}{1 - \varphi^2}.$$

Положим $k_3 p_1 / (k_1 p_3) = \eta$ и тогда имеем

$$\begin{aligned} \eta \varphi^2 + \varphi - \eta &= 0, \\ \varphi_1 &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\eta^2}}{2\eta}, \quad \varphi_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\eta^2}}{2\eta}, \end{aligned}$$

причем $\varphi_1 \varphi_2 = -1$.

Следующее дифференциальное соотношение показывает, что φ_1, φ_2 удовлетворяют (3.7) на разных листах $\sqrt{\mathcal{F}}$:

$$\left(-\frac{1}{\varphi}\right)' = \frac{\dot{\varphi}}{\varphi^2} = \frac{\nu\sqrt{\mathcal{F}}\varphi - \frac{\kappa}{\mathcal{F}}(1+\varphi^2)}{\varphi^2} = -\nu\sqrt{\mathcal{F}}\left(-\frac{1}{\varphi}\right) - \frac{\kappa}{\mathcal{F}}\left(1 + \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^2\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При переходе от переменной φ к исходным переменным p_i, γ_i решения φ_+, φ_- задают одно и то же решение.

§ 4. Асимптотика особых точек решений уравнений Эйлера–Пуассона в случае Гесса

В этом параграфе доказываются формулы (2.9)–(2.12) теоремы 1.

Как следует из результатов [20], [21] (см. также [5] и [6]), все особые точки решений уравнений Эйлера–Пуассона, задающие движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой, по своему характеру образуют два класса: α - и β -точки.

Асимптотика α -точек решений уравнений Эйлера–Пуассона в случае Гесса имеет вид

$$\begin{cases} p(t) = \tilde{p}^0 t^{-1} + \alpha_1 u_1 + \sum_{i=2}^4 \alpha_i v_i t + o(t), \\ \gamma(t) = \alpha_1 v_1 t^{-1} + \kappa_0 v_1 + \alpha_4 v \tilde{p}^0 + \alpha_5 v_{-1} t + o(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

где $\tilde{p}^0$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} A\tilde{p}^0 \times \tilde{p}^0 + A\tilde{p}^0 = 0, \\ \langle A\tilde{p}^0, r \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

и имеет вид

$$\left(\pm i \sqrt{\frac{A_2 A_3}{-B_{12} B_{31}}}, \pm i \sqrt{\frac{A_1 A_3}{-B_{12} B_{23}}}, -\sqrt{\frac{A_1 A_2}{B_{23} B_{31}}} \right).$$

Здесь:

v_1, v_{-1} – собственные векторы оператора $\xi \rightarrow \tilde{p}^0 \times \xi$ с собственными значениями 1 и -1 соответственно (в силу (4.2) $v_1 = A\tilde{p}^0$);

$\{v_2, v_3\}$ – собственные векторы оператора

$$\mathbf{D}: \xi \rightarrow A^{-1}(A\tilde{p}^0 \times \xi + A\xi \times \tilde{p}^0)$$

с собственным значением 1;

$v_4 = -(\mathbf{D} - E)^{-1} A^{-1}(\tilde{p}^0 \times r)$ (в силу вырожденности оператора $\mathbf{D}$ вектор v_4 определен по модулю пространства $\{v_2, v_3\}$);

$$u_1 = -\mathbf{D}^{-1} A^{-1}(v_1 \times r);$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_5$ – свободные параметры.

Также из результатов [20] (см. также [5] и [6]) следует, что асимптотика β -особых точек решений уравнений Эйлера–Пуассона имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} p(t) = \tilde{p}^0 t^{-1} + \beta_0 u_0 t^{\lambda_0-1} + \beta^0 u^0 t^{\lambda^0-1} + \beta_2 u_2 t + \beta_3 u_3 t^2 + \beta_4 u_4 t^3 + \dots \\ \quad + \sum_{i+j \geq 2} \beta_0^i (\beta^0)^j \psi_{ij} t^{i\lambda_0+j\lambda^0-1} + \dots, \\ \gamma(t) = \tilde{\gamma}^0 t^{-2} + \beta_0 v_0 t^{\lambda_0-2} + \beta^0 v^0 t^{\lambda^0-2} + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 t + \beta_4 v_4 t^2 + \dots \\ \quad + \sum_{i+j \geq 2} \beta_0^i (\beta^0)^j \chi_{ij} t^{i\lambda_0+j\lambda^0-2} + \dots. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Здесь:

$$\tilde{p}_1^0 = \sqrt{\frac{(2A_2 - \varrho)(2A_3 - \varrho)}{B_{12}B_{31}}}, \quad \sigma,$$

σ – циклическая перестановка индексов $(1, 2, 3)$, применяемая ко всей формуле для получения оставшихся двух аналогичных формул;

$\tilde{\gamma}^0$ – собственный вектор оператора $\xi \rightarrow \tilde{p}^0 \times \xi$ с собственным значением -2 ;
 ϱ находится из уравнения

$$\sum_{\sigma} r_1 (A_1 - \varrho) \sqrt{(2A_2 - \varrho)(2A_3 - \varrho)B_{23}} = 0; \quad (4.4)$$

(u_k, v_k) , $k = 2, 3, 4$, (u_0, v_0) , (u^0, v^0) – собственные векторы оператора

$$\mathbf{H}: (Ap, \gamma) \rightarrow (A\tilde{p}^0 \times p + Ap \times \tilde{p}^0 + \gamma \times r + Ap, \tilde{\gamma}^0 \times p + \gamma \times \tilde{p}^0 + 2\gamma)$$

с собственными значениями

$$\lambda_0^{(0)} = \frac{1}{2} \overset{(+)}{-} \sqrt{\frac{1}{4} - S}, \quad S = \frac{S_1}{S_2}, \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{(2\langle A\gamma, \delta \rangle + \langle Ap, p \rangle)(\langle A\gamma, \delta \rangle + \langle Ap, p \rangle)}{\langle A\gamma, \gamma \rangle} - \frac{3\langle p, r \rangle^2}{\langle \gamma, r \rangle} - 2\langle A\delta, \delta \rangle + 2\langle \delta, r \rangle, \\ S_2 &= \frac{\langle p, r \rangle^2}{2\langle \gamma, r \rangle} - \frac{\langle A\gamma, \delta \rangle^2}{\langle A\gamma, \gamma \rangle} + \langle A\delta, \delta \rangle. \end{aligned}$$

В формуле (4.5) для простоты мы заменили $\tilde{p}^0$, $\tilde{\gamma}^0$ на p , γ , а δ удовлетворяет соотношениям $p \times \delta + 2\delta = 0$, $\langle \delta, \gamma \rangle = 2$, и, наконец, β_2 , β_3 , β_4 , β_0 , β^0 – свободные параметры.

Для сходимости ряда, продолжающего асимптотику (4.3), надо положить $t = e^{i(\tilde{\lambda}_0 - \tilde{\lambda}^0)\theta}$, $\theta \rightarrow +\infty$.

В случае Гесса уравнение (4.4) можно решить, но удобнее сначала рассмотреть уравнение $\langle A\tilde{p}^0, r \rangle = 0$:

$$A_1^2 \frac{(2A_2 - \varrho)(2A_3 - \varrho)}{B_{12}B_{31}} r_1^2 = A_2^2 \frac{(2A_3 - \varrho)(2A_1 - \varrho)}{B_{23}B_{12}} r_2^2,$$

корни которого равны $2A_3$ и 0 и удовлетворяют (4.4).

Пусть вначале $\varrho = 2A_3$. Опуская простые выкладки, приведем все же промежуточные результаты. Итак, в рассматриваемом случае в (4.5)

$$\begin{aligned} p &= (0, 0, \pm 2i), & \gamma &= \gamma_1(1, \pm i, 0), & \gamma_1 &= 2A_3(r_1 \pm ir_2)^{-1}, \\ \delta &= \gamma_1^{-1}(1, \mp i, 0), & \langle A\gamma, \delta \rangle &= A_1 + A_2, \\ \langle Ap, p \rangle &= -4A_3, & \langle \gamma, r \rangle &= 2A_3, & \langle p, r \rangle &= 0, & \langle A\gamma, \gamma \rangle &= B_{12}\gamma_1^2, \\ \langle A\delta, \delta \rangle &= B_{12}\gamma_1^{-2}, & \langle \delta, r \rangle &= \mathcal{R}(2A_3)^{-1}, & S &= 2A_3\nu^2 \mp i\nu\sqrt{2A_3}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\lambda_0 = \mp \nu i \sqrt{2A_3}, \quad \lambda^0 = 1 \pm \nu i \sqrt{2A_3}.$$

Пусть теперь $\varrho = 0$. В этом случае вектор $\tilde{p}^0$ равен

$$2 \left(\pm i \sqrt{\frac{A_2 A_3}{-B_{12} B_{31}}}, \pm i \sqrt{\frac{A_1 A_3}{-B_{12} B_{23}}}, -\sqrt{\frac{A_1 A_2}{B_{23} B_{31}}} \right),$$

$\langle \tilde{\gamma}^0, r \rangle = 0$, формула (4.5) упрощается и принимает вид $S = 6$; соответственно

$$\lambda_0 = -2, \quad \lambda^0 = 3.$$

Формальный ряд, продолжающий асимптотику (4.3), является рядом Лорана, причем заранее не ясно, как находить его коэффициенты, и, тем более, непонятно, будет ли он сходящимся. Заметим также, что в рассматриваемом случае полученный ряд для (p, γ) не имеет неоднозначных слагаемых.

