Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Биинвариантные функции на группе преобразований, оставляющих меру квазиинвариантной, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 9, 145–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8339>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 18:28:38

УДК 517.986.6+517.987.1+512.546

Ю. А. Неретин

Биинвариантные функции на группе преобразований, оставляющих меру квазиинвариантной

Пусть G_{ms} – группа преобразований лебеговского пространства, оставляющих меру квазиинвариантной, и пусть A_{ms} – ее подгруппа, состоящая из преобразований, сохраняющих меру. Мы описываем канонические формы двойных классов смежности группы G_{ms} по подгруппе A_{ms} и показываем, что все непрерывные A_{ms} -биинвариантные функции на G_{ms} являются функционалами от распределения производной Радона–Никодима.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: лебеговское пространство, преобразования пространств с мерой, польская группа, двойные классы смежности.

DOI: 10.4213/sm8339

§ 1. Утверждения

1.1. Группа G_{ms} . Через $\mathbb{R}^\times$ обозначим группу положительных вещественных чисел по умножению. Координату на ней будем обозначать через t .

Пусть M – лебеговское пространство (см. [1]) с непрерывной вероятностной мерой μ (напомним, что любое такое пространство эквивалентно отрезку $[0, 1]$). Обозначим через $A_{ms} = A_{ms}(M)$ группу всех преобразований (определенных с точностью до совпадения п.в.), сохраняющих меру μ . Через $G_{ms} = G_{ms}(M)$ обозначим группу преобразований (определенных с точностью до совпадения п.в.), оставляющих меру μ квазиинвариантной.

Группа A_{ms} много обсуждалась в связи с эргодической теорией, группа G_{ms} – предмет настоящей заметки – лишь изредка упоминалась в литературе. Между тем она является интересным объектом с точки зрения теории представлений бесконечномерных (“больших” в терминологии А. М. Вершика) групп; см. [2], [3].

1.2. Топология на G_{ms} . На группе G_{ms} ранее (см. [4; п. 17.46], [5], [6; § 4.5]) разными способами определялась сепарабельная топология; одна из целей настоящей статьи – показать, что эти способы равносильны.

Первый способ такой. Пусть $A, B \subset M$ – измеримые подмножества. Для $g \in G_{ms}$ рассмотрим распределение

$$\kappa[g; A, B]$$

Работа выполнена при поддержке Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung (FWF, Austrian Science Fund), грант № P25142.

производной Радона–Никодима g' на множестве $A \cap g^{-1}(B)$. Мы говорим, что последовательность $g_j \in \text{Gms}$ сходится к g , если для любых измеримых множеств A, B имеем слабые сходимости мер на $\mathbb{R}^\times$

$$\varkappa[g_j; A, B] \rightarrow \varkappa[g; A, B], \quad t\varkappa[g_j; A, B] \rightarrow t\varkappa[g; A, B]. \quad (1.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Отметим очевидные тождества

$$\int_{\mathbb{R}^\times} \varkappa[g; A, M](t) = \mu(A), \quad \int_{\mathbb{R}^\times} t \varkappa[g; A, M](t) = \mu(gA). \quad (1.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Рассмотрим измеримое конечное разбиение

$$\mathfrak{h}: M = M^1 \cup M^2 \cup \dots$$

пространства M . Это дает нам матрицу $S_{\alpha\beta}[g; \mathfrak{h}] := \varkappa[g; M^\alpha, M^\beta]$, составленную из мер на $\mathbb{R}^\times$. Если $\mathfrak{k}$ – измельчение разбиения $\mathfrak{h}$, мы будем писать $\mathfrak{h} \preccurlyeq \mathfrak{k}$. Берем последовательность разбиений $\mathfrak{h}_1 \preccurlyeq \mathfrak{h}_2 \preccurlyeq \dots$, порождающую σ -алгебру пространства¹ M . Сходимость $g_j \rightarrow g$ равносильна поэлементной сходимости в смысле (1.1) всех матриц $S[g_j; \mathfrak{h}_n] \rightarrow S[g; \mathfrak{h}_n]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Относительно данной топологии группа Gms является польской группой, т.е. полной в смысле двусторонней равномерной структуры сепарабельной топологической группой, гомеоморфной полному метрическому пространству².*

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$. Группа Gms действует в пространстве $L^p(M)$ изометриями по формуле

$$T_{1/p+is}f(x) = f(g(x))g'(x)^{1/p+is}.$$

На пространстве $\mathcal{B}(V)$ операторов банахова пространства V мы обычным образом вводим сильную и слабые топологии (см., например, [9; § VI.1]). Кроме того, на множестве $\mathcal{GL}(V)$ обратимых операторов мы вводим *бисильную* топологию: A_j сходится к A , если $A_j \rightarrow A$ и $A_j^{-1} \rightarrow A^{-1}$ сильно. Вложение $T_{1/p+is}: \text{Gms} \rightarrow \mathcal{B}(L^p)$ индуцирует топологию на Gms с любой операторной топологии на $\mathcal{B}(V)$ или $\mathcal{GL}(V)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. а) Пусть $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$. Топология на Gms , индуцированная с любой из трех топологий (сильной, слабой, бисильной), совпадает с топологией, введенной выше.

б) Пусть $p = 1$, $s \in \mathbb{R}$. Топология на Gms , индуцированная с сильной или с бисильной топологии, совпадает с топологией, введенной выше.

с) Пусть $1 \leq p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$. Тогда образ Gms в $\mathcal{GL}(L^p(M))$ замкнут в бисильной топологии.

¹Например, в качестве $\mathfrak{h}_n$ можно взять разбиение отрезка $M = [0, 1]$ на 2^n кусков вида $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$.

²Метрика согласована с топологией группы, но не с ее алгебраической структурой, в частности она не предполагается инвариантной. Полнота группы в смысле двусторонней равномерной структуры (в смысле Райкова; см. [7]) определяется (для метризуемых групп) следующим образом. Пусть двойные последовательности $g_i g_j^{-1}$ и $g_i^{-1} g_j$ сходятся к 1 при $i, j \rightarrow \infty$. Тогда g_i имеет предел в группе. Это определение не эквивалентно определению Бурбаки (см. [8; п. III.3.3]), требующему полноты относительно обеих односторонних равномерных структур. Группа Gms не является полной по Бурбаки.

Отметим, что совпадение топологий не удивительно. Известно, что две разные польские топологии не могут порождать на группе одну и ту же борелевскую структуру; см. [4; п. 12.24]. Есть также теоремы об автоматической непрерывности гомоморфизмов; см. [4; п. 9.10].

