Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Х. Сабитов, Бесконечно малые изгибания 2-го порядка поверхностей вращения с уплощениями в полюсах, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 12, 111–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8343>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:38:57

УДК 514.772.35

И. Х. Сабитов

Бесконечно малые изгибания 2-го порядка поверхностей вращения с уплощениями в полюсах

Рассматриваются бесконечно малые (б.м.) изгибания поверхностей вращения с уплощениями в полюсах. Исследования начинаются с минимально допустимой гладкости класса C^1 как для поверхностей, так и для полей деформации. Даются условия, при которых данная гармоника б.м. изгибания 1-го порядка локально допускает продолжение в б.м. изгибание 2-го порядка. В заключение в аналитическом классе дается критерий нежесткости 2-го порядка для замкнутой поверхности вращения с первым конкретным примером такой поверхности.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: поверхности вращения, полюс, порядок уплощения, бесконечно малые изгибания 2-го порядка, жесткость.

DOI: 10.4213/sm8343

§ 1. Введение

В работе [1] мы для поверхностей вращения с уплощениями в полюсах описали их бесконечно малые (б.м.) изгибания 1-го порядка “в малом” (в окрестности полюса) и “в целом” (для компактных гомеоморфных сфере поверхностей вращения с уплощениями в обоих полюсах). В этой статье мы хотим исследовать для таких же поверхностей вращения их б.м. изгибания 2-го порядка. В отличие от б.м. изгибаний 1-го порядка, результатов для б.м. изгибаний 2-го порядка с подробным их изложением пока известно довольно мало, поэтому мы сначала приведем необходимые определения и основные начальные сведения¹.

§ 2. Основные сведения о локальной теории б.м. изгибаний 2-го порядка

2.1. Определение б.м. изгибаний 2-го порядка и их уравнения для поверхностей вращения. Напомним стандартные формулы теории бесконечно малых (б.м.) изгибаний 2-го порядка в применении к поверхностям вращения. Пусть $\mathbf{k}$ – единичный вектор оси вращения, которую мы принимаем за ось Oz , $\mathbf{e}(\theta)$ – единичный вектор, описывающий окружность в ортогональной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-90415-УКР).

¹Наиболее близкими к настоящей работе по теме исследования являются статьи [2], [3] и [4].

к оси вращения плоскости. Положим $\mathbf{e}(\theta) = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$, где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ – единичные орты по осям Ox и Oy соответственно. Пусть поверхность вращения S в окрестности полюса $(0, 0, 0)$ представлена уравнением

$$\mathbf{r} = \varphi(\rho) \mathbf{k} + \rho \mathbf{e}(\theta), \quad (2.1)$$

где ρ – расстояние от оси вращения, $0 \leq \rho \leq a$, $z = \varphi(\rho)$ – уравнение меридиана, $\varphi(0) = 0$. Пусть в точках поверхности заданы векторы

$$\mathbf{U}_1(\rho, \theta) = \alpha \mathbf{k} + \beta \mathbf{e}(\theta) + \gamma \mathbf{e}'(\theta), \quad \mathbf{U}_2(\rho, \theta) = a \mathbf{k} + b \mathbf{e}(\theta) + c \mathbf{e}'(\theta), \quad (2.2)$$

составляющие гладкие векторные поля. Говорят, что эти поля определяют на поверхности ее б.м. изгибание 2-го порядка, если при деформации, действующей по формуле

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}_\varepsilon = \mathbf{r} + 2\varepsilon \mathbf{U}_1 + 2\varepsilon^2 \mathbf{U}_2, \quad (2.3)$$