Итак, асимптотика α -точек является однозначной. Все коэффициенты α -точек эффективно вычисляются как функции исходных параметров тела A_i, r_i , $i = 1, 2, 3$. При этом общий вид асимптотики имеет пять свободных параметров α_i , $i = 1, \dots, 5$, что закономерно для системы (2.1) с шестью переменными.

Асимптотика β -точек также может быть однозначной, но может и иметь ветвление за счет слагаемых вида t^ν , $\nu \in \mathbb{C}$. Коэффициенты при t^ν эффективно вычисляются не всегда, в частности когда асимптотика β -точки является частью ряда Лорана. К сожалению, именно такая ситуация имеет место в случае Гесса. Этим обстоятельством объясняется необходимость рассмотрения случая Гесса и с помощью уравнения Риккати для φ , и с помощью линейной системы уравнений относительно θ_1, θ_2 .

Координаты особых точек наиболее просто находятся для функции θ , а асимптотика соответствующих особых точек – для функции φ .

Определяя соответствие особых точек для различных представлений решения задачи, мы можем получить необходимые нам свойства решения для каждого из представлений.

Поскольку функция $\mathcal{F}$ является эллиптической, то можно считать, что уравнение (3.7) для φ и система (3.8) для θ заданы на $\mathbb{R}$ -двумерном торе T^2 , являющемся голоморфным компактным многообразием. Однако в правой части (3.7), (3.8) вместе с $\mathcal{F}$ присутствует и $\sqrt{\mathcal{F}}$, что требует рассмотрения минимального накрытия, для которого правые части уравнений (3.7), (3.8) становятся однозначными.

Функция $\mathcal{F}$ имеет полюс второго порядка, значит, в окрестности точки $\mathcal{F} = \infty$ функция $\sqrt{\mathcal{F}}$ однозначна. Точки $\mathcal{F} = 0$ не могут принадлежать вещественной прямой, так как при $\mathcal{F} = 0$ имеем $A_3^2(\dot{\mathcal{F}})^2 = -\mathcal{M}^2\mathcal{R} < 0$, если $\mathcal{M} \neq 0$.

Как было отмечено в замечании 1, случай $\mathcal{M} = 0$ явно интегрируется, поэтому в данном случае не интересен для рассмотрения.

Точки, в которых $\mathcal{F} = 0$, в силу вещественности $\mathcal{F}$ имеют сопряженные координаты, значит, они отличны друг от друга и не являются кратными. Риманова поверхность функции $\sqrt{\mathcal{F}}$ согласно формуле Римана–Гурвица является поверхностью S_2 2-го рода (см. [18]; это можно видеть и из геометрии разветвленного накрытия).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В силу линейности уравнений для θ соответствующий им поток можно профакторизовать по однородному растяжению, после чего мы получаем голоморфное слоение с особенностями на компактном голоморфном многообразии $S_2 \times \mathbb{C}P^1$. При этом очевидно соответствие между $(\theta_1 : \theta_2) \in \mathbb{C}P^1$ и $\varphi = \theta_1/\theta_2$.

Для вещественных φ и $\mathcal{F}$ мы получаем два инвариантных тора с условиями $\sqrt{\mathcal{F}} > 0$ и $\sqrt{\mathcal{F}} < 0$.

Функция $\mathcal{F}$ является в общем случае вещественной эллиптической функцией, поэтому ее периоды имеют вид $\omega_1, i\omega_2, \omega_i \in \mathbb{R}$. Кроме того, точки, в которых $\mathcal{F} = 0$ или $\mathcal{F} = \infty$, являются сопряженными, поэтому далее, получая асимптотики функций $\mathcal{F}, \varphi, \theta$ в этих точках, мы будем указывать только одну из них. Из дифференциального уравнения (2.5) стандартным образом получаем асимптотику особых точек $\mathcal{F}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Асимптотика функций $\mathcal{F}, \sqrt{\mathcal{F}}, \mathcal{F}^{-1}$ в точке $\mathcal{F} = \infty$ имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= -\frac{2A_3}{t^2} + \frac{2}{3}\mathcal{H} + \left(\frac{\sigma}{10} - \frac{2\mathcal{H}^2}{15A_3}\right)t^2 + \dots, & \sigma &= \frac{\mathcal{H}^2 - \mathcal{I}\mathcal{R}}{A_3}, \\ \mathcal{F}^{-1} &= -\frac{t^2}{2A_3} - \frac{\mathcal{H}}{6A_3^2}t^4 - \frac{1}{5A_3^2}\left(\frac{\sigma}{8} + \frac{\mathcal{H}^2}{9A_3}\right)t^6 + \dots, \\ \sqrt{\mathcal{F}} &= \frac{\lambda}{t} + \frac{\mathcal{H}}{3\lambda}t + \left(\frac{\sigma}{20\lambda} - \frac{\mathcal{H}^2}{15A_3\lambda} - \frac{\mathcal{H}^2}{18\lambda^3}\right)t^3 + \dots, & \lambda &= i\sqrt{2A_3}.\end{aligned}$$

Асимптотика функций $\mathcal{F}, \sqrt{\mathcal{F}}, \mathcal{F}^{-1}$ в одной из сопряженных точек $\mathcal{F} = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \mu t - \frac{\sigma}{2}t^2 + \frac{2\mathcal{H}\mu}{3A_3}t^3 + \dots, & \mu &= 4i\kappa = \frac{i\mathcal{M}\sqrt{\mathcal{R}}}{A_3}, \\ \mathcal{F}^{-1} &= \frac{1}{\mu t} + \frac{\sigma}{2\mu^2} + \left(\frac{\sigma^2}{4\mu^3} - \frac{2\mathcal{H}}{3A_3\mu}\right)t + \dots, \\ \sqrt{\mathcal{F}} &= \sqrt{\mu}t^{1/2} - \frac{\sigma}{4\sqrt{\mu}}t^{3/2} + \left(\frac{\sqrt{\mu}\mathcal{H}}{3A_3} - \frac{\sigma^2}{32\mu^{3/2}}\right)t^{5/2} + \dots.\end{aligned}$$

Как уже было отмечено, асимптотика функций $\mathcal{F}$, $\sqrt{\mathcal{F}}$, $\mathcal{F}^{-1}$ находится из (2.5).

Из дифференциального уравнения (3.7) находим асимптотику функции φ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Функция φ в окрестности точки $\mathcal{F} = 0$, $\mathcal{F} = 4ikt + \dots$ при $t \rightarrow 0$ имеет с точностью до комплексного сопряжения следующие асимптотики:*

$$\varphi = -i + ct^{1/2} + \frac{ic^2}{2}t - \left(\frac{ic\sigma}{16\kappa} + \frac{c^3}{4} + 2\nu i\sqrt{\kappa i} \right) t^{3/2} + \dots, \quad (4.6)$$

где c – свободный параметр, либо

$$\varphi = i + \nu i\sqrt{\kappa i}t^{3/2} + \dots. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, согласно условию $\mathcal{F} = 4ikt + \dots$ при $t \rightarrow 0$. Предположим, что при этом $1 + \varphi^2$ (см. (3.7)) не стремится к нулю, т.е. φ не стремится к $\pm i$. В этом случае $\nu\sqrt{\mathcal{F}}\varphi$ мало по сравнению с $-\frac{\kappa}{\mathcal{F}}(\varphi^2 + 1)$, поэтому

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{i}{4t}(\varphi^2 + 1) + \dots, \quad t \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \quad \varphi &= \operatorname{tg}\left(\frac{i}{4} \ln(ct)\right) + \dots = -i \frac{(ct)^{-1/4} - (ct)^{1/4}}{(ct)^{-1/4} + (ct)^{1/4}} \rightarrow -i, \quad t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Мы получаем противоречие, значит, в сопряженных точках $\varphi \rightarrow \mp i$ при $\mathcal{F} = 0$.