1.3. Двойные классы смежности $\text{Ams} \setminus \text{Gms}/\text{Ams}$. Канонические формы. Мы переформулируем задачу описания двойных классов смежности $\text{Ams} \setminus \text{Gms}/\text{Ams}$ в следующем виде. Пусть (P, π) , (R, ρ) – два лебеговских пространства с непрерывными вероятностными мерами. Через $\text{Gms}(P, R)$ обозначим множество всех биекций $g: P \rightarrow R$ (определенных с точностью до п.в.) таких, что образы и прообразы множеств нулевой меры имеют нулевую меру. Мы хотим описать такие биекции с точностью до эквивалентности

$$g \sim u \cdot g \cdot v, \quad \text{где } v \in \text{Ams}(P), \quad u \in \text{Ams}(R) \quad (1.3)$$

(ясно, что такие классы эквивалентности находятся во взаимно однозначном соответствии с классами $\text{Ams} \setminus \text{Gms}/\text{Ams}$).

ЛЕММА 1.5. *Два элемента $g_1, g_2 \in \text{Gms}(P, R)$ лежат в одном классе тогда и только тогда, когда производные Радона–Никодима $g'_1, g'_2: P \rightarrow \mathbb{R}$ эквивалентны относительно действия группы $\text{Ams}(P)$, т.е. $g'_2(m) = g'_1(mh)$, где h – некоторый элемент $\text{Ams}(P)$.*

Очевидным инвариантом этого действия является распределение ν производной Радона–Никодима g' отображения g ,

$$\int_{\mathbb{R}^\times} d\nu(t) = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^\times} t d\nu(t) = 1. \quad (1.4)$$

Этот инвариант не является исчерпывающим, вопрос решается сведением к теореме Рохлина (см. [10]) о метрической классификации функций; см. обсуждение ниже, п. 3.2. Окончательное описание классов эквивалентности такое.

Рассмотрим счетное число копий $\mathbb{R}_1^\times, \mathbb{R}_2^\times, \dots$ полупрямой $\mathbb{R}^\times$. Рассмотрим еще одну копию $\mathbb{R}_\infty^\times$. Рассмотрим дизъюнктивное объединение

$$\mathcal{L} := \mathbb{R}_1^\times \amalg \mathbb{R}_2^\times \amalg \mathbb{R}_3^\times \amalg \dots \amalg (\mathbb{R}_\infty^\times \times [0, 1]).$$

Пусть $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\infty$ – семейство мер на $\mathbb{R}^\times$, удовлетворяющих следующим свойствам:

- 1) $\nu_1, \nu_2, \dots$ непрерывны (а ν_∞ может иметь атомы);
- 2) $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots$;
- 3) мера $\nu := \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_\infty$ удовлетворяет (1.4).

Теперь снабдим каждое $\mathbb{R}_j^\times$ мерой ν_j , а $\mathbb{R}_\infty^\times \times [0, 1]$ – мерой $\nu_\infty \times dx$, где dx – мера Лебега на отрезке. Полученное пространство с мерой мы обозначим через $\mathcal{L}[\nu_1, \nu_2, \dots; \nu_\infty]$.

Рассмотрим ту же меру на $\mathcal{L}$, умноженную на t ; полученное пространство с мерой обозначим через $\mathcal{L}_*[\nu_1, \nu_2, \dots; \nu_\infty]$.

Рассмотрим тождественное отображение

$$\text{id}: \mathcal{L}[\nu_1, \nu_2, \dots; \nu_\infty] \rightarrow \mathcal{L}_*[\nu_1, \nu_2, \dots; \nu_\infty]. \quad (1.5)$$

Очевидно, распределение производной Радона–Никодима отображения id совпадает с ν .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. *Любой класс эквивалентности (1.3) содержит единственный представитель вида (1.5).*

Обозначим двойной класс смежности, содержащий описанный выше представитель, через $S[\nu_1, \nu_2, \dots; \nu_\infty]$.

1.4. О замыканиях двойных классов смежности.

ТЕОРЕМА 1.7. *Пусть мера ν на $\mathbb{R}^\times$ удовлетворяет (1.4), и пусть $\nu = \nu^c + \nu^d$ – ее разложение на непрерывную и дискретную части. Тогда замыкание двойного класса смежности $S[\nu^c, 0, 0, \dots; \nu^d]$ содержит все двойные классы смежности $S[\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots; \nu_\infty^c + \nu_d]$ с $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_\infty^c = \nu^c$.*

1.5. Хаусдорфов фактор. Рассмотрим пространство $\mathcal{M}$ всех мер ν на $\mathbb{R}^\times$, удовлетворяющих (1.4). Последовательность $\nu^j \in \mathcal{M}$ назовем сходящейся к ν , если $\nu^j \rightarrow \nu$ и $t\nu^j \rightarrow t\nu$ слабо.

Рассмотрим отображение $\Phi: \text{Gms} \rightarrow \mathcal{M}$, которое каждому g ставит в соответствие распределение его производной Радона–Никодима (т.е. $\Phi(g) = \varkappa[g; M, M]$). В силу теоремы 1.7 прообразы точек $\nu \in \mathcal{M}$ суть замыкания двойных классов смежности $S[\nu^c, 0, 0, \dots; \nu^d]$.

ТЕОРЕМА 1.8. *Пусть f – непрерывное отображение Gms в некоторое метрическое пространство T , причем f постоянно на двойных классах смежности. Тогда f имеет вид $f = q \circ \Phi$, где $q: \mathcal{M} \rightarrow T$ – непрерывное отображение.*

1.6. Непрерывное сечение $\mathcal{M} \rightarrow \text{Gms}$. Мы скажем, что функция $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ принадлежит классу $\mathcal{G}$, если:

- она выпукла вниз и непрерывна;
- $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ и $h(x) > 0$ при $x > 0$.

Каждая такая функция является элементом группы $\text{Gms}([0, 1])$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. *Пусть $\nu \in \mathcal{M}$. Тогда существует единственная функция $\psi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ класса $\mathcal{G}$ такая, что распределение производной ψ' равно ν . Более того, отображение $\nu \mapsto \psi$ является непрерывным отображением $\mathcal{M} \rightarrow \text{Gms}$.*

1.7. Более общее утверждение. Пусть дано конечное или счетное измеримое разбиение нашего пространства с мерой, $M = \coprod_j M_j$. Обозначим через K прямое произведение $K = \text{Ams}(M_1) \times \text{Ams}(M_2) \times \dots$. Рассмотрим двойные классы смежности $K \setminus \text{Gms}/K$. Поставим каждому $g \in \text{Gms}$ в соответствие матрицу $\varkappa_{ij} = \varkappa[g; M_i, M_j]$, составленную из мер на $\mathbb{R}^\times$. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество матриц, которые получаются таким образом, т.е.

$$\sum_j \int_{\mathbb{R}^\times} d\varkappa_{ij}(t) = \mu(M_i), \quad \sum_i \int_{\mathbb{R}^\times} t\varkappa d\mu_{ij}(t) = \mu(M_j).$$

Снабдим $\mathcal{S}$ поэлементной сходимостью (1.1). Обозначим через Ψ естественное отображение $\text{Gms} \rightarrow \mathcal{S}$.

ТЕОРЕМА 1.10. Пусть f – непрерывное отображение Gms в метрическое T . Тогда существует непрерывное отображение $q: \mathcal{S} \rightarrow T$ такое, что $f = q \circ \Psi$.

Отметим, что это утверждение фактически использовалось в [5] и [2].

1.8. Структура статьи. Утверждения о топологии на группе доказываются в § 2, о двойных классах смежности – в § 3. Теорема 1.8 вытекает из теоремы 1.7. Однако, как заметил рецензент, первое утверждение проще второго (и оно более важно). Поэтому в начале § 3 мы приводим отдельное доказательство теоремы 1.8.

§ 2. Топология на группе Gms

Ниже доказываются предложения 1.3 и 1.4. Основное вспомогательное утверждение здесь – лемма 2.4. Остальные леммы доказываются непосредственно.

Обозначения:

δ_a – единичная атомарная мера на $\mathbb{R}^\times$, сосредоточенная в точке a ;

$\{\cdot, \cdot\}_{pq}$ – естественное спаривание L^p и L^q , где $1/p + 1/q = 1$;

χ_A – индикаторная функция множества $A \subset M$, т.е. $\chi_A(x) = 1$ для $x \in A$ и $\chi_A(x) = 0$ для $x \notin A$.

2.1. Предварительные замечания о пространствах L^p . 1) Напомним (см. [11; §3.3]), что при $p \neq 2$ группа изометрий $\text{Isom}(L^p(M))$ пространства $L^p(M)$ состоит из операторов вида

$$R(g, \sigma)f(x) = \sigma(x)f(g(x))g'(x)^{1/p}, \quad (2.1)$$

где $g \in Gms$, а $\sigma: M \rightarrow \mathbb{C}$ – функция, по модулю равная 1.

2) Далее, при $1 < p < \infty$ пространство L^p равномерно выпукло (см. [12; § 26.7]), поэтому ограничения сильной и слабой сходимостей на единичную сферу совпадают. Следовательно, на группе изометрий $\text{Isom}(L^p(M))$ совпадают сильная и слабая операторные топологии.

3) Напомним, что в случае сепарабельных банаховых пространств (в частности, для L^p при $p \neq \infty$) группа всех изометрий с бисильной топологией является польской группой; см. [4; п. 9.B9].

2.2. Предварительные замечания о группе Gms . 1) *Инвариантность топологии.* Снабдим Gms топологией из п. 1.2. Умножение в Gms непрерывно (это частный случай теоремы 5.9 из [13]). Отсюда, в частности, следует, что топология на Gms инвариантна относительно левых и правых сдвигов.

Отображение $g \mapsto g^{-1}$ непрерывно. Действительно,

$$\kappa[g^{-1}; B, A](t) = t^{-1}\kappa[g; A, B](t^{-1}),$$

и это отображение переставляет сходимости (1.1).

2) *Сепарабельность* Gms. Мере $\varkappa[g; A, B]$ ставится в соответствие характеристическая функция

$$\chi(z) = \int_{\mathbb{R}^\times} t^z d\varkappa[g; A, B](t), \quad (2.2)$$

непрерывная в полосе $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ и голоморфная в открытой полосе. Сходимость мер $\varkappa$ равносильна поточечной сходимости характеристических функций, равномерной в каждом прямоугольнике

$$0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, \quad -N \leq \operatorname{Im} z \leq N;$$

см. [13; предложения 4.4, 4.5]. Эта сходимость сепарабельна. Далее, в силу замечания 1.2 сходимость мер $\varkappa[g_j; A, B] \rightarrow \varkappa[g; A, B]$ достаточно проверить для счетного числа пар измеримых множеств (A, B) .

3) *Действие на булевой алгебре подмножеств.*

ЛЕММА 2.1. Пусть $g_j \rightarrow g$ в Gms. Тогда для любого измеримого множества $A \subset M$ мы имеем

$$\mu(g_j A \triangle g A) \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу инвариантности топологии достаточно рассмотреть $g = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu(g_j A \cap A) &= \int_{\mathbb{R}^\times} d\varkappa[g_j^{-1}; A; A](t) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^\times} d\varkappa[1; A; A](t) = \int_{\mathbb{R}^\times} \mu(A) \delta_0(t) = \mu(A), \\ \mu(g_j A) &= \int_{\mathbb{R}^\times} t d\varkappa[g_j; A; M] \rightarrow \int_{\mathbb{R}^\times} t d\varkappa[1; A; M] = \int_{\mathbb{R}^\times} \mu(A) t \delta_0(t) = \mu(A). \end{aligned}$$

Сравнивая эти две цепочки равенств, получаем искомое утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Высказывание, обратное к лемме 2.1, неверно. Пусть $M = [0, 1]$,

$$g_j(x) = x + \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n x).$$

Тогда для любого $A \subset [0, 1]$ мы имеем $\mu(g_j(A) \triangle A) \rightarrow \mu(A)$. Но сходимости $g_j \rightarrow 1$ в Gms нет, $T_1(g_j)$ сходится к 1 слабо в L^1 , а сильной сходимости нет.

4) *Непрерывность представлений $T_{1/p+is}$.*

ЛЕММА 2.3. При $p < \infty$ гомоморфизмы $T_{1/p+is}: \text{Gms} \rightarrow \text{Isom}(L^p)$ непрерывны относительно слабой топологии на $\text{Isom}(L^p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g_j \rightarrow g$ в Gms. Рассмотрим “матричные” элементы

$$\{T_{1/p+is}(g_j) \chi_A, \chi_B\}_{pq} = \int_{A \cap g_j^{-1} B} g_j'(x)^{1/p+is} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^\times} t^{1/p+is} d\varkappa[g_j; A, B](t).$$

Слабая сходимость мер (1.1) влечет сходимость характеристических функций (2.2), наше выражение стремится к

$$\int_{\mathbb{R}^\times} t^{1/p+is} d\varkappa[g; A, B](t) = \int_{A \cap g^{-1} B} g'(x)^{1/p+is} d\mu(x) = \{T_{1/p+is}(g) \chi_A, \chi_B\}_{pq},$$

что и требовалось доказать.

Итак, при $1 < p < \infty$ отображения $T_{1/p+is}: \text{Gms} \rightarrow \text{Isom}(L^p)$ непрерывны относительно сильной (= слабой) топологии. Учитывая непрерывность отображения $g \mapsto g^{-1}$, мы получаем, что отображения непрерывны и относительно бисильной топологии.

Отдельно нужно рассмотреть случай L^1 .

ЛЕММА 2.4. Пусть $g_j \rightarrow g$. Тогда $T_{1+is}(g_j) \in \text{Isom}(L^1)$ сходится сильно к $T_{1+is}(g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно положить $g = 1$. Достаточно проверить, что $\|T_{1+is}(g_j)\chi_A - \chi_A\| \rightarrow 0$ для каждого измеримого множества A . Эта норма равна

$$\begin{aligned} & \int_M |\chi_A(g_j x) g'(x)^{1+is} - \chi_A(x)| d\mu(x) \\ &= \int_{A \cap g_j^{-1} A} |g'(x)^{1+is} - 1| d\mu(x) + \int_{A \setminus g_j^{-1} A} d\mu(x) + \int_{g_j^{-1} A \setminus A} g'(x) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^\times} |t^{1+is} - 1| d\mathcal{K}[g_j; A, A](t) + \mu(A \setminus g_j^{-1} A) + \mu(A \setminus g_j A). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Второе и третье слагаемые правой части стремятся к нулю в силу леммы 2.1, а меры $\mathcal{K}[\dots]$ и $t\mathcal{K}[\dots]$ слабо сходятся к $\mu(A)\delta_0$, что влечет стремление к нулю интеграла.

2.3. Совпадение топологий и непрерывность умножения.

ЛЕММА 2.5. Пусть $1 < p < \infty$. Пусть $T_{1/p+is}(g_j)$ сходится слабо к 1 в $\text{Isom}(L_p)$. Тогда g_j сходится к 1 в Gms .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Покажем, что g'_j сходится к 1 в $L^1(M)$. Для этого заметим, что следующая последовательность матричных элементов должна стремиться к 1:

$$\{T_{1/p+is}(g_j) 1, 1\}_{pq} = \int_M g'_j(x)^{1/p+is} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^\times} t^{1/p+is} d\mathcal{K}[g_j; M, M](t). \quad (2.5)$$

Оцениваем подынтегральное выражение

$$\text{Re } t^{1/p+is} \leq t^{1/p} \leq \frac{1}{q} + \frac{t}{p}.$$

Второе неравенство означает, что график выпуклой вверх функции лежит ниже касательной в точке $t = 1$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^\times} \left(\frac{1}{q} + \frac{t}{p} \right) d\mathcal{K}[g_j; M, M](t) \\ &= \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^\times} d\mathcal{K}[g_j; M, M](t) + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^\times} t d\mathcal{K}[g_j; M, M](t) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1. \end{aligned}$$

Посмотрим, насколько интеграл (2.5) отклоняется от 1. То же соображение с касательной к графику выпуклой функции позволяет оценить разность

$1/q + t/p - t^{1/p}$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\sigma > 0$ такое, что

$$\frac{1}{q} + \frac{t}{p} - t^{1/p} > \begin{cases} \sigma & \text{при } t < 1 - \varepsilon, \\ \sigma t & \text{при } t > 1 + \varepsilon. \end{cases}$$

Поэтому

$$1 - \operatorname{Re}\{T_{1/p+is}(g_j)1, 1\}_{pq} > \sigma \int_0^{1-\varepsilon} d\kappa[g_j; M, M](t) + \sigma \int_{1+\varepsilon}^{\infty} t d\kappa[g_j; M, M](t).$$

Выражение в правой части неравенства должно стремиться к нулю, а поэтому $\kappa[g_j; M, M]$ и $t \cdot \kappa[g_j; M, M]$ стремятся к δ_0 слабо. Отсюда следует сходимость $g'_j \rightarrow 1$ в смысле L^1 .

Оставшаяся часть доказательства состоит в прямой проверке сходимости.

Шаг 2. Пусть теперь z лежит в полосе $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$. Покажем, что $(g'_j)^z$ сходится к 1 в смысле L^1 . Пусть $\|g' - 1\|_{L^1(M)} < \varepsilon$. Тогда имеет место равномерная по g оценка $\|(g')^z - 1\|_{L^1(M)} < \psi_z(\varepsilon)$, где $\psi_z(\varepsilon)$ стремится к нулю при ε , стремящемся к нулю. Для этого достаточно заметить, что

$$|a^z - 1| < \begin{cases} |z|(a-1) & \text{при } a > 1, \\ |z|2^{-\operatorname{Re} z+1}|a-1| & \text{при } \frac{1}{2} \leq a \leq 1, \\ 2 & \text{при } 0 < a < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

при этом $g' < 1/2$ возможно лишь на множестве меры $\leq 2\varepsilon$.

В частности, для любого подмножества $C \subset M$ мы имеем

$$\left| \int_C g'(x)^z dx - \mu(C) \right| \leq \psi_z(\varepsilon). \quad (2.6)$$

Шаг 3. Далее используем сходимость матричных элементов

$$\{T_{1/p+is}(g_j)\chi_A, \chi_B\}_{pq} = \int_{A \cap g_j^{-1}B} g'_j(x)^{1/p+is} d\mu(x) \rightarrow \{\chi_A, \chi_B\}_{pq} = \mu(A \cap B).$$

В силу (2.6) имеем сходимость

$$\int_{A \cap g_j^{-1}B} g'_j(x)^{1/p+is} d\mu(x) - \mu(A \cap g_j^{-1}B) \rightarrow 0.$$

Сравнивая две последние сходимости, получаем, что $\mu(A \cap g_j^{-1}B) \rightarrow \mu(A \cap B)$.

Шаг 4. В силу сходимости $(g'_j)^z$ в $L^1(M)$

$$\int t^z d\kappa[g_j; A, B](t) = \int_{A \cap g_j^{-1}B} g'(x)^z dx \rightarrow \mu(A \cap B)$$

при каждом z , а поточечная сходимость характеристических функций влечет слабую сходимость (1.1) мер (см. [13]), в нашем случае — $\mu(A \cap B)\delta_0$.

Итак, топология на G_{ms} индуцирована с сильной операторной топологией пространств L^p , а в сепарабельных банаховых пространствах умножение в сильной топологии непрерывно на ограниченных множествах. Поэтому умножение в G_{ms} непрерывно.

ЛЕММА 2.6. Пусть операторы $T_{1+is}(g_j)$ сходятся к 1 в сильной операторной топологии пространства L^1 . Тогда $g_j \rightarrow 1$ в G_{ms} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В (2.4) левая часть должна стремиться к нулю. Поэтому стремятся к нулю и все слагаемые правой части, в частности первое. Отсюда вытекают слабые сходимости мер $\varkappa[g_j; A, A]$ и $t\varkappa[g_j; A, A]$ к $\mu(A)\delta_1$. Сравнивая это с (1.2), получаем, что $\varkappa[g_j; A, M \setminus A]$ и $t\varkappa[g_j; A, M \setminus A]$ стремятся к нулю. Из этого легко выводится сходимость $g_j \rightarrow g$ в G_{ms} .

2.4. Полнота G_{ms} . Группа изометрий сепарабельного банахова пространства является польской группой относительно бисильной топологии (см. [4; п. 9.3.9]). Далее, возьмем $p \neq 1, 2, \infty$ и $s = 0$. Тогда изометрии $T_{1/p}(g)$ – это в точности те изометрии (2.1), которые переводят в себя конус неотрицательных функций. Очевидно, что множество операторов, переводящих этот конус в себя, является слабо замкнутым. Следовательно, G_{ms} – замкнутая подгруппа в полной группе всех изометрий, и поэтому она полна.

2.5. Бисильная замкнутость образа. Группа G_{ms} замкнута в группе $\text{Isom}(L^p)$, так как индуцированная на ней топология полна.

Стоит заметить, что группа $\text{Isom}(L^p)$ не является сильно замкнутой в пространстве всех ограниченных операторов в L^p . Не являются замкнутыми и образы групп A_{ms} и G_{ms} .

Рис. 1. К примеру 2.7

ПРИМЕР 2.7. Пусть $p \neq \infty$. Рассмотрим оператор в L^p вида

$$Rf(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ f(2x - 1) & \text{при } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Для любой функции f мы имеем $\|Rf\| = \|f\|$. Однако этот оператор не обратим. Для преобразований $g_n \in A_{ms}$, изображенных на рис. 1, мы имеем сильную сходимость $T_{1/p}(g_n)$ к R .

Слабые замыкания для некоторых подгрупп G_{ms} обсуждаются в [2], [3].

§ 3. Двойные классы смежности

3.1. Доказательство теоремы 1.8. Обозначим через $G^0 \subset \text{Gms}$ группу преобразований, у которых производная Радона–Никодима принимает лишь счетное число значений. Очевидно, что:

- подгруппа G^0 плотна в Gms ;
- двойные классы смежности $\text{Ams} \backslash G^0 / \text{Ams}$ определяются распределением производной Радона–Никодима.

Рассмотрим меру $\varkappa \in \mathcal{M}$. Рассмотрим последовательность дискретных мер $\varkappa_N \in \mathcal{M}$, сходящуюся к $\varkappa$ и обладающую следующим свойством. Фиксируем N и разобьем полуось $t > 0$ на кусочки длины 2^{-N} . Для любого $j \in \mathbb{N}$ мы требуем следующие совпадения мер полуинтервалов

$$\begin{aligned} \int_{(j-1)/2^N < t \leq j/2^N} d\varkappa(t) &= \int_{(j-1)/2^N < t \leq j/2^N} d\varkappa_N(t), \\ \int_{(j-1)/2^N < t \leq j/2^N} t d\varkappa(t) &= \int_{(j-1)/2^N < t \leq j/2^N} t d\varkappa_N(t). \end{aligned}$$

Пусть дан элемент $g \in \text{Gms}$ с распределением производной Радона–Никодима $\varkappa$. Построим последовательность $g_N \in G^0$, сходящуюся к g , такую, что распределение производной Радона–Никодима g_N равно $\varkappa_N$. Для этого фиксируем N и для каждого j рассмотрим подмножество $A_j \subset M$, где производная Радона–Никодима удовлетворяет условию

$$\frac{j-1}{2^N} < g'(x) \leq \frac{j}{2^N}.$$

Положим $B_j = g(A_j)$. Возьмем произвольное отображение $g_N \in G^0$ такое, что g_N переводит A_j в B_j и распределение производной Радона–Никодима g_N совпадает с ограничением меры $\varkappa_N$ на полуинтервал $((j-1)/2^N \leq t j/2^N]$. Легко проверить, что последовательность g_N сходится к g .

Пусть теперь f – непрерывная функция на Gms , постоянная на двойных классах смежности. Пусть g и $h \in \text{Gms}$ имеют одно и то же распределение производной Радона–Никодима. Тогда g_N и h_N лежат в одном двойном классе смежности, поэтому $f(g_N) = f(h_N)$. В силу непрерывности f мы получаем $f(g) = f(h)$.

Чтобы не доказывать непрерывность отображения q (см. формулировку теоремы 1.8), мы сошлемся на предложение 1.9 (которое доказывается чуть ниже независимо от предшествующих рассуждений).

3.2. Доказательство предложения 1.6. Пусть $M \simeq [0, 1]$ – лебеговское пространство. Инварианты измеримых функций $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ относительно действия группы $\text{Ams}(M)$ были описаны В. А. Рохлиным в [10]. Функции f ставится в соответствие ее функция распределения $F(y)$, т.е. мера множества $M_y \subset M$, задаваемого неравенством $f(x) < y$. Кроме того, f ставится в соответствие последовательность функций $F_1, F_2, \dots$, где $F_n(y)$ есть точная верхняя грань мер всех подмножеств $A \subset M_y$, на которых функция f принимает каждое значение не более n раз. При этом:

- функция F удовлетворяет обычным свойствам функций распределения:
 F – непрерывная слева неубывающая функция, $\lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = 0$,
 $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = 1$;
- F_n – неубывающие непрерывные функции;
- $0 \leq F_1(y) \leq F_2(y) \leq \dots \leq F(y)$;
- $F_k(y) - 2F_{k+1}(y) + F_{k+2}(y) \geq 0$ для всех k .

Согласно [10] функция f с точностью до действия группы Ams однозначно определяется инвариантами $F_1, F_2, \dots, F$. При этом для любого набора функций $F_1, F_2, \dots, F$ с вышеперечисленными свойствами существует f , чьи инварианты совпадают с $F_1, F_2, \dots, F$.

Теперь мы опишем канонические формы функций f под действием группы Ams . Рассмотрим набор непрерывных мер $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots$ на $\mathbb{R}$ и меру ν_∞ на $\mathbb{R}$ такие, что $\nu_1(\mathbb{R}) + \nu_2(\mathbb{R}) + \dots + \nu_\infty(\mathbb{R}) = 1$. Обозначим через t координату на $\mathbb{R}$. Рассмотрим дизъюнктное объединение пространств с мерой

$$\mathcal{L} = \left((\mathbb{R}, \nu_1) \amalg (\mathbb{R}, \nu_2) \amalg \dots \right) \amalg (\mathbb{R} \times [0, 1], \nu_\infty \times ds), \quad (3.1)$$

где ds – мера Лебега на отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим функцию f на $\mathcal{L}$, равную t на каждой из копий $\mathbb{R}$ и равную t на $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

Инварианты этой функции равны

$$F_n(y) = \sum_{j \leq n} \nu_j(-\infty, y), \quad F(y) = \sum_{1 \leq j < \infty} \nu_j(-\infty, y) + \nu_\infty(-\infty, y).$$

Легко видеть, что меры $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\infty$ восстанавливаются по инвариантам $F_1, F_2, \dots, F$. Более того, любое допустимое значение инвариантов соответствует некоторому набору мер $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\infty$.

Теперь рассмотрим элемент $g \in \text{Gms}(P, R)$. Приведем производную $g': P \rightarrow \mathbb{R}^\times$ к каноническому виду посредством домножения $g \mapsto gh$, где $h \in \text{Ams}$. Так как $g'(x) > 0$, все меры ν_j, ν сосредоточены на полупрямой $t > 0$. Интеграл от g' равен 1, поэтому

$$\sum_j \int t d\nu_j(t) + \int t d\nu_\infty(t) = 1. \quad (3.2)$$

Теперь мы считаем, что $P = \mathcal{L}$; см. (3.1). Пусть $\mathcal{L}_*$ получено из $\mathcal{L}$ путем домножения меры на t , в силу (3.2) полученная мера вероятностная. Отображение $g: \mathcal{L} \rightarrow R$ может рассматриваться и как отображение $g_*: \mathcal{L}_* \rightarrow R$. Так как $g' = t$, для любого измеримого $B \subset \mathcal{L}$ мера B в $\mathcal{L}_*$ совпадает с мерой $g(B)$. Следовательно, $g_*: \mathcal{L}_* \rightarrow R$ сохраняет меру.

Итак, g приведен к канонической форме.

3.3. Расщепление меры. Теперь мы перейдем к доказательству теоремы 1.7. Модифицируем обозначения для $\mathcal{L}[\nu_1, \nu_2, \dots; \nu_\infty]$, $\mathcal{L}_*[\nu_1, \nu_2, \dots; \nu_\infty]$ и $S[\nu_1, \nu_2, \dots; \nu_\infty]$ из (1.3). Сейчас нам будет удобно отказаться от ограничения $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots$. Нам также удобно ослабить условие (1.4) и положить, что

$$\int_{\mathbb{R}^\times} d\nu(t) < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^\times} t d\nu(t) < \infty. \quad (3.3)$$

Пусть ν – непрерывная мера на $\mathbb{R}^\times$, удовлетворяющая (3.3). Рассмотрим пространство $\mathcal{L}[\nu, 0, 0, \dots; 0]$. Представим ν в виде суммы $\nu = \nu_1 + \nu_2$.

ЛЕММА 3.1. *Замыкание класса $S[\nu, 0, 0, \dots; 0]$ содержит $S[\nu_1, \nu_2, 0, \dots; 0]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}[\nu, 0, \dots; 0], \quad \mathcal{L}' := \mathcal{L}[\nu_1, \nu_2, 0, \dots; 0].$$

Те же пространства с мерой, умноженной на t , мы обозначим через $\mathcal{L}_*$, $\mathcal{L}'_*$. Сейчас будут построены две последовательности сохраняющих меру биекций

$$\varphi_n: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}', \quad \psi_n: \mathcal{L}_* \rightarrow \mathcal{L}'_*.$$

Разобьем $(\mathbb{R}^\times, \nu)$ на 2^n промежутков $C_0, \dots, C_{2^n-1}$ точками

$$a_k = \frac{k2^{-n}}{1 - k2^{-n}}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n - 1.$$

Обозначим это разбиение³ через $\mathfrak{h}_n$.

ЛЕММА 3.2. *Существует подпромежуток $B_k \subset C_k$ такой, что $\nu(B_k) = \nu_1(C_k)$, $(t \cdot \nu)(B_k) = (t \cdot \nu_1)(C_k)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $C_k = [a_k, a_{k+1}]$. Рассмотрим отрезки $[a_k, u]$, $[v, a_{k+1}] \subset [a_k, a_{k+1}]$ такие, что $\nu[a_k, u] = \nu[v, a_{k+1}] = \nu_1[C_k]$. Для любого $z \in [a_k, v]$ существует $z^\circ \leq a_{k+1}$ такое, что $\nu[z, z^\circ] = \nu_1[C_k]$. Легко видеть, что

$$(t \cdot \nu)[a_k, u] \leq \nu_1[C_k], \quad (t\nu)[v, a_{k+1}] \geq (t \cdot \nu_1)[C_k].$$

Из соображений непрерывности для некоторого $[z, z^\circ]$ будет выполнено искомое свойство.

Рис. 2. К лемме 3.2. Отображение φ_n

Отобразим произвольным образом с сохранением меры пространства

$$(B_k, \nu) \rightarrow (C_k, \nu_1), \quad (C_k \setminus B_k, \nu_2) \rightarrow (C_k, \nu_2)$$

³Нам нужно лишь, чтобы при $n \rightarrow \infty$ диаметр разбиения на любом конечном промежутке $(0, M]$ стремился к нулю.