метрика поверхности изменяется на порядок $o(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Это условие, записанное в виде $ds_\varepsilon^2 - ds^2 = dr_\varepsilon^2 - dr^2 = o(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, приводит к уравнениям

$$d\mathbf{r} d\mathbf{U}_1 = 0, \quad (2.4)$$

$$d\mathbf{r} d\mathbf{U}_2 + (d\mathbf{U}_1)^2 = 0, \quad (2.5)$$

которые в случае поверхности вращения можно записать в виде следующих уравнений на функции $\alpha(\rho, \theta), \dots, c(\rho, \theta)$:

$$\begin{cases} \varphi'(\rho) \alpha_\rho + \beta_\rho = 0, \\ \rho \gamma_\rho + \varphi'(\rho) \alpha_\theta + \beta_\theta - \gamma = 0, \\ \beta + \gamma_\theta = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \varphi' a_\rho + b_\rho = -(\alpha_\rho^2 + \beta_\rho^2 + \gamma_\rho^2), \\ \rho c_\rho + \varphi' a_\theta + (b_\theta - c) = -2[\alpha_\theta \alpha_\rho + \beta_\rho(\beta_\theta - \gamma)], \\ \rho(b + c_\theta) = -\alpha_\theta^2 - (\beta_\theta - \gamma)^2. \end{cases} \quad (2.7)$$

Из системы (2.6) видно, что поле $\mathbf{U}_1$ является полем б.м. изгибания 1-го порядка (см. [1]). Поэтому про поле $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$ б.м. изгибания 2-го порядка говорят, что оно является *продолжением поля б.м. изгибания 1-го порядка* $\mathbf{U}_1$.

Так как все участвующие в системах (2.6)–(2.7) неизвестные функции должны быть периодическими по θ , естественно попытаться разделить переменные, для чего в качестве искоемых нужно взять коэффициенты Фурье функций $\alpha(\rho, \theta), \dots, c(\rho, \theta)$. Положим

$$\alpha = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_m(\rho) e^{im\theta}, \quad \beta = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_m(\rho) e^{im\theta}, \quad \gamma = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_m(\rho) e^{im\theta}, \quad (2.8)$$

$$a = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_m(\rho) e^{im\theta}, \quad b = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_m(\rho) e^{im\theta}, \quad c = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m(\rho) e^{im\theta}. \quad (2.9)$$

Так как все функции действительные, то

$$\alpha_m = \bar{\alpha}_{-m}, \quad \beta_m = \bar{\beta}_{-m}, \quad \gamma_m = \bar{\gamma}_{-m}, \quad a_m = \bar{a}_{-m}, \quad b_m = \bar{b}_{-m}, \quad c_m = \bar{c}_{-m}. \quad (2.10)$$

2.2. Поведение гармоник б.м. изгибаний 1-го и 2-го порядка при подходе к полюсу. Далее при работе с $\alpha_m, \dots, c_m$ надо иметь в виду, что в записи полей б.м. изгибаний в форме (2.2) есть одна тонкость, а именно, в этой записи предполагается, что в полюсе (т.е. в точке $\rho = 0$)

$$\beta(0, \theta) = \gamma(0, \theta) = b(0, \theta) = c(0, \theta) = 0, \quad (2.11)$$

иначе поля

$$\mathbf{U}_1 = \alpha \mathbf{k} + (\beta \cos \theta - \gamma \sin \theta) \mathbf{i} + (\beta \sin \theta + \gamma \cos \theta) \mathbf{j}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{U}_2 = a \mathbf{k} + (b \cos \theta - c \sin \theta) \mathbf{i} + (b \sin \theta + c \cos \theta) \mathbf{j} \quad (2.13)$$

будут в полюсе разрывными. Но условие (2.11) не представляет собой какого-либо ограничения общности, так как его выполнения можно добиться добавлением к любому непрерывному б.м. изгибанию 2-го порядка параллельного переноса вида $\varepsilon(C_1, C_2, 0) + \varepsilon^2(C_3, C_4, 0)$, записанного в стандартном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ и с соответствующим образом подобранными числовыми коэффициентами $C_1, \dots, C_4$. Добавлением переноса вдоль оси Oz можем добиться “зануления” в полюсе и компонент при $\mathbf{k}$. Поэтому мы с самого начала предполагаем, что

$$\begin{aligned} \alpha(0, \theta) = \beta(0, \theta) = \gamma(0, \theta) = a(0, \theta) = b(0, \theta) = c(0, \theta) