Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лебедев, А. Одзиевич, Расширения C^* -алгебр частичными изометриями, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 7, 37–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm834>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:29:51

УДК 517.9

А. В. Лебедев, А. Одзиевич

Расширения C^* -алгебр частичными изометриями

В статье изучается структура C^* -алгебры, порожденной некоторой $*$ -алгеброй $\mathcal{A}$ и частичной изометрией, индуцирующей эндоморфизм $\mathcal{A}$.

Библиография: 30 названий.

§ 1. Введение

C^* -алгебры, ассоциированные с автоморфизмами (эндоморфизмами), играют важную роль в различных областях математики, в математической физике (см., например, [1]–[6]) и, в частности, в квантовой оптике (см. [7], [8]). В настоящий момент теория C^* -алгебр, ассоциированных с автоморфизмами, развита в очень высокой степени (в связи с этим еще раз упомянем [2]). С другой стороны, теория C^* -алгебр, ассоциированных с эндоморфизмами, еще не приняла “окончательной” формы, хотя прогресс в этом направлении идет очень быстро. Основные достижения здесь получены в предположении, что эндоморфизм C^* -алгебры порождается *изометрией* (см., например, [9], [10] и цитируемые в этих работах источники). Однако в действительности наиболее естественной ситуацией является такая, при которой эндоморфизм генерируется *частичной изометрией*. Значительное продвижение в исследованиях алгебр, ассоциированных с частичными изометриями, было получено после появления фундаментальной работы [11], в которой введено частичное скрещенное произведение алгебры и частичного действия группы $\mathbb{Z}$. Дальнейшее развитие этой конструкции осуществлено в [12] (для случая произвольной дискретной группы) и в [13] (для случая инверсной полугруппы); плодотворное и глубокое обсуждение этих и подобных объектов можно также найти в [14].

Необходимо, однако, отметить, что алгебры, ассоциированные с частичными действиями групп, *не являются* полным обобщением алгебр, ассоциированных с эндоморфизмами, порожденными изометриями (соответствующие классы алгебр пересекаются, но ни один из них не содержит другой). В настоящей работе исследуется класс алгебр, который охватывает как изометрическую, так и частично изометрическую ситуацию (для случая группы $\mathbb{Z}$). Следует также подчеркнуть, что *универсальные* конструкции (типа скрещенных произведений) не всегда дают исчерпывающую информацию для изучения *конкретных* ковариантных алгебр, появляющихся в приложениях. Именно конкретные примеры ковариантных алгебр, возникающих при формализации задач квантовой оптики (см. § 6), и послужили стимулирующим толчком для введения и исследования объектов, представленных в настоящей работе.

Работа выполнена при частичной поддержке KBN (грант № 2 P03 A 012 19).

Статья организована следующим образом.

Во втором параграфе приведены основные результаты, описывающие структуру C^* -алгебры $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{A}, U)$, порожденной $*$ -алгеброй $\mathcal{A} \subset L(H)$ и частичной изометрией $U \in L(H)$ такой, что отображение

$$\mathcal{A} \ni a \mapsto UaU^*$$

является эндоморфизмом $\mathcal{A}$. Это описание получено в предположении, что $\mathcal{A}$ и U удовлетворяют следующим трем условиям:

$$\begin{aligned} Ua &= UaU^*U, & a &\in \mathcal{A}; \\ UaU^* &\in \mathcal{A}, & a &\in \mathcal{A}; \\ U^*aU &\in \mathcal{A}, & a &\in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Алгебры $\mathcal{A}$, обладающие такими свойствами, мы называем *алгебрами коэффициентов* (для $\mathcal{B}$).

Показано, что любой элемент из $\mathcal{B}$ может быть представлен в виде ряда типа Фурье с коэффициентами из $\mathcal{A}$ (теоремы 2.8, 2.15). Кроме того, доказана теорема об изоморфизме (теорема 2.13), устанавливающая “единственность внутренней структуры” алгебры $\mathcal{B}$ при наличии в этой алгебре свойства $(*)$ (см. 2.6).

В третьем параграфе дано описание конструкции алгебр коэффициентов по “начальным” алгебрам, не являющимся алгебрами коэффициентов. Далее в четвертом параграфе приведена соответствующая конструкция для случая *коммутивной* алгебры коэффициентов.

В пятом параграфе обсуждается связь объектов, рассматриваемых в настоящей работе, с алгебрами, ассоциированными с частичными действиями группы $\mathbb{Z}$. Здесь показано, что класс алгебр, изучаемый в статье, включает в себя ковариантные алгебры, ассоциированные с частичным действием группы $\mathbb{Z}$.

Наконец, в последнем параграфе (§6) рассмотрены два примера C^* -алгебр исследуемого типа. Первый пример связан с полярным разложением оператора, а второй – с проблемами, возникающими в квантовой оптике.

В связи с предметом нашей статьи необходимо также отметить работу [15], в которой рассмотрен частный случай исследуемой здесь алгебры, имеющий отношение к полярному разложению оператора (ср. §6, пример 1).

§2. Расширения $*$ -алгебр частичными изометриями. Теорема об изоморфизме

В этом параграфе мы фиксируем $*$ -алгебру $\mathcal{A} \subset L(H)$, содержащую единицу алгебры $L(H)$ линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H , и описываем C^* -расширения алгебры $\mathcal{A}$, ассоциированные с отображениями

$$\delta(x) = UxU^*, \quad \delta_*(x) = U^*xU, \quad x \in L(H), \quad (1)$$

где $U \in L(H)$, $U \neq 0$.

Ясно, что δ и δ_* являются линейными непрерывными ($\|\delta\| = \|\delta_*\| = \|U^2\|$) преобразованиями $L(H)$ и $\delta(x^*) = \delta(x)^*$, $\delta_*(x^*) = \delta_*(x)^*$. Пользуясь степенями δ^k и δ_*^k , $k = 0, 1, 2, \dots$, мы будем полагать для удобства $\delta^0(x) = \delta_*^0(x) = x$.

Заметим, что если отображение $\delta: \mathcal{A} \rightarrow L(H)$ является морфизмом, то

$$UU^* = \delta(1) = \delta(1^2) = \delta^2(1) = (UU^*)^2$$

и, следовательно, оператор U является частичной изометрией. По этой причине частичные изометрии играют основную роль в предмете настоящей работы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если U является *изометрией* (т.е. $U^*U = 1$), то для *любой* алгебры $\mathcal{A}$ отображение $\delta: \mathcal{A} \rightarrow L(H)$ является морфизмом, так как для каждой пары элементов $a, b \in \mathcal{A}$ выполняется

$$\delta(ab) = UabU^* = UaU^*UbU^* = \delta(a)\delta(b).$$

Напомним, что линейный ограниченный оператор U , действующий в гильбертовом пространстве H , называется частичной изометрией, если существует замкнутое подпространство $H_1 \subset H$ такое, что

$$\begin{aligned} \|U\xi\| &= \|\xi\|, & \xi \in H_1, \\ U\xi &= 0, & \xi \in H \ominus H_1. \end{aligned}$$

Подпространство H_1 называется *начальным* пространством для U , а подпространство $U(H_1)$ называется *финальным* пространством для U .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Ниже приведены известные эквивалентные характеристические свойства частичной изометрии:

- 1) U является частичной изометрией,
 - 2) U^* является частичной изометрией,
 - 3) U^*U является проектором (на начальное пространство U),
 - 4) UU^* является проектором (на финальное пространство U),
 - 5) $UU^*U = U$ и $U^*UU^* = U^*$
- (см., например, [16; задача 98]).

Мы будем исследовать C^* -алгебру $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathcal{A}, U)$, порожденную алгеброй $\mathcal{A}$ и U , предполагая дополнительно, что $\mathcal{A}$ является *алгеброй коэффициентов* для $\mathcal{B}$; под этим мы подразумеваем, что $\mathcal{A}$ обладает следующими тремя свойствами:

$$Ua = \delta(a)U, \quad a \in \mathcal{A}, \tag{2}$$

$$\delta(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}, \tag{3}$$

$$\delta_*(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}. \tag{4}$$

Алгебры, обладающие этими свойствами, действительно играют роль “коэффициентов” в $\mathcal{B}(\mathcal{A}, U)$ (это показано в предложении 2.4). В §3 мы обсудим способы построения алгебры, удовлетворяющей условиям (2), (3) и (4), по “начальной” алгебре, которая удовлетворяет лишь некоторым из этих условий или даже не удовлетворяет ни одному из них.

Заметим, что свойство (2) эквивалентно свойству

$$aU^* = U^*\delta(a), \quad a \in \mathcal{A}, \quad (5)$$

что может быть установлено переходом к сопряженным операторам.

Следующее полезное наблюдение показывает, что свойство (2) также может быть записано иным способом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $\mathcal{A}$ является $*$ -подалгеброй $L(H)$, $1 \in \mathcal{A}$ и $U \in L(H)$, тогда следующие три условия эквивалентны:

- (i) $\mathcal{A}$ и U удовлетворяют условию (2);
- (ii) U является частичной изометрией и

$$U^*U \in \mathcal{A}', \quad (6)$$

где $\mathcal{A}'$ — коммутант $\mathcal{A}$;

- (iii) $U^*U \in \mathcal{A}'$ и $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \delta(\mathcal{A})$ является морфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть выполнено условие (2) (и, следовательно, выполнено (5)). Полагая в (2) $a = 1$, получаем $U = \delta(1)U = UU^*U$. Таким образом, U — частичная изометрия. Умножая (2) на U^* слева и применяя (5), имеем

$$U^*Ua = U^*\delta(a)U = aU^*U.$$

Значит, $U^*U \in \mathcal{A}'$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Так как U — частичная изометрия и $U^*U \in \mathcal{A}'$, то для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ получаем

$$Ua = UU^*Ua = UaU^*U = \delta(a)U,$$

т.е. (2) верно.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Достаточно показать, что

$$\delta(ab) = \delta(a)\delta(b), \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

Используя тот факт, что U — частичная изометрия и $U^*U \in \mathcal{A}'$, получаем

$$\delta(ab) = UabU^* = UU^*UabU^* = UaU^*UbU^* = \delta(a)\delta(b).$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Так как δ является морфизмом и $1 \in \mathcal{A}$, то

$$UU^* = \delta(1) = \delta(1^2) = \delta(1)\delta(1) = (UU^*)^2,$$

т.е. U — частичная изометрия.

Доказательство завершено.

Из предложения 2.2 следует, что в данном выше определении алгебры коэффициентов можно заменить условие (2), например, условием (6) и предположением, что U — частичная изометрия.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Отметим, что если U – изометрия, то условие (i), а значит, и (ii) выполнено для любой алгебры $\mathcal{A}$.

Теперь мы приведем первый важный результат о структуре алгебры $\mathcal{B}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $\mathcal{A}$ и U удовлетворяют условиям (2), (3) и (4). Тогда векторное пространство $\mathcal{B}_0$, состоящее из конечных сумм

$$x = U^{*N}a_{\mathbb{N}} + \cdots + U^*a_{\mathbb{T}} + a_0 + a_1U + \cdots + a_NU^N, \quad (7)$$

где $a_k, a_{\mathbb{T}} \in \mathcal{A}$ и $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, является плотной $*$ -подалгеброй C^* -алгебры $\mathcal{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что если $b \in \mathcal{B}_0$, то $b^* \in \mathcal{B}_0$. Проверим, что $\mathcal{B}_0$ – алгебра.

Непосредственные вычисления, использующие (2), (3) и (4), показывают, что для произведения

$$aU^kU^{*l}b, \quad a, b \in \mathcal{A},$$

справедливы следующие соотношения:

- 1) $k \leq l$: $aU^kU^{*l}b = U^{*l-k}\delta^{l-k}(a)\delta^l(1)b \in U^{*l-k}\mathcal{A}$;
- 2) $k \geq l$: $aU^kU^{*l}b = a\delta^k(1)\delta^{k-l}(b)U^{k-l} \in \mathcal{A}U^{k-l}$.

А для произведения

$$U^kaU^{*l}, \quad a \in \mathcal{A},$$

справедливы следующие соотношения:

- 1) $k \leq l$: $U^kaU^{*l} = U^{*l-k}\delta^l(a) \in U^{*l-k}\mathcal{A}$;
- 2) $k \geq l$: $U^kaU^{*l} = \delta^k(a)U^{k-l} \in \mathcal{A}U^{k-l}$.

