Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Антонеvич, А. А. Ахматова, Ю. Маковска, Отображения с разделимой динамикой и спектральные свойства порожденных ими операторов, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 3, 3–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8340>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 18:20:27

УДК 517.983.23+517.984.5

А. Б. Антонец, А. А. Ахматова, Ю. Маковска

Отображения с разделимой динамикой и спектральные свойства порожденных ими операторов

Отображение α пространства X в себя порождает операторы взвешенного сдвига B , действующие в пространствах функций на X . Спектральные свойства таких операторов тесно связаны с динамикой отображения α . Ранее было известно, что спектр оператора зависит только от множества инвариантных эргодических мер для отображения α . В статье получены условия правосторонней обратимости операторов $B - \lambda I$ при спектральных значениях λ . Основной результат заключается в том, что правосторонняя обратимость может иметь место только в случае существования нетривиального аттрактора.

Библиография: 29 названий.

Ключевые слова: спектр оператора, односторонняя обратимость, существенный спектр, аттрактор, эргодическая мера.

DOI: 10.4213/sm8340

§ 1. Введение

Обратимое отображение $\alpha: X \rightarrow X$ топологического пространства X задает динамическую систему с дискретным временем (каскад) и задает операторы, действующие в фиксированном пространстве функций на X по формуле

$$Bu(x) = a_0(x)u(\alpha(x)),$$

где a_0 – заданная функция. Такие операторы называют *операторами взвешенного сдвига* или *операторами композиции с весом*.

Спектральные свойства оператора взвешенного сдвига зависят от динамики отображения $\alpha: X \rightarrow X$, порождающего оператор; выявление таких зависимостей составляет одно из направлений исследований, связывающих теорию динамических систем с теорией операторов. В статье изучаются спектральные свойства операторов взвешенного сдвига в пространствах $L_2(X, \mu)$.

Аналогично определяются операторы взвешенного сдвига в пространствах вектор-функций; в этом случае коэффициент a_0 является матричнозначной функцией. Операторы, представимые в виде суммы операторов взвешенного сдвига (порожденных разными отображениями), называются *функциональными операторами*.

Работа выполнена при поддержке Национального научного центра, Польша (грант № DEC-2011/01/B/STI/03838).

Рассматриваемые операторы естественно возникают в теории динамических систем (см. [1]–[3]). Отметим, что они используются также в ряде других математических и физических направлений, среди которых можно указать теорию функционально-дифференциальных (см. [4]–[8]) и интегро-функциональных уравнений (см. [9]), теорию аналитических функций (см. [10]), теорию случайных блужданий, статистическую механику, теорию вэйвлетов, теорию представлений и другие направления. Использование таких операторов позволяет учитывать нелокальные взаимодействия при моделировании сложных процессов, они определяют специфику дифференциально-функциональных уравнений и существенное отличие их свойств от свойств “чистых” дифференциальных уравнений (см. [11]). Обширная библиография, связанная с исследованием таких операторов, содержится в цитированной литературе.

При исследовании конкретных операторов обычно в первую очередь исследуется обратимость операторов вида $B - \lambda I$, т.е. спектр $\Sigma(B)$ оператора B . В статье рассмотрен вопрос о правосторонней обратимости оператора $B - \lambda I$, что эквивалентно разрешимости уравнения $(B - \lambda I)u = v$ для любой правой части.

В другой терминологии речь идет о тонкой структуре спектра. Заданное “хорошее” свойство оператора выделяет множество значений λ , при которых рассматриваемое свойство не выполняется для оператора $B - \lambda I$. Если рассматриваемое свойство есть свойство обратимости, то получаем определение спектра. Для других свойств такое множество обычно называется соответствующим *существенным* спектром.

В математической литературе рассматривались разные виды существенных спектров. Чаще всего существенным спектром называют *спектр Фредгольма*

$$\Sigma_F(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : B - \lambda I \text{ не является оператором Фредгольма}\}.$$

Напомним, что линейный ограниченный оператор называется *оператором Фредгольма*, если образ оператора замкнут и $\dim \ker A < +\infty$, $\dim \ker A^* < +\infty$. *Индексом* оператора Фредгольма A называется целое число

$$\text{ind } A = \dim \ker A - \dim \ker A^*.$$

Со спектральной точки зрения результаты работы связаны с исследованием *правостороннего спектра* $\Sigma^+(B)$ и *левостороннего спектра* $\Sigma^-(B)$:

$$\begin{aligned}\Sigma^+(B) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : B - \lambda I \text{ не имеет правого обратного}\}, \\ \Sigma^-(B) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : B - \lambda I \text{ не имеет левого обратного}\}.\end{aligned}$$

Левосторонняя обратимость оператора эквивалентна правосторонней обратимости сопряженного. Для рассматриваемых в работе операторов сопряженный оператор относится к тому же классу, поэтому полученные результаты о правосторонней обратимости автоматически перефразируются как результаты о левосторонней обратимости.

Наиболее подробно операторы взвешенного сдвига исследованы в пространствах скалярных функций $L_2(X, \mu)$, где μ есть заданная борелевская мера на X . В работах А. Б. Антоневи́ча, А. В. Лебедева, А. К. Китовера (подробное изложение см. в [5], [6]) было обнаружено, что динамической характеристикой

отображения, определяющей спектр оператора взвешенного сдвига, является множество $M_\alpha(X)$, состоящее из мер, инвариантных и эргодических относительно α : спектр задается с помощью средних геометрических коэффициента по таким мерам.

Кроме того, было доказано, что если мера μ не содержит атомов, то выполнено равенство $\Sigma_F(B) = \Sigma(B)$, т.е. если оператор $B - \lambda I$ фредгольмов, то он обратим.

Свойства операторов $B - \lambda I$ при спектральных значениях ранее рассматривались только для некоторых конкретных классов отображений в работах [12]–[16].

В [12], [14] условия односторонней обратимости получены для случая отображений с наиболее простой динамикой – диффеоморфизмов отрезка, имеющих только две неподвижные точки. В [15], [16] рассмотрены модельные примеры отображений, имеющих конечное число неподвижных точек и таких, что полутраектория каждой точки стремится к одной из неподвижных; была описана зависимость односторонней обратимости от динамических свойств. Эти модельные примеры послужили базой при получении общих результатов, изложенных в настоящей работе.

Существуют отображения, для которых оператор $B - \lambda I$ не является односторонне обратимым при любом коэффициенте a и при всех спектральных значениях λ . Основной результат работы заключается в том, что оператор $B - \lambda I$ является односторонне обратимым при некоторых a и некоторых спектральных значениях λ тогда и только тогда, когда у отображения α существует нетривиальный аттрактор. Именно эти отображения названы в работе отображениями с разделимой динамикой. Некоторые предварительные результаты в этом направлении получены в [17], [18], для полноты изложения они включены в настоящую работу.

В статье мы рассматриваем операторы в пространствах скалярных функций. Отметим, что для операторов в пространствах вектор-функций условия обратимости операторов $B - \lambda I$ формулируются в других терминах и имеют более сложный вид, чем в скалярном случае (см. [5], [6], [19]). В пространствах вектор-функций свойства операторов $B - \lambda I$ при спектральных значениях λ исследованы только для диффеоморфизмов отрезка, имеющих две неподвижные точки (см. [20]).

§ 2. Спектр оператора взвешенного сдвига

Описание спектра оператора взвешенного сдвига в случае обратимого отображения α в классических пространствах $L_p(X, \mu)$ и $C(X)$ известно в достаточной общности. Перед формулировкой этих результатов напомним необходимые определения и конструкции.

Пусть на X задана полная σ -аддитивная мера μ , определенная на некоторой σ -алгебре измеримых подмножеств (здесь мера не предполагается конечной).

Говорят, что для меры μ выполнено *условие согласования с отображением* $\alpha: X \rightarrow X$, если $\alpha^{-1}(\omega)$ измеримо для каждого измеримого подмножества ω и выполнено соотношение

$$\mu(\alpha^{-1}(\omega)) = 0 \iff \mu(\omega) = 0. \quad (2.1)$$

В этом случае также говорят, что отображение α *сохраняет класс меры* μ , а мера называется *квазиинвариантной*.

Условие согласования является необходимым для корректного задания операторов взвешенного сдвига в пространствах $L_p(X, \mu)$.

Рассмотрим меру, определенную выражением $\mu_\alpha(\omega) = \mu(\alpha^{-1}(\omega))$. Из условия (2.1) следует, что существует производная Радона–Никодима

$$\varrho(x) = \frac{d\mu_\alpha}{d\mu}, \quad \varrho(x) \neq 0 \quad \text{почти всюду,}$$

и выполнено равенство

$$\int_X u(\alpha(x)) \varrho(\alpha^{-1}(x)) d\mu = \int_X u(x) \varrho(x) d\mu_\alpha = \int_X u(x) d\mu.$$

Поэтому оператор

$$T_\alpha u(x) = [\varrho(\alpha^{-1}(x))]^{-1/p} u(\alpha(x))$$

в пространстве $L_p(X, \mu)$ является изометрическим и обратимым, в частности в пространстве $L_2(X, \mu)$ – унитарным.

Оператор B в пространствах $L_p(X, \mu)$ удобно записывать в стандартной форме

$$B = aT_\alpha, \quad \text{где } a(x) = \varrho(\alpha^{-1}(x))^{-1/p} a_0(x), \quad (2.2)$$

так как свойства оператора B более просто выражаются через функцию a , которая называется *приведенным коэффициентом*. В частности, оператор B ограничен в соответствующем пространстве тогда и только тогда, когда a принадлежит пространству $L_\infty(X, \mu)$, и при этом

$$\|B\| = \|a\|_\infty. \quad (2.3)$$

Заметим, что приведенный коэффициент зависит от рассматриваемого функционального пространства и спектральные свойства операторов, заданных одним и тем же выражением в пространствах $L_p(X, \mu)$, могут быть разными при разных p .

Мера ν называется *инвариантной*, если для каждого измеримого подмножества ω выполнено равенство

$$\nu(\alpha^{-1}(\omega)) = \nu(\omega). \quad (2.4)$$

Мера ν называется *эргодической относительно отображения* $\alpha: X \rightarrow X$, если из того, что $\nu(\alpha^{-1}(\omega) \triangle \omega) = 0$, следует, что $\nu(\omega) = 0$ либо $\nu(X \setminus \omega) = 0$.

Если $\nu(X) = 1$, то мера μ называется *нормированной* или *вероятностной*.

Топологическое пространство X называется α -*связным*, если его нельзя разложить на непересекающиеся непустые замкнутые α -инвариантные подмножества.

Ниже предполагается, если не оговорено противное, что выполнены следующие условия:

- 1) X есть компактное метрическое пространство;
- 2) $\alpha: X \rightarrow X$ – обратимое непрерывное отображение;
- 3) множество непериодических точек отображения α всюду плотно в X ;

- 4) мера μ на X является борелевской и квазиинвариантной;
- 5) носитель меры μ совпадает со всем пространством X ;
- 6) пространство X является α -связным;
- 7) $a \in C(X)$.

Здесь, как уже отмечалось, условие квазиинвариантности является необходимым для корректного задания операторов, остальные условия существенны в том смысле, что без них приведенные ниже утверждения не выполнены, причем условия 3), 5) и 6) выделяют наиболее содержательный случай, к которому может быть сведено исследование в более общей ситуации.

Через $M_\alpha(X)$ обозначим множество всех борелевских нормированных мер ν на X , инвариантных и эргодических относительно α . В силу теоремы Крылова–Боголюбова (см. [3; теорема 4.1.1]) это множество непусто; оно наделяется $*$ -слабой топологией: база окрестностей меры ν_0 состоит из множеств

$$W(\nu_0; \varphi_1, \dots, \varphi_p; \varepsilon) = \left\{ \nu : \left| \int_X \varphi_k d\nu - \int_X \varphi_k d\nu_0 \right| < \varepsilon, k = 1, \dots, p \right\},$$

где $\varphi_k \in C(X)$, $\varepsilon > 0$.

Средним геометрическим непрерывной функции a по отношению к нормированной мере ν называется число

$$S_\nu(a) = \exp \left[\int_X \ln |a(x)| d\nu \right]. \quad (2.5)$$

Если функция a обращается в нуль в некоторых точках, то интеграл в (2.5) может оказаться расходящимся; в этом случае полагаем $S_\nu(a) = 0$.

Спектр оператора взвешенного сдвига описывается следующим образом (см. [5], [6]). Напомним, что предполагаются выполненными условия 1)–7). Следующее утверждение справедливо и в случае произвольного компактного отделимого топологического пространства X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $a(x) \neq 0$ для всех $x \in X$, то спектр $\Sigma(B)$ оператора $B = aT_\alpha$ в пространстве $L_2(X, \mu)$ есть кольцо

$$\Sigma(B) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : r(B) \leq |\lambda| \leq R(B) \}, \quad (2.6)$$

где

$$R(B) = \max_{\nu \in M_\alpha(X)} S_\nu(a), \quad r(B) = \min_{\nu \in M_\alpha(X)} S_\nu(a). \quad (2.7)$$

Если коэффициент a обращается в 0 хотя бы в одной точке, то спектр оператора $B = aT_\alpha$ есть круг

$$\Sigma(B) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq R(B) \}. \quad (2.8)$$

Доказательство формул (2.7) для спектрального радиуса содержит в себе следующее утверждение, являющееся одним из вариантов эргодических теорем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть X есть компактное пространство, $a \in C(X)$ и $\alpha: X \rightarrow X$ есть непрерывное отображение. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_x \prod_{i=0}^{n-1} |a(\alpha_i(x))|^{1/n} = \max_{\nu \in M_\alpha(X)} S_\nu(a).$$

Если $a(x) \neq 0$ для всех x , то

$$\lim \min_x \prod_{i=0}^{n-1} |a(\alpha_i(x))|^{1/n} = \min_{\nu \in M_\alpha(X)} S_\nu(a).$$

Обратим внимание на то, что в предложении 2 не требуется, чтобы отображение было обратимым, в то время как в предложении 1 условие обратимости принципиально – для необратимых отображений формула спектрального радиуса имеет более сложный вид (см. [21], [22]).

§ 3. Траекторный подход

Один из подходов к исследованию рассматриваемых операторов базируется на следующей конструкции (см. [5], [6]).

Пусть $l_2(\mathbb{Z})$ есть пространство двусторонних числовых последовательностей $u = (u(k))$, $k \in \mathbb{Z}$, с нормой $\|u\| = (\sum_k |u(k)|^2)^{1/2}$. Через W обозначим оператор сдвига, действующий в этом пространстве по формуле $(Wu)(k) = u(k+1)$.

Пусть задан функциональный оператор

$$B = \sum_{j=-m}^m a_j T_\alpha^j, \quad a_j \in C(X). \quad (3.1)$$

Каждой точке $\tau \in X$ и коэффициенту a_j ставится в соответствие последовательность $a_{j,\tau}(k) = a_j(\alpha^k(\tau))$, где $\alpha^k(x) = \alpha(\alpha^{k-1}(x))$. Точке $\tau \in X$ поставим в соответствие оператор, действующий в $l_2(\mathbb{Z})$ по формуле

$$B_\tau = \sum_{j=-m}^m a_{j,\tau} W^j. \quad (3.2)$$

В частности, оператору взвешенного сдвига aT_α при этой конструкции соответствует дискретный оператор взвешенного сдвига $B_\tau = a_\tau W$, действующий в $l_2(\mathbb{Z})$ по формуле

$$(B_\tau u)(k) = a(\alpha^k(\tau))u(k+1). \quad (3.3)$$

Оператор B_τ построен с помощью сужения коэффициента a на траекторию точки τ , что поясняет название “траекторный подход”.

В случае операторов в пространствах m -мерных вектор-функций дискретные операторы взвешенного сдвига B_τ определяются аналогично, но они действуют в пространстве $l_2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^m)$, состоящем из последовательностей m -мерных векторов. Приведенные в этом параграфе результаты справедливы и в векторном случае, но в последующих параграфах существенно используется, что операторы рассматриваются в пространствах скалярных функций, т.е. при $m = 1$.

3.1. Условия обратимости в терминах дискретных операторов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (см. [5], [6]). Пусть выполнены условия 1)–5) и 7). Для функционального оператора (3.1) в пространстве $L_2(X, \mu)$ следующие условия эквивалентны:

- (i) оператор B обратим;
- (ii) дискретные операторы B_τ обратимы при всех $\tau \in X$.

Эффективность траекторного подхода заключается в том, что дискретные операторы взвешенного сдвига B_τ более доступны для исследования. В частности, операторы $B_\tau - \lambda I$ могут быть необратимыми операторами Фредгольма, поэтому обычно первым этапом исследования является получение условий фредгольмовости таких операторов.

Предложение 3 следует из ряда общих утверждений, известных в теории представлений C^* -алгебр (см. [23]).

Пусть $\mathcal{B}$ есть произвольная C^* -алгебра, т.е. банахова алгебра с инволюцией, для элементов b которой выполнено условие $\|bb^*\| = \|b\|^2$.

Представлением π алгебры $\mathcal{B}$ называется гомоморфизм этой алгебры в алгебру $LB(H_\pi)$ операторов в гильбертовом пространстве H_π .

Представление π называется *точным*, если $\ker \pi = \{0\}$. При точном представлении алгебра $\mathcal{B}$ изоморфна своему образу – алгебре операторов вида $\pi(b)$.

Представление π называется *неприводимым*, если в H_π нет нетривиальных подпространств, инвариантных относительно всех операторов $\pi(b)$, $b \in \mathcal{B}$.

Говорят, что семейство представлений (π_γ) , $\gamma \in \Gamma$, *разделяет точки алгебры* $\mathcal{B}$, если для любого $b \in \mathcal{B}$, $b \neq 0$, существует такое представление из этого семейства, что $\pi_\gamma(b) \neq 0$.

Говорят, что семейство представлений (π_γ) , $\gamma \in \Gamma$, *образует достаточный набор представлений* алгебры $\mathcal{B}$, если для любого необратимого элемента $b \in \mathcal{B}$ существует такое представление π_γ из этого семейства, что оператор $\pi_\gamma(b)$ необратим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если семейство представлений $\{\pi_\gamma, \gamma \in \Gamma_0\}$ разделяет точки алгебры $\mathcal{B}$, то прямая сумма представлений π_γ , $\gamma \in \Gamma_0$, является точным представлением и, следовательно, исходная алгебра изоморфна своему образу при этом представлении.

Это утверждение позволяет свести исследование обратимости элемента $b \in \mathcal{B}$ к исследованию его образов при представлениях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть семейство представлений (π_γ) , $\gamma \in \Gamma_0$, разделяет точки алгебры $\mathcal{B}$. Элемент b обратим тогда и только тогда, когда все элементы $\pi_\gamma(b)$, $\gamma \in \Gamma_0$, обратимы и нормы обратных ограничены в совокупности: существует такая постоянная C , что для всех $\gamma \in \Gamma_0$ выполнено

$$\|[\pi_\gamma(b)]^{-1}\| \leq C.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае для элементов $b \in \mathcal{B}$ выполняется включение

$$\Sigma(b) \supset \bigcup_{\pi \in \Gamma_0} \Sigma(\pi(b)),$$

а равенство может не выполняться.

Исследование обратимости b с помощью этого предложения требует детальных вычислений, связанных с оценками сверху и снизу норм операторов $[\pi_\gamma(b)]^{-1}$.

Однако имеет место следующее более сильное утверждение, непосредственно вытекающее из определения достаточного набора представлений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть семейство представлений (π_γ) , $\gamma \in \Gamma$, образует достаточный набор представлений C^* -алгебры $\mathcal{B}$. Элемент $b \in \mathcal{B}$ обратим

тогда и только тогда, когда операторы $\pi_\gamma(b)$ обратимы для каждого $\gamma \in \Gamma$. В частности, имеет место равенство

$$\sigma(b) = \bigcup_{\pi \in \Gamma} \sigma(\pi(b)).$$

Существенным усилением по сравнению с предложением 5 здесь является то, что в случае достаточного набора представлений из обратимости всех операторов $\pi_\gamma(b)$ ограниченность множества норм обратных следует автоматически. Поэтому исследование обратимости b с помощью этого предложения может быть проведено более просто, так как оно не требует получения оценок норм операторов $[\pi_\gamma(b)]^{-1}$.

Сформулированные утверждения связаны с одним из основных результатов теории C^* -алгебр, известным как вторая теорема Гельфанда–Наймарка (см. [23; теорема 3.4.1]), которая утверждает, что каждая абстрактная C^* -алгебра $\mathcal{B}$ допускает точное представление. Фактически в доказательстве этой теоремы используется только то, что неприводимые представления разделяют точки алгебры. Известно, что семейство $\text{Sp}(\mathcal{B})$ всех классов эквивалентных неприводимых представлений C^* -алгебры $\mathcal{B}$ не только разделяет точки, но и образует достаточный набор представлений. Это следует, например, из теоремы 5.1.13 в [23]. Таким образом, теорему Гельфанда–Наймарка можно сформулировать в следующей усиленной формулировке.

ТЕОРЕМА 1 (усиленная теорема Гельфанда–Наймарка). *Прямая сумма всех неприводимых представлений C^* -алгебры $\mathcal{B}$ является точным ее представлением. При этом для любого $b \in \mathcal{B}$ имеет место равенство*

$$\sigma(b) = \bigcup_{\pi \in \text{Sp}(\mathcal{B})} \sigma(\pi(b)).$$

Поясним связь траекторного подхода с утверждением 6 и теоремой 1.

Пусть $\mathcal{B}$ есть C^* -алгебра, порожденная функциональными операторами вида (3.1) в пространстве $L_2(X, \mu)$ (с заданным α и непрерывными коэффициентами). Такие алгебры относятся в число так называемых C^* -алгебр, порожденных динамическими системами (см. [24]).

Если точка τ не является периодической, то отображение $\pi_\tau: \mathcal{B} \rightarrow LB(l_2(\mathbb{Z}))$, ставящее в соответствие конечной сумме $B \in \mathcal{B}$ вида (3.1) оператор B_τ , заданный формулой (3.3), продолжается до представления π_τ алгебры $\mathcal{B}$ в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$, и это представление является неприводимым.

Если точка τ периодическая, но принадлежит замыканию множества непериодических точек, то формула (3.3) также задает бесконечномерное представление, но это представление приводимо и разлагается в прямой интеграл конечномерных неприводимых представлений.

А если точка τ принадлежит внутренности множества периодических точек периода N , то формула (3.3) не задает представление алгебры, но аналогичная формула задает конечномерное представление алгебры $\mathcal{B}$ в N -мерном пространстве. Поэтому в общем случае исследование сводится к рассмотрению бесконечномерных представлений вида π_τ в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ и некоторого набора конечномерных представлений. Мы предполагаем, что множество

непериодических точек всюду плотно в X , поэтому рассматриваем только бесконечномерные представления вида π_τ .

Доказательство предложения 3 использует плотность множества непериодических точек и компактность пространства X . Оно заключается в проверке того, что любое бесконечномерное неприводимое представление эквивалентно одному из представлений π_τ , соответствующему непериодической точке, а конечномерное представление порождается одним из (приводимых) представлений π_τ , соответствующих периодической точке. Из этого следует, что семейство представлений π_τ , $\tau \in X$, образует достаточный набор представлений алгебры $\mathcal{B}$, после чего получаем предложение 3 как частный случай общего предложения 6.

3.2. Условия односторонней обратимости в терминах дискретных операторов. Сначала приведем элементарную лемму.

ЛЕММА 1. Пусть B есть ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве H , B^* – сопряженный к B . Оператор B правосторонне обратим тогда и только тогда, когда оператор BB^* обратим.

Для всех операторов R , правых обратных к B , имеет место неравенство

$$\|R\| \geq \sqrt{\|(BB^*)^{-1}\|}$$

и существует такой правый обратный $R_{\min}$ к B , что

$$\|R\| = \sqrt{\|(BB^*)^{-1}\|}. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Оператор B правосторонне обратим тогда и только тогда, когда его образ $\text{Im } B$ совпадает со всем пространством H . Это свойство эквивалентно тому, что $\ker B^* = \{0\}$ и образ $\text{Im } B^*$ замкнут, откуда $\text{Im } B^* = \ker B^\perp$.

Поэтому

$$BB^*(H) = B(\text{Im } B^*) = B(\ker B^\perp) = H,$$

т.е. образ оператора BB^* совпадает со всем пространством. В силу самосопряженности оператора BB^* отсюда следует его обратимость.

Достаточность. Так как $\text{Im}(BB^*) \subset \text{Im } B$, то из обратимости BB^* имеем $\text{Im}(BB^*) = H$, откуда $\text{Im } B = H$.

Пусть $\tilde{B}: L \rightarrow H$ есть сужение оператора B на подпространство $L = \ker B^\perp$. Сопряженный оператор $\tilde{B}^*$ действует из H в L , и его действие совпадает с B^* .

Оператор $\tilde{B}$ биективно отображает L на H , и для него существует ограниченный обратный $\tilde{B}^{-1}$. Поэтому оператор $R_{\min} = J\tilde{B}^{-1}$, где J есть оператор вложения L в H , является ограниченным правым обратным к B , причем это правый обратный с минимальной нормой. Сопряженный оператор действует по формуле $R_{\min}^* = [\tilde{B}^{-1}]^* P$, где P – ортогональный проектор на подпространство L .

Поскольку $BB^* = \tilde{B}\tilde{B}^*$ и $PJ = I$, обратный оператор представляется в виде

$$(BB^*)^{-1} = [\tilde{B}^{-1}]^* \tilde{B}^{-1} = [\tilde{B}^{-1}]^* P \cdot J\tilde{B}^{-1} = R_{\min}^* R_{\min}.$$

Отсюда получаем (3.4):

$$\|R_{\min}\|^2 = \|R_{\min}^* R_{\min}\| = \|(BB^*)^{-1}\|.$$

Из этой леммы и предложений 5 и 6 получаем следующие условия односторонней обратимости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $\mathcal{B}$ есть C^* -алгебра операторов в гильбертовом пространстве и семейство представлений (π_γ) , $\gamma \in \Gamma_0$, разделяет точки алгебры $\mathcal{B}$. Оператор $b \in \mathcal{B}$ обратим справа (слева) тогда и только тогда, когда все операторы $\pi_\gamma(b)$, $\gamma \in \Gamma_0$, обратимы справа (слева) и для них существуют такие правые (левые) обратные $R_\gamma(b)$, что их нормы ограничены в совокупности: существует такая постоянная C , что для всех $\gamma \in \Gamma_0$ выполнено

$$\|R_\gamma(b)\| \leq C.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $\mathcal{B}$ есть C^* -алгебра операторов в гильбертовом пространстве и семейство представлений (π_γ) , $\gamma \in \Gamma$, образует достаточный набор представлений C^* -алгебры $\mathcal{B}$. Оператор $b \in \mathcal{B}$ обратим справа (слева) тогда и только тогда, когда операторы $\pi_\gamma(b)$ обратимы справа (слева) для всех $\gamma \in \Gamma$. При выполнении этого условия существуют такие правые (левые) обратные $R_\gamma(b)$ к $\pi_\gamma(b)$, что их нормы ограничены в совокупности: существует такая постоянная C , что для всех $\gamma \in \Gamma$ выполнено

$$\|R_\gamma(b)\| \leq C.$$

В частности, имеет место равенство

$$\Sigma^+(b) = \bigcup_{\pi \in \Gamma} \Sigma^+(\pi(b)).$$

В случае C^* -алгебры $\mathcal{B}$, порожденной функциональными операторами, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Функциональный оператор (3.1) обратим справа (слева) тогда и только тогда, когда дискретные операторы B_τ обратимы справа (слева) при всех $\tau \in X$, в частности

$$\Sigma^\pm(B) = \bigcup_{\tau \in X} \Sigma^\pm(B_\tau).$$

При выполнении этих условий существуют такие правые (левые) обратные R_τ к B_τ , что

$$\sup_{\tau} \|R_\tau\| < +\infty.$$

В частности, для тех τ , при которых операторы B_τ обратимы, нормы обратных $\|(B_\tau)^{-1}\|$ ограничены в совокупности.

Обратим внимание на некоторые качественные отличия утверждений, относящихся к обратимости и к односторонней обратимости.

1. Если $\mathcal{B}$ есть подалгебра алгебры $LB(H)$, то для $B \in \mathcal{B}$ возникают два понятия обратимости (обратимость в $LB(H)$ и обратимость в $\mathcal{B}$) и, соответственно, два понятия спектра. При этом очевидно, что

$$\Sigma(B) \subset \Sigma(B)_{\mathcal{B}}.$$

Подалгебра $\mathcal{B}$ алгебры $LB(H)$ называется *наполненной* в $LB(H)$, если для $B \in \mathcal{B}$ из существования обратного в $LB(H)$ следует, что этот обратный принадлежит $\mathcal{B}$. Это свойство эквивалентно *спектральной инвариантности*: $\Sigma(B) = \Sigma(B)_{\mathcal{B}}$ для любого элемента $B \in \mathcal{B}$.

Одним из общих результатов теории C^* -алгебр является утверждение, что любая C^* -подалгебра алгебры $LB(H)$, содержащая единичный оператор, является наполненной (см. [23; теорема 2.1.11]). Поэтому в предложении 3 не было необходимости различать, идет речь об обратимости оператора в $LB(H)$ или об обратимости в алгебре $\mathcal{B}$.

В теореме 2 речь идет о правосторонней обратимости в $LB(H)$. При этом из того, что R есть некоторый правый обратный в $LB(H)$ для оператора B из $\mathcal{B}$, не следует, что R принадлежит исходной алгебре $\mathcal{B}$. В частности, построенные ниже правые обратные к операторам из алгебры функциональных операторов $\mathcal{B}$ не принадлежат этой алгебре.

2. При правосторонней обратимости оператора B все дискретные операторы B_τ правосторонне обратимы, но если обратные выбрать произвольно, то семейство правых обратных может оказаться неограниченным по норме. Поэтому построение правого обратного к B эквивалентно выбору для каждого B_τ такого правого обратного R_τ , что семейство операторов R_τ ограничено по норме. Для рассматриваемых операторов такое построение содержится в § 6.

3. В работах [16], [15] в случае одного конкретного класса отображений был применен другой подход, в котором естественно возникал набор представлений, разделяющий точки из алгебры функциональных операторов $\mathcal{B}$, но не являющийся достаточным. Поэтому исследование велось фактически на основании предложения 7, для соответствующих дискретных операторов строились такие правые обратные, которые образовывали ограниченное по норме семейство, а условия односторонней обратимости были получены как условия существования такого семейства правых обратных. Это потребовало получения оценок снизу и сверху норм различных правых обратных, которые представляют и самостоятельный интерес. В настоящей работе исследование проведено на основе более сильного утверждения – теоремы 2, что позволило получить результаты для произвольных обратимых отображений.

§ 4. Спектр дискретного оператора взвешенного сдвига

Рассмотрим в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ дискретные операторы взвешенного сдвига

$$(B_\tau u)(k) = a(k)u(k+1). \quad (4.1)$$

Множество $\mathbb{Z}$ не является компактным пространством. Чтобы применить к операторам вида (4.1) предложение 1, дающее описание спектра и устанавливающее связь с инвариантными мерами, используем *плотные вложения* дискретного пространства $\mathbb{Z}$ в компактные пространства, т.е. такие инъективные отображения $f: \mathbb{Z} \rightarrow X$, где X – компактное пространство, что образ всюду плотен в X . Класс таких компактных пространств весьма широк – это все сепарабельные компактные пространства. Если топология на образе, индуцированная из X , совпадает с исходной (в рассматриваемом случае является дискретной), то X называется *компактификацией* исходного пространства.

Но в случае произвольного вложения предложение 1 не может быть применено для исследования операторов вида (4.1). Дополнительное условие состоит в том, чтобы отображение $\alpha_0: f(k) \rightarrow f(k+1)$ продолжалось до некоторого гомеоморфизма α пространства X . Если такой гомеоморфизм существует, то он единственный; будем называть его *продолгацией* отображения сдвига $k \rightarrow k+1$, соответствующей данному вложению.

Пусть $\mathcal{A}$ есть некоторая C^* -подалгебра в $l_\infty(\mathbb{Z})$. Будем говорить, что последовательности из алгебры $\mathcal{A}$ *разделяют точки* из $\mathbb{Z}$, если для любых $k_1 \neq k_2$ существует $a \in \mathcal{A}$ такое, что $a(k_1) \neq a(k_2)$.

ТЕОРЕМА 3. *Следующие свойства компактного отделимого топологического пространства X эквивалентны:*

(i) *существует плотное вложение $f: \mathbb{Z} \rightarrow X$ в пространство X , при котором отображение $\alpha_0: f(k) \rightarrow f(k+1)$ продолжается до гомеоморфизма пространства X ;*

(ii) *пространство X является пространством максимальных идеалов некоторой C^* -подалгебры $\mathcal{A}$ в $l_\infty(\mathbb{Z})$, содержащей единицу, разделяющей точки $\mathbb{Z}$ и инвариантной относительно действия операторов W и W^{-1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (ii) $\Rightarrow$ (i). Пространство X максимальных идеалов алгебры $\mathcal{A}$ является компактным топологическим пространством в $*$ -слабой топологии, а алгебра $\mathcal{A}$ согласно первой теореме Гельфанда–Наймарка (см. [23; теорема 2.1.10]) изоморфна алгебре $C(X)$ непрерывных функций на X . Непрерывная функция на X , соответствующая $a \in \mathcal{A}$ при указанном изоморфизме, называется *преобразованием Гельфанда* для a и обозначается $\hat{a}$.

Каждой точке $k \in \mathbb{Z}$ соответствует максимальный идеал $J_k = \{a \in \mathcal{A} : a(k) = 0\}$. В силу условия, что последовательности из алгебры $\mathcal{A}$ разделяют точки из $\mathbb{Z}$, разным k соответствуют разные максимальные идеалы, т.е. отображение $f: k \rightarrow J_k$ является инъективным.

Предположим, что замыкание образа $\mathbb{Z}$ не есть X . Тогда существует функция $\hat{a} \in C(X)$ такая, что $\hat{a} \neq 0$, и при этом $\hat{a}(k) = a(k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Но тогда $a = 0$, $\hat{a} = 0$, и получаем противоречие. Заметим также, что все точки $k \in \mathbb{Z}$ являются непериодическими для α и, следовательно, множество непериодических точек является всюду плотным подмножеством в X .

Оператор сдвига W^{-1} по условию является автоморфизмом C^* -алгебры $\mathcal{A}$, и при его действии максимальный идеал J_k переходит в максимальный идеал J_{k+1} . Поскольку при автоморфизме максимальный идеал переходит в максимальный идеал, автоморфизм W^{-1} порождает гомеоморфизм $\alpha: X \rightarrow X$ пространства максимальных идеалов и при этом на $\mathbb{Z} \subset X$ этот гомеоморфизм действует по формуле $\alpha(k) = k+1$, т.е. является продолгацией отображения сдвига.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть пространство $\mathbb{Z}$ всюду плотно вложено в компактное пространство X и существует продолгация – гомеоморфизм $\alpha: X \rightarrow X$ такой, что $\alpha(k) = k+1$ для $k \in \mathbb{Z}$. Каждой функции $\hat{a} \in C(X)$ поставим в соответствие ее сужение на $\mathbb{Z}$ – последовательность $a(k) = \hat{a}(k)$, $k \in \mathbb{Z} \subset X$. Тогда множество $\mathcal{A}$ полученных последовательностей a есть C^* -подалгебра в $l_\infty(\mathbb{Z})$, разделяющая точки пространства $\mathbb{Z}$, и пространство максимальных идеалов этой алгебры совпадает с X .

Пусть задана подалгебра $\mathcal{A} \subset l_\infty(\mathbb{Z})$, удовлетворяющая условиям теоремы 3, и пусть X есть соответствующее компактное пространство. На пространстве X зададим меру μ такую, что $\mu(k) = 1$ для каждой точки $k \in \mathbb{Z}$ и $\mu(X \setminus \mathbb{Z}) = 0$. Тогда пространство $l_2(\mathbb{Z})$ изоморфно пространству $L_2(X, \mu)$, при этом изоморфизме оператор (4.1) переходит в оператор

$$(\widehat{B}u)(x) = \widehat{a}(x)u(\alpha(x)). \quad (4.2)$$

Заметим, что в силу плотности $\mathbb{Z}$ в X условие, что $\widehat{a}(x) \neq 0$ для всех $x \in X$, эквивалентно условию $\inf_k |a(k)| > 0$.

Спектр дискретного оператора взвешенного сдвига описывается на основе предложения 1 следующим образом.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{A} \subset l_\infty(\mathbb{Z})$ есть инвариантная относительно сдвигов C^* -подалгебра, разделяющая точки из $\mathbb{Z}$, и X есть ее пространство максимальных идеалов. Если $a \in \mathcal{A}$ и $\widehat{a}(x) \neq 0$ для всех $x \in X$, то спектр оператора $B = aW$ является кольцом:

$$\Sigma(B) = K(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : r(B) \leq |\lambda| \leq R(B)\}, \quad (4.3)$$

где

$$R(B) = \max_{\nu \in M_\alpha(X)} S_\nu(\widehat{a}), \quad r(B) = \min_{\nu \in M_\alpha(X)} S_\nu(\widehat{a}).$$

Если $|\lambda| > R(B)$, то обратный оператор задается в виде ряда

$$(B - \lambda I)^{-1} = - \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^{j+1}} B^j \quad (4.4)$$

и при этом

$$\left\| \frac{1}{\lambda^{j+1}} B^j \right\| \leq \|(B - \lambda I)^{-1}\|. \quad (4.5)$$

Если $|\lambda| < r(B)$, то обратный оператор задается в виде ряда

$$(B - \lambda I)^{-1} = - \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^{j-1} B^{-j}$$

и при этом

$$\|\lambda^{j-1} B^{-j}\| \leq \|(B - \lambda I)^{-1}\|. \quad (4.6)$$

Если существует точка $x_0 \in X$ такая, что $\widehat{a}(x_0) = 0$, то спектр оператора $B = aW$ есть круг

$$\Sigma(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq R(B)\}. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы обосновать применимость предложения 1, проверим выполнение условий из этого предложения.

При вложении $f: \mathbb{Z} \rightarrow X$ образ множества $\mathbb{Z}$ является непериодической траекторией при действии α на X и по построению является всюду плотным в X . Из этого также следует α -связность пространства X . Мера μ инвариантна относительно α . Каждое открытое подмножество из X содержит точки из $\mathbb{Z}$ и, следовательно, имеет ненулевую меру μ . Поэтому выполнены все условия и из предложения 1 следует утверждение о виде спектра. Неравенства (4.5) и (4.6) содержатся, например, в [5], [6], их легко получить непосредственно.

Если имеется конкретный дискретный оператор взвешенного сдвига с заданным коэффициентом a , то в качестве $\mathcal{A}$ можно рассмотреть наименьшую C^* -подалгебру, содержащую a и инвариантную относительно сдвигов. Описанный выше подход позволяет учитывать сложность поведения коэффициента. Чем сложнее поведение коэффициента a , тем сложнее устроено пространство X максимальных идеалов алгебры $\mathcal{A}$, сложнее действие отображения α на этом пространстве и сложнее исследование соответствующего оператора. Заметим, что наименьшая инвариантная C^* -подалгебра, содержащая заданную функцию a , имеет счетную систему образующих $\{W^k(a)\}$, и пространство максимальных идеалов такой алгебры метризуемо.

Если положить $\mathcal{A} = l_\infty(\mathbb{Z})$, то пространство X максимальных идеалов этой алгебры является наибольшим из всех компактных пространств, в которые $\mathbb{Z}$ может быть вложено всюду плотно; оно называется *компактификацией Стоуна–Чеха*. Однако это пространство не описывается явно и, тем более, невозможно описать явно все инвариантные меры на этом пространстве. Поэтому явные результаты можно получить, если рассматривать более просто устроенные компактификации.

В дальнейшем при применении траекторного подхода выделяются некоторые специальные подалгебры из $l_\infty(\mathbb{Z})$ и, соответственно, различные вложения пространства $\mathbb{Z}$ в компактные пространства (см. лемму 5).

§ 5. Существенные спектры дискретного оператора взвешенного сдвига

При исследовании дискретных операторов взвешенного сдвига сначала рассмотрим случай, когда элементы алгебры $\mathcal{A}$ не разделяют точки из $\mathbb{Z}$. Тогда существуют $k_0 \in \mathbb{Z}$ и $N > 0$ такие, что $a(k_0) = a(k_0 + N)$ для всех $a \in \mathcal{A}$. Выберем наименьшее из таких N . Тогда в силу инвариантности алгебры $\mathcal{A}$ для всех k и всех $a \in \mathcal{A}$ выполнено равенство $a(k) = a(k + N)$. Это означает, что алгебра состоит из периодических последовательностей с периодом N . В этом случае пространство максимальных идеалов алгебры $\mathcal{A}$ содержит ровно N точек, отображение α является циклической перестановкой этих точек и исследование операторов упрощается.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Если алгебра $\mathcal{A}$ состоит из периодических последовательностей с наименьшим периодом N , $a \in \mathcal{A}$ и $B = aW$, то*

$$\Sigma(B) = \left\{ \lambda : |\lambda| = \left| \prod_{k=0}^{N-1} a(k) \right|^{1/N} \right\},$$

причем весь спектр является спектром Фредгольма и оператор $B - \lambda I$ не может быть односторонне обратимым при спектральном значении λ .

В частности, если $a(k) \neq 0$ для всех k , то спектр есть окружность, в противном случае спектр состоит из одной точки 0.

Рассмотрим теперь произвольную инвариантную C^* -алгебру $\mathcal{A} \subset l_\infty(\mathbb{Z})$, которая разделяет точки из $\mathbb{Z}$, и пусть X есть ее пространство максимальных идеалов. Тогда $\mathbb{Z} \subset X$ есть траектория точки $0 \in \mathbb{Z}$, которая всюду плотно

вложена в X . Пусть W^+ есть замыкание в X положительной полутраектории – множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел, W^- – замыкание в X множества $-\mathbb{N}$ отрицательных целых чисел. Множество

$$\Omega^\pm = \bigcap_{n \geq 0} \alpha^{\pm n}(W^\pm)$$

есть множество предельных точек траектории на $\pm\infty$. Построенные множества $\Omega^\pm$ замкнуты и инвариантны.

Заметим, что в определении множеств $\Omega^\pm$ разбиение $\mathbb{Z}$ на положительные и отрицательные числа несущественно: для заданного q можно взять множество $\{k \in \mathbb{Z} : k \geq q\}$, а вместо X^- взять $X_q^- = \{k \in \mathbb{Z} : k < q\}$, где q есть некоторое фиксированное число.

Если $\nu \in M_\alpha(X)$, то в силу инвариантности меры у всех точек $k \in \mathbb{Z}$ меры одинаковы; из этого в силу нормированности меры получаем, что $\nu(\mathbb{Z}) = 0$. Поэтому каждая такая мера сосредоточена на множестве $X \setminus \mathbb{Z} = \Omega^+ \cup \Omega^-$. В силу эргодичности меры число $\nu(\Omega^\pm)$ может быть равным либо 1, либо 0. Поэтому

$$M_\alpha(X) = M_\alpha(\Omega^+) \cup M_\alpha(\Omega^-),$$

где

$$M_\alpha(\Omega^\pm) = \{\nu \in M_\alpha(X) : \nu(\Omega^\pm) = 1\}.$$

Заметим, что каждое из этих подмножеств является замкнутым в $M_\alpha(X)$ и, следовательно, $M_\alpha(\Omega^\pm)$ – открыто-замкнутые компоненты пространства $M_\alpha(X)$.

В общем случае множества $M_\alpha(\Omega^+)$ и $M_\alpha(\Omega^-)$ могут пересекаться.

ЛЕММА 2. *Условие*

$$\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset \tag{5.1}$$

эквивалентно условию

$$M_\alpha(\Omega^+) \cap M_\alpha(\Omega^-) = \emptyset. \tag{5.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено (5.1) и $\nu \in M_\alpha(\Omega^+)$. Тогда $\nu(\Omega^-) = 0$ и, значит, $\nu \notin M_\alpha(\Omega^-)$.

Пусть выполнено (5.2) и $\Omega^+ \cap \Omega^- \neq \emptyset$. Это множество замкнуто и инвариантно, поэтому из теоремы Крылова–Боголюбова следует, что существует инвариантная эргодическая мера ν_0 такая, что $\nu_0(\Omega^+ \cap \Omega^-) = 1$. Тогда $\nu_0 \in M_\alpha^+(X) \cap M_\alpha^-(X)$, что приводит к противоречию.

Будем говорить, что отображение сдвига имеет *разделенную динамику на алгебре* $\mathcal{A}$, если выполнено условие из леммы 2. Это условие можно пояснить следующим образом. Если

$$M_\alpha^+(X) \cap M_\alpha^-(X) \neq \emptyset,$$

то каждая мера ν_0 , принадлежащая пересечению $M_\alpha^+(X) \cap M_\alpha^-(X)$, задает соотношение, связывающее поведение $a(k)$ при $k \rightarrow +\infty$ с поведением при $k \rightarrow -\infty$, выполненное для всех $a \in \mathcal{A}$. Условие разделенности динамики означает, что таких соотношений не существует. Кроме того, в случае разделенной динамики

$\mathbb{Z}$ вкладывается в X так, что все точки являются изолированными, т.е. топология, индуцированная на $\mathbb{Z}$ из X , является дискретной и соответствующее вложение в X является компактификацией $\mathbb{Z}$.

Основной результат формулируется следующим образом. Обозначим

$$R^\pm(\hat{a}) = \max_{\nu \in M_\alpha(\Omega^\pm)} S_\nu(\hat{a}), \quad r^\pm(\hat{a}) = \min_{\nu \in M_\alpha(\Omega^\pm)} S_\nu(\hat{a}),$$

где

$$S_\nu(\hat{a}) = \exp \left[\int_X \ln |\hat{a}(x)| d\nu \right]$$

— среднее геометрическое по мере ν преобразования Гёльфанда $\hat{a}$ коэффициента a .

На комплексной плоскости зададим кольца (которые могут вырождаться в окружности)

$$K^\pm(a) = \{ \lambda : r^\pm(\hat{a}) \leq |\lambda| \leq R^\pm(\hat{a}) \}.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть инвариантная C^* -алгебра $\mathcal{A} \subset l_\infty(\mathbb{Z})$ разделяет точки из $\mathbb{Z}$, $a \in \mathcal{A}$, $\inf_k |a(k)| > 0$ и $B = aW$. Тогда спектр оператора есть кольцо $K(a)$, заданное (4.3), а фредгольмов спектр состоит из двух колец:

$$\Sigma_F(B) = K^+(a) \cup K^-(a) \subset \Sigma^\pm(B).$$

Если отображение α имеет неразделенную динамику, то для любого $a \in \mathcal{A}$

$$\Sigma_F(B) = \Sigma^+(B) = \Sigma^-(B) = \Sigma(B) = K^+(a) \cup K^-(a).$$

В частности, в этом случае оператор $B - \lambda I$ фредгольмов тогда и только тогда, когда он обратим.

Если отображение имеет разделенную динамику, то существуют $a \in A$, для которых непусто множество

$$K^0(a) = K(a) \setminus [K^+(a) \cup K^-(a)],$$

которое является открытым кольцом. Для таких a имеет место один из следующих двух случаев:

(i) если $R^-(\hat{a}) < r^+(\hat{a})$, то оператор $B - \lambda I$ обратим справа для всех $\lambda \in K^0(a)$ и при этом $\dim \ker(B - \lambda I) = 1$;

(ii) если $R^+(\hat{a}) < r^-(\hat{a})$, то оператор $B - \lambda I$ обратим слева для всех $\lambda \in K^0(a)$ и при этом $\dim \ker(B - \lambda I)^* = 1$.

Доказательство теоремы приведено в [17]. Сформулируем две леммы, которые составляют основные шаги в этом доказательстве.

Рассмотрим последовательности

$$a_n^+(k) = \prod_{i=0}^{n-1} a(k+i), \quad a_n^-(k) = \prod_{i=1}^n a(k-i).$$

ЛЕММА 3. Пусть $a \in \mathcal{A}$ и $\inf_k |a(k)| > 0$. Тогда для любого $q \in \mathbb{Z}$ при $n \rightarrow +\infty$ имеют место равенства

$$\limsup_{k \geq q+n} |a_n^-(k)|^{1/n} = \limsup_{k \geq q} |a_n^+(k)|^{1/n} = R^+(\hat{a}), \quad (5.3)$$

$$\liminf_{k \geq q+n} |a_n^-(k)|^{1/n} = \liminf_{k \geq q} |a_n^+(k)|^{1/n} = r^+(\hat{a}), \quad (5.4)$$

$$\limsup_{k < q-n} |a_n^+(k)|^{1/n} = \limsup_{k < q} |a_n^-(k)|^{1/n} = R^-(\hat{a}), \quad (5.5)$$

$$\liminf_{k < q-n} |a_n^+(k)|^{1/n} = \liminf_{k < q} |a_n^-(k)|^{1/n} = r^-(\hat{a}). \quad (5.6)$$

Для произвольного $q \in \mathbb{Z}$ введем проекторы P_q^+ и $P_q^- = I - P_q^+$, где P_q^+ действует по формуле

$$(P_q^+ u)(k) = \begin{cases} u(k), & k \geq q, \\ 0, & k < q. \end{cases}$$

ЛЕММА 4. Если $R^-(\hat{a}) < r^+(\hat{a})$ и $R^-(\hat{a}) < |\lambda| < r^+(\hat{a})$, то для любого $q \in \mathbb{Z}$ оператор

$$R_q(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j (aW)^{-j-1} P_q^+ - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{j+1}} (aW)^j P_q^- \quad (5.7)$$

является правым обратным для оператора $B - \lambda I$.

Семейство $R(\lambda; B)$ правых обратных к $B - \lambda I$ будем называть *правосторонней резольвентой*, если оно аналитически зависит от λ . В формуле (5.7) операторы $R_q(\lambda)$ аналитически зависят от λ , таким образом, для каждого q эта формула задает правостороннюю резольвенту, определенную в кольце.

Исследование оператора aW , у которого коэффициент $\tilde{a}$ может обращаться в 0 в некоторых точках, может быть проведено аналогично. Здесь при детальном анализе операторов $B - \lambda I$ возникает ряд качественно разных подслучаев. Приведем здесь только описание условий правосторонней обратимости.

ТЕОРЕМА 6. Пусть C^* -алгебра $\mathcal{A} \subset l_\infty(\mathbb{Z})$ разделяет точки из $\mathbb{Z}$ и инвариантна, $a \in \mathcal{A}$, $B = aW$ и $\inf |a(k)| = 0$.

Тогда спектр оператора есть круг

$$\Sigma(B) = \{\lambda : |\lambda| \leq R(\hat{a})\}.$$

Условие $\tilde{a}(x) \neq 0$ для всех $x \in \Omega^+$ является необходимым для правосторонней обратимости оператора $B - \lambda I$ при спектральном значении λ . При выполнении этого условия оператор $B - \lambda I$ обратим справа при спектральном значении λ тогда и только тогда, когда $R^-(\hat{a}) < r^+(\hat{a})$ и $R^-(\hat{a}) < |\lambda| < r^+(\hat{a})$.

Если $\tilde{a}(x) \neq 0$ для всех $x \in \Omega^+$, то существуют q , для которых $\inf\{|a(k)| : k \geq q\} > 0$. Для таких q формула (5.7) имеет смысл и задает правый обратный R_q к $B - \lambda I$.

Условие правосторонней обратимости может быть выполнено только в случае, когда отображение α имеет разделенную динамику.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полученные в теореме 5 условия фредгольмовости оператора $B - \lambda I$ можно записать в другом виде.

Согласно траекторному подходу с дискретным оператором взвешенного сдвига B связано семейство дискретных операторов взвешенного сдвига B_τ , $\tau \in X$. При этом точке $\tau = 0 \in \mathbb{Z}$ соответствует исходный оператор B , точке $q \in \mathbb{Z}$ соответствует подобный оператор $W^{-q}BW^q$, а точкам из $X \setminus \mathbb{Z}$ соответствуют некоторые другие операторы. Записанные в теореме условия фредгольмовости оператора $B - \lambda I$ совпадают с условиями обратимости всех операторов B_τ при $\tau \in X \setminus \mathbb{Z}$. Как следствие теоремы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Оператор $B - \lambda I$ фредгольмов тогда и только тогда, когда операторы $B_\tau - \lambda I$ обратимы при всех $\tau \in X \setminus \mathbb{Z}$.*

Это следствие позволяет пояснить связь полученного результата с методом предельных операторов (см. [25], [26]), который дает одно из решений задачи об условиях фредгольмовости дискретных функциональных операторов. Метод предельных операторов применим и в более общих ситуациях, и для операторов в пространствах l_p . Для рассматриваемого случая этот метод заключается в следующем. Пусть

$$B = \sum_{-m}^m a_k W^k, \quad a_k \in \mathcal{A}.$$

Оператор $\tilde{B}$ называется *предельным оператором* для оператора B , если существует последовательность n_j , стремящаяся к ∞ , такая, что

$$s - \lim_{j \rightarrow \infty} W^{-n_j} B W^{n_j} = \tilde{B}, \quad s - \lim_{j \rightarrow \infty} (W^{-n_j} B W^{n_j})^* = \tilde{B}^*,$$

где $s - \lim$ есть предел операторов в смысле сильной сходимости.

Основным результатом метода предельных операторов является следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Оператор B фредгольмов тогда и только тогда, когда все соответствующие ему предельные операторы $\tilde{B}$ обратимы.*

В рассматриваемом случае каждая точка $\tau \in X \setminus \mathbb{Z}$ является предельной для траектории точки 0 при действии α на X . Из этого следует, что именно операторы B_τ , $\tau \in X \setminus \mathbb{Z}$, являются предельными для исходного оператора. В частности, для оператора $aW - \lambda I$ предельными являются операторы $a_\tau W - \lambda I$ при $\tau \in X \setminus \mathbb{Z}$.

Таким образом, предложение 10 согласуется с общим утверждением 11, причем конструкция из доказательства теоремы содержит описание предельных операторов и содержит условия обратимости всех таких операторов в динамических терминах. Кроме того, в теореме выделен случай, когда нет потребности переходить к рассмотрению предельных операторов: *если динамика отображения α не является разделенной, то оператор $aW - \lambda I$, $a \in \mathcal{A}$, фредгольмов тогда и только тогда, когда он обратим.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пределы, входящие в левые части равенств из леммы 3, естественно возникают при исследовании дискретных операторов взвешенного сдвига, и в ряде предшествующих работ результаты формулировались с помощью таких пределов (см. [27]–[29]). Принципиальным отличием является то,

что здесь получено выражение этих пределов через инвариантные меры, т.е. выяснен динамический смысл этих пределов. Именно это позволяет в дальнейшем использовать полученный результат для исследования общих операторов взвешенного сдвига.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для доказательства утверждения о правосторонней обратимости достаточно построить один из правых обратных, например оператор R_0 . Рассмотрение в лемме 4 разных правых обратных R_q , где $q \in \mathbb{Z}$, связано с дальнейшими исследованиями, при которых нужно построить ограниченное по норме семейство правых обратных к дискретным операторам $B_\tau - \lambda I$. В частности, аналогично результатам из [15] можно показать, что $\|R_q\| \rightarrow \infty$ при $q \rightarrow \infty$. Поэтому для построения ограниченного по норме семейства правых обратных нужно для каждого τ выбирать $q = q(\tau)$ таким образом, чтобы норма была достаточно малой.

§ 6. Примеры инвариантных подалгебр

ПРИМЕР 1. Наиболее простым и исследованным является случай подалгебры $\mathcal{A}_0 \subset l_\infty(\mathbb{Z})$, состоящей из последовательностей, для которых существуют пределы

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} a(k) := a(\pm\infty).$$

Пространство максимальных идеалов X_0 этой алгебры получается с помощью присоединения к $\mathbb{Z}$ точек $\pm\infty$ и является компактификацией пространства $\mathbb{Z}$. Соответствующий гомеоморфизм α имеет две неподвижные точки $\pm\infty$, его динамика является разделенной, множество $M_\alpha(X_0)$ содержит два элемента – меры, сосредоточенные в точках $\pm\infty$, и, следовательно, $r^\pm(a) = R^\pm(a) = |a(\pm\infty)|$.

Для этого примера получаем из теоремы 5 известное ранее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть $a \in \mathcal{A}_0$, $\inf |a(k)| > 0$ и $B = aW$. Тогда

$$\Sigma(B) = \{\lambda : r(a) \leq |\lambda| \leq R(a)\},$$

где

$$R(a) = \max\{|a(+\infty)|, |a(-\infty)|\}, \quad r(a) = \min\{|a(+\infty)|, |a(-\infty)|\}.$$

Если $|a(+\infty)| < |\lambda| < |a(-\infty)|$, то оператор $B - \lambda I$ фредгольмов и обратим слева.

Если $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$, то оператор $B - \lambda I$ фредгольмов и обратим справа.

Если $|\lambda| = |a(\pm\infty)|$, то образ оператора $B - \lambda I$ незамкнут.

В случае отображений, рассмотренных в [15], [16], коэффициенты соответствующих дискретных операторов принадлежат алгебре $\mathcal{A}_0$; в этих работах получены оценки сверху и снизу норм различных правых обратных к операторам $aW - \lambda I$ при $a \in \mathcal{A}_0$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим в качестве алгебры коэффициентов $\mathcal{A}$ наименьшую C^* -подалгебру в $l_\infty(\mathbb{Z})$, содержащую последовательность $a_0(k) = e^{ik}$. Пространство X максимальных идеалов этой алгебры может быть реализовано

как единичная окружность $\mathbb{S}^1$ на комплексной плоскости, вложение задается формулой $\mathbb{Z} \ni k \rightarrow e^{ik} \in \mathbb{S}^1$. Алгебра $\mathcal{A}$ инвариантна относительно сдвигов и пролонгация отображения сдвига есть поворот окружности: $\alpha(z) = e^i z$.

В этом примере $\Omega^+ = \Omega^-$, динамика не является разделенной и оператор $aW - \lambda I$, $a \in \mathcal{A}$, фредгольмов тогда и только тогда, когда он обратим.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим в качестве алгебры коэффициентов $\mathcal{A}$ наименьшую замкнутую подалгебру в $l_\infty(\mathbb{Z})$, содержащую алгебру $\mathcal{A}_0$ и последовательности $e^{\pm ik}$. Пространство X максимальных идеалов этой алгебры получается из $\mathbb{Z}$ с помощью присоединения двух окружностей и может быть реализовано как подмножество на комплексной плоскости вида

$$X = \left\{ z_k = \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{2^k} \right] e^{ik}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup S^+ \cup S^-,$$

где

$$S^+ = \{ z = e^{i2\pi t}, 0 \leq t \leq 1 \}, \quad S^- = \{ z = 2e^{i2\pi t}, 0 \leq t \leq 1 \}.$$

Для любой последовательности $a \in \mathcal{A}$ существует непрерывное продолжение $\hat{a}$ на все X и, в частности, определены функции $\hat{a}^\pm$ – сужения $\hat{a}$ на $S^\pm$ соответственно.

Например, для последовательности

$$a(k) = \begin{cases} a_0(k) + C_1^+ e^{ik} + C_2^+ e^{i2k}, & k \geq 0, \\ a_0(k) + C_1^- e^{ik} + C_2^- e^{i2k}, & k < 0, \end{cases}$$

где $a_0 \in \mathcal{A}_0$, имеем $\hat{a}^\pm(t) = a_0(\pm\infty) + C_1^\pm e^{it} + C_2^\pm e^{i2t}$.

Алгебра $\mathcal{A}$ инвариантна относительно сдвигов, поэтому существует пролонгация α отображения $z_k \rightarrow z_{k+1}$ на все X , которая действует по формуле

$$\alpha(z) = \begin{cases} z_{k+1}, & z = z_k, \\ e^i z, & x \in S^\pm. \end{cases}$$

Здесь $\Omega^+ = S^+$, $\Omega^- = S^-$ и динамика является разделенной.

В этом примере каждое из множеств $M_\alpha^\pm(X)$ состоит из одной меры, сосредоточенной на окружности $S^\pm$ и являющейся нормированной мерой Лебега. Поэтому

$$r^\pm(\hat{a}) = R^\pm(\hat{a}) = \exp \left[\int_0^1 \ln |\hat{a}^\pm(t)| dt \right]$$

и кольца $K^\pm(a)$ вырождаются в окружности. Согласно теореме 5 описание свойств оператора $B - \lambda I$ имеет тот же вид, что и в предложении 12, если величины $|a(\pm\infty)|$ заменить соответственно на $R^\pm(\hat{a})$.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим на комплексной плоскости кольцо

$$\{ z = (1 + s)e^{i2\pi t} \in \mathbb{C} : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \} \quad (6.1)$$

и отображение этого кольца в себя, заданное формулой

$$\alpha_0(z) = [1 + s + [s(1 - s)]^4] \exp \left[i \left(2\pi t + \frac{1}{10} \sin^2 2\pi t + s(1 - s) \right) \right]. \quad (6.2)$$

Возьмем в качестве X замыкание траектории точки $3/2$:

$$X = \overline{\left\{ z_k : z_k = \alpha_0(z_{k-1}), k \in \mathbb{Z}, z_0 = \frac{3}{2} \right\}}.$$

Тогда множество последовательностей $\{a(k) = \widehat{a}(z_k) : \widehat{a} \in C(X)\}$ есть подалгебра $\mathcal{A} \subset l_\infty(\mathbb{Z})$, удовлетворяющая условиям теоремы, пространство максимальных идеалов этой алгебры есть X и пролонгация α отображения $k \rightarrow k+1$ действует на X по формуле (6.2).

Покажем, что в этом примере отображение α имеет разделенную динамику, причем каждое из множеств $M_\alpha^\pm(X)$ состоит из двух δ -мер:

$$M_\alpha^+(X) = \{\delta_1, \delta_{-1}\}, \quad M_\alpha^-(X) = \{\delta_2, \delta_{-2}\}, \quad (6.3)$$

и кольца $K^\pm(a)$ не вырождаются в окружности.

Пусть β есть сужение отображения α_0 на окружности $|z| = 1$ и $|z| = 2$. У этого отображения существуют четыре неблуждающие точки и это есть неподвижные точки $\pm 1, \pm 2$; следовательно, множество эргодических мер на этих окружностях, инвариантных относительно α_0 , состоит из δ -мер, сосредоточенных в этих точках. Поэтому для доказательства (6.3) достаточно доказать, что точки $\pm 1, \pm 2$ принадлежат множеству X – замыканию траектории точки $3/2$.

Рассмотрим положительную полутраекторию z_k , $k \geq 0$. Точка z_k имеет представление $z_k = (1 + s_k)e^{i2\pi t_k}$, где

$$\begin{aligned} s_k &= s_{k-1} + [s_{k-1}(1 - s_{k-1})]^4, & s_0 &= \frac{1}{2}, \\ t_k &= t_{k-1} + \frac{1}{10} \sin^2 2\pi t_{k-1} + s_{k-1}(1 - s_{k-1}), & t_0 &= 0. \end{aligned}$$

Последовательность s_k стремится к 1. Это означает, что траектория z_k приближается к окружности $|z| = 2$ при $k \rightarrow +\infty$ и что множество Ω^+ принадлежит окружности $|z| = 2$.

Поскольку последовательность t_k монотонно возрастает, возможны два случая:

- 1) последовательность t_k имеет конечный предел;
- 2) последовательность t_k стремится к $+\infty$.

В случае 1) траектория z_k имеет предел, этот предел является одной из неподвижных точек ± 2 , а вторая из этих точек не является предельной точкой траектории.

В случае 2) траектория z_k не имеет предела; поскольку она приближается к окружности $|z| = 2$, то обе неподвижные точки ± 2 являются предельными.

Покажем, что для рассматриваемого отображения имеет место случай 2). Обозначим $h_k = 1 - s_k$. Имеем

$$t_k - t_{k-1} = \frac{1}{10} \sin^2 2\pi t_{k-1} + s_{k-1}(1 - s_{k-1}) > \frac{1}{2} h_{k-1},$$

откуда

$$t_n > \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} h_k.$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k$$

расходится, откуда и следует, что $t_n \rightarrow +\infty$.

Последовательность h_k построена по правилу

$$h_k = \varphi(h_{k-1}), \quad \text{где } \varphi(t) = t - [t(1-t)]^4, \quad h_0 = \frac{1}{2},$$

при этом все точки h_k лежат на отрезке $[0, 1/2]$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\psi(t) = t/(t+1)$ и порожденную этой функцией последовательность

$$h'_k = \psi(h'_{k-1}), \quad h'_0 = \frac{1}{2}.$$

На отрезке $[0, 1/2]$ имеем $\varphi(t) \geq \psi(t)$, и обе функции монотонны. Поэтому $h_k \geq h'_k$ и, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n-1} h_k \geq \sum_{k=0}^{n-1} h'_k.$$

Здесь функция ψ специально построена так, что $h'_k = 1/(k+2)$, откуда

$$\sum_{k=0}^{n-1} h_k \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+2} \rightarrow \infty.$$

Аналогично исследуется поведение отрицательной полутраектории.

§ 7. Условия односторонней обратимости и отображения с разделимой динамикой

Перейдем к рассмотрению общих операторов взвешенной композиции B , считая, что выполнены условия 1)–7) и оператор записан в стандартной форме (2.2).

Согласно траекторному подходу правосторонняя обратимость оператора $aT_\alpha - \lambda I$ эквивалентна правосторонней обратимости всех дискретных операторов $a_\tau W - \lambda I$. Условия правосторонней обратимости этих дискретных операторов, полученные в теореме 5, позволяют получить в более явном виде условия правосторонней обратимости оператора $aT_\alpha - \lambda I$ и дать ответ на основной вопрос: для каких отображений эти условия могут быть выполнены?

При фиксированном $\tau \in X$ рассмотрим множество $\mathcal{A}_\tau$ коэффициентов, задающих все дискретные операторы B_τ , т.е. множество последовательностей $a_\tau(k) = a(\alpha_k(\tau))$, порожденных всеми функциями $a \in C(X)$. Очевидно, что это множество последовательностей является C^* -подалгеброй в алгебре $l_\infty(\mathbb{Z})$.

Пусть X_τ есть замыкание в X траектории точки τ . Это множество компактно, инвариантно относительно действия α и обратного отображения α^{-1} и является α -связным. Заметим, что

$$X = \bigcup_{\tau \in X} X_\tau,$$

причем при разных τ множества X_τ могут пересекаться или даже совпадать.

ЛЕММА 5. C^* -алгебра $\mathcal{A}_T$ является инвариантной относительно сдвигов подалгеброй в алгебре $l_\infty(\mathbb{Z})$. Эта алгебра изоморфна алгебре $C(X_T)$ непрерывных функций на компактном пространстве X_T и ее пространство максимальных идеалов гомеоморфно X_T .

Пролонгацией отображения $k \rightarrow k+1$ является отображение $\alpha_\tau = \alpha|_{X_\tau}$ – сужение отображения α на подмножество X_τ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению отображение $F: C(X_T) \rightarrow \mathcal{A}_T$, заданное формулой

$$C(X_T) \ni a \rightarrow (a(\alpha_k(\tau))) \in \mathcal{A}_T,$$

является непрерывным биективным гомоморфизмом C^* -алгебр и, следовательно, является изоморфизмом. Поэтому пространство максимальных идеалов алгебры $\mathcal{A}$ гомеоморфно X_T – пространству максимальных идеалов алгебры $C(X_T)$.

Второе утверждение леммы также непосредственно следует из конструкции. При вложении $k \rightarrow \alpha_k(\tau)$ отображение $k \rightarrow k+1$ переходит в отображение, действующее по правилу $\alpha^k(\tau) \rightarrow \alpha(\alpha^k(\tau))$. Поскольку на точках $\alpha^k(\tau)$ это отображение действует как непрерывное отображение α и множество таких точек плотно в X_τ , его пролонгация действует как отображение α на всем пространстве X_τ .

Пусть W_τ^+ есть замыкание в X положительной полутраектории точки τ , $W^- - \tau$ есть замыкание в X отрицательной полутраектории точки τ и

$$\Omega^\pm(\tau) = \bigcap_{n \geq 0} \alpha^{\pm n}(W_\tau^\pm)$$

– множество предельных точек траектории на $\pm\infty$. Заметим, что в теории динамических систем предельные точки траектории на $-\infty$ обычно называются α -предельными. Мы используем другое обозначение, так как символ α у нас занят. Кроме того, использованное здесь обозначение с некоторой точки зрения более естественно.

ЛЕММА 6. *Имеет место равенство*

$$M_\alpha(X) = \bigcup_{\tau \in X} M_\alpha(X_\tau). \quad (7.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая мера на X_τ , инвариантная и эргодическая относительно α_τ , является также мерой на X , инвариантной и эргодической относительно α . Поэтому справедливо включение

$$\bigcup_{\tau} M_\alpha(X_\tau) \subset M_\alpha(X).$$

Из [1] (лемма из раздела “Эргодичность”) следует, что для каждой меры ν из $M_\alpha(X)$ существует точка $\tau \in X$ такая, что носитель $\text{supp } \nu$ есть $\Omega^+(\tau)$, и тогда $\nu \in M_\alpha(X_\tau)$. Поэтому справедливо обратное включение

$$M_\alpha(X) \subset \bigcup_{\tau} M_\alpha(X_\tau).$$

Приведенные выше утверждения позволяют записать условия односторонней обратимости в следующем виде.

ТЕОРЕМА 7. *Оператор $aT_\alpha - \lambda I$, где $a(x) \neq 0$ для всех x , обратим справа при спектральном значении λ тогда и только тогда, когда выполнены три условия:*

1) $S_\nu(a) \neq |\lambda|$ для всех $\nu \in M_\alpha(X)$ и, следовательно, существует разбиение

$$M_\alpha(X) = M_{\alpha,\lambda}^+(X) \amalg M_{\alpha,\lambda}^-(X) \quad (7.2)$$

на непустые непересекающиеся открыто-замкнутые множества, где

$$M_{\alpha,\lambda}^+(X) = \{\nu : S_\nu(a) > |\lambda|\}, \quad M_{\alpha,\lambda}^-(X) = \{\nu : S_\nu(a) < |\lambda|\}; \quad (7.3)$$

2) в X есть точки τ такие, что

$$M^+(X_\tau) \subset M_{\alpha,\lambda}^+(X), \quad M^-(X_\tau) \subset M_{\alpha,\lambda}^-(X);$$

3) в X нет таких точек τ , что

$$M^+(X_\tau) \cap M_{\alpha,\lambda}^-(X) \neq \emptyset, \quad M^-(X_\tau) \cap M_{\alpha,\lambda}^+(X) \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2 правосторонняя обратимость оператора $aT_\alpha - \lambda I$ эквивалентна правосторонней обратимости всех дискретных операторов $B_\tau - \lambda I$. При этом некоторые из операторов $B_\tau - \lambda I$ могут быть обратимыми, но при спектральном значении λ обязательно есть $\tau \in X$, для которых оператор $B_\tau - \lambda I$ необратим, но обратим справа. Согласно теореме 5 для разных τ возможны только следующие три случая.