Пусть $\mathcal{F} = 4ikt + \dots$ при $t \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow -i$.

Подставим $\varphi = -i + \varphi_1$ в уравнение (3.7):

$$\dot{\varphi}_1 = \nu\sqrt{\mu t}\varphi_1 + \frac{1}{2t}\varphi_1 + \dots, \quad t \rightarrow 0, \quad \varphi_1 \rightarrow 0,$$

и получим приближенное решение φ_1 , а значит, и φ :

$$\varphi = -i + ct^{1/2} + \dots, \quad t \rightarrow 0,$$

c – свободный параметр. Последующие итерации дают искомый результат.

Пусть $\mathcal{F} = 4ikt + \dots$ при $t \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow i$. В этом случае мы не можем найти однопараметрическое семейство асимптотик, но одна искомая асимптотика все же имеется:

$$\varphi = i + \nu i\sqrt{\kappa i}t^{3/2} + \dots.$$

Рассмотрим возмущение этого решения. Полагая

$$\varphi = i + \nu i\sqrt{\kappa i}t^{3/2} + \varepsilon\Phi(t)$$

и пренебрегая слагаемыми с ε порядка выше 1, имеем $\Phi(t) = -ct^{-1/2} + \dots$. Это означает, что при малом возмущении рассматриваемого решения φ не стремится к i при $t \rightarrow 0$.

Как уже было показано, $\varphi \rightarrow -i$, если φ не стремится к i , значит, обе приведенные асимптотики исчерпывают все возможности для решения φ при условии $\mathcal{F} = 4ikt + \dots$, $t \rightarrow 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Асимптотика функции φ в окрестности точки $\mathcal{F} = \infty$ имеет вид

$$\varphi = ct^{\lambda\nu} + \dots + \frac{\kappa t^3}{2A_3(3 - \lambda\nu)} + \dots, \quad \nu = -\frac{\sqrt{2B_{23}B_{31}}}{\sqrt{A_1A_2A_3}}, \quad \lambda = i\sqrt{2A_3}, \quad (4.8)$$

либо

$$\varphi = -\frac{2A_3(3 + \lambda\nu)}{\kappa t^3} - \frac{2H(3 + \nu\lambda)(A_3\nu - (3 + \nu\lambda)\lambda)}{3\kappa\lambda(5 + \lambda\nu)t} \dots. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathcal{F} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$; тогда либо

$$\dot{\varphi} = \nu\sqrt{\mathcal{F}}\varphi + \dots \implies \ln \varphi = \nu\lambda \ln t + \dots \implies \varphi = ct^{\lambda\nu} + \dots,$$

и далее применяем стандартные итерации, либо

$$\dot{\varphi} = -\frac{\kappa\varphi^2}{\mathcal{F}} + \dots = \frac{\kappa\varphi^2 t^2}{2A_3} + \dots,$$

и получаем

$$\varphi = -\frac{2A_3(3 + \lambda\nu)}{\kappa t^3} + \dots.$$

Найдем теперь асимптотики функций θ_1, θ_2 в окрестностях точек $\mathcal{F} = 0$, $\mathcal{F} = \infty$.

Функции θ_1, θ_2 удовлетворяют (см. (3.8)) системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \frac{\nu}{2}\sqrt{\mathcal{F}}\theta_1 - \frac{\kappa}{\mathcal{F}}\theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = \frac{\kappa}{\mathcal{F}}\theta_1 - \frac{\nu}{2}\sqrt{\mathcal{F}}\theta_2. \end{cases}$$

Поскольку $\varphi = \theta_1/\theta_2$, то из второго уравнения этой системы следует

$$(\ln \theta_2)' = \frac{\kappa}{\mathcal{F}}\varphi - \frac{\nu}{2}\sqrt{\mathcal{F}}.$$

Необходимые асимптотики $\varphi, \mathcal{F}, \sqrt{\mathcal{F}}$ уже известны, поэтому несложно получить и асимптотики θ_i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. В окрестности точки $\mathcal{F} = 0$ функции θ_i с точностью до сопряжения имеют асимптотику

$$\begin{cases} \theta_1 = -ic_1 t^{-1/4} + ic_2 t^{1/4} + \dots, \\ \theta_2 = c_1 t^{-1/4} + c_2 t^{1/4} + \dots, \end{cases}$$

где c_1, c_2 – свободные параметры.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Функция φ в окрестности точки $\mathcal{F} = 0$ имеет две различные асимптотики. Обе они соответствуют асимптотике функций θ_i из доказанного предложения: асимптотика (4.6) соответствует случаю $c_1 \neq 0$, асимптотика (4.7) – случаю $c_1 = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. В окрестности точки $\mathcal{F} = \infty$ функции θ_i имеют асимптотику

$$\begin{cases} \theta_1 = c_1 t^{\nu\lambda/2} + c_1 \frac{\nu\mathcal{H}}{12\lambda} t^{2+\nu\lambda/2} + c_2 \frac{\kappa}{2A_3(3-\nu\lambda)} t^{3-\nu\lambda/2} + \dots, \\ \theta_2 = c_2 t^{-\nu\lambda/2} - c_2 \frac{\nu\mathcal{H}}{12\lambda} t^{2-\nu\lambda/2} - c_1 \frac{\kappa}{2A_3(3+\nu\lambda)} t^{3+\nu\lambda/2} + \dots, \end{cases}$$

где c_1, c_2 – свободные параметры.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Функция φ в окрестности точки $\mathcal{F} = \infty$ имеет две различные асимптотики. Обе они соответствуют асимптотике функций θ_i из доказанного предложения: асимптотика (4.8) соответствует случаю $c_2 \neq 0$, асимптотика (4.9) – случаю $c_2 = 0$.

Определим теперь соответствие особых точек решений $(p, \gamma), \theta, \varphi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем называть $\beta(\varrho)$ -особыми точками β -особые точки, соответствующие корню ϱ уравнения (4.4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Решения (p, γ) имеют особые точки типа $\beta(2A_3)$, если и только если $\mathcal{F} \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\mathcal{F} \neq \infty$. Тогда $p \rightarrow \infty$ только при условии $\varphi \rightarrow \pm i$, но тогда $(p_1 : p_2 : p_3) \rightarrow (\pm k_1 : \pm i k_2 : 2k_3)$, а значит, рассматриваемые особые точки не являются $\beta(2A_3)$ -точками.

Достаточность. Пусть $\mathcal{F} \rightarrow \infty$. Согласно (2.4) $(p, \gamma) \rightarrow \infty$ и при этом $(p_1 : p_2 : p_3) = (k_1 : k_2 : (1 - \varphi^2)/\varphi)$. Из асимптотики φ в точке $\mathcal{F} = \infty$ следует, что если входить в особую точку по спирали $t = e^{i(\lambda_0 - \lambda^0)\theta}$, $\theta \rightarrow +\infty$, то $\varphi \rightarrow 0$ или $\varphi \rightarrow \infty$ в зависимости от знака направления вращения спирали, значит, $(1 - \varphi^2)/\varphi \rightarrow \infty$ и $(p_1 : p_2 : p_3) \rightarrow (0 : 0 : 1)$. Ясно, что рассматриваемая особая точка не является ни α -точкой, ни $\beta(0)$ -точкой, а по теореме о полной классификации особых точек (см. [20]) может быть только $\beta(2A_3)$ -точкой.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Предложение можно было бы доказать и не ссылаясь на классификационную теорему, но тогда необходимо по формулам (2.4) более точно определить асимптотику (p, γ) при $\mathcal{F} \rightarrow \infty$.

Дополнительным обстоятельством, подтверждающим предложение, является наличие ветвления одного и того же вида $(t^{\nu\sqrt{2A_3}})$ и для $\beta(2A_3)$ -точки, и для φ при $\mathcal{F} \rightarrow \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $\varphi \rightarrow \pm i$. Тогда:

- 1) если $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_0 \neq 0, \infty$, то решение (p, γ) имеет α -особую точку;
- 2) если $\mathcal{F} = 4ikt + \dots$ при $t \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow -i$ и
 - 2.1) $c \neq 0$ (c – свободный параметр представления (4.6)), то решение (p, γ) не имеет особых точек,
 - 2.2) $c = 0$, то решение (p, γ) имеет α -особую точку;
- 3) если $\mathcal{F} = 4ikt + \dots$ при $t \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow i$, то решение (p, γ) имеет $\beta(0)$ -особую точку.

Для доказательства достаточно подставить асимптотики φ в (2.4).

§ 5. Параметрическое отображение последования для вещественных решений случая Гесса

В этом параграфе доказываются формулы (2.13)–(2.19) теоремы 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Рассмотрим слоение, заданное на компактном голоморфном многообразии $T^2 \times \mathbb{C}P^1$ факторизацией потока уравнений Эйлера–Пуассона в случае Гесса. Здесь T^2 – тор, задаваемый двоякопериодической функцией $\mathcal{F}$, а $\mathbb{C}P^1$ – область значений функции φ . Пусть $\gamma: [0, 1] \rightarrow T^2$ – путь на T^2 , соединяющий две особые точки (возможно, совпадающие) $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$, в которых $\mathcal{F}(t_*) = \infty$ (или $\mathcal{F}(t_0) = 0$). Путь γ в силу имеющегося слоения поднимается в расслоение $T^2 \times \mathbb{C}P^1 \rightarrow T^2$ и задает отображение $\Phi_\gamma: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ параметров, определяющих асимптотику функции $\varphi(t)$ в особых точках. Отображение Φ_γ будем называть *параметрическим отображением последования*.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. В отличие от классического определения отображения последования данное определение относится к предельному отображению окрестностей особых точек. Записанное в координатах, это отображение является вектор-функцией из пространства свободных параметров одной особой точки в соответствующее пространство другой особой точки.

Важность такого понятия заключается в том, что одно значение параметра асимптотики определяет целое решение $\varphi(t)$ при том, что асимптотики решений $\varphi(t)$ в особых точках могут быть найдены.

Рассмотрим параметрическое отображение последования за период τ_1 для особых точек, находящихся над вещественной прямой, функции $\mathcal{F}$ вдоль вещественной оси времени. Для функции φ это будет дробно-линейное отображение; оно имеет вид

$$\Phi_{\tau_1}: c \rightarrow \frac{a_{11}c + a_{12}}{a_{21}c + a_{22}}, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 1. \quad (5.1)$$

Для особых точек, находящихся под вещественной прямой, параметрическое отображение последования за период τ_1 будет сопряженным к отображению (5.1). Но это же отображение совпадает с отображением (5.1), но на двойственном листе $\sqrt{\mathcal{F}}$, поскольку функция $\mathcal{F}$ периодична с периодом $i\tau_2$, а функция $\sqrt{\mathcal{F}}$ – с периодом $2i\tau_2$.

Чтобы различать отображения Φ_{τ_1} , добавляем в них к нижним индексам плюс и минус.

Пусть Φ_{τ_1+} есть отображение (5.1); тогда

$$\Phi_{\tau_1-}: c \rightarrow -\frac{a_{22}c - a_{21}}{a_{12}c - a_{11}}. \quad (5.2)$$

Учитывая, что оператор $\Phi_{\tau_1+} \overline{\Phi_{\tau_1-}}^{-1}$ задается обходом вокруг особой точки с ветвлением, т.е. представляет собой умножение на $\delta^2 = \exp(2\pi\nu\sqrt{2A_3})$, получаем соотношения

$$a_{11} = \delta^2 \bar{a}_{22}, \quad a_{21} = -\delta^2 \bar{a}_{12}, \quad \delta^2 = \exp(2\pi\nu\sqrt{2A_3}). \quad (5.3)$$

Рассмотрим теперь параметрическое отображение последования за период τ_2 функции $\mathcal{F}$ вдоль мнимой оси времени от особой точки под вещественной осью к особой точке над осью. Для функции φ это будет, как и $\Phi_{\tau_1\pm}$, дробно-линейное отображение; оно имеет вид

$$\Phi_{\tau_2+} : c \rightarrow \frac{b_{11}c + b_{12}}{b_{21}c + b_{22}}, \quad \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = 1.$$

Вещественные решения, т.е. решения, принимающие вещественные значения на вещественной оси, выделяются условием: $\Phi_{\tau_2+}(\bar{c}) = c$, или

$$b_{21}c\bar{c} + b_{22}c - b_{11}\bar{c} - b_{12} = 0. \quad (5.4)$$

Известно, что движения сферы стереографической проекции порождают на комплексной плоскости дробно-линейное отображение. Следовательно, Φ_{τ_1+} порождает слоение комплексной плоскости на инвариантные окружности, одна из которых соответствует вещественному решению.

В таком случае уравнение (5.4) должно задавать окружность, а именно ту из инвариантных окружностей (5.1) отображения Φ_{τ_1+} , которой соответствует вещественное решение. Коэффициенты этого уравнения должны удовлетворять следующим условиям:

$$|b_{11}| = |b_{22}|, \quad \frac{b_{22}}{b_{21}} = -\frac{\bar{b}_{11}}{\bar{b}_{21}}, \quad \frac{b_{12}}{b_{21}} \in \mathbb{R}, \quad (5.5)$$

и в этом случае инвариантная окружность имеет центр в точке b_{11}/b_{21} и радиус

$$R = \sqrt{\frac{b_{12}}{b_{21}} + \left| \frac{b_{11}}{b_{21}} \right|^2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Условия (5.5) можно получить также следующим образом:

$$\Phi_{\tau_2+}(\bar{c}) = c \implies \Phi_{\tau_2+}\bar{\Phi}_{\tau_2+}(c) = \bar{c} \implies \Phi_{\tau_2+}\bar{\Phi}_{\tau_2+} = E,$$

и далее приходим к системе

$$\begin{cases} |b_{11}| + b_{12}\bar{b}_{21} = 1, \\ |b_{22}| + \bar{b}_{12}b_{21} = 1, \\ b_{11}\bar{b}_{12} + b_{12}\bar{b}_{21} = 0, \\ b_{11}\bar{b}_{21} + b_{21}\bar{b}_{22} = 0. \end{cases}$$

Сравнивая полученное уравнение окружности (5.4) с уравнением

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = z\bar{z} - \bar{z}_0z - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = R^2,$$

получаем

$$b_{11} = z_0b_{21}, \quad b_{22} = -\bar{z}_0b_{21}, \quad b_{12} = (R^2 - z_0\bar{z}_0)b_{21}.$$

Наконец, поскольку определитель матрицы Φ_{τ_2+} равен 1, то

$$-z_0\bar{z}_0b_{21}^2 - (R^2 - z_0\bar{z}_0)b_{21}^2 = -R^2b_{21}^2 = 1 \implies b_{21} = \pm \frac{i}{R},$$

и окончательно получаем

$$b_{21} = \pm \frac{i}{R}, \quad b_{11} = \pm \frac{iz_0}{R}, \quad b_{22} = \bar{b}_{11}, \quad b_{12} = (R^2 - z_0\bar{z}_0)b_{21}. \quad (5.6)$$

Из матричного равенства

$$\Phi_{\tau_2+}\bar{\Phi}_{\tau_1+} = \Phi_{\tau_1+}\Phi_{\tau_2+} \quad (5.7)$$

получаем

$$a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}, \quad b_{21} = -\delta^2 b_{12}, \quad z_0\bar{z}_0 - R^2 = \delta^{-2}, \quad (5.8)$$

а также

$$a_{11} - a_{22} = 2 \operatorname{Re} \left(a_{21} \frac{b_{11}}{b_{21}} \right). \quad (5.9)$$

Последнее условие получается так же, как условие совпадения инвариантных окружностей отображений Φ_{τ_1+} и Φ_{τ_2+} .

Отметим также, что отображение последования Φ_{τ_1+} имеет неподвижные точки

$$c_{\pm} = \frac{a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4}}{2a_{21}}, \quad (5.10)$$

являющиеся корнями квадратного уравнения

$$a_{21}c^2 + (a_{22} - a_{11})c - a_{12} = 0$$

и определяющие асимптотику особых точек периодических решений.

Если выполнено условие

$$|a_{11} + a_{22}| < 2, \quad (5.11)$$

то отображение последования $\Phi_{\tau_1+}(c)$ имеет собственные значения

$$\lambda_{\pm} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4}}{2} = \exp(\pm i\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (5.12)$$

т.е. образы степеней отображения последования некоторой начальной точки образуют квазипериодическую последовательность на инвариантной окружности, что означает, что все решения $\varphi(t)$ в этом случае квазипериодичны.

Естественно, что при этом центры инвариантных окружностей совпадают с неподвижными точками (5.10).

Если выполнено условие

$$|a_{11} + a_{22}| > 2, \quad (5.13)$$

то собственные значения $\lambda_{\pm}$ отображения последования $\Phi_{\tau_1+}(c)$ вещественны.