Из этих соотношений и свойств (2), (3) и (4) вытекает, что $\mathcal{B}_0$ – алгебра.

Теперь пусть $\mathcal{B}_f$ – алгебра всех конечных алгебраических комбинаций операторов U^k, U^{*l} , $k, l \in \mathbb{N}$, и элементов алгебры $\mathcal{A}$. Очевидно,

$$\overline{\mathcal{B}_f} = \mathcal{B}.$$

Но из вышеприведенных соотношений вытекает равенство $\mathcal{B}_f = \mathcal{B}_0$, что и завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Если в дополнение к предположениям предложения 2.4 мы допустим выполнение равенства

$$U^*a = \delta_*(a)U^* \Leftrightarrow aU = U\delta_*(a) \quad (8)$$

для $a \in \mathcal{A}$ (т.е. мы предполагаем, что δ_* также удовлетворяет условию (2)), то в доказанном утверждении подалгебра $\mathcal{B}_0$ будет совпадать с пространством конечных сумм вида

$$x = a_{\overline{N}}U^{*N} + \cdots + a_{\mathbb{T}}U^* + a_0 + a_1U + \cdots + a_NU^N. \quad (9)$$

Такая модификация возможна вследствие того, что в силу (8) можно поставить коэффициенты $a_{\overline{k}}$ перед операторами U^{*k} .

Заметим, что, используя равенства $U^k = U^k U^{*k} U^k$ и $U^{*k} = U^{*k} U^k U^{*k}$ (см. предложение 3.6), мы всегда можем выбрать коэффициенты a_k и $a_{\bar{k}}$ в (7) таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$a_k U^k U^{*k} = a_k, \quad U^k U^{*k} a_{\bar{k}} = a_{\bar{k}}. \quad (10)$$

Однако предположение о том, что $a_k, a_{\bar{k}} \in \mathcal{A}$, $k = 1, \dots, N$, удовлетворяют (10), еще не гарантирует единственности разложения (7). Однозначность коэффициентов в этом разложении будет получена далее в теоремах 2.8, 2.15 в ситуации, когда алгебра $\mathcal{B}_0$ обладает свойством (*), описываемым ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Мы будем говорить, что алгебра $\mathcal{B}_0$ обладает *свойством* (*), если для любого элемента $x \in \mathcal{B}_0$ вида (7) выполняется неравенство

$$\|a_0\| \leq \|x\|. \quad (*)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть $\mathcal{B}_0$ — алгебра, рассмотренная в предложении 2.4. Если $\mathcal{B}_0$ обладает свойством (*) и коэффициенты элемента $x \in \mathcal{B}_0$ удовлетворяют (10), то

$$\begin{aligned} \|a_k\| &\leq \|x\|, \\ \|a_{\bar{k}}\| &\leq \|x\| \end{aligned} \quad (11)$$

для $k, l \in \{0, 1, \dots, N\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственной проверкой можно убедиться, что для элементов $U^k x$ компоненты “нулевого порядка” имеют вид

$$(U^k x)_0 = U^k U^{*k} a_{\bar{k}}. \quad (12)$$

Так как $\|U^k\| \leq 1$, то

$$\|x\| \geq \|U^k x\|. \quad (13)$$

В свою очередь, из (12), (13) и свойства (*) следует, что

$$\|x\| \geq \|U^k x\| \geq \|(U^k x)_0\| = \|U^k U^{*k} a_{\bar{k}}\| = \|a_{\bar{k}}\|. \quad (14)$$

Так как $\|x\| = \|x^*\|$, то, применяя неравенство (14) к элементу x^* , получаем

$$\|x\| = \|x^*\| \geq \|a_k^*\| = \|a_k\|, \quad (15)$$

что и завершает доказательство.

Объединяя предложения 2.4 и 2.7, получаем следующий результат о единственности.

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть $\mathcal{A}$ и U удовлетворяют условиям (2) (или (6)), (3) и (4). Если алгебра $\mathcal{B}_0$ обладает свойством (*), то для любого элемента $x \in \mathcal{B}_0$ коэффициенты в разложении (7) определяются единственным способом при условии выполнения равенств (10).

Таким образом, при наличии свойства (*) можно (корректно) определить линейные непрерывные отображения $\mathcal{N}_k: \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{A}$, $\mathcal{N}_{\bar{k}}: \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, по правилу

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_k(x) &= a_k \in \mathcal{A}U^kU^{*k} \subset \mathcal{A}, \\ \mathcal{N}_{\bar{k}}(x) &= a_{\bar{k}} \in U^kU^{*k}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}.\end{aligned}\tag{16}$$

По непрерывности мы можем продолжить эти отображения на всю алгебру $\mathcal{B}$ и, тем самым, задать “коэффициенты” для любого элемента $x \in \mathcal{B}$. Далее в теореме 2.15 будет установлено, что эти коэффициенты полностью определяют x .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.9. Из [17; теорема 3.3] вытекает, что свойство (*) может быть переформулировано в более слабом, но, тем не менее, эквивалентном виде. В [17] доказано более общее утверждение, касающееся градуированных алгебр. Мы сформулируем соответствующую часть из [17; теорема 3.3] (ее упрощение) в терминах объектов, рассматриваемых в настоящей работе:

пусть $F: \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{A}$ является ограниченным линейным отображением таким, что

- а) $F(a) = a$, $a \in \mathcal{A}$;
- б) $F(aU^k) = 0$, $F(U^{*k}a) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, $a \in \mathcal{A}$;

тогда $\mathcal{B}_0$ обладает свойством (*) и $F = \mathcal{N}_0$.

Приводимая ниже теорема 2.11 показывает, что если алгебра $\mathcal{B}_0$ обладает свойством (*), то норма элемента $x \in \mathcal{B}_0$ может быть вычислена в терминах элементов алгебры $\mathcal{A}$ (коэффициентов нулевого порядка степеней xx^*). В качестве одного из ключевых моментов доказательства этой теоремы выступают оценки норм сумм элементов C^* -алгебр, перечисленные в следующей лемме 2.10. Доказательства этих оценок приведены, например, в [18; лемма 7.3] и [3; лемма 22.3].

ЛЕММА 2.10. Пусть B – произвольная C^* -алгебра. Для любых элементов $d_1, \dots, d_m \in B$ справедливы следующие оценки:

$$\left\| \sum_{i=1}^m d_i \right\|^2 \leq m \left\| \sum_{i=1}^m d_i d_i^* \right\|,\tag{17}$$

$$\left\| \sum_{i=1}^m |d_i| \right\|^2 \geq \frac{1}{m} \left\| \sum_{i=1}^m d_i^* d_i \right\|.\tag{18}$$

ТЕОРЕМА 2.11. Пусть $\mathcal{A}$ и U удовлетворяют предположениям теоремы 2.8. Если $\mathcal{B}_0$ обладает свойством (*), то для любого элемента x вида (7) справедливо равенство

$$\|x\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[4k]{\|\mathcal{N}_0[(xx^*)^{2k}]\|},\tag{19}$$

где $\mathcal{N}_0$ – отображение, определенное в (16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя (17) к оператору

$$x = U^{*N} a_{\overline{N}} + \dots + U^* a_{\overline{1}} + a_0 + a_1 U + \dots + a_N U^N = d_{\overline{N}} + \dots + d_0 + \dots + d_N,$$

получаем

$$\|x\|^2 \leq (2N+1) \left\| \sum_{i=0}^N d_i d_i^* + \sum_{i=1}^N d_{\overline{i}} d_{\overline{i}}^* \right\| = (2N+1) \|\mathcal{N}_0(xx^*)\|,$$

где

$$\begin{aligned} d_i d_i^* &= a_i U^i U^{i*} a_i^*, & i = 0, \dots, N, \\ d_{\overline{i}} d_{\overline{i}}^* &= U^{*i} a_{\overline{i}} a_{\overline{i}}^* U^i, & i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

и поэтому $d_i d_i^*, d_{\overline{i}} d_{\overline{i}}^* \in \mathcal{A}$.

С другой стороны, так как $\mathcal{B}_0$ обладает свойством (*), то

$$\|x\|^2 = \|xx^*\| \geq \|\mathcal{N}_0(xx^*)\|$$

и, значит,

$$\|\mathcal{N}_0(xx^*)\| \leq \|xx^*\| = \|x\|^2 \leq (2N+1) \|\mathcal{N}_0(xx^*)\|. \quad (20)$$

Применяя (20) к $(xx^*)^k$ и принимая во внимание, что

$$(xx^*)^k = (xx^*)^{k*} \quad \text{и} \quad \|(xx^*)^{2k}\| = \|x\|^{4k},$$

получаем

$$\|\mathcal{N}_0[(xx^*)^{2k}]\| \leq \|(xx^*)^k \cdot (xx^*)^{k*}\| = \|x\|^{4k} \leq (4kN+1) \|\mathcal{N}_0[(xx^*)^{2k}]\|,$$

так как, будучи записанным в виде (7), оператор $(xx^*)^k$ имеет не более $4kN+1$ слагаемых.

Таким образом,

$$\sqrt[4k]{\|\mathcal{N}_0[(xx^*)^{2k}]\|} \leq \|x\| \leq \sqrt[4k]{4kN+1} \cdot \sqrt[4k]{\|\mathcal{N}_0[(xx^*)^{2k}]\|}.$$

В силу равенства

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[4k]{4kN+1} = 1$$

закключаем, что

$$\|x\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[4k]{\|\mathcal{N}_0[(xx^*)^{2k}]\|}.$$

Доказательство завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.12. Формулы типа (19) являлись предметом исследования в связи с изучением различных алгебраических операторных структур и условий обратимости операторов. Основные идеи, связанные с вычислением спектрального радиуса элементов C^* -алгебр, ассоциированных с автоморфизмами с помощью формул подобного типа, восходят к работам В. В. Бреннера [19]–[23], где соответствующие результаты были получены в случае коммутативной алгебры $\mathcal{A}$ и унитарного представления группы $\mathbb{Z} \rightarrow L(H)$, порождающего автоморфизмы $\mathcal{A}$. В этих же работах отмечено, что такие формулы могут быть обобщены на случай субэкспоненциальных групп. Используя данные формулы, В. В. Бреннер получил доказательство теоремы об изоморфизме (типа теоремы 2.13), и далее этот метод доказательства был развит в [24], [18]. Общие “некоммутативные” формулы подобного сорта для вычисления спектрального радиуса приведены в [3; раздел 22]. Отметим, что, возможно, первая формула подобного типа, связанная со спектральным радиусом, получена в классической работе А. Beurling [25].

Приводимый далее основной результат этого параграфа является обобщением *теоремы об изоморфизме* для группы $(\mathbb{Z}, +)$ (см. [3; раздел 12]) на случай, когда автоморфизмы, порождаемые унитарными операторами, заменяются эндоморфизмами, порождаемыми частичными изометриями.

ТЕОРЕМА 2.13. Пусть $(\mathcal{A}_i, U_i)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям (2)–(4) и $\mathcal{B}_{0i}$ обладает свойством (*). Предположим, что отображение

$$\varphi: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2 \quad (21)$$

является изоморфизмом и

$$\varphi \circ \delta_1 = \delta_2 \circ \varphi, \quad \varphi \circ \delta_{1*} = \delta_{2*} \circ \varphi, \quad (22)$$

тогда отображение

$$\begin{aligned} \Phi(x) &:= \varphi(x), & x \in \mathcal{A}_1, \\ \Phi(U_1) &:= U_2 \end{aligned} \quad (23)$$

продолжается до изоморфизма C^* -алгебр $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(\mathcal{A}_1, U_1)$ и $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(\mathcal{A}_2, U_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор $x \in \mathcal{B}_{01}$ вида

$$x = U_1^{N*} a_{\overline{N}} + \cdots + a_0 + \cdots + a_N U_1^N, \quad (24)$$

где $a_{\overline{k}}, a_k \in \mathcal{A}_1$, $k = 0, \dots, N$.

Пусть $\Phi(x) \in \mathcal{B}_{02}$ – оператор, заданный формулой

$$\Phi(x) = U_2^{N*} \varphi(a_{\overline{N}}) + \cdots + \varphi(a_0) + \cdots + \varphi(a_N) U_2^N. \quad (25)$$

Из условия теоремы и рассуждений, проведенных в доказательстве предложения 2.4, следует, что отображение Φ устанавливает $*$ -алгебраический изоморфизм между $\mathcal{B}_{01}$ и $\mathcal{B}_{02}$. Поэтому для завершения доказательства достаточно проверить равенство $\|x\| = \|\Phi(x)\|$, $x \in \mathcal{B}_{01}$.

Согласно теореме 2.11

$$\|x\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[4k]{\|\mathcal{N}_0[(xx^*)^{2k}]\|}, \quad (26)$$

где

$$\mathcal{N}_0: \mathcal{B}_{01} \rightarrow \mathcal{A}_1$$

— отображение, описанное в (16). Аналогично,

$$\|\Phi(x)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[4k]{\|\mathcal{N}_0[(\Phi(x)\Phi(x^*))^{2k}]\|}, \quad (27)$$

где

$$\mathcal{N}_0: \mathcal{B}_{02} \rightarrow \mathcal{A}_2.$$

Заметим, что из (24), (25) и условий теоремы вытекает, что

$$\mathcal{N}_0[(\Phi(x)\Phi(x^*))^{2k}] = \mathcal{N}_0[(\Phi(xx^*))^{2k}] = \varphi(\mathcal{N}_0[(xx^*)^{2k}])$$

и, следовательно (ввиду (21)),

$$\|\mathcal{N}_0[(\Phi(x)\Phi(x^*))^{2k}]\| = \|\mathcal{N}_0[(xx^*)^{2k}]\|.$$

В свою очередь, последнее равенство вместе с (26) и (27) влечет

$$\|x\| = \|\Phi(b)\|.$$

Доказательство завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.14. Следует отметить, что свойство (*) и результаты типа теоремы 2.13 играют фундаментальную роль в теории скрещенных произведений C^* -алгебр на группы (полугруппы) автоморфизмов (эндоморфизмов). Это свойство является *характеристическим* свойством скрещенного произведения и позволяет строить его точные представления. Важность свойства (*) впервые (по-видимому) выявил D. P. O'Donovan [26] при описании C^* -алгебр, порожденных взвешенными сдвигами. Наиболее общий результат, устанавливающий принципиальную роль этого свойства в теории скрещенных произведений C^* -алгебр на дискретные группы *автоморфизмов*, был получен в [27] (см. также [3; гл. 2, 3], где приведены подробные доказательства и различные приложения) для *произвольной* C^* -алгебры и *амenable* дискретной группы. Связь соответствующего свойства с точными представлениями скрещенных произведений на *эндоморфизмы*, порожденные *изометриями*, была исследована в [9], [10]. Роль свойств типа (*) в теории алгебр сечений, порожденных расслоениями Фелла, изучена в [17]. Подобные свойства важны не только в “чистой” C^* -теории, но еще имеют и многочисленные приложения; они используются, например, в конструкции символического исчисления и в построении теории разрешимости функционально-дифференциальных уравнений (см. [4], [5]).

Мы закончим этот раздел утверждением, показывающим, что при наличии свойства (*) отображение $\mathcal{N}_0$ является точным условным математическим ожиданием и любой элемент $x \in \mathcal{B}$ может быть “восстановлен” по его коэффициентам $\mathcal{N}_k(x)$ и $\mathcal{N}_k^-(x)$.

ТЕОРЕМА 2.15. Пусть алгебра $\mathcal{B}_0$ обладает свойством $(*)$. Для элемента $x \in \mathcal{B}$ следующие условия эквивалентны:

- (i) $x = 0$;
- (ii) $\mathcal{N}_k(x) = 0, k = 0, 1, \dots$, и $\mathcal{N}_{\overline{k}}(x) = 0, k = 1, \dots$;
- (iii) $\mathcal{N}_0(x^*x) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что (i) $\Rightarrow$ (ii) и (i) $\Rightarrow$ (iii).

Докажем (ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ — единичная окружность на комплексной плоскости. Для каждого $\lambda \in S^1$ определим алгебру $\mathcal{B}_\lambda := \mathcal{B}(\mathcal{A}, \lambda U)$ (ясно, что $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda$). Так как $\mathcal{B}_0$ обладает свойством $(*)$, то алгебра $\mathcal{B}_{\lambda 0} := (\mathcal{B}_\lambda)_0$ также обладает свойством $(*)$ и согласно теореме 2.13 отображение

$$\Phi_\lambda(a) = a, \quad a \in \mathcal{A}; \quad \Phi_\lambda(U) = \lambda U$$

устанавливает изоморфизм между $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_\lambda$. Для сокращения записи для каждого $x \in \mathcal{B}$ и $\lambda \in S^1$ положим

$$x(\lambda) = \Phi_\lambda(x).$$

Ввиду упомянутого изоморфизма имеем равенство

$$\|x\| = \|x(\lambda)\|, \quad x \in \mathcal{B},$$

и, в частности, для любой конечной суммы

$$y = U^{*N} a_{\overline{N}} + \dots + U^* a_{\overline{1}} + a_0 + a_1 U + \dots + a_N U^N,$$

где $a_{\overline{k}}, a_k$ удовлетворяют (10), выполняется

$$\|y\| = \|y(\lambda)\| = \|\lambda^{-N} U^{*N} a_{\overline{N}} + \dots + \lambda^{-1} U^* a_{\overline{1}} + a_0 + \lambda a_1 U + \dots + \lambda^N a_N U^N\|. \quad (28)$$

Для доказательства равенства $x = 0$ достаточно показать, что для любых фиксированных векторов $\xi, \eta \in H$, $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$, выполняется

$$\langle x\xi, \eta \rangle = 0, \quad (29)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в H .

Пусть $x_n, n = 1, 2, \dots$, — последовательность элементов из $\mathcal{B}$, сходящаяся к x , каждый член которой имеет вид

$$x_n = U^{*N} a_{\overline{N}}^{(n)} + \dots + U^* a_{\overline{1}}^{(n)} + a_0^{(n)} + a_1^{(n)} U + \dots + a_N^{(n)} U^N, \quad (30)$$

где $N = N(n)$ и $a_{\overline{k}}^{(n)}, a_k^{(n)}, k = 0, 1, \dots, N(n)$, удовлетворяют (10). Рассмотрим элементы $x_n(\lambda)$ и последовательность $f_n(\lambda), n = 1, 2, \dots$, непрерывных функций на S^1 , заданных равенствами

$$f_n(\lambda) = \langle x_n(\lambda)\xi, \eta \rangle = \sum_{k=-N(n)}^{N(n)} a_k^n \lambda^k, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_k^n &= \langle a_k^n U^k \xi, \eta \rangle, & k &= 0, 1, \dots, N(n), \\ \alpha_{-k}^n &= \langle U^{*k} a_k^{(n)} \xi, \eta \rangle, & k &= 1, 2, \dots, N(n).\end{aligned}$$

Так как $x_n \rightarrow x$, $n \rightarrow \infty$, то из (28) следует, что

$$\|x_{n_1}(\lambda) - x_{n_2}(\lambda)\| = \|x_{n_1} - x_{n_2}\| \rightarrow 0, \quad n_1, n_2 \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Поэтому для любого фиксированного $\lambda_0 \in S^1$ последовательность $x_n(\lambda_0)$ сходится к некоторому элементу $x(\lambda) \in \mathcal{B}$.

Пусть $f(\lambda)$ – функция, заданная равенством

$$f(\lambda) = \langle x(\lambda) \xi, \eta \rangle.$$

Применяя (32), получаем

$$|f_{n_1}(\lambda) - f_{n_2}(\lambda)| = |\langle [x_{n_1}(\lambda) - x_{n_2}(\lambda)] \xi, \eta \rangle| \leq \|x_{n_1} - x_{n_2}\| \rightarrow 0, \quad n_1, n_2 \rightarrow \infty,$$

откуда следует, что последовательность f_n (непрерывных) функций сходится равномерно (на S^1) к f . Значит, f – непрерывная функция и, следовательно, $f \in L^2(S^1)$.

Пусть

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \lambda^k,$$

где правая часть – ряд Фурье для f . Так как $f_n \rightarrow f$ (в $L^2(S^1)$), то

$$\alpha_k^{(n)} \rightarrow \alpha_k \quad \text{для каждого } k, \quad (33)$$

где $\alpha_k^{(n)}$ определены в (31).

Заметим теперь, что свойство $(*)$ влечет выполнение

$$\|a_k^{(n)}\| \rightarrow \|\mathcal{N}_k(x)\| \quad \text{для каждого } k \geq 0, \quad (34)$$

$$\|a_{-k}^{(n)}\| \rightarrow \|\mathcal{N}_{-k}^*(x)\| \quad \text{для каждого } k \geq 0. \quad (35)$$

Отметим также, что

$$|\alpha_k^{(n)}| \leq \|a_k^{(n)}\| \quad \text{для каждого } k \geq 0,$$

$$|\alpha_{-k}^{(n)}| \leq \|a_{-k}^{(n)}\| \quad \text{для каждого } k \geq 0,$$

что вместе с (33)–(35) означает, что

$$\alpha_k = 0 \quad \text{для каждого } k \in \mathbb{Z}. \quad (36)$$

Теперь из (36) и непрерывности f следует, что

$$f(\lambda) = 0 \quad \text{для каждого } \lambda \in S^1.$$

В частности,

$$f(1) = \langle x\xi, \eta \rangle = 0$$

и (29) доказано.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, например, что (iii) $\Rightarrow$ (ii).

В силу (10) для доказательства равенств (ii) достаточно показать, что

$$\mathcal{N}_k(x)U^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (37)$$

$$U^{*k}\mathcal{N}_{\overline{k}}(x) = 0, \quad k = 1, \dots. \quad (38)$$

Выбирая последовательность $x_n \rightarrow x$ элементов вида (30) и учитывая явный вид $\mathcal{N}_0(x_n^*x_n)$, а также то, что при $n \rightarrow \infty$ для каждого фиксированного k имеем $a_k^{(n)} \rightarrow \mathcal{N}_k(x)$, $a_{\overline{k}}^{(n)} \rightarrow \mathcal{N}_{\overline{k}}(x)$ и $\mathcal{N}_0(x_n^*x_n) \rightarrow \mathcal{N}_0(x^*x)$, мы заключаем, что для любого $k_0 > 0$ справедливо

$$\left\| \sum_{k=0}^{k_0} U^{*k} \mathcal{N}_k(x)^* \mathcal{N}_k(x) U^k + \sum_{k=1}^{k_0} \mathcal{N}_{\overline{k}}(x) U^k U^{*k} \mathcal{N}_{\overline{k}}(x) \right\| \leq \mathcal{N}_0(x^*x). \quad (39)$$

Отсюда и из равенства (iii) вытекают равенства (37) и (38).

Теорема доказана.

§ 3. Алгебра коэффициентов

Важным элементом конструкций, проведенных в предыдущем параграфе, является $*$ -алгебра $\mathcal{A}$, удовлетворяющая условиям (2) (или (6)), (3) и (4), т.е. алгебра коэффициентов. Настоящий параграф посвящен исследованию метода построения алгебры коэффициентов на основе подходящей начальной алгебры. Основной результат здесь – теорема 3.11.

В § 3 мы фиксируем $*$ -подалгебру $\mathcal{A}_0 \subset L(H)$, $1 \in \mathcal{A}_0$, и оператор U такой, что $\delta: \mathcal{A}_0 \rightarrow L(H)$ является морфизмом (в частности, это значит, что U – частичная изометрия). Начав с данной алгебры, мы будем расширять ее с помощью отображений δ и δ_* до алгебры коэффициентов $\mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть X – подмножество $L(H)$. Обозначим через $\{X\}$ $*$ -подалгебру в $L(H)$, порожденную X . Для каждого $n = 0, 1, \dots$ полагаем

$$E_n(X) = \{X, \delta(X), \dots, \delta^n(X)\}; \quad (40)$$

$$E_{*n}(X) = \{X, \delta_*(X), \dots, \delta_*^n(X)\}. \quad (41)$$

Положим также

$$E(X) = \left\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} \delta^n(X) \right\}, \quad (42)$$

$$E_*(X) = \left\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} \delta_*^n(X) \right\}. \quad (43)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. (i) *Отображение $\delta: \mathcal{A}_0 \rightarrow L(H)$ является морфизмом тогда и только тогда, когда $\delta: E_*(\mathcal{A}_0) \rightarrow L(H)$ является морфизмом.*

(ii) *Если $\delta: \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}_0$ является эндоморфизмом, то $\delta: E_*(\mathcal{A}_0) \rightarrow E_*(\mathcal{A}_0)$ также является эндоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $\delta: \mathcal{A}_0 \rightarrow L(H)$ является морфизмом. Отсюда следует, что U – частичная изометрия.

Если $k \geq 1$ или $l \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \delta(\delta_*^k(a))\delta(\delta_*^l(b)) &= U(U^{*k}aU^k)U^*U(U^{*l}bU^l)U^* \\ &= U(U^{*k}aU^kU^{*l}bU^l)U^* = \delta(\delta_*^k(a)\delta_*^l(b)). \end{aligned} \quad (44)$$

Если же $k = l = 0$, то δ является морфизмом по условию. Таким образом, $\delta: E_*(\mathcal{A}_0) \rightarrow L(H)$ является морфизмом. С другой стороны, так как $\mathcal{A}_0$ является подалгеброй $E_*(\mathcal{A}_0)$, то если $\delta: E_*(\mathcal{A}_0) \rightarrow L(H)$ – морфизм, то и $\delta: \mathcal{A}_0 \rightarrow L(H)$ также морфизм.

(ii) Это утверждение вытекает из уже доказанного п. (i) и замечания, что из предположения $\delta(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{A}_0$ следует, что для любого $a \in \mathcal{A}_0$ мы имеем

$$\delta(\delta_*^k(a)) = UU^{*k}aU^kU^* = \delta(1)\delta_*^{k-1}(a)\delta(1) \in E_*(\mathcal{A}_0).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Следующие четыре условия эквивалентны:*

- (i) U^*U является проектором и $U^*U \in \mathcal{A}'_0$;
- (ii) U^*U является проектором и $U^*U \in E_*(\mathcal{A}_0)'$;
- (iii) U и $\mathcal{A}_0$ обладают свойством (2);
- (iv) U и $E_*(\mathcal{A}_0)$ обладают свойством (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (iii) и (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) вытекает из предложения 2.2. Ясно также, что (ii) $\Rightarrow$ (i). Поэтому достаточно показать, что (i) $\Rightarrow$ (ii). Итак, предположим, что $U^*U \in \mathcal{A}'_0$. Тогда для $k \geq 0$

$$U^*U\delta_*^k(a) = U^*UU^{*k}aU^k = U^{*k}aU^k = U^{*k}aU^kU^*U = \delta_*^k(a)U^*U,$$

т.е. $U^*U \in E_*(\mathcal{A}_0)'$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Пусть $\delta: \mathcal{A}_0 \rightarrow L(H)$ является морфизмом. Следующие утверждения эквивалентны:*

- (i) *существует $*$ -алгебра $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_0$, удовлетворяющая условиям (2) и (3);*
- (ii)

$$U^*U \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \delta^n(\mathcal{A}_0)'. \quad (45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii). Если (i) верно, то, так как $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_0$ и удовлетворяет условию (3), мы имеем $\mathcal{A} \supset \delta^n(\mathcal{A}_0)$, $n = 0, 1, \dots$. Данное свойство и предположение, что $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию (2), влечет выполнение (45) ввиду эквивалентности (i) $\Leftrightarrow$ (ii) из предложения 2.2.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Покажем, что в качестве алгебры $\mathcal{A}$, удовлетворяющей (2) и (3), можно взять $E(\mathcal{A}_0)$.

Из (45) следует, что для любых $a, b \in \mathcal{A}_0$ выполняется

$$\begin{aligned} \delta(\delta^k(a)\delta^l(b)) &= U\delta^k(a)\delta^l(b)U^* = UU^*U\delta^k(a)\delta^l(b)U^* = U\delta^k(a)U^*U\delta^l(b)U^* \\ &= \delta(\delta^k(a))\delta(\delta^l(b)). \end{aligned}$$

Таким образом, $\delta: E(\mathcal{A}_0) \rightarrow E(\mathcal{A}_0)$ (т.е. (3) верно) и $\delta: E(\mathcal{A}_0) \rightarrow E(\mathcal{A}_0)$ является эндоморфизмом.

Вышеприведенные наблюдения вместе с замечанием, что (45) $\Leftrightarrow U^*U \in E(\mathcal{A}_0)'$, и эквивалентностью (i) $\Leftrightarrow$ (iii) из предложения 2.2 означают, что условие (2) выполняется для $E(\mathcal{A}_0)$ и U .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Отметим, что если U – изометрия, то (45) выполняется для любой алгебры $\mathcal{A}_0$.

Следующее предложение показывает, что в действительности об алгебрах, удовлетворяющих условиям (2) и (3), можно сказать гораздо больше.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть $\mathcal{A}$ и U удовлетворяют условиям (2) и (3), тогда:

- (i) δ является эндоморфизмом $\mathcal{A}$;
- (ii)

$$U^k a = \delta^k(a)U^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (46)$$

для $a \in \mathcal{A}$;

- (iii) все операторы U^k , $k = 1, 2, \dots$, являются частичными изометриями и

$$U^{*k}U^k \in \mathcal{A}', \quad k = 1, 2, \dots; \quad (47)$$

- (iv) $U^{*k}U^k$, $k = 1, 2, \dots$, – убывающая последовательность коммутирующих проекторов;
- (v) все операторы U^{*k} , $k = 1, 2, \dots$, – частичные изометрии и $U^k U^{*k}$, $k = 1, 2, \dots$, – убывающая последовательность коммутирующих проекторов;
- (vi)

$$[U^{*k}U^k, U^l U^{*l}] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad l = 0, 1, \dots, \quad (48)$$

где $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$ – коммутатор α и β ;

- (vii) для любых $1 \leq k \leq l$

$$U^*U^k U^{*l} = U^{k-1}U^{*l} \quad \text{и} \quad UU^{*k}U^l = U^{*k-1}U^l.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Утверждение вытекает из (2), (3) и эквивалентности (i) $\Leftrightarrow$ (iii) из предложения 2.2.

(ii) Утверждение вытекает из (i) и (2).

(iii) Утверждение вытекает из (ii) и эквивалентности (i) $\Leftrightarrow$ (ii) из предложения 2.2.

(iv) В соответствии с утверждением 5) замечания 2.1 из (iii) следует, что

$$U^k U^{*k} U^k = U^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поэтому для любых $k \geq l$ имеем

$$U^{*k} U^k U^{*l} U^l = U^{*k} U^{k-l} U^l U^{*l} U^l = U^{*k} U^{k-l} U^l = U^{*k} U^k.$$

Аналогично проверяется, что

$$U^{*l} U^l U^{*k} U^k = U^{*k} U^k.$$

Таким образом, (iv) верно.

(v) Так как все операторы U^k , $k = 1, 2, \dots$, — частичные изометрии, то в соответствии с утверждением 2) замечания 2.1 все операторы U^{*k} , $k = 1, 2, \dots$, также являются частичными изометриями. Теперь таким же образом, как в доказательстве (iv), мы получаем (v).

(vi) Утверждение следует из (47) и замечания, что $U^l U^{*l} \in \mathcal{A}$, $l = 1, 2, \dots$.

(vii) Пусть $1 \leq k \leq l$, тогда, применяя (48), имеем

$$\begin{aligned} U^{*k} U^k U^{*l} &= (U^{*k} U^k) (U^{*l-k+1} U^{k-1} U^{*k-1}) U^{*l-k+1} = (U^{*k} U^k) (U^{*l-k+1} U^{k-1} U^{*k-1}) \\ &= (U^{*k} U^k) (U^{*l-k+1} U^{k-1} U^{*k-1}) U^{*l-k+1} = U^{*k} U^k U^{*l-k+1} U^{k-1} U^{*k-1} U^{*l-k+1} \\ &= U^{*k} U^k U^{*l-k+1} U^{k-1} U^{*k-1} U^{*l-k+1} = U^{*k} U^k U^{*l-k+1} U^{k-1} U^{*k-1} U^{*l-k+1} \end{aligned}$$

Второе равенство в (vii) доказывается таким же способом.

В действительности, предложение 3.6 и доказательство предложения 3.4 дают нам некоторую дополнительную информацию. Эта информация собрана в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Пусть $\delta: \mathcal{A}_0 \rightarrow L(H)$ является морфизмом и выполнено условие (45), тогда $E(\mathcal{A}_0)$ — минимальная $*$ -алгебра, удовлетворяющая (2) и (3) и содержащая $\mathcal{A}_0$, и при этом δ является эндоморфизмом $E(\mathcal{A}_0)$.

Более того, в этом случае все операторы U^k , $k = 1, 2, \dots$, — частичные изометрии и

$$U^{*k} U^k \in E(\mathcal{A}_0)'. \quad (49)$$

Последовательности $U^{*k} U^k$, $k = 1, 2, \dots$, и $U^k U^{*k}$, $k = 1, 2, \dots$, являются убывающими последовательностями коммутирующих проекторов и

$$[U^{*k} U^k, U^l U^{*l}] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad l = 0, 1, \dots \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве предложения 3.4 было показано, что $E(\mathcal{A}_0)$ удовлетворяет (2), (3) и δ является эндоморфизмом $E(\mathcal{A}_0)$. Минимальность алгебры $E(\mathcal{A}_0)$ вытекает из ее конструкции.

Наконец, так как $E(\mathcal{A}_0)$ удовлетворяет (2) и (3), то все остальные утверждения данного предложения следуют из предложения 3.6.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Пусть $\mathcal{A}_0$ обладает свойствами (2) и (3), тогда:

(i) для любых $0 \leq l \leq k$

$$\delta_*^k(\mathcal{A}_0)\delta_*^l(\mathcal{A}_0) \subset \delta_*^k(\mathcal{A}_0), \quad \delta_*^l(\mathcal{A}_0)\delta_*^k(\mathcal{A}_0) \subset \delta_*^k(\mathcal{A}_0), \quad (51)$$

в частности, $\delta_*^n(\mathcal{A}_0)$ является идеалом в $E_{*n}(\mathcal{A}_0)$, где $E_{*n}(\mathcal{A}_0)$ – алгебра, определенная в 3.1;

(ii) $E_{*n}(\mathcal{A}_0)$ является множеством операторов вида

$$a_0 + \delta_*(a_1) + \dots + \delta_*^n(a_n), \quad a_k \in \mathcal{A}_0, \quad k = 0, 1, \dots, n;$$

(iii) $\delta: E_{*n}(\mathcal{A}_0) \rightarrow E_{*n-1}(\mathcal{A}_0)$, $n = 1, \dots$, является морфизмом;

(iv) $\delta_*: E_{*n}(\mathcal{A}_0) \rightarrow E_{*n+1}(\mathcal{A}_0)$, $n = 0, 1, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Непосредственным вычислением для $0 \leq l \leq k$ и $a, b \in \mathcal{A}_0$ получаем

$$\begin{aligned} \delta_*^k(a)\delta_*^l(b) &= \delta_*^k(a\delta^k(1)\delta^{k-l}(b)) \in \delta_*^k(\mathcal{A}_0), \\ \delta_*^l(b)\delta_*^k(a) &= \delta_*^k(\delta^{k-l}(b)\delta^k(1)a) \in \delta_*^k(\mathcal{A}_0). \end{aligned}$$

Эти соотношения доказывают (i).

Ясно, что (ii) вытекает из (i).

(iii) Вспомним, что по предположению $\delta(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{A}_0$ и для любых $k \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \delta(\delta_*^k(a)) &= UU^{*k}aU^kU^* = \delta(1)U^{*k-1}aU^{k-1}\delta(1) \\ &= U^{*k-1}[\delta^k(1)a\delta^k(1)]U^{k-1} \in \delta_*^{k-1}(\mathcal{A}_0). \end{aligned}$$

Эти соотношения вместе с (ii) дают

$$\delta(E_{*n}(\mathcal{A}_0)) \subset E_{*n-1}(\mathcal{A}_0), \quad n = 1, 2, \dots$$

Заметим также, что так как $\mathcal{A}_0$ обладает свойством (2), то эквивалентность (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) из предложения 3.3 означает, что алгебра $E_{*n}(\mathcal{A}_0)$, являющаяся подалгеброй $E_*(\mathcal{A}_0)$, также обладает этим свойством. Поэтому $\delta: E_{*n}(\mathcal{A}_0) \rightarrow E_{*n-1}(\mathcal{A}_0)$ – эндоморфизм (ввиду эквивалентности (i) $\Leftrightarrow$ (iii) из предложения 2.2).

(iv) Утверждение очевидно.

Теперь мы готовы выписать расширение алгебры $\mathcal{A}_0$, дающее решение проблемы, рассматриваемой в этом разделе: расширение, являющееся алгеброй коэффициентов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. Пусть $\mathcal{A}_0$ обладает свойством (3). Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) существует алгебра коэффициентов $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_0$, т.е. алгебра $\mathcal{A}$, обладающая свойствами (2), (3) и (4).
- (ii) $\mathcal{A}_0$ обладает свойством (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii). Утверждение очевидно, так как $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Покажем, что $E_*(\mathcal{A}_0)$ – алгебра коэффициентов.

Так как $\mathcal{A}_0$ обладает свойством (2), то эквивалентность (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) из предложения 3.3 означает, что $E_*(\mathcal{A}_0)$ также обладает свойством (2).

Заметим теперь, что в рассматриваемой ситуации выполнены все условия предложения 3.8. Поэтому $\delta: E_*(\mathcal{A}_0) \rightarrow E_*(\mathcal{A}_0)$ является эндоморфизмом (в частности, для $E_*(\mathcal{A}_0)$ выполнено (3)). Утверждение (ii) из предложения 3.8 влечет выполнение (4) для $E_*(\mathcal{A}_0)$. Доказательство завершено.

В действительности, предложение 3.8 и рассуждения, использованные в доказательстве предложения 3.9, дают нам дополнительную информацию, приведенную в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. Если $\mathcal{A}_0$ обладает свойствами (2) и (3), то $E_*(\mathcal{A}_0)$ – минимальная алгебра коэффициентов, содержащая $\mathcal{A}_0$, и δ является эндоморфизмом $E_*(\mathcal{A}_0)$.

Более того, в этой ситуации мы имеем:

- (i) для любых $0 \leq l \leq k$

$$\delta_*^k(\mathcal{A}_0)\delta_*^l(\mathcal{A}_0) \subset \delta_*^k(\mathcal{A}_0), \quad \delta_*^l(\mathcal{A}_0)\delta_*^k(\mathcal{A}_0) \subset \delta_*^k(\mathcal{A}_0); \quad (52)$$

- (ii) любой элемент $\beta \in E_*(\mathcal{A}_0)$ может быть записан в виде

$$\beta = a_0 + \delta_*(a_1) + \dots + \delta_*^N(a_N), \quad (53)$$

где $a_k \in \mathcal{A}_0$, $k = 0, \dots, N$; $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве предложения 3.9 установлено, что если алгебра $\mathcal{A}_0$ обладает свойствами (2) и (3), то $E_*(\mathcal{A}_0)$ является алгеброй коэффициентов и δ – эндоморфизм $E_*(\mathcal{A}_0)$. Минимальность расширения $E_*(\mathcal{A}_0) \supset \mathcal{A}_0$ ясна из его конструкции.

Наконец, справедливость (52) и (53) вытекает из предложения 3.8.

В качестве следствия вышеприведенных предложений 3.4, 3.7, 3.9, 3.10 мы получаем следующий основной результат параграфа.

ТЕОРЕМА 3.11. Пусть $\delta: \mathcal{A}_0 \rightarrow L(H)$ является морфизмом.

I. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) существует алгебра коэффициентов $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_0$, т.е. алгебра $\mathcal{A}$, обладающая свойствами (2), (3) и (4);
- (ii) выполняется условие (45).

II. Если выполнено условие (45), то $E_*(E(\mathcal{A}_0))$ – минимальная алгебра коэффициентов, содержащая $\mathcal{A}_0$, и δ является эндоморфизмом $E_*(E(\mathcal{A}_0))$.

Более того, мы имеем:

(i) для любых $0 \leq l \leq k$ справедливо

$$\delta_*^k(E(\mathcal{A}_0))\delta_*^l(E(\mathcal{A}_0)) \subset \delta_*^k(E(\mathcal{A}_0)), \quad \delta_*^l(E(\mathcal{A}_0))\delta_*^k(E(\mathcal{A}_0)) \subset \delta_*^k(E(\mathcal{A}_0));$$

(ii) любой элемент $\beta \in E_*(E(\mathcal{A}_0))$ может быть записан в виде

$$\beta = \alpha_0 + \delta_*(\alpha_1) + \dots + \delta_*^N(\alpha_N),$$

где $\alpha_k \in E(\mathcal{A}_0)$, $k = 0, \dots, N$, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(iii) все операторы U^k , $k = 1, 2, \dots$, являются частичными изометриями и

$$U^{*k}U^k \in E_*(E(\mathcal{A}_0))'. \quad (54)$$

Последовательности $U^{*k}U^k$, $k = 1, 2, \dots$, и U^kU^{*k} , $k = 1, 2, \dots$, являются убывающими последовательностями коммутирующих проекторов и

$$[U^{*k}U^k, U^lU^{*l}] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad l = 0, 1, \dots. \quad (55)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.12. Подчеркнем еще раз, что если U – изометрия, то условие (45) выполняется для любой алгебры $\mathcal{A}_0$ и, соответственно, при этом для любой алгебры справедливы все утверждения п. II данной теоремы.

Подводя итог процедуре расширения $\mathcal{A}_0 \hookrightarrow E_*(E(\mathcal{A}_0))$, описанной выше, мы заключаем, что если у нас имеется $*$ -алгебра $\mathcal{A}_0 \subset L(H)$, $1 \in \mathcal{A}_0$, такая, что $\delta: \mathcal{A}_0 \rightarrow L(H)$ является морфизмом и выполнено условие (45), то C^* -алгебра $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{A}_0, U)$, порожденная $\mathcal{A}_0$ и U , может быть эквивалентным способом задана как $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E_*(E(\mathcal{A}_0)), U)$, где $E_*(E(\mathcal{A}_0))$ – минимальная алгебра коэффициентов, содержащая $\mathcal{A}_0$.

§ 4. Коммутативная алгебра коэффициентов

Рассматривая процедуры расширения $\mathcal{A}_0 \hookrightarrow E(\mathcal{A}_0)$, $\mathcal{A}_0 \hookrightarrow E_*(\mathcal{A}_0)$ и $\mathcal{A}_0 \hookrightarrow E_*(E(\mathcal{A}_0))$, представленные в предыдущем параграфе, мы естественным образом приходим к следующему вопросу: какие свойства алгебры $\mathcal{A}_0$ сохраняются при этих процедурах? Ясно, что для сохранения заданного свойства, например коммутативности, требуется принимать во внимание дополнительные соотношения между $\mathcal{A}_0$ и U . Обсуждение этих вопросов и является темой настоящего параграфа.

На протяжении всего параграфа мы предполагаем, что $\mathcal{A}_0$ – коммутативная $*$ -подалгебра $L(H)$ и $1 \in \mathcal{A}_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $\mathcal{A}_0$ – коммутативная $*$ -подалгебра $L(H)$, удовлетворяющая условиям (2) и (3), тогда $E_*(\mathcal{A}_0)$ является коммутативной алгеброй и оба отображения $\delta: E_*(\mathcal{A}_0) \rightarrow E_*(\mathcal{A}_0)$ и $\delta_*: E_*(\mathcal{A}_0) \rightarrow E_*(\mathcal{A}_0)$ являются эндоморфизмами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемой ситуации выполнены все предположения предложения 3.8. Из рассуждений, примененных в доказательстве (i) предложения 3.8, коммутативности алгебры $\mathcal{A}_0$ и условия $\delta(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{A}_0$ вытекает равенство

$$\delta_*^k(a)\delta_*^l(b) = \delta_*^l(b)\delta_*^k(a), \quad k, l \geq 0, \quad a, b \in \mathcal{A}_0.$$

Таким образом, $E_*(\mathcal{A}_0)$ – коммутативная алгебра.

Согласно предложению 3.10 $\delta: E_*(\mathcal{A}_0) \rightarrow E_*(\mathcal{A}_0)$ является эндоморфизмом и $\delta_*(E_*(\mathcal{A}_0)) \subset E_*(\mathcal{A}_0)$, поэтому для завершения доказательства достаточно проверить, что $\delta_*: E_*(\mathcal{A}_0) \rightarrow E_*(\mathcal{A}_0)$ – эндоморфизм.

Так как $E_*(\mathcal{A}_0)$ – коммутативная алгебра и $\delta(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{A}_0$, то

$$UU^* = \delta(1) \in \mathcal{A}_0 \subset [E_*(\mathcal{A}_0)]'.$$

Поэтому можно применить эквивалентность (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) из предложения 2.2 к U^*, δ_* и $E_*(\mathcal{A}_0)$, и мы заключаем, что $\delta_*: E_*(\mathcal{A}_0) \rightarrow E_*(\mathcal{A}_0)$ является эндоморфизмом.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\mathcal{A}_0$ – коммутативная $*$ -подалгебра $L(H)$ и $\delta: \mathcal{A}_0 \rightarrow L(H)$ является морфизмом.

Следующие три утверждения эквивалентны:

- (i) существует коммутативная $*$ -алгебра $\overline{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}_0$, удовлетворяющая условиям (2) и (3);
- (ii) существует коммутативная алгебра коэффициентов $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_0$;
- (iii) выполнены следующие два условия:

$$\mathcal{A}_0 \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \delta^n(\mathcal{A}_0)', \quad (56)$$

$$U^*U \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \delta^n(\mathcal{A}_0)'. \quad (57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (ii) $\Rightarrow$ (i). Утверждение очевидно.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Здесь (57) верно ввиду предложения 3.4. Кроме того, так как $\mathcal{A}_0 \subset \overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{\mathcal{A}}$ является коммутативной алгеброй и удовлетворяет (3), то верно и (56).

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Возьмем здесь $\mathcal{A} = E_*(E(\mathcal{A}_0))$. Из (57) и теоремы 3.11 вытекает, что $E_*(E(\mathcal{A}_0))$ – алгебра коэффициентов, поэтому достаточно доказать, что $E_*(E(\mathcal{A}_0))$ коммутативна. Заметим, что если $E(\mathcal{A}_0)$ коммутативна, то согласно предложению 4.1 $E_*(E(\mathcal{A}_0))$ также коммутативна. Поэтому для завершения доказательства достаточно установить коммутативность алгебры $E(\mathcal{A}_0)$.

Из (56) мы получаем

$$[a, \delta^n(b)] = 0, \quad a, b \in \mathcal{A}_0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (58)$$

Кроме того, из (57) и предложения 3.7 вытекает, что $\delta: E(\mathcal{A}_0) \rightarrow E(\mathcal{A}_0)$ является морфизмом. Это вместе с (58) дает

$$[\delta^{k+l}(a), \delta^l(b)] = \delta^l([\delta^k(a), b]) = 0,$$

т.е. $E(\mathcal{A}_0)$ – коммутативная алгебра. Доказательство завершено.

В действительности, вышеприведенный результат можно усилить.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $\mathcal{A}_0$ – коммутативная $*$ -подалгебра $L(H)$ и $\delta: \mathcal{A}_0 \rightarrow L(H)$ является морфизмом. Если выполнены (56) и (57), то $E(\mathcal{A}_0)$ – минимальная коммутативная $*$ -алгебра, содержащая $\mathcal{A}_0$ и удовлетворяющая (2) и (3), а $E_*(E(\mathcal{A}_0))$ – минимальная коммутативная алгебра коэффициентов, содержащая $\mathcal{A}_0$. Более того, $\delta: E_*(E(\mathcal{A}_0)) \rightarrow E_*(E(\mathcal{A}_0))$ и $\delta_*: E_*(E(\mathcal{A}_0)) \rightarrow E_*(E(\mathcal{A}_0))$ являются эндоморфизмами и

$$E_*(E(\mathcal{A}_0)) = E(E_*(\mathcal{A}_0)). \quad (59)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения, примененные в доказательстве теоремы 4.2, показывают, что $E(\mathcal{A}_0)$ удовлетворяет (2) и (3) и $E_*(E(\mathcal{A}_0))$ – алгебра коэффициентов. Минимальность алгебр $E(\mathcal{A}_0)$ и $E_*(E(\mathcal{A}_0))$ вытекает из их конструкции.

Так как $E(\mathcal{A}_0)$ удовлетворяет (2) и (3), то согласно предложению 4.1 отображения $\delta: E_*(E(\mathcal{A}_0)) \rightarrow E_*(E(\mathcal{A}_0))$ и $\delta_*: E_*(E(\mathcal{A}_0)) \rightarrow E_*(E(\mathcal{A}_0))$ являются эндоморфизмами. Итак, для завершения доказательства достаточно проверить равенство (59).