I) Оператор $B_\tau - \lambda I$ обратим и λ лежит снаружи от кольца $\Sigma(B_\tau)$:

$$S_\nu(a) < |\lambda| \quad \text{для всех } \nu \in M(X_\tau).$$

II) Оператор $B_\tau - \lambda I$ обратим и λ лежит в круге, внутреннем для кольца $\Sigma(B_\tau)$:

$$S_\nu(a) > |\lambda| \quad \text{для всех } \nu \in M(X_\tau).$$

III) Оператор $B_\tau - \lambda I$ необратим, но обратим справа. Тогда

$$\Omega^+(\tau) \cap \Omega^-(\tau) = \emptyset, \quad M^+(X_\tau) \cap M^-(X_\tau) = \emptyset,$$

и выполнены условия

$$S_\nu(a) > |\lambda| \quad \text{для всех } \nu \in M^+(X_\tau), \quad S_\nu(a) < |\lambda| \quad \text{для всех } \nu \in M^-(X_\tau).$$

Таким образом, для всех $\nu \in M_\alpha(X)$ выполнено $S_\nu(a) \neq |\lambda|$, откуда получаем разбиение (7.2), и при этом должно выполняться одно из условий из I)–III). Последнее можно записать как условие, что не существует таких $\tau \in X$, что для некоторой меры из $\nu_1 \in M^+(X_\tau)$ выполнено $S_{\nu_1}(a) > |\lambda|$ и для некоторой меры из $\nu_2 \in M^-(X_\tau)$ выполнено $S_{\nu_2}(a) < |\lambda|$.

Как уже отмечалось, существуют отображения, для которых при любом коэффициенте a и любом спектральном значении λ оператор $B - \lambda I$ не является односторонне обратимым и условия теоремы 7 не могут быть выполнены. Задача заключается в том, чтобы охарактеризовать в динамических терминах те отображения α , для которых могут быть выполнены условия теоремы 7.

Будем говорить, что отображение $\alpha: X \rightarrow X$ имеет разделимую динамику, если существует разбиение пространства

$$X = X^+ \amalg X_0 \amalg X^- \quad (7.4)$$

на непустые инвариантные непересекающиеся множества такое, что множества $X^\pm$ являются замкнутыми, X_0 открыто и для каждого $\tau \in X_0$ траектория $\alpha^n(\tau)$ стремится к множеству X^+ при $n \rightarrow +\infty$ ($\Omega^+(\tau) \subset X^+$) и стремится к множеству X^- при $n \rightarrow -\infty$ ($\Omega^-(\tau) \subset X^-$).

ТЕОРЕМА 8. *Следующие условия эквивалентны:*

- (i) *отображение α имеет разделимую динамику;*
- (ii) *существует такая функция $a \in C(X)$, что оператор $aT_\alpha - \lambda I$ обратим справа при некотором спектральном значении λ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (ii) $\implies$ (i) (необходимость условия разделимости динамики). Пусть оператор $aT_\alpha - \lambda I$ обратим справа при некотором спектральном значении λ_0 , и тогда выполнены условия, сформулированные в теореме 7.

Для упрощения обозначений и без ограничения общности достаточно рассмотреть случай, когда эти условия выполнены при $\lambda_0 = 1$. Проверим выполнение свойств, сформулированных в определении разделимой динамики.

Неравенства, входящие в (7.3), можно усилить. Если эти неравенства выполнены при $\lambda_0 = 1$, то они выполнены при всех λ , лежащих на окружности $|\lambda| = 1$, и тогда операторы $B - \lambda I$ обратимы справа для таких λ . В силу устойчивости свойства правосторонней обратимости существует $\delta > 0$ такое, что при всех λ из кольца

$$1 - \delta \leq |\lambda| \leq 1 + \delta$$

операторы $B - \lambda I$ обратимы справа. Поэтому

$$M_\alpha^+(X) = \{\nu : S_\nu(a) \geq 1 + \delta\}, \quad M_\alpha^-(X) = \{\nu : S_\nu(a) \leq 1 - \delta\}.$$

В соответствии с рассмотренными выше случаями I)–III) введем три подмножества в пространстве X :

$$\begin{aligned} X^+ &= \{\tau : S_\nu(a) \geq 1 + \delta \text{ для любого } \nu \in M_\alpha(X_\tau)\}, \\ X^- &= \{\tau : S_\nu(a) \leq 1 - \delta \text{ для любого } \nu \in M_\alpha(X_\tau)\}, \\ X_0 &= \{\tau : S_\nu(a) \geq 1 + \delta \text{ при } \nu \in M_\alpha(X_\tau^+); S_\nu(a) \leq 1 - \delta \text{ при } \nu \in M_\alpha(X_\tau^-)\}. \end{aligned}$$

Эти подмножества не пересекаются, не пусты, а из условия, что в X нет таких точек, для которых

$$M_\alpha^+(X_\tau) \cap M_\alpha^-(X) \neq \emptyset, \quad M_\alpha^-(X_\tau) \cap M_\alpha^+(X) \neq \emptyset,$$

следует (7.4).

Докажем замкнутость множества X^- . Для $\tau \in X^-$ операторы $B_\tau - \lambda I$ обратимы при $\lambda = 1 - \delta$, согласно теореме 2 существует постоянная такая, что для всех $\tau \in X^-$ обратные ограничены в совокупности:

$$\|(B_\tau - \lambda I)^{-1}\| \leq C.$$

В силу (4.5) для всех $j \geq 0$ выполнены неравенства

$$\|B_\tau^j\| \leq |\lambda|^{j+1} \|(B_\tau - \lambda I)^{-1}\| \leq C|\lambda|^{j+1} = C(1 - \delta)^{j+1}.$$

Поскольку

$$\|B_\tau^j\| = \max_{X_\tau} |a_j(x)|,$$

где

$$a_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1} |a(\alpha_k(x))|,$$

то получаем, что во всех точках множества X^- выполнены неравенства

$$|a_j(x)| \leq C(1 - \delta)^{j+1}. \quad (7.5)$$

Множества

$$F_j = \{x : |a_j(x)| \leq C(1 - \delta)^{j+1}\}$$

замкнуты, неравенство (7.5) означает, что

$$X^- \subset F = \bigcap F_j,$$

причем множество F замкнуто. С другой стороны, для любой точки τ из F для всех j выполнены неравенства

$$|a_j(\tau)| \leq C(1 - \delta)^{j+1},$$

откуда следует, что ряд (4.4) сходится, поэтому оператор $B_\tau - \lambda I$ обратим и, значит, $\tau \in X^-$. Таким образом, $X^- = F$ и X^- является замкнутым множеством.

Аналогично, с помощью оценки норм обратных B_τ^{-j} получаем замкнутость множества X^+ .

Таким образом, множество X_0 является непустым и открытым и по построению для каждого $\tau \in X_0$ траектория $\alpha_n(\tau)$ стремится к множеству X^+ при $n \rightarrow +\infty$ и стремится к множеству X^- при $n \rightarrow -\infty$.

(i) $\implies$ (ii) (достаточность условия разделимости динамики). Пусть динамика является разделимой и (7.4) есть соответствующее разбиение пространства. Этому разбиению соответствует разбиение множества мер

$$M_\alpha(X) = M_\alpha(X^+) \amalg M_\alpha(X^-). \quad (7.6)$$

Согласно теореме Титце–Урысона существует функция $a \in C(X)$ такая, что $a(x) = 2$ при $x \in X^+$ и $a(x) = 1/2$ при $x \in X^-$. Тогда $S_\nu(a) = 1/2$ для всех $\nu \in M_\alpha(X^-)$, $S_\nu(a) = 2$ для всех $\nu \in M_\alpha(X^+)$, выполнены условия теоремы 7 и оператор $B - I$ обратим справа, но не обратим.

§ 8. Разделимость динамики и аттракторы. Основные результаты

Условие разделимости динамики может быть переформулировано в терминах, традиционно используемых в теории динамических систем.

Замкнутое инвариантное множество $A \subset X$ называется *аттрактором* для отображения α , если существует такая окрестность U этого множества, что $\alpha(U) \subset U$ и

$$A = \bigcap_{n \geq 0} \alpha^n(U).$$

Аттрактор для обратного отображения называется *репеллером*.

Область притяжения для $A \subset X$ называется множество

$$W^s(A) = \{x \in X : \Omega^+(x) \subset A\}.$$

Если A – аттрактор, то $W^s(A) = \bigcup_{n \geq 0} \alpha^{-n}(U)$.

Множество A называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову* в положительном направлении, если для любой окрестности U множества A существует окрестность V множества A такая, что для всех $n > 0$ выполнено $\alpha^n(V) \subset U$ и при этом траектория каждой точки из V стремится к A .

Известны следующие взаимосвязи рассматриваемых свойств, описанные, например, в [2; предложение 1.3, теорема 1.4 и предложение 2.1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть $\alpha: X \rightarrow X$ есть непрерывное обратимое отображение компактного метрического пространства X .

Если $A \neq X$ есть замкнутое инвариантное множество, то следующие свойства эквивалентны:

- 1) A является аттрактором;
- 2) A является асимптотически устойчивым по Ляпунову в положительном направлении;
- 3) существует окрестность V множества A такая, что выполнены условия

$$\Omega^+(x) \subset A \quad \text{для всех } x \in V, \quad \Omega^-(x) \cap U = \emptyset \quad \text{для всех } x \in V \setminus A;$$

- 4) множество $A^* = X \setminus W^s(A)$ непусто и является репеллером.

Репеллер A^* называется *двойственным к аттрактору A* .

Это предложение и доказанные выше утверждения позволяют записать условие разделимости динамики в других терминах и сформулировать основные результаты работы.

ТЕОРЕМА 9. Отображение α компактного топологического пространства имеет разделимую динамику тогда и только тогда, когда существует нетривиальный аттрактор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Пусть X^+ есть нетривиальный аттрактор. Тогда для множеств $X_0 = W^s(X^+) \setminus X^+$ и $X^- = X \setminus W^s(X^+)$ выполнены все свойства из определения разделимой динамики. В частности, множество X^- является репеллером, двойственным к аттрактору X^+ , а множество X_0 непусто в силу α -связности пространства X .

Необходимость. Пусть отображение имеет разделимую динамику и (7.4) – соответствующее разложение. В силу нормальности компактного отделимого пространства существует замкнутая окрестность V множества X^+ , которая не пересекается с множеством X^- . Тогда для окрестности V выполнены условия из п. 3) предложения 13 и множество X^+ является аттрактором.

ТЕОРЕМА 10. *Оператор $aT_\alpha - \lambda I$, где $a(x) \neq 0$ для всех x , обратим справа при спектральном значении λ тогда и только тогда, когда существует такой нетривиальный аттрактор X_λ^+ , что при разложении (7.6) пространства эргодических мер выполнено*

$$\begin{aligned} S_\nu(a) &< |\lambda| \quad \text{при всех } \nu \in M_\alpha(X_\lambda^+), \\ S_\nu(a) &> |\lambda| \quad \text{при всех } \nu \in M_\alpha(X_\lambda^-). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Оператор $aT_\alpha - \lambda I$, где $a(x) \neq 0$ для всех x , обратим слева при спектральном значении λ тогда и только тогда, когда существует такой нетривиальный аттрактор X_λ^+ , что

$$\begin{aligned} S_\nu(a) &> |\lambda| \quad \text{при всех } \nu \in M_\alpha(X_\lambda^+), \\ S_\nu(a) &< |\lambda| \quad \text{при всех } \nu \in M_\alpha(X_\lambda^-). \end{aligned} \quad (8.2)$$

§ 9. Правосторонняя резольвента

Наряду с получением условий правосторонней обратимости представляет интерес построение хотя бы одного правого обратного, т.е. получение формулы, дающей решение уравнения $(B - \lambda I)u = v$.