При бесконечном итерировании отображения $\Phi_{\tau_1+}(c)$ образ $\Phi_{\tau_1+}^n(c)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, точки c будет стремиться к c_+ . Соответственно, при итерировании $\Phi_{\tau_1+}^{-1}$ ситуация аналогична: $\Phi_{\tau_1+}^{-n}c \rightarrow c_-$. Таким образом, предельными периодическими

решениями функции φ будут периодическая функция φ_+ с постоянным свободным параметром асимптотики c_+ при $t \rightarrow +\infty$ и периодическая функция φ_- с постоянным свободным параметром асимптотики c_- при $t \rightarrow -\infty$.

Наконец, исходя из вышеизложенного, Φ_{τ_2-} находим аналогично Φ_{τ_1-} :

$$\Phi_{\tau_2-} : c \rightarrow -\frac{b_{22}c - b_{21}}{b_{12}c - b_{11}}. \quad (5.14)$$

§ 6. Однозначные решения уравнений Эйлера–Пуассона в случае Гесса

ТЕОРЕМА 2. *Все однозначные решения уравнений Эйлера–Пуассона (2.1) в случае Гесса имеют вид*

$$\begin{cases} p_1(t) \equiv p_2(t) \equiv \gamma_3(t) \equiv 0, \\ p_3(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{F}}{A_3}}, \\ \gamma_1 = \frac{1}{\mathcal{R}}(r_1(\mathcal{H} - \mathcal{F}) + A_3 r_2 \dot{p}_3), \\ \gamma_2 = \frac{1}{\mathcal{R}}(r_2(\mathcal{H} - \mathcal{F}) - A_3 r_1 \dot{p}_3), \end{cases} \quad (6.1)$$

где $\mathcal{F}$ есть эллиптическая функция, задаваемая уравнением (см. (2.5))

$$A_3^2(\dot{\mathcal{F}})^2 = 2A_3\mathcal{I}\mathcal{R}\mathcal{F} - 2A_3\mathcal{F}(\mathcal{F} - \mathcal{H})^2,$$

$\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$ – значения интеграла энергии (3.2) и тривиального интеграла (3.4) соответственно (при этом интеграл $\mathcal{M}$ момента (3.3) решения равен нулю), или находятся из решения линейной системы (см. (3.8))

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \frac{\nu}{2}\sqrt{\mathcal{F}_0}\theta_1 - \frac{\kappa}{\mathcal{F}_0}\theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = \frac{\kappa}{\mathcal{F}_0}\theta_1 - \frac{\nu}{2}\sqrt{\mathcal{F}_0}\theta_2, \end{cases}$$

$\mathcal{F}_0$ – корень полинома (см. (2.5))

$$\mathcal{P}_3(\mathcal{F}) = 2A_3\mathcal{I}\mathcal{R}\mathcal{F} - 2A_3\mathcal{F}(\mathcal{F} - \mathcal{H})^2 - \mathcal{M}^2\mathcal{R};$$

в этом случае

$$\begin{cases} p_i = k_i\sqrt{\mathcal{F}_0}\frac{\varphi}{1+\varphi^2}, & i = 1, 2, \\ p_3 = k_3\sqrt{\mathcal{F}_0}\frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2}, \\ \gamma_1 = \frac{1}{\mathcal{R}}(r_1(\mathcal{H} - \mathcal{F}_0) + r_2(A_3\dot{p}_3 - B_{12}p_1p_2)), \\ \gamma_2 = \frac{1}{\mathcal{R}}(r_2(\mathcal{H} - \mathcal{F}_0) - r_1(A_3\dot{p}_3 - B_{12}p_1p_2)), \\ \gamma_3 = \frac{1}{r_2}(B_{23}p_2p_3 - A_1\dot{p}_1), \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{\theta_1}{\theta_2}, \quad k_2 = -\frac{A_1r_1}{A_2r_2}k_1, \quad k_1 = 2\sqrt{\frac{2B_{23}}{-B_{12}A_1}}, \quad k_3 = \sqrt{\frac{2}{A_3}}.$$

Все решения, отличные от приведенных выше, имеют $\beta(2A_3)$ -особые точки ветвления с асимптотикой, в которой имеются с точностью до коэффициента слагаемые $t^{n_1+n_2\nu i\sqrt{2A_3}}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела (2.1) в случае Гесса и ее представление (3.7) с помощью уравнения Риккати. Будем считать, что значения первых интегралов $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{T}$ фиксированы.

Функция $\mathcal{F}$ может быть постоянной, только если она тождественно равна корню полинома правой части (2.5). Тогда мы получаем линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для нахождения θ_i и далее очевидным образом получаем однозначное решение задачи Гесса.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $\mathcal{F}$ не является константой. Начнем со случая общего положения, когда $\mathcal{F}$ – двоякопериодическая функция. Так как функция $\mathcal{F}$ не является константой, то в некоторых точках она стремится в бесконечность. Как следует из предложения 6, особые точки решения φ при $\mathcal{F} \rightarrow \infty$ соответствуют $\beta(2A_3)$ -особым точкам функций (p, γ) . Почти все эти решения имеют ветвление $t^{n_1+n_2\nu i\sqrt{2A_3}}$. Исключение составляет решение (p, γ) , в асимптотике которого $\beta^0 = \beta_0 = 0$, а оставшиеся параметры $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ однозначно определяются значениями первых интегралов $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{T}$. Это означает, что такое решение является двоякопериодическим. Но тогда сумма вычетов функции $p(t)$ должна равняться нулю (см. [18]). Для $\beta(2A_3)$ -особых точек это условие выполнено, а для α - и $\beta(0)$ -точек – нет. Следовательно, в однозначном решении их не должно быть совсем. Но тогда функции $p_1(t)$, $p_2(t)$ вообще не имеют особых точек и, следовательно, являются константами.

С помощью представления (2.4) выражаем φ через $\mathcal{F}$:

$$\varphi = \frac{k_i \sqrt{\mathcal{F}} + \sqrt{k_i^2 \mathcal{F} - 4p_{i0}^2}}{2p_{i0}}, \quad i = 1, 2.$$

Если $p_{10}, p_{20} \neq 0$, то подставляем полученное представление в (3.7) и убеждаемся в том, что ни при каких значениях первых интегралов тождества нет.

Если $p_{10} \equiv p_{20} \equiv 0$, то из (2.4) следует $\varphi \equiv 0$, и мы получаем искомое решение, которое, как легко видеть, имеет место лишь при $\mathcal{M} = 0$.

Случай, когда полином в правой части (2.5) имеет кратные корни, является предельным для уже рассмотренного случая общего положения, когда кратных корней нет. Поэтому то, что однозначное решение возможно только при условии $\mathcal{M} = 0$, остается верным и для случая кратных корней и получается в результате предельного перехода.

Итак, рассмотрены все возможные случаи, значит, найдены все однозначные решения уравнений Эйлера–Пуассона в случае Гесса.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Все решения, полученные в теореме 1, хорошо известны и приведены в конечном виде в [22].

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Доказательство теоремы 2 об однозначных решениях практически без изменений можно повторить при поиске конечнозначных решений

(см. [21]), поскольку все асимптотики решений в случае Гесса либо однозначны, либо бесконечнозначны.

Таким образом, верно следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Все конечнозначные решения задачи Гесса являются однозначными.*

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Как показал А. М. Ляпунов (см. [23] и [24]), все решения задачи о движении тяжелого твердого тела являются однозначными только в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. Для других случаев движения твердого тела эта задача не ставилась, но, как видно из предложенного рассмотрения случая Гесса, такая задача вполне содержательна.