Заметим, что

$$\delta_*: \mathcal{A}_0 \rightarrow E_*(E(\mathcal{A}_0)) \quad (60)$$

является морфизмом и, кроме того,

$$UU^* \in E_*(E(\mathcal{A}_0)) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \delta_*^n(\mathcal{A}_0)', \quad (61)$$

$$\mathcal{A}_0 \subset E_*(E(\mathcal{A}_0)) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \delta_*^n(\mathcal{A}_0)'. \quad (62)$$

Включение (61) означает замену U на U^* и δ на δ_* в (57). С другой стороны, (62) означает замену δ на δ_* в (56). Таким образом, ввиду уже доказанной части данного предложения оба отображения $\delta: E(E_*(\mathcal{A}_0)) \rightarrow E(E_*(\mathcal{A}_0))$ и $\delta_*: E(E_*(\mathcal{A}_0)) \rightarrow E(E_*(\mathcal{A}_0))$ являются эндоморфизмами. Поэтому

$$E_*(E(E_*(\mathcal{A}_0))) \subset E(E_*(\mathcal{A}_0)). \quad (63)$$

Однако так как

$$E_*(E(E_*(\mathcal{A}_0))) \supset E_*(E(\mathcal{A}_0)),$$

то (63) означает, что

$$E_*(E(\mathcal{A}_0)) \subset E(E_*(\mathcal{A}_0)). \quad (64)$$

Аналогичным рассуждением мы получаем

$$E(E_*(\mathcal{A}_0)) \subset E_*(E(\mathcal{A}_0)), \quad (65)$$

поэтому (59) верно.

§ 5. Расширения *-алгебр частичными изометриями и частичные C^* -динамические системы

В этом параграфе мы проанализируем взаимосвязь между ковариантными алгебрами, порожденными частичными C^* -динамическими системами и объектами, исследуемыми в настоящей работе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть $\mathcal{A}$ – линейное подпространство в $L(H)$, U – частичная изометрия в H , $\delta(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$, $\delta_*(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. Тогда

$$\delta(\mathcal{A}) = \delta(1)\mathcal{A}\delta(1), \quad \delta_*(\mathcal{A}) = \delta_*(1)\mathcal{A}\delta_*(1) \quad (66)$$

и отображения

$$\delta: \delta_*(\mathcal{A}) \rightarrow \delta(\mathcal{A}), \quad (67)$$

$$\delta_*: \delta(\mathcal{A}) \rightarrow \delta_*(\mathcal{A}) \quad (68)$$

являются линейными изометрическими биекциями. Кроме того, отображения

$$\delta_*\delta: \delta_*(\mathcal{A}) \rightarrow \delta_*(\mathcal{A}), \quad (69)$$

$$\delta\delta_*: \delta(\mathcal{A}) \rightarrow \delta(\mathcal{A}) \quad (70)$$

являются тождественными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно провести доказательство для отображения δ .

Имеем

$$\delta(\mathcal{A}) = U\mathcal{A}U^* = UU^*U\mathcal{A}U^*UU^* = UU^*(U\mathcal{A}U^*)UU^*,$$

откуда следует

$$\delta(\mathcal{A}) \subset \delta(1)\mathcal{A}\delta(1). \quad (71)$$

Кроме того,

$$\delta(1)\mathcal{A}\delta(1) = \delta(\delta_*(\mathcal{A})) \subset \delta(\mathcal{A}). \quad (72)$$

Из (71) и (72) вытекает

$$\delta(\mathcal{A}) = \delta(1)\mathcal{A}\delta(1) = \delta(\delta_*(\mathcal{A})) \quad (73)$$

и, аналогично,

$$\delta_*(\mathcal{A}) = \delta_*(1)\mathcal{A}\delta_*(1) = \delta_*(\delta(\mathcal{A})). \quad (74)$$

Итак, (66) доказано.

Более того, из (73) следует, что отображение

$$\delta: \delta_*(\mathcal{A}) \rightarrow \delta(\mathcal{A}) \quad (75)$$

является сюръекцией. Помимо этого, так как $U^*U = U^*U \cdot U^*U$, то для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ имеем

$$\delta_*(1)a\delta_*(1) = \delta_*[\delta[\delta_*(1)a\delta_*(1)]]. \quad (76)$$

Значит, отображение $\delta_*: \delta(\mathcal{A}) \rightarrow \delta_*(\mathcal{A})$ является обратным для отображения $\delta: \delta_*(\mathcal{A}) \rightarrow \delta(\mathcal{A})$, что доказывает (69). Итак, $\delta: \delta_*(\mathcal{A}) \rightarrow \delta(\mathcal{A})$ и $\delta_*: \delta(\mathcal{A}) \rightarrow \delta_*(\mathcal{A})$ – взаимно обратные отображения и, следовательно, биекции.

Так как, очевидно, $\|\delta\| \leq 1$ и $\|\delta_*\| \leq 1$, то из их взаимной обратимости следует изометричность. Доказательство завершено.

Очевидно, что если $\mathcal{A}$ – алгебра коэффициентов, то она удовлетворяет условиям предложения 5.1. Однако в такой ситуации мы можем сказать гораздо больше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра коэффициентов. В этом случае мы имеем

$$\delta_*^n(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}, \quad \delta^n(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для унификации записи введем следующие обозначения:

$$D_k = \begin{cases} \delta^k(\mathcal{A}), & k \geq 0, \\ \delta_*^{-k}(\mathcal{A}), & k < 0, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\delta_k = \begin{cases} \delta^k, & k \geq 0, \\ \delta_*^{-k}, & k < 0, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В следующем предложении собраны свойства, описывающие структурные взаимосвязи между введенными объектами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра коэффициентов, $1 \in \mathcal{A}$, D_k и δ_k , $k \in \mathbb{Z}$, – множества и отображения, введенные в 5.2. Тогда

$$\dots \subset D_{-2} \subset D_{-1} \subset D_0 = \mathcal{A} \supset D_1 \supset D_2 \supset \dots, \quad (77)$$

причем D_k , $k < 0$, – двусторонние $*$ -идеалы в $\mathcal{A}$, а D_k , $k > 0$, – $*$ -подалгебры в $\mathcal{A}$ и

$$D_k = \delta_k(1)\mathcal{A}\delta_k(1), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (78)$$

$$D_{-k} = \delta_{-k}(1)\mathcal{A}\delta_{-k}(1) = \delta_{-k}(1)\mathcal{A} = \mathcal{A}\delta_{-k}(1), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (79)$$

$$D_k \cap D_s = \delta_k(1)D_s\delta_k(1), \quad k, s \in \mathbb{Z}. \quad (80)$$

При этом отображения

$$\delta_k: D_{-k} \rightarrow D_k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

являются $*$ -изоморфизмами.

Кроме того, отображения

$$\delta_{-k}\delta_k: D_{-k} \rightarrow D_{-k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (81)$$

являются тождественными.

При этом

$$\delta_k(D_{-k} \cap D_l) \subset D_{k+l}, \quad k, l \in \mathbb{Z}, \quad (82)$$

$$\delta_{k+l}(a) = \delta_k(\delta_l(a)), \quad a \in D_{-l} \cap D_{-k-l}, \quad k, l \in \mathbb{Z}. \quad (83)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{A}$ – алгебра коэффициентов, то

$$\delta_*^k(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}, \quad \delta^k(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Значит, $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям предложения 5.1 с заменой δ на $\delta^k = \delta_k$, $k = 1, 2, \dots$, и δ_* на $\delta_*^k = \delta_{-k}$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому выполняется (78) и отображения

$$\delta_k: D_{-k} \rightarrow D_k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

являются линейными положительными изометрическими биекциями, а отображения

$$\delta_{-k}\delta_k: D_{-k} \rightarrow D_{-k}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

являются тождественными.

Так как отображения $\delta^k: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $k = 1, 2, \dots$, являются эндоморфизмами, то множества $D_k = \delta^k(\mathcal{A})$, $k = 1, 2, \dots$, являются $*$ -подалгебрами в $\mathcal{A}$.

Согласно предложению 3.6 $\delta^k(1)$, $k = 1, 2, \dots$, и $\delta_*^k(1)$, $k = 1, 2, \dots$, являются убывающими последовательностями проекторов. Отсюда, из определения D_k и δ_k и предложения 5.1 вытекают включения (77).

Кроме того, согласно предложению 3.6

$$\delta_{-k}(1) = \delta_*^k(1) \in \mathcal{A}', \quad k = 1, 2, \dots, \quad (84)$$

поэтому справедливо (79). Более того, из (84) мы заключаем, что для любого $k = 1, 2, \dots$ и любого элемента $a \in \mathcal{A}$ выполняется

$$\begin{aligned} aD_{-k} &= a\delta_{-k}(1)\mathcal{A}\delta_{-k}(1) = \delta_{-k}(1)a\mathcal{A}\delta_{-k}(1) \subset D_{-k}, \\ D_{-k}a &= \delta_{-k}(1)\mathcal{A}\delta_{-k}(1)a = \delta_{-k}(1)\mathcal{A}a\delta_{-k}(1) \subset D_{-k}, \end{aligned}$$

т.е. D_{-k} , $k = 1, 2, \dots$, являются двусторонними идеалами.

Из вышеприведенных наблюдений следует, что отображения

$$\delta_k: D_{-k} \rightarrow D_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

являются $*$ -изоморфизмами, а так как отображения

$$\delta_{-k}: D_k \rightarrow D_{-k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

являются обратными для δ_k , то они также являются $*$ -изоморфизмами.

Из (78) и (79) заключаем, что $a \in D_k \cap D_s$ тогда и только тогда, когда справедливы следующие равенства

$$a = \delta_s(1)a\delta_s(1) = \delta_k(1)\delta_s(1)a\delta_s(1)\delta_k(1),$$

но последнее выражение – это запись произвольного элемента из $\delta_k(1)D_s\delta_k(1)$, тем самым доказано (80).

Осталось проверить (82) и (83).

Для проверки (82) рассмотрим следующие возможные случаи.

а) $k \geq 0, l \geq 0$. В этом случае

$$\delta_k(D_{-k} \cap D_l) = \delta^k(\delta_*^k(\mathcal{A}) \cap \delta^l(\mathcal{A})) \subset \delta^k(\delta^l(\mathcal{A})) = \delta^{k+l}(\mathcal{A}) = D_{k+l}.$$

б) $k \geq 0, l < 0$. Положим $n = -l$. Возможны следующие ситуации.

1) $n \leq k$. В этом случае

$$\delta_k(D_{-k} \cap D_l) = \delta^k(\delta_*^k(\mathcal{A}) \cap \delta_*^n(\mathcal{A})) = \delta^k(\delta_*^k(\mathcal{A})) = \delta_k(D_{-k}) = D_k \subset D_{k+l},$$

где последнее включение следует из (77).

2) $n > k$. В этом случае, используя равенство (79) и перестановочность проекторов $\delta^k(1)$ и $\delta_*^{n-k}(1)$ (предложение 3.6, (vi)), мы получаем

$$\begin{aligned} \delta_k(D_{-k} \cap D_l) &= \delta^k(\delta_*^k(\mathcal{A}) \cap \delta_*^n(\mathcal{A})) = \delta^k(\delta_*^n(\mathcal{A})) = U^k U^{*n} \mathcal{A} U^n U^{*k} \\ &= \delta^k(1) \delta_*^{n-k}(\mathcal{A}) \delta^k(1) = \delta^k(1) \delta_*^{n-k}(1) \mathcal{A} \delta_*^{n-k}(1) \delta^k(1) \\ &= \delta_*^{n-k}(1) [\delta^k(1) \mathcal{A} \delta^k(1)] \delta_*^{n-k}(1) \subset \delta_*^{n-k}(\mathcal{A}) = D_{k-n}. \end{aligned}$$

Итак, для $k \geq 0$ (82) доказано. Случай $k < 0$ рассматривается аналогично.

Проверим теперь (83).

Рассмотрим следующие возможные ситуации.

а) $k \geq 0, l \geq 0$. В этом случае $\delta_{k+l} = \delta_k \circ \delta_l$ на D_{k-l} .

б) $k \geq 0, l < 0$. Положим $n = -l$. Возможны следующие ситуации.

1) $n \leq k$. В этом случае

$$\begin{aligned} \delta_k(\delta_l(a)) &= \delta^k(\delta_*^n(a)) = U^k U^{*n} a U^n U^{*k} \\ &= U^{k-n} (U^n U^{*n} a U^n U^{*n}) U^{*k-n}. \end{aligned} \quad (85)$$

Так как $a \in D_{-l} = D_n$, то из (78) следует, что $a = U^n U^{*n} a U^n U^{*n}$ и из (85) мы получаем

$$\delta_k(\delta_l(a)) = \delta^{k-n}(a) = \delta_{k+l}(a).$$

2) $n > k$. В этом случае

$$\begin{aligned} \delta_k(\delta_l(a)) &= \delta^k(\delta_*^n(a)) = U^k U^{*n} a U^n U^{*k} \\ &= U^k U^{*k} (U^{*n-k} a U^{n-k}) U^k U^{*k}. \end{aligned} \quad (86)$$

В рассматриваемой ситуации $\delta_*^{n-k} = \delta_{k-n} = \delta_{k+l}$, кроме того, из (82) вытекает

$$\delta_{k+l}(D_{-k-l} \cap D_{-l}) \subset D_k,$$

т.е.

$$U^{*n-k} a U^{n-k} \in D_k. \quad (87)$$

Теперь из (86), (87) и (78) получаем

$$\delta_k(\delta_l(a)) = \delta_*^{n-k}(a) = \delta_{k+l}(a).$$

Итак, для $k \geq 0$ (83) доказано. Случай $k < 0$ рассматривается аналогично.

Доказательство завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Просматривая доказательство включения (82) и используя (80), мы можем уточнить (82). Именно справедливо

$$\delta_k(D_{-k} \cap D_l) = D_k \cap D_{k+l}, \quad k, l \in \mathbb{Z}. \quad (88)$$

По существу, предложение 5.3 показывает, что набор $(\mathcal{A}, D_k, \delta_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, “почти” задает частичную динамическую систему на $\mathcal{A}$. Напомним в связи с этим последнее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.5. *Частичным действием* (обозначаемым через α) группы $\mathbb{Z}$ на C^* -алгебре A называется набор J_k , $k \in \mathbb{Z}$, замкнутых двусторонних идеалов A и набор α_k , $k \in \mathbb{Z}$, $*$ -изоморфизмов $\alpha_k: J_{-k} \rightarrow J_k$ таких, что

- i) $\alpha_k(J_{-k} \cap J_l) \subset J_{k+l}$, $k, l \in \mathbb{Z}$;
- ii) $\alpha_{k+l}(a) = \alpha_k(\alpha_l(a))$, $a \in J_{-l} \cap J_{-k-l}$, $k, l \in \mathbb{Z}$;
- iii) $J_0 = A$, $\alpha_0 = \text{Id}_A$.

В этом случае говорят, что $(A, \mathbb{Z}, \alpha)$ – *частичная C^* -динамическая система*.

Отметим, что:

1) В действительности, для задания частичной динамической системы *не* требуется полностью задавать все идеалы J_k , $k \in \mathbb{Z}$, и изоморфизмы $\alpha_k: J_{-k} \rightarrow J_k$. Достаточно задать два идеала J_{-1} , J_1 и изоморфизм $\alpha_1: J_{-1} \rightarrow J_1$, после чего все остальные идеалы и изоморфизмы, удовлетворяющие условиям i)–iii), определяются автоматически (см. [11; раздел 3]). Мы привели определение частичного действия в таком виде, чтобы связь его с предложением 5.3 была прозрачной.

2) Пункт i) описывает условия, необходимые для того, чтобы $\alpha_k(\alpha_l(a))$ в ii) было определено. Легко установить также, что i) можно эквивалентным способом задать в виде

$$i') \quad \alpha_k(J_{-k} \cap J_l) = J_k \cap J_{k+l}, \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

(ср. (82) и (88)).

3) По аналогии с введенным понятием можно ввести частичную C^* -динамическую систему для произвольной дискретной группы (см., например, [12]), однако в рамках настоящей работы естественно ограничиться случаем группы $\mathbb{Z}$.

Обозначим через Δ набор множеств D_k , $k \in \mathbb{Z}$, и отображений δ_k , $k \in \mathbb{Z}$, введенных в определении 5.2. Если $\mathcal{A}$ – алгебра коэффициентов, содержащая единицу, то в общей ситуации $(\mathcal{A}, \mathbb{Z}, \Delta)$ является более общим объектом, чем частичная C^* -динамическая система: свойства i)–iii) из определения 5.5 выполняются, но для $k > 0$ множества D_k не являются идеалами, а лишь подалгебрами в $\mathcal{A}$ (предложение 5.3).

В силу предложения 2.2 алгебру коэффициентов $\mathcal{A}$ можно определить тремя условиями:

$$\delta(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}, \quad \delta_*(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}, \quad \delta_*(1) \in \mathcal{A}'. \quad (89)$$

Если же в дополнение к условиям (89) потребовать выполнения условия

$$\delta(1) \in \mathcal{A}', \quad (90)$$

то для такой алгебры $(\mathcal{A}, \mathbb{Z}, \Delta)$ уже является частичной C^* -динамической системой.

Отметим также, что в коммутативной ситуации (для алгебр, описанных в предложениях 4.1, 4.3) $(\mathcal{A}, \mathbb{Z}, \Delta)$ является частичной C^* -динамической системой.

§ 6. Алгебры коэффициентов, порожденные полярным разложением

Проведенный выше анализ показывает, что все примеры алгебр, являющихся представлениями частичных динамических систем (группы $\mathbb{Z}$), а также алгебры, генерированные эндоморфизмами, порожденными изометриями, являются примерами алгебр рассматриваемого в настоящей работе типа, в частности, сюда войдут частичные скрещенные произведения (с группой $\mathbb{Z}$), тёплищевы алгебры, алгебра группы $\mathbb{Z}$ и т.п.

В этом параграфе мы представим еще два интересных примера алгебр коэффициентов, важных со многих точек зрения и, в частности, в связи с приложениями в теории квантовых физических систем.

ПРИМЕР 1. Пусть $a \in L(H)$ – некоторый оператор и

$$a = U|a| \quad (91)$$

– стандартное полярное разложение a . Здесь $|a| = \sqrt{a^*a}$ и U – частичная изометрия, заданная условием

$$U(|a|\xi) = a\xi, \quad \xi \in H. \quad (92)$$

В качестве алгебры $\mathcal{A}_0$ мы возьмем коммутативную C^* -алгебру

$$\mathcal{A}_0 = \overline{\{1, |a|\}}. \quad (93)$$

Далее в данном примере мы будем предполагать выполненным условие

$$aa^* \in \mathcal{A}_0. \quad (94)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. C^* -алгебры, удовлетворяющие условию (94), являются естественным обобщением алгебр, в которых выполнено условие

$$aa^* = \gamma(a^*a), \quad (95)$$

где γ – непрерывная неотрицательная функция на спектре оператора a^*a . В “простейшей” ситуации, когда γ является линейной функцией

$$aa^* = qa^*a + h, \quad (96)$$

эти алгебры включают следующие классы:

- (i) коммутативные алгебры, порожденные нормальными операторами:

$$a^*a = aa^*$$

($q = 1, h = 0$), теория которых составляет базу спектральной теории операторов в гильбертовых пространствах;

(ii) тёплицева алгебра:

$$aa^* = 1$$

($q = 0, h = 1$);

(iii) алгебры Гейзенберга:

$$aa^* \mp a^*a = h \quad (97)$$

($q = \pm 1, h > 0$); в случае $q = 1$ мы здесь, в действительности, выходим за рамки теории C^* -алгебр – операторы, удовлетворяющие соответствующему условию, являются *неограниченными* и играют принципиальную роль в квантовой механике (связаны с операторами положения и момента);

(iv) в общем случае ($-1 < q < 1, q \neq 0, h \neq 0$) алгебру, порожденную отношением (96), естественно рассматривать как q -деформацию алгебры Гейзенберга. Модели квантовой механики, основанные на q -деформации алгебры Гейзенберга, изучались, например, в [28].

Заметим, что так как в ситуации, рассматриваемой в данном примере, оператор U^*U является ортогональным проектором на $\overline{\text{Im } |a|} = (\text{Ker } |a|)^\perp$, то U^*U является спектральным проектором оператора $|a|$, соответствующим множеству $\sigma(|a|) \setminus \{0\}$ (где через $\sigma(\alpha)$ мы обозначаем спектр оператора α). Таким образом, согласно спектральной теореме (см., например, [29; § 17])

$$U^*U \in \overline{\{1, |a|\}}'' = \mathcal{A}_0'', \quad (98)$$

где $\mathcal{A}_0''$ – бикоммутант $\mathcal{A}_0$ (т.е. алгебра фон Неймана, порожденная алгеброй $\mathcal{A}_0$). В частности,

$$U^*U \in \mathcal{A}_0'. \quad (99)$$

Поэтому согласно предложению 2.2 отображение

$$\delta: \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad (100)$$

является морфизмом и $U, \mathcal{A}_0$ удовлетворяют условию (2).

Следующая теорема описывает ряд свойств $\mathcal{A}_0$ и U , вытекающих из условия (94).

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть U – частичная изометрия, определенная полярным разложением (91) оператора a , удовлетворяющего (94), тогда:

(i)

$$\delta^k(\overline{\{|a|\}}) \subset \overline{\{1, |a|, UU^*, \dots, U^{k-1}U^{*k-1}\}}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (101)$$

(ii) δ является эндоморфизмом C^* -алгебры

$$\overline{\{1, |a|, UU^*, \dots, U^k U^{*k}, \dots; k = 1, 2, \dots\}};$$

(iii)

$$U^k U^{*k} = \delta^k(1) \in \mathcal{A}_0'', \quad k = 0, 1, \dots; \quad (102)$$

(iv) для $1 \leq k \leq l$

$$U^*U^kU^{*l} = U^{k-1}U^{*l}, \quad UU^{*k}U^l = U^{*k-1}U^l; \quad (103)$$

(v) для $k, l \in \mathbb{N}$

$$[U^{*l}U^l, U^kU^{*k}] = 0. \quad (104)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Заметим, что свойство (94) означает, что

$$\delta(|a|^2) = U|a|^2U^* \in \overline{\{1, |a|\}}. \quad (105)$$

Так как $\delta: \mathcal{A}_0 \rightarrow L(H)$ является морфизмом, то

$$[\delta(|a|)]^2 = \delta(|a|^2) \in \overline{\{1, |a|\}}.$$

Поэтому из (105) вытекает

$$\delta(|a|) \in \overline{\{1, |a|\}}. \quad (106)$$

Итерируя (106), получаем (i).

(ii) Утверждение следует из (i) и того факта, что $\delta: \mathcal{A}_0 \rightarrow L(H)$ является морфизмом.

(iii) Выше уже было отмечено, что U^*U является спектральным проектором, соответствующим промежутку $(0, \|a\|]$. Поэтому существует последовательность α_n элементов из $\overline{\{a\}}$ такая, что

$$\alpha_n \xrightarrow{\text{сильно}} U^*U. \quad (107)$$

Значит,

$$U\alpha_nU^* \xrightarrow{\text{сильно}} U(U^*U)U^* = UU^*.$$

Так как (согласно (i)) $U\alpha_nU^* \in \overline{\{1, |a|\}}$, то $UU^* \in \overline{\{1, |a|\}}''$.

Далее проведем доказательство по индукции.

Предположим, что $U^kU^{*k} \in \overline{\{1, |a|\}}''$, $k = \overline{1, n-1}$. Выбирая вышеупомянутую последовательность α_n , получаем

$$U^n\alpha_nU^{n*} \xrightarrow{\text{сильно}} U^n(U^*U)U^{n*} = U^{n-1}(UU^*U)U^{n*} = U^nU^{n*}. \quad (108)$$

Но согласно (i) и предположению индукции мы имеем

$$U^n\alpha_nU^{n*} \in \overline{\{1, |a|, UU^*, \dots, U^{n-1}U^{n-1*}\}} \subset \overline{\{1, |a|\}}''.$$

Поэтому из (108) вытекает $U^nU^{n*} \in \overline{\{1, |a|\}}''$. Итак, (iii) доказано.

(iv), (v) Из (iii) имеем

$$\overline{\mathcal{A}} := \overline{\{1, |a|, UU^*, \dots, U^kU^{*k}; k = 1, 2, \dots\}} \subset \mathcal{A}_0'',$$

в частности, алгебра $\overline{\mathcal{A}}$ коммутативна.

Ввиду (ii) отображение $\delta: \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$ является эндоморфизмом, и, как было отмечено,

$$U^*U \in \mathcal{A}_0'' \subset \overline{\mathcal{A}}'.$$

Вспоминая эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (ii) из предложения 2.2, заключаем, что $\overline{\mathcal{A}}$ и U удовлетворяют условиям предложения 3.6. Поэтому (iv) и (v) верны.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Большинство из свойств, перечисленных в теореме 6.1, известны (мы привели их для полноты изложения). В частности, обобщения свойства (v) и обобщения некоторых ситуаций из (i) можно найти в предложениях 28 и 29 раздела 2.1 из [6], этот раздел содержит также много иной важной информации о рассматриваемом нами предмете.

В качестве следствия перечисленных свойств и результатов, полученных в § 4, мы получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Пусть U – частичная изометрия, определенная полярным разложением (91) оператора a , удовлетворяющего (94), и $\mathcal{A}_0 = \overline{\{1, |a|\}}$, тогда:

(i)

$$E(\mathcal{A}_0) = \{\mathcal{A}_0, UU^*, \dots, U^k U^{*k}, \dots\} \quad (109)$$

и $E(\mathcal{A}_0)$ является коммутативной $*$ -алгеброй, удовлетворяющей условиям (2) и (3), а отображение $\delta: E(\mathcal{A}_0) \rightarrow E(\mathcal{A}_0)$ является эндоморфизмом;

(ii) алгебра $E_*(E(\mathcal{A}_0))$ является коммутативной алгеброй коэффициентов, и оба отображения $\delta: E_*(E(\mathcal{A}_0)) \rightarrow E_*(E(\mathcal{A}_0))$ и $\delta_*: E_*(E(\mathcal{A}_0)) \rightarrow E_*(E(\mathcal{A}_0))$ являются эндоморфизмами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждений (i), (iii) теоремы 6.1 и из (98) вытекают свойства (56) и (57). Значит, согласно предложению 4.3 алгебра $E(\mathcal{A}_0)$ является коммутативной $*$ -алгеброй, удовлетворяющей (2) и (3), и отображение $\delta: E(\mathcal{A}_0) \rightarrow E(\mathcal{A}_0)$ является эндоморфизмом; кроме того, $E_*(E(\mathcal{A}_0))$ является коммутативной алгеброй коэффициентов и отображения $\delta: E_*(E(\mathcal{A}_0)) \rightarrow E_*(E(\mathcal{A}_0))$ и $\delta_*: E_*(E(\mathcal{A}_0)) \rightarrow E_*(E(\mathcal{A}_0))$ являются эндоморфизмами.

Равенство (109) вытекает из утверждения (i) теоремы 6.1.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим частичную изометрию $U \in L(H)$ и положительный оператор $0 \leq Q \in L(H)$, удовлетворяющие условиям

$$U^*U = \delta_*(1) \in \{Q\}'' = \mathcal{A}_0'', \quad (110)$$

$$\delta(Q) = UQU^* = qQ, \quad (111)$$

где $\mathcal{A}_0 = \{1, Q\}$ и $0 < q < 1$.

Примером операторов с такими свойствами является пара: односторонний сдвиг U и диагональный оператор Q , действующие в стандартном дискретном пространстве l^2 по формулам

$$\begin{aligned} U(e_n) &= e_{n-1}, & U(e_0) &= 0, & n &= 1, 2, \dots, \\ Q(e_n) &= q^n e_n, & & & n &= 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где e_n , $n = 0, 1, \dots$, – канонический ортонормированный базис в l^2 . Подобные операторы естественно возникают в связи с моделированием различных q -деформаций физических систем.

Согласно предложению 2.2 отображение $\delta: \mathcal{A}_0 \rightarrow L(H)$ является морфизмом и, кроме того, из (111) следует, что

$$\delta(f(Q)) = f(qQ) \quad (112)$$

для любой функции $f \in C(\sigma)$ такой, что $f(0) = 0$ (здесь $C(\sigma)$ – алгебра непрерывных функций на спектре σ оператора Q). Из (112) мы заключаем, что δ отображает алгебру $\{Q\}$ в себя и, следовательно, условие

$$U^*U \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \delta^n(\mathcal{A}_0)' \quad (113)$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$[U^*U, \delta^n(1)] = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (114)$$

Используя рассуждения, примененные в доказательстве утверждения (iii) теоремы 6.1 и применяя (110) вместо (98), можно показать, что

$$\delta^n(1) \in \mathcal{A}_0'', \quad n = 1, 2, \dots, \quad (115)$$

что вместе с (110) доказывает (114) и (113).

Аналогичным образом условие

$$\mathcal{A}_0 \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \delta^n(\mathcal{A}_0)'$$

может быть сведено к условию

$$[a, \delta^n(1)] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad a \in \mathcal{A}_0,$$

которое также выполняется ввиду (115).

Поэтому из предложения 4.3 мы заключаем, что $E_*(E(\mathcal{A}_0))$ – алгебра коэффициентов.

Рассмотрим оператор $a \in \mathcal{B} \subset L(H)$, заданный формулой

$$a := U\rho(Q), \quad (116)$$

где $0 \leq \rho \in C(\sigma)$ и

$$U^*U\rho(Q) = \rho(Q). \quad (117)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. *Операторы a , a^* и Q удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$a^*a = \rho^2(Q), \quad (118)$$

$$aa^* = \rho^2(0)UU^* + \tilde{\rho}(qQ), \quad (119)$$

где $\tilde{\rho}(t) = \rho^2(t) - \rho^2(0)$; в частности, если $\rho(0) = 0$, то

$$aa^* = \rho^2(qQ), \quad (120)$$

$$aQ = qQa, \quad (121)$$

$$Qa^* = qa^*Q. \quad (122)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (118) вытекает непосредственно из (116) и (117). Равенство (119) вытекает из (112) и определения функции $\tilde{\rho}(t)$.

Для того чтобы проверить (121), заметим, что из свойства (111) следует

$$Ub = \delta(b)U, \quad b \in \mathcal{A}_0. \quad (123)$$

Заменяя здесь b на Q и используя (111), получаем

$$UQ = qQU, \quad (124)$$

что, в свою очередь, дает

$$U\rho(Q) = \rho(qQ)U. \quad (125)$$

Из (125) вытекает

$$aQ = U\rho(Q)Q = \rho(qQ)qQU = qQU\rho(Q) = qQa.$$

Итак, (121) доказано.

Наконец, (122) получается из предыдущей формулы переходом к сопряжению.

C^* -алгебра $\mathcal{B}_\rho := \mathcal{B}(1, a, Q)$, порожденная операторами 1 , a и Q , удовлетворяющими (118)–(122), является C^* -подалгеброй алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{A}_0, U)$.

В специальном случае, когда $0 \leq Q \leq 1$, $UU^* \in \mathcal{A}_0$ и

$$\rho(Q) = \frac{1-Q}{1-q}, \quad (126)$$

алгебра $\mathcal{B}_\rho$ оказывается q -деформацией алгебры Гейзенберга (см. [28]). В ситуации, когда

$$\rho^2(Q) = -\frac{1}{(1-q)(1-q^2)} \left(\frac{q}{Q} + Q \right) \frac{1}{(1-q)^2}, \quad (127)$$

$\mathcal{B}_\rho$ является q -деформацией $U_q(\mathrm{Sl}(2))$ обертывающей алгебры $\mathrm{Sl}(2)$ (см. [30]).

В общей ситуации алгебра $\mathcal{B}_\rho$ изучалась в [30] в связи с исследованием приложений данного объекта к теории гипергеометрических рядов и интегрируемых физических систем.

Алгебры типа $\mathcal{B}_\rho$ естественным образом появляются также и в квантовой оптике, а именно при квантовой редукции мультимодальной квантовой оптической системы. Редуцируя степени свободы рассматриваемой квантовой системы, можно перейти от алгебры Гейзенберга с несколькими степенями свободы к алгебре, заданной соотношениями (118)–(122). При этом операторы a^* и a интерпретируются как кластерные операторы рождения и уничтожения. По поводу полного описания этого важного для физики приложения см. [8].

Список литературы

1. Davidson K. R. C^* -algebras by example. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. (Fields Inst. Monogr. V. 6.)
2. Pedersen G. K. C^* -algebras and their automorphism groups. New York: Academic Press, 1979.
3. Antonevich A., Lebedev A. Functional differential equations: I. C^* -theory. Harlow: Longman, 1994.
4. Antonevich A., Belousov M., Lebedev A. Functional differential equations: II. C^* -applications. Part 1: Equations with continuous coefficients. Harlow: Longman, 1998.
5. Antonevich A., Belousov M., Lebedev A. Functional differential equations: II. C^* -applications. Part 2: Equations with discontinuous coefficients and boundary value problems. Harlow: Longman, 1998.
6. Ostrovskiy V., Samoilenko Yu. Introduction to the theory of representations of finitely presented $*$ -algebras. I. Representations by bounded operators. Amsterdam: Harwood Acad. Publ., 1999.
7. Odziejewicz A., Horowski M., Tereszkiewicz A. Integrable multi-boson systems and orthogonal polynomials // J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 4353–4376.
8. Horowski M., Odziejewicz A., Tereszkiewicz A. Some integrable systems in nonlinear quantum optics // arXiv:math-ph/0207031, 2002.
9. Boyd S., Keswani N., Raeburn I. Faithful representations of crossed products by endomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 118. №2. P. 427–436.
10. Adji S., Laca M., Nilsen M., Raeburn I. Crossed products by semigroups of endomorphisms and the Toeplitz algebras of ordered groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 122. №4. P. 1133–1141.
11. Exel R. Circle actions on C^* -algebras, partial automorphisms and generalized Pimsner–Voiculescu exact sequence // J. Funct. Anal. 1994. V. 122. P. 361–401.
12. McClanachan K. K -theory for partial crossed products by discrete groups // J. Funct. Anal. 1995. V. 130. P. 77–117.
13. Sieben N. C^* -crossed products by partial actions and actions of inverse semigroups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1997. V. 63. P. 32–46.
14. Paterson Alan L. T. Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras. Boston, MA: Birkhäuser, 1999. (Progr. Math. V. 170.)
15. Lebedev A., Odziejewicz A. On the structure of C^* -algebras generated by the components of polar decomposition // arXiv:math.OA/0208200, 2002.
16. Халмош П. Р. Гильбергово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.
17. Exel R. Amenability for Fell bundles // J. Reine Angew. Math. 1997. V. 492. P. 41–73.
18. Антоневич А. Б. Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. Минск: Изд-во Университетское, 1988.
19. Бреннер В. В. О спектральном радиусе операторов с локально независимыми сдвигами // Изв. АН БССР. 1981. №3. С. 48–85.
20. Бреннер В. В. Операторы с локально независимыми сдвигами // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Минск, 1981.
21. Бреннер В. В. О спектральном радиусе операторов со сдвигом // УМН. 1982. Т. 37. №1. С. 139–140.

22. *Бреннер В. В.* О символических последовательностях. I // Деп. в ВИНТИ. 1983. № 4399-83.
23. *Бреннер В. В.* О символических последовательностях. II // Деп. в ВИНТИ. 1983. № 4400-83.
24. *Антонович А. Б.* О двух методах исследования обратимости операторов в C^* -алгебрах, индуцированных динамическими системами // Матем. сб. 1984. Т. 124(166). № 1. С. 3–23.
25. *Beurling A.* Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application a une transformation fonctionnelle // IX Congr. Math. Scand. 1938. P. 345–366.
26. *O'Donovan D. P.* Weighted shifts and covariance algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 208. P. 1–25.
27. *Лебедев А. В.* О некоторых C^* -методах, используемых при исследовании алгебр, ассоциированных с автоморфизмами и эндоморфизмами // Деп. в ВИНТИ. 1987. № 5351-B87.
28. *Maximov V., Odziejewicz A.* The q -deformation of quantum mechanics of one degree of freedom // J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 4. P. 1681–1690.
29. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
30. *Odziejewicz A.* Quantum algebras and q -special functions related to coherent states maps of the disc // Commun. Math. Phys. 1998. V. 192. P. 183–215.

Минск (Беларусь),
Белосток (Польша)
E-mail: lebedev@bsu.by,
aodziejewicz@physics.uwb.edu.pl

Поступила в редакцию
17.07.2003 и 21.01.2004