для всех k . Это даст отображение φ_n (рис. 2). Чтобы получить отображение ψ_n , мы отображаем произвольным образом с сохранением меры

$$(B_k, t \cdot \nu) \rightarrow (C_k, t \cdot \nu_1), \quad (C_k \setminus B_k, t \cdot \nu_2) \rightarrow (C_k, t \cdot \nu_2).$$

Рассмотрим отображение

$$\theta_n: \psi_n \circ \text{id} \circ \varphi_n^{-1}: \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}'_*.$$

Пространство $\mathcal{L}'$ состоит из двух копий $\mathbb{R}_1^\times, \mathbb{R}_2^\times$ полупрямой $\mathbb{R}^\times$, каждая копия разбита на отрезки C_k . Отображение θ_n переводит каждую из копий отрезка $C_k \subset \mathbb{R}_1^\times, C_k \subset \mathbb{R}_2^\times$ в себя, причем производная Радона–Никодима θ_n меняется на копиях C_k в пределах $[a_k, a_{k+1}]$.

Легко видеть, что последовательность θ_n сходится к отображению $\text{id}: \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}'_*$.

3.4. Размазывание меры. Обозначим

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}[\nu, 0, \dots; 0], \quad \mathcal{L}'' = \mathcal{L}[0, 0, \dots; \nu].$$

Пусть $\mathcal{L}_*, \mathcal{L}''_*$ – те же пространства с мерой, умноженной на t . Мы построим последовательность сохраняющих меру биекций

$$\xi_n: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'', \quad \zeta_n: \mathcal{L}_* \rightarrow \mathcal{L}''_*.$$

Для этого рассмотрим те же самые разбиения $\mathfrak{h}_n$ пространства $(\mathbb{R}^\times, \nu)$. Рассмотрим произвольные сохраняющие меру отображения⁴

$$(C_k, \nu) \rightarrow (C_k \times [0, 1], \nu \times dx), \quad (C_k, t\nu) \rightarrow (C_k \times [0, 1], (t\nu) \times dx).$$

Это дает нам отображения ξ_n и ζ_n . Рассмотрим отображение

$$v_n = \zeta_n \circ \text{id} \circ \xi_n^{-1}: \mathcal{L}'' \rightarrow \mathcal{L}''_*.$$

Отображение v_n переводит каждое $C_k \times [0, 1]$ в себя, а производная Радона–Никодима на $C_k \times [0, 1]$ лежит в пределах $[a_{k-1}, a_k]$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, мы получаем тождественное отображение $\mathcal{L}'' \rightarrow \mathcal{L}''_*$.

3.5. Доказательство теоремы 1.7. Пусть $\nu \in \mathcal{M}$. Без ограничения общности можно считать, что ν непрерывна. Разложим $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_\infty$. Положим

$$\mathcal{L}^k = \mathcal{L}\left[\nu_1, \dots, \nu_k, \sum_{j=k+1}^{\infty} \nu_j, 0, 0, \dots; \nu_\infty\right], \quad \mathcal{L}^\infty := \mathcal{L}[\nu_1, \nu_2, \dots; \nu_\infty].$$

Пусть $\mathcal{L}^k_*, \mathcal{L}^\infty_*$ – те же пространства с мерами, умноженными на t . Пусть $\text{id}^k: \mathcal{L}^k \rightarrow \mathcal{L}^k_*, \text{id}^\infty: \mathcal{L}^\infty \rightarrow \mathcal{L}^\infty_*$ – тождественные отображения.

⁴Напомним, что любые два лебеговских пространства с непрерывной вероятностной мерой эквивалентны; см., например, [1].

Итерируя доводы двух предыдущих пунктов, мы получаем, что замыкание класса $S[\nu, 0, \dots; 0]$ содержит элементы id^k для конечных k . Рассмотрим отображение $\alpha_k: \mathcal{L}^k \rightarrow \mathcal{L}^\infty$, устроенное следующим образом. Оно тождественно на полупрямых $\mathbb{R}_1^\times, \dots, \mathbb{R}_k^\times$, а полупрямую $\mathbb{R}_{k+1}^\times$ переводит в $\prod_{j \geq k+1} \mathbb{R}_j$ с сохранением меры. Аналогично строим отображение $\beta_k: \mathcal{L}_*^k \rightarrow \mathcal{L}_*^\infty$. Легко видеть, что последовательность

$$\chi_k := \beta_k \circ \text{id}_k \circ \alpha_k^{-1}: \mathcal{L}^\infty \rightarrow \mathcal{L}_*^\infty$$

сходится к id^∞ .

3.6. Построение функции ψ . Теперь мы построим непрерывное сечение $\mathcal{M} \rightarrow \text{Gms}$. Рассмотрим функцию распределения $z = F(y)$ меры ν и обратную к ней функцию $y = G(z)$. Если y_0 – точка разрыва F , то мы полагаем, что $G(z) = y_0$ на $[F(y_0 - 0), F(y_0 + y_0)]$. Если функция F принимает некоторое значение z_0 на отрезке ненулевой длины, то $G(z_0)$ не определена. Далее полагаем

$$\psi(x) = \int_0^x G(z) dz.$$

3.7. Доказательство предложения 1.9. Пусть ν_j сходится к ν в $\mathcal{M}$, а $y = \psi_j(x)$, $y = \psi(x)$ – соответствующие отображения $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Нам надо доказать, что ψ_j сходится к ψ в Gms .

1) Пусть $\nu \in \mathcal{M}$. Рассмотрим отображение $\mathbb{R}^\times \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$, задаваемое формулой

$$H: s \mapsto (\nu[(0, s)], (t \cdot \nu)[(0, s)]).$$

Легко видеть, что мы получим график функций ψ , из которого выброшены прямолинейные отрезки. Сходимость $\nu_j \rightarrow \nu$ означает поточечную сходимость отображений $H_j(s) \rightarrow H(s)$. Отсюда легко выводится, что ψ_j сходится к ψ поточечно (рис. 3). В силу монотонности и непрерывности наших функций поточечная сходимость влечет равномерную.