§ 7. Почти периодические, асимптотически периодические и периодические решения задачи Гесса

ТЕОРЕМА 3. *Система дифференциальных уравнений (2.1) в случае Гесса (2.3) имеет два вещественных периодических решения, а все остальные асимптотически приближаются к одному из них на тех инвариантных торах, на которых в условиях теоремы 1*

$$|x_2^{3/2}| \geq 2\kappa.$$

В этом случае для периодических решений φ_{major} , φ_{minor} имеют место оценки

$$\frac{\nu x_2^{3/2} + \sqrt{\nu^2 x_2^3 - 4\kappa^2}}{2\kappa} \leq \varphi_{\text{major}} \leq \frac{\nu x_3^{3/2} + \sqrt{\nu^2 x_3^3 - 4\kappa^2}}{2\kappa}, \quad (7.1)$$

$$\frac{\nu x_3^{3/2} - \sqrt{\nu^2 x_3^3 - 4\kappa^2}}{2\kappa} \leq \varphi_{\text{minor}} \leq \frac{\nu x_2^{3/2} - \sqrt{\nu^2 x_2^3 - 4\kappa^2}}{2\kappa}. \quad (7.2)$$

Между решениями φ_{major} и φ_{minor} существует зависимость

$$\varphi_{\text{minor}}(t) = \frac{1}{\varphi_{\text{major}}(-t)}. \quad (7.3)$$

Если фиксировать значения интегралов $\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$ и увеличивать значение $\mathcal{M}$, или, что то же самое, параметра κ , то траектории периодических решений φ_{major} и φ_{minor} будут приближаться друг к другу и при некотором значении $\kappa = \kappa_*$ таком, что

$$\frac{\nu^2 x_2^3}{4} < \kappa_* < \frac{\nu^2 x_3^3}{4}, \quad (7.4)$$

эти решения совпадают, т.е. при этом значении κ_* на инвариантном торе будет только одно периодическое решение, а остальные будут асимптотически приближаться к нему.

Дальнейшее увеличение параметра κ при неизменных значениях $\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$ приводит к квазипериодическим и, в частности, к периодическим решениям φ .

Решения системы дифференциальных уравнений (2.1) являются квазипериодическими для почти всех значений κ , если

$$|\nu x_3^{3/2}| \leq 2\kappa;$$

при этом множество периодических решений имеет меру нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $\sqrt{\mathcal{F}} > 0$. Тогда для достаточно больших по абсолютной величине значений φ функция $\varphi(t)$ убывает. Но если для любого значения $\mathcal{F}$ область $\dot{\varphi} > 0$ не пуста, то никакая траектория решения, в которой $\varphi(t)$ убывает от $+\infty$, не может опуститься ниже этой области. Но тогда должна существовать предельная периодическая траектория.

Аналогично, существует предельная периодическая траектория с возрастанием $\varphi(t)$ от $-\infty$ при убывании времени.

Наконец, еще две периодические траектории получаются при $\sqrt{\mathcal{F}} < 0$.

Получим условия существования области

$$\dot{\varphi} = \nu \mathcal{F} \varphi - \frac{\kappa}{\mathcal{F}}(1 + \varphi^2) > 0. \quad (7.5)$$

Решение этого неравенства имеет вид

$$\frac{\nu \mathcal{F}^{3/2} - \sqrt{\nu^2 \mathcal{F}^3 - 4\kappa^2}}{2\kappa} \leq \varphi \leq \frac{\nu \mathcal{F}^{3/2} + \sqrt{\nu^2 \mathcal{F}^3 - 4\kappa^2}}{2\kappa},$$

и очевидно, что искомая область будет существовать, если неравенство

$$\nu^2 \mathcal{F}^3 - 4\kappa^2 \geq 0$$

выполнено для всех $\mathcal{F}$, т.е. $\nu^2 \mathcal{F}_{\min}^3 - 4\kappa^2 \geq 0$.

Если неравенство (7.5) не имеет вещественных решений, то $\nu^2 \mathcal{F}_{\max}^3 - 4\kappa^2 \leq 0$, φ монотонно убывает, что и приводит к квазипериодичности φ .

Оценки (7.1) и (7.2) следуют из очевидного факта, что значения φ решений φ_{major} , φ_{minor} не могут достигать таких значений, при которых $\dot{\varphi}$ отрицательны при всех возможных значениях $\mathcal{F}$, т.е. при условии $x_2 \leq \mathcal{F} \leq x_3$.

Легко видеть, что верхняя оценка периодического решения φ_{major} обратна нижней оценке решения φ_{minor} , а также что верхняя оценка периодического решения φ_{minor} обратна нижней оценке решения φ_{major} . Это обстоятельство приводит к предположению

$$\varphi_{\text{minor}}(t) = \frac{1}{\varphi_{\text{major}}(-t)},$$

которое легко проверяется:

$$\left(\frac{1}{\varphi}\right)' = -\frac{\dot{\varphi}}{\varphi^2} = -\frac{\nu\sqrt{\mathcal{F}}\varphi - \frac{\kappa}{\mathcal{F}}(1 + \varphi^2)}{\varphi^2} = -\left(\nu\sqrt{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{\varphi}\right) - \frac{\kappa}{\mathcal{F}}\left(1 + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2\right)\right),$$

при этом производную $\mathcal{F}$ надо брать со знаком минус перед корнем:

$$A_3 \dot{\mathcal{F}} = -\sqrt{2A_3 \mathcal{T} \mathcal{R} \mathcal{F} - 2A_3 \mathcal{F}(\mathcal{F} - \mathcal{H})^2 - \mathcal{M}^2 \mathcal{R}} = -A_3 \sqrt{\mathcal{P}_3(\mathcal{F})}.$$

Полученное соотношение, как и его доказательство, весьма близко к соотношению $\varphi_- = -1/\varphi_+$ из предложения 1 для решений на разных листах функции $\sqrt{\mathcal{F}}$, однако по существу эти похожие формулы имеют совершенно разный контекст.

Если решения $\varphi(t)$, $-\varphi(t)^{-1}$ в классических координатах задают одно и то же решение, то решения $\varphi(t)$, $\varphi(-t)^{-1}$, вообще говоря, разные. Исключение составляет только тот случай, когда два предельных периодических решения склеиваются в одно.

Как было отмечено в замечании 4, движение в задаче Гесса происходит на двумерном вещественном торе. Вообще говоря, при непрерывном изменении параметров задачи отношение частот этого движения

$$\omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{n(t)};$$

будет изменяться ($m(t)$, $n(t)$ – число полных оборотов вдоль базисных циклов). При иррациональном значении ω все траектории являются эргодическими, т.е. задаются почти периодическими функциями, а при рациональном существуют периодические, но могут быть, вообще говоря, и асимптотически периодические решения (см. [25]).

В рассматриваемой задаче Гесса ситуация является существенно более простой в силу линейности уравнений (2.8), получаемых из уравнений Риккати. Степени линейного отображения с мнимыми собственными значениями задают либо периодическую, либо квазипериодическую (см. [19]) последовательности отображений. Этот же результат следует из рассмотрения параметрического отображения последования (см. (5.5)).

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Асимптотики (2.12) и (2.11) при $c = 0$ не являются асимптотиками общего положения, поскольку функция φ в окрестности особой точки $\mathcal{F} = \infty$ является локально однозначной только в этих случаях, а в остальных случаях является бесконечнозначной.

При этом если рассматривать задачу Гесса не просто с комплексным временем, а на прямом произведении $S_2 \times \mathbb{C}P^1$ (см. замечание 4), то периодическое решение будет однозначным на вещественной окружности, а непериодическое – бесконечнозначным. Такой подход выглядит естественным, поскольку и решения общего положения являются бесконечнозначными.

Следовательно, вполне естественно предположить, что два особых однозначных в окрестности особой точки $\mathcal{F} = \infty$ решения как раз и есть те самые два периодических решения, о которых идет речь в теореме 3.

Однако если связь между рассмотренными решениями и существует, то она, по-видимому, весьма нетривиальна, поскольку при подходящих указанных в теореме 3 условиях все вещественные решения могут быть квазипериодическими, а значит, периодических решений не будет вообще, но однозначные в окрестности точки $\mathcal{F} = \infty$ все-таки будут.

§ 8. Представление предельных периодических решений

При описании решений задачи Гесса, несомненно, одним из важнейших является представление предельных периодических решений φ_{major} , φ_{minor} , тем более, что, зная эти представления, можно получить и все остальные в силу известного свойства уравнения Риккати.

Естественно искать эти представления как функцию от периодической функции $\mathcal{F}$.

График периодических функций $\varphi(\mathcal{F})$ на отрезке $[x_2, x_3]$ имеет вид эллипса, касающегося вертикальных прямых $x = x_2$, $x = x_3$, поскольку в силу дифференциального уравнения

$$\varphi'_{\mathcal{F}} = \frac{\nu\sqrt{\mathcal{F}}\varphi - \frac{\kappa}{\mathcal{F}}(1 + \varphi^2)}{\dot{\mathcal{F}}} = \frac{\nu\mathcal{F}^{3/2}\varphi - \kappa(1 + \varphi^2)}{\sqrt{\mathcal{P}_2(\mathcal{F})}\mathcal{F}}$$

в точках x_2, x_3 производная $\varphi'_{\mathcal{F}}$ бесконечна. При этом график возрастает на области (см. (7.4))

$$\nu\mathcal{F}\varphi - \frac{\kappa}{\mathcal{F}}(1 + \varphi^2) > 0,$$

убывает вне ее и, естественно, пересекает ее границу в точках с экстремальными значениями.

Достаточно грубым приближением графиков периодических функций $\varphi(\mathcal{F})$ является график функции $a_0 + a_1\sqrt{\mathcal{F}} + a_3\dot{\mathcal{F}}$, поэтому естественно искать представление функций $\varphi(\mathcal{F})$ в виде, аналогичном представлению двоякопериодических решений через $\wp$ -функцию Вейерштрасса (см. [18]), а именно в виде

$$\varphi(\mathcal{F}) = \sqrt{\mathcal{F}}\Phi(\mathcal{F}) + \dot{\mathcal{F}}\Psi(\mathcal{F}). \quad (8.1)$$

Подставив это представление в дифференциальное уравнение (2.8) для φ , получим

$$\begin{cases} \Phi' = -\frac{\Phi}{2\mathcal{F}} + \nu\Psi - \frac{2\kappa\Phi\Psi}{\mathcal{F}}, \\ \mathcal{P}_3\Psi' = -\mathcal{P}_2\Psi + \nu\mathcal{F}\Phi - \frac{\kappa(1 + \mathcal{F}\Phi^2 + \mathcal{P}_3\Psi^2)}{\mathcal{F}}, \end{cases} \quad (8.2)$$

где Φ' , Ψ' – производные по $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}_3 = (\dot{\mathcal{F}})^2$ есть полином третьей степени по $\mathcal{F}$ (см. (2.5)), $\mathcal{P}_2 = \ddot{\mathcal{F}} = (\mathcal{P}_3)'/2$ – полином второй степени по $\mathcal{F}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Функция $\varphi(t)$, имеющая представление (8.1) и удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений (8.2), является решением (2.8) как на листе $\sqrt{\mathcal{F}}$, так и на листе $-\sqrt{\mathcal{F}}$, т.е. задает глобальное решение (2.8).*

Истинность предложения 10 следует из того, что дифференциальные уравнения (8.2) являются инвариантными относительно замены $\Phi \rightarrow -\Phi$, $\nu \rightarrow -\nu$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Система дифференциальных уравнений (8.2) имеет первый интеграл*

$$\mathcal{P}_3\Psi^2 - \mathcal{F}\Phi^2 + 1 = 0, \quad (8.3)$$

что позволяет записать систему (8.2) в виде

$$\begin{cases} 2\mathcal{F}\Phi' = -\Phi + 2\Psi(\nu\mathcal{F} - 2\kappa\Phi), \\ \mathcal{P}_3\Psi' = -\mathcal{P}_2\Psi + \Phi(\nu\mathcal{F} - 2\kappa\Phi). \end{cases} \quad (8.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедиться в том, что $\mathcal{P}_3\Psi^2 - \mathcal{F}\Phi^2$ является частным первым интегралом, можно простой проверкой:

$$(\mathcal{P}_3\Psi^2 - \mathcal{F}\Phi^2)' = -\frac{2\Psi\kappa}{\mathcal{F}}(\mathcal{P}_3\Psi^2 - \mathcal{F}\Phi^2 + 1),$$

но суть дела заключается в том, что решения φ на разных листах функции $\sqrt{\mathcal{F}}$ связаны соотношением $\varphi_+\varphi_- = -1$ в силу предложения 1, поэтому

$$(\sqrt{\mathcal{F}}\Phi(\mathcal{F}) + \mathcal{F}\Psi(\mathcal{F}))(-\sqrt{\mathcal{F}}\Phi(\mathcal{F}) + \mathcal{F}\Psi(\mathcal{F})) + 1 = 0.$$

Систему дифференциальных уравнений (8.4) можно записать в более симметричном виде. В самом деле,

$$\begin{cases} (\sqrt{\mathcal{F}}\Phi)' = \frac{\Psi(\nu\mathcal{F} - 2\kappa\Phi)}{\sqrt{\mathcal{F}}}, \\ (\sqrt{\mathcal{P}_3}\Psi)' = \frac{\Phi(\nu\mathcal{F} - 2\kappa\Phi)}{\sqrt{\mathcal{P}_3}}, \end{cases}$$

и, полагая

$$\tilde{\Phi} = \sqrt{\mathcal{F}}\Phi, \quad \tilde{\Psi} = \sqrt{\mathcal{P}_3}\Psi,$$

получим

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}' = \frac{\tilde{\Psi}(\nu\mathcal{F}^{3/2} - 2\kappa\tilde{\Phi})}{\mathcal{F}\sqrt{\mathcal{P}_3}}, \\ \tilde{\Psi}' = \frac{\tilde{\Phi}(\nu\mathcal{F}^{3/2} - 2\kappa\tilde{\Phi})}{\mathcal{F}\sqrt{\mathcal{P}_3}} \end{cases} \quad (8.5)$$

с первым интегралом

$$\tilde{\Psi}^2 - \tilde{\Phi}^2 + 1 = 0. \quad (8.6)$$

В результате имеем

$$\begin{cases} \tilde{\Phi} = \operatorname{sh}\left(\int \frac{\nu\mathcal{F}^{3/2} - 2\kappa\tilde{\Phi}}{\mathcal{F}\sqrt{\mathcal{P}_3}} d\mathcal{F}\right), \\ \tilde{\Psi} = \operatorname{ch}\left(\int \frac{\nu\mathcal{F}^{3/2} - 2\kappa\tilde{\Phi}}{\mathcal{F}\sqrt{\mathcal{P}_3}} d\mathcal{F}\right), \end{cases} \quad (8.7)$$

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{1}{\varphi}\right), \quad \tilde{\Psi} = \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right). \quad (8.8)$$

Полученные представления (8.4), (8.5) и (8.7), несмотря на их внешнюю привлекательность, вряд ли возможно использовать для представления φ в виде ряда по $\mathcal{F}$, поскольку в концах интересующего нас отрезка $[x_2, x_3]$ решение (8.3), (8.4) имеет логарифмические особенности.

Можно вернуться к рассмотрению системы (8.2) и потребовать, чтобы правая часть второго уравнения системы в одной из точек x_2, x_3 равнялась нулю. Тогда мы получим представление без особенности в этой точке и зависимость между $\Phi(x_i)$ и $\Psi(x_i)$, но в таком случае не ясно, при каком значении, например, $\Phi(x_2)$ обеспечивается отсутствие особенности $\Phi(\mathcal{F})$ в точке x_3 .

В создавшейся ситуации приходится в качестве аргумента функции φ брать функцию $\dot{\mathcal{F}}$; тогда дифференциальное уравнение для $\varphi(\dot{\mathcal{F}})$ имеет вид

$$\varphi' = \frac{\nu\sqrt{\mathcal{F}}\varphi - \frac{\kappa}{\mathcal{F}}(1 + \varphi^2)}{\ddot{\mathcal{F}}} = \frac{\nu\mathcal{F}^{3/2}\varphi - \kappa(1 + \varphi^2)}{\mathcal{P}_2(\mathcal{F})\mathcal{F}}, \quad (8.9)$$

где (см. (2.5))

$$\mathcal{P}_2(\mathcal{F}) = \frac{1}{2}\mathcal{P}_3(\mathcal{F})' = 2A_3(-3\mathcal{F}^2 + 4\mathcal{F}\mathcal{H} + \mathcal{R}\mathcal{I} - \mathcal{H}^2).$$

Аналитическая функция $\varphi(\dot{\mathcal{F}})$ имеет особенности в точках, в которых

$$\mathcal{F}_0 = \frac{1}{3}(2\mathcal{H} \pm \sqrt{\mathcal{H}^2 + 3\mathcal{R}\mathcal{I}}). \quad (8.10)$$

Большая из этих точек попадает в отрезок $[x_2, x_3]$, и в этой точке нет особенности лишь в случае, когда числитель (2.5) равен нулю, т.е. при условии

$$\varphi_0 = \frac{\nu\mathcal{F}_0^{3/2} \pm \sqrt{\nu^2\mathcal{F}_0^3 - 4\kappa^2}}{2\kappa}. \quad (8.11)$$

Как и следовало ожидать, искомые точки удовлетворяют соотношениям (7.1), (7.2), (7.4) и при этом $\varphi_{0+}\varphi_{0-} = 1$.

Итак, представление периодических функций мы получаем в виде ряда Тейлора и к тому же сразу получаем точное условие, при котором предельные периодические решения случая Гесса склеиваются в одно, т.е. условие, разделяющее классы квазипериодических и периодических в пределе решений.