Пусть оператор $B - \lambda_0 I$ обратим справа. Тогда существуют такие аттрактор $X_{\lambda_0}^+$ и двойственный репеллер $X_{\lambda_0}^-$, что для λ_0 выполнено условие (8.1). Обозначим

$$R^\pm(a, \lambda_0) = \max_{\nu \in M_\alpha(X_{\lambda_0}^\pm)} S_\nu(a), \quad r^\pm(a; \lambda_0) = \min_{\nu \in M_\alpha(X_{\lambda_0}^\pm)} S_\nu(a).$$

Согласно теореме 10 операторы $B - \lambda I$ обратимы справа при всех λ из кольца

$$R_{\lambda_0}^-(a) < |\lambda| < r_{\lambda_0}^+(a), \quad (9.1)$$

содержащего окружность $|\lambda| = |\lambda_0|$.

Покажем, что в кольце (9.1) можно построить правостороннюю резольвенту.

Согласно определению аттрактора у $X_{\lambda_0}^+$ существует открытая инвариантная относительно α окрестность U^+ , причем она может быть выбрана так, что $\overline{U^+} \cap X_{\lambda_0}^- = \emptyset$. Тогда множество $U^- = X \setminus U^+$ является инвариантной относительно α^{-1} замкнутой окрестностью множества $X_{\lambda_0}^-$.

Зададим проектор P^+ в $L_2(X, \mu)$:

$$P^+u(x) = p(x)u(x), \quad \text{где } p(x) = \begin{cases} 1, & x \in U^+, \\ 0, & x \in U^-. \end{cases} \quad (9.2)$$

Отметим, что множества $U^\pm$ имеют непустую внутренность и согласно условию, что мера каждого открытого множества положительна, проектор P^+ не

является тривиальным. Проекторы P^+ и $P^- = I - P^+$ задают разложение пространства:

$$L_2(X) = L_2(U^+) \oplus L_2(U^-).$$

ТЕОРЕМА 11. Пусть $a \in C(X)$, $a(x) \neq 0$ для всех x и оператор $B - \lambda_0 I$ обратим справа при некотором спектральном значении λ_0 . Тогда в кольце (9.1) одна из правосторонних резольвент может быть построена по формуле

$$R_r(B; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} B^{-n} P^+ - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} B^n P^-, \quad (9.3)$$

где P^+ есть проектор (9.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, достаточно рассмотреть случай $\lambda_0 = 1$. Из инвариантности множества U^+ относительно α следует, что подпространство $L_2(U^+)$ инвариантно относительно B^{-1} , а пространство $L_2(U^-)$ инвариантно относительно B . Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \|B^n P^-\| &= \sup_{x \in W^-} \prod_{i=0}^{n-1} |a(\alpha^i(x))| p(\alpha^n(x)) \\ &= \sup_{x \in \alpha^{-n}(U^-)} \prod_{i=0}^{n-1} |a(\alpha^i(x))| = \max_{x \in U^-} \prod_{j=1}^n |a(\alpha^{-j}(x))|. \end{aligned}$$

Множество U^- компактно и инвариантно относительно α^{-1} . Поэтому к последнему выражению применимо предложение 2. Поскольку $U^- \cap X^+ = \emptyset$, множество неблуждающих точек из U^- принадлежит X^- и, следовательно, $M_{\alpha^{-1}}(U^-) = M_{\alpha}(X^-)$. Таким образом, из предложения 2 следует, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \|B^n P^-\| = R^-(a) < 1.$$

Поэтому операторный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} B^n P^-$$

сходится при $|\lambda| > R^-(a)$.

Аналогично получаем, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \{\|B^{-n} P^+\|\}^{1/n} = \sup_{x \in U^+} \frac{1}{[\prod_{i=0}^{n-1} |a(\alpha^i(x))|]^{1/n}} = \frac{1}{r^+(a)} < 1,$$

откуда следует сходимость операторного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} B^{-n} P^+ \quad (9.4)$$

при $|\lambda| < r^+(a)$.

Таким образом, операторный ряд Лорана (9.3) сходится в кольце (9.1).

Равенство $(B - \lambda I)R_r(B; \lambda) = I$ проверяется непосредственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Конструкцию правосторонней резольвенты можно пояснить с точки зрения траекторного подхода. Построенной правосторонней резольвенте соответствуют дискретные операторы $R_\tau(\lambda)$, и при этом для каждого $\tau \in X_0$ оператор $R_\tau(\lambda)$ задается формулой (5.7) при некотором $q = q(\tau)$.

Здесь значение $q(\tau)$ определяется видом выбранной окрестности U^+ : $q(\tau)$ выбрано так, что точка $\alpha^{q(\tau)}(\tau)$ есть первая точка траектории, попадающая в множество U^+ . Как следует из теоремы 11, такой выбор правых обратных к операторам $B_\tau - \lambda I$ обеспечивает то, что семейство построенных правых обратных $R_\tau(\lambda)$ ограничено по норме.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В случае левосторонней обратимости аналогично может быть определена и построена левосторонняя резольвента. Отличие заключается только в том, что в выражении, задающем левостороннюю резольвенту $R_l(B; \lambda)$, проекторы меняются местами и стоят слева от операторов B^n :

$$R_l(B; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} P^- B^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} P^+ B^n. \quad (9.5)$$

Список литературы

- [1] П. Халмош, *Лекции по эргодической теории*, Издательский дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999, 136 с.; пер. с англ.: P. R. Halmos, *Lectures on ergodic theory*, Publications of the Mathematical Society of Japan, **3**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1956, vii+99 pp.
- [2] И. У. Бронштейн, *Неавтономные динамические системы*, Штиинца, Кишинев, 1984, 292 с.
- [3] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999, 768 с.; пер. с англ.: A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia Math. Appl., **54**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, xviii+802 pp.
- [4] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984, 423 с.; пер. с англ.: J. Hale, *Theory of functional differential equations*, 2nd ed., Appl. Math. Sci., **3**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1977, x+365 pp.
- [5] А. Б. Антоневи́ч, *Линейные функциональные уравнения. Операторный подход*, Изд-во «Университетское», Минск, 1988, 232 с.; англ. пер.: *Linear functional equations. Operator approach*, Oper. Theory Adv. Appl., **83**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1996, viii+179 pp.
- [6] A. Antonevich, A. Lebedev, *Functional-differential equations. I. C^* -theory*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **70**, Longman Sci. Tech., Harlow, 1994, viii+504 pp.
- [7] A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **91**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997, x+293 pp.
- [8] C. Chicone, Yu. Latushkin, *Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations*, Math. Surveys Monogr., **70**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, x+361 pp.
- [9] V. G. Kravchenko, G. S. Litvinchuk, *Introduction to the theory of singular integral operators with shift*, Transl. from the Russian manuscript by Litvinchuk, Math. Appl., **289**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994, xvi+288 pp.

- [10] С. Стевич, Р. Чен, З. Чжоу, “Взвешенные композиционные операторы, действующие из одного пространства Блоха в полидиске в другое”, *Матем. сб.*, **201**:2 (2010), 131–160; англ. пер.: S. Stević, R. Chen, Z. Zhou, “Weighted composition operators between Bloch-type spaces in the polydisc”, *Sb. Math.*, **201**:2 (2010), 289–319.
- [11] А. Н. Шарковский, Ю. Л. Майстренко, Е. Ю. Романенко, *Разностные уравнения и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1986, 280 с.; англ. пер.: A. N. Sharkovsky, Yu. L. Maistrenko, E. Yu. Romanenko, *Difference equations and their applications*, Math. Appl., **250**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993, xii+358 pp.
- [12] Р. Мардиев, “Критерий полунетеровости одного класса сингулярных интегральных операторов с некарлемановским сдвигом”, *Докл. АН УзССР*, **2**:2 (1985), 5–7.
- [13] G. Belitskii, Yu. I. Lyubich, “On the normal solvability of cohomological equations on compact topological spaces”, *Recent progress in operator theory* (Regensburg, 1995), Oper. Theory Adv. Appl., **103**, Birkhäuser, Basel, 1998, 75–87.
- [14] А. Ю. Карлович, Ю. И. Карлович, “One sided invertibility of binomial functional operators with a shift in rearrangement-invariant spaces”, *Integral Equations Operator Theory*, **42**:2 (2002), 201–228.
- [15] А. Антоневиц, Ju. Makowska, “On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points”, *Complex Anal. Oper. Theory*, **2**:2 (2008), 215–240.
- [16] А. Б. Антоневиц, Ю. Якубовска, “Модельный пример оператора взвешенного сдвига, порожденного отображением, имеющим седловую точку”, *Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума*, СМФН, **29**, РУДН, М., 2008, 29–48; англ. пер.: A. B. Antonevich, Yu. Yakubovska, “Weighted translation operators generated by mappings with saddle points: a model class”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **164**:4 (2010), 497–517.
- [17] А. Б. Антоневиц, А. А. Ахматова, “Спектральные свойства дискретного оператора взвешенного сдвига”, *Тр. Ин-та матем.*, **20**:1 (2012), 14–21.
- [18] A. Akhmatova, A. Antonevich, “On operators generated by maps with separable dynamics”, *Geometric methods in physics, XXXI workshop* (Poland, June 24–30, 2012), Birkhäuser, Basel, 2013, 171–178.
- [19] Ю. Д. Латушкин, А. М. Степин, “Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем”, *УМН*, **46**:2(278) (1991), 85–143; англ. пер.: Yu. D. Latushkin, A. M. Stepin, “Weighted translation operators and linear extensions of dynamical systems”, *Russian Math. Surveys*, **46**:2 (1991), 95–165.
- [20] А. Б. Антоневиц, “Когерентная локальная гиперболичность линейного расширения и существенные спектры оператора взвешенного сдвига на отрезке”, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:1 (2005), 11–26; англ. пер.: A. B. Antonevich, “Coherent local hyperbolicity of a linear extension and the essential spectra of a weighted shift operator on a closed interval”, *Funct. Anal. Appl.*, **39**:1 (2005), 9–20.
- [21] Ю. Д. Латушкин, А. М. Степин, “Оператор взвешенного сдвига на топологической марковской цепи”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:4 (1988), 86–87; англ. пер.: Yu. D. Latushkin, A. M. Stepin, “Weighted shift operator on a topological Markov chain”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:4 (1988), 330–331.
- [22] A. B. Antonevich, V. I. Bakhtin, A. V. Lebedev, “On t -entropy and variational principle for the spectral radii of transfer and weighted shift operators”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **31**:4 (2011), 995–1042.
- [23] Дж. Мерфи, *C^* -алгебры и теория операторов*, Факториал, М., 1997, 336 с.; пер. с англ.: G. J. Murphy, *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990, x+286 pp.
- [24] Э. В. Кисин, “Алгебры, порожденные динамическими системами и взвешенными сдвигами”, *Докл. АН СССР*, **219**:2 (1974), 70–71.

- [25] V. S. Rabinovich, S. Roch, B. Silbermann, *Limit operators and their applications in operator theory*, Oper. Theory Adv. Appl., **150**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004, xvi+392 pp.
- [26] В. Рабинович, С. Рох, “Существенный спектр разностных операторов на периодических метрических пространствах”, *Функц. анализ и его прил.*, **43**:2 (2009), 83–87; англ. пер.: V. Rabinovich, S. Roch, “Essential spectrum of difference operators on periodic metric spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **43**:2 (2009), 151–154.
- [27] W. C. Ridge, “Approximate point spectrum of a weighted shift”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **147**:2 (1970), 349–356.
- [28] М. В. Мартон, “Существенные спектры Фредгольма, Вейля и Браудера операторов взвешенного сдвига”, *Вестн. БГУ. Сер. 1*, 2003, № 1, 61–66.
- [29] М. Бичегкуев, *Спектральная теория разностных и дифференциальных операторов и вырожденные бесконечно дифференцируемые полугруппы операторов*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Воронежский гос. ун-т, Воронеж, 2011, 32 с.

Анатолий Борисович Антоневи́ч
(Anatolij B. Antonevich)

Белорусский государственный университет,
г. Минск, Белоруссия;
University of Bialystok, Poland
E-mail: antonevich@bsu.by

Поступила в редакцию
05.02.2014 и 09.12.2014

Анжела Алексеевна Ахматова
(Anzhela A. Akhmatova)

Белорусский государственный университет,
г. Минск, Белоруссия
E-mail: akhmatovaaa@tut.by

Юстина Маковска
(Justyna Makowska)

University of Bialystok, Poland
E-mail: justajakubowska@gmail.com