Рис. 3. К доказательству предложения 1.9: $(u, v) = H(s)$, $(u_j, v_j) = H_j(s)$. Указан промежуток, в котором может принимать значение $\psi_j(u)$

2) Покажем, что производные ψ_j' сходятся к ψ' п.в. Возьмем точку a , где определены все производные $\psi_j'(a)$, $\psi'(a)$. Пусть ℓ_j, ℓ – касательные к графикам функций ψ_j, ψ в точке a . Допустим, что $\psi_j'(a)$ не сходится к $\psi'(a)$. Выберем

из этой последовательности подпоследовательность $\psi'_{n_k}(a)$, сходящуюся к $\alpha \neq \psi'(a)$. Берем предельную прямую последовательности ℓ_{n_k} , т.е.

$$\ell^\circ : y = \alpha(x - a) + \psi(a).$$

Легко видеть (см. подробнее в [14; добавление, §6]), что график $y = \psi(x)$ лежит выше этой прямой, т.е. ℓ° – вторая опорная прямая в точке a (первая – касательная), что противоречит существованию $\psi'(a)$.

3) Теперь мы докажем слабую сходимость операторов $T_{1/2}(\psi_j)$ в $L^2[0, 1]$. Пусть f, h – непрерывные функции. Нам нужно проверить стремление к нулю выражений

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 f(\psi_j(x)) \psi'_j(x)^{1/2} h(x) dx - \int_0^1 f(\psi(x)) \psi'(x)^{1/2} h(x) dx \right| \\ & \leq \int_0^1 |f(\psi_j(x)) - f(\psi(x))| \psi'_j(x)^{1/2} h(x) dx \\ & \quad + \int_0^1 |f(\psi(x))(\psi'_j(x)^{1/2} - \psi'(x)^{1/2}) h(x)| dx. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В (3.4) сходимость $f(\psi_j(x)) \rightarrow f(\psi(x))$ равномерна, а

$$\int_0^1 \psi_j^{1/2}(x) \leq \int_0^1 (\psi_j^{1/2})^2(x) = 1.$$

В силу леммы Фату первый интеграл в правой части (3.4) сходится к нулю. Далее, заметим, что для функций $\psi \in \mathcal{G}$ мы имеем априорную оценку

$$\psi'(x) \leq \frac{1 - \psi(x)}{1 - x} \leq \frac{1}{1 - x}.$$

Поэтому сходимость во втором интеграле в правой части (3.4) является мажорируемой на любом отрезке $[0, 1 - \varepsilon]$. Это влечет сходимость к нулю интегралов $\int_0^{1-\varepsilon} (\dots)$. Далее, обозначим $C = (\max |f(x)| \cdot \max |g(x)|)$,

$$\begin{aligned} & \int_{1-\varepsilon}^1 (\dots) \leq C \int_{1-\varepsilon}^1 (\psi'_j(x)^{1/2} + \psi'(x)^{1/2}) dx \leq \varepsilon C \int_{1-\varepsilon}^1 (\psi'_j(x) + \psi'(x)) dx \\ & = \varepsilon C [(1 - \psi_j(1 - \varepsilon)) + (1 - \psi(1 - \varepsilon))], \end{aligned}$$

и эта величина мала при малом ε .

3.8. Доказательство теоремы 1.10. Разобьем M на части $A_{ij} := M_i \cap g^{-1}M_j$, а также на части $B_{ij} = gM_{ij} = g(M_i) \cap M_j$. Мы получаем набор отображений $A_{ij} \rightarrow B_{ij}$. Теперь вопрос сводится к каноническому виду каждого из этих отображений.

Список литературы

- [1] В. А. Рохлин, “Об основных понятиях теории меры”, *Матем. сб.*, **25(67)**:1 (1949), 107–150.
- [2] Yu. A. Neretin, “Spreading maps (polymorphisms), symmetries of Poisson processes, and matching summation”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. VII*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **292**, ПОМИ, СПб., 2002, 62–91; *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **126**:2 (2005), 1077–1094.

- [3] Yu. Neretin, “Symmetries of Gaussian measures and operator colligations”, *J. Funct. Anal.*, **263**:3 (2012), 782–802.
- [4] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Grad. Texts in Math., **156**, Springer-Verlag, New York, 1995, xviii+402 pp.
- [5] Ю. А. Неретин, “Категории бистochastic мер и представления некоторых бесконечномерных групп”, *Матем. сб.*, **183**:2 (1992), 52–76; англ. пер.: Yu. A. Neretin, “Categories of bistochastic measures, and representations of some infinite-dimensional groups”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **75**:1 (1993), 197–219.
- [6] V. Pestov, *Dynamics of infinite-dimensional groups. The Ramsey–Dvoretzky–Milman phenomenon*, Univ. Lecture Ser., **40**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, viii+192 pp.
- [7] Д. А. Райков, “О пополнении топологических групп”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **10**:6 (1946), 513–528.
- [8] Н. Бурбаки, *Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства*, М., Наука, 1969, 392 с.; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Première partie. (Fascicule III.) Livre III. Topologie générale. Chap. 3: Groupes topologiques. Chap. 4: Nombres réels*, 3ème éd., rev. et augm., Actualités Sci. Indust., **1143**, Hermann, Paris, 1960, 236 pp.
- [9] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, v. I: *Functional analysis*, Academic Press, New York–London, 1972, xvii+325 pp.
- [10] В. А. Рохлин, “Метрическая классификация измеримых функций”, *УМН*, **12**:2(74) (1957), 169–174.
- [11] R. J. Fleming, J. E. Jamison, *Isometries on Banach spaces: function spaces*, Chapman Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math., **129**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003, x+197 pp.
- [12] G. Köthe, *Topological vector spaces*, v. I, Grundlehren Math. Wiss., **159**, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969, xv+456 pp.
- [13] Ю. А. Неретин, “О границе группы преобразований, оставляющих меру квазиинвариантной”, *Матем. сб.*, **204**:8 (2013), 83–116; англ. пер.: Yu. A. Neretin, “On the boundary of the group of transformations leaving a measure quasi-invariant”, *Sb. Math.*, **204**:8 (2013), 1161–1194.
- [14] А. Д. Александров, *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей*, ОГИЗ, М.–Л., 1948, 387 с.; англ. пер.: A. D. Alexandrov, *A. D. Alexandrov selected works. Part II. Intrinsic geometry of convex surfaces*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006, xiv+426 pp.

Юрий Александрович Неретин
(Yuriy A. Neretin)

Mathematical Department,
University of Vienna, Austria;

Институт теоретической и экспериментальной
физики им. А. И. Алиханова, г. Москва;

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: neretin@mccme.ru

Поступила в редакцию
04.02.2014 и 08.06.2014