ТЕОРЕМА 4. *Вещественные траектории решений в случае Гесса (см. теорему 1) задачи о движении тяжелого твердого тела на двумерном инвариантном торе, задаваемом первыми интегралами $\mathcal{H}, \mathcal{M}, \mathcal{I}, \mathcal{J}$, являются квазипериодическими, в частности, периодическими при условии*

$$\nu^2\mathcal{F}_0^3 < 4\kappa^2, \quad \mathcal{F}_0 = \frac{1}{3}(2\mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}^2 + 3\mathcal{R}\mathcal{I}}),$$

или

$$\frac{8B_{23}B_{31}}{A_1A_2}\mathcal{F}_0^3 < \frac{\mathcal{M}^2\mathcal{R}}{A_3}.$$

В случае

$$\frac{8B_{23}B_{31}}{A_1A_2}\mathcal{F}_0^3 = \frac{\mathcal{M}^2\mathcal{R}}{A_3}$$

на торе будет ровно одно периодическое решение, являющееся предельным для всех остальных решений.

Наконец, если

$$\frac{8B_{23}B_{31}}{A_1A_2}\mathcal{F}_0^3 > \frac{\mathcal{M}^2\mathcal{R}}{A_3},$$

на торе будет ровно два периодических решения, являющихся предельными для всех остальных решений.

В этом случае периодические решения имеют представление

$$\varphi(\dot{\mathcal{F}}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\dot{\mathcal{F}} - \dot{\mathcal{F}}_0)^i,$$

где

$$\begin{aligned} A_3\dot{\mathcal{F}}_0 &= \sqrt{2A_3\mathcal{T}\mathcal{R}\mathcal{F} - 2A_3\mathcal{F}_0(\mathcal{F}_0 - \mathcal{H})^2 - \mathcal{M}^2\mathcal{R}} = A_3\sqrt{\mathcal{P}_3(\mathcal{F}_0)}, \\ a_0 &= \frac{\nu\mathcal{F}_0^{3/2} \pm \sqrt{\nu^2\mathcal{F}_0^3 - 4\kappa^2}}{2\kappa}, \\ a_i &= \tilde{a}_i(\varphi, \mathcal{F})|_{\mathcal{F}=\mathcal{F}_0, \varphi=a_0}, \\ \tilde{a}_1(\varphi, \mathcal{F}) &= 2\left(\nu\sqrt{\mathcal{F}}\varphi - \frac{\kappa}{\mathcal{F}}(1 + \varphi^2)\right)\left(\frac{d\mathcal{P}_3(\mathcal{F})}{d\mathcal{F}}\right)^{-1}, \\ \tilde{a}_{i+1}(\varphi, \mathcal{F}) &= 2\dot{\tilde{a}}_i(\varphi, \mathcal{F})\left(\frac{d\mathcal{P}_3(\mathcal{F})}{d\mathcal{F}}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Точное условие трансформации вида траекторий решений задачи Гесса от квазипериодических к предельно-периодическим получено как в терминах параметров $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{T}$ (теорема 4), так и в терминах параметров a_{11} , a_{22} (см. (5.11), (5.13)), что дает возможность исследовать связь этих наборов параметров, которая, по-видимому, является весьма нетривиальной.

Список литературы

- [1] W. Hess, “Ueber die Euler’schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt”, *Math. Ann.*, **37:2** (1890), 153–181.
- [2] Н. Е. Жуковский, “Локсодромический маятник Гесса”, *Труды отд. физ. наук об-ва любит. естествознания*, **5:2** (1893), 37–45.
- [3] Б. К. Млодзеевский, П. А. Некрасов, “Об условиях существования асимптотических периодических движений в задаче Гесса”, *Труды отд. физ. наук об-ва любит. естествознания*, **6:1** (1893), 43–52.
- [4] П. А. Некрасов, “Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки”, *Матем. сб.*, **18:2** (1896), 161–274.
- [5] Г. Г. Аппельрот, “По поводу § 1 мемуара С. В. Ковалевской «Sur le problème de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe»”, *Матем. сб.*, **16:3** (1892), 483–507.
- [6] С. В. Ковалевская, *Научные работы*, Изд-во АН СССР, М., 1948, 368 с.
- [7] П. А. Некрасов, “К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки”, *Матем. сб.*, **16:3** (1892), 508–517.

- [8] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980, 320 с.; англ. пер.: S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, V. E. Zakharov, *Theory of solitons. The inverse scattering method*, Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau [Plenum], New York, 1984, xi+276 pp.
- [9] С. В. Манаков, “Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела”, *Функц. анализ и его прил.*, **10:4** (1976), 93–94; англ. пер.: S. V. Manakov, “Note on the integration of Euler’s equations of the dynamics of an n -dimensional rigid body”, *Funct. Anal. Appl.*, **10:4** (1976), 328–329.
- [10] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42:2** (1978), 396–415; англ. пер.: A. S. Mishchenko, A. T. Fomenko, “Euler equations on finite-dimensional Lie groups”, *Math. USSR-Izv.*, **12:2** (1978), 371–389.
- [11] M. Adler, P. van Moerbeke, “Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras, and curves”, *Adv. in Math.*, **38:3** (1980), 267–317.
- [12] M. Adler, P. van Moerbeke, “Linearization of Hamiltonian system, Jacobi varieties, and representation theory”, *Adv. in Math.*, **38:3** (1980), 318–379.
- [13] V. Dragović, B. Gagić, “An L–A pair for the Hess–Appelrot system and a new integrable case for the Euler–Poisson equations on $so(4) \times so(4)$ ”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **131:4** (2001), 845–855.
- [14] P. Lubowiecki, H. Żołądek, “The Hess–Appelrot system. I. Invariant torus and its normal hyperbolicity”, *J. Geom. Mech.*, **4:4** (2012), 443–467.
- [15] P. Lubowiecki, H. Żołądek, “The Hess–Appelrot system. II. Perturbation and limit cycles”, *J. Differential Equations*, **252:2** (2012), 1701–1722.
- [16] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, 3-е изд., Наука, М., 1989, 472 с.; англ. пер. 1-го изд.: V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Grad. Texts in Math., **60**, Springer-Verlag, New York, 1978, xvi+462 pp.
- [17] А. В. Беляев, “Аналитические свойства решений задачи о движении тяжелого твердого тела в случае Гесса”, *Укр. матем. вестник*, **2:33** (2005), 297–317; англ. пер.: A. V. Belyaev, “Analytic properties of solutions of the Euler–Poisson equations in the Hess case”, *Ukr. Math. Bull.*, **2:2005**, 301–321.
- [18] А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций*, Мир, М., 1968, 648 с.; пер. с нем.: A. Hurwitz, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über geometrische Funktionentheorie von R. Courant. Mit einem Anhang von H. Röhrl, 4. Aufl., Grundlehren Math. Wiss., **3**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1964, xiii+706 pp.
- [19] Б. М. Левитан, В. В. Жиков, *Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1978, 204 с.; англ. пер.: B. M. Levitan, V. V. Zhikov, *Almost periodic functions and differential equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1982, xi+211 pp.
- [20] А. В. Беляев, “Об асимптотике особых точек решений задачи о движении тяжелого n -мерного тела в случае Лагранжа”, *Матем. сб.*, **202:11** (2011), 55–74; англ. пер.: A. V. Belyaev, “Asymptotic behaviour of singular points of solutions of the problem of heavy n -dimensional body motion in the Lagrange case”, *Sb. Math.*, **202:11** (2011), 1617–1635.
- [21] A. V. Belyaev, “On the full list of finite-valued solutions of the Euler–Poisson equations having four first integrals”, *Math. Nachr.*, **285:10** (2012), 1199–1229.
- [22] А. И. Докшевич, *Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона*, Наукова думка, Киев, 1992, 168 с.

- [23] А. М. Ляпунов, “Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку”, *Сообщ. Харьковск. матем. об-ва*, 2 сер., 4 (1894), 123–140.
- [24] Ю. А. Архангельский, *Аналитическая динамика твердого тела*, Наука, М., 1977, 328 с.
- [25] И. Тамура, *Топология слоений*, Мир, М., 1979, 319 с.; пер. с японск.: I. Tamura, *Yōsō no toporojī (Topology of foliations)*, Sugaku Sensho, Iwanami Shoten, Tokyo, 1976, 238 pp.

Александр Владимирович Беляев
(Alexandr V. Belyaev)

Донецкий государственный университет
управления, Украина

E-mail: alex.vl.belyaev@yandex.ru

Поступила в редакцию
03.02.2014 и 12.07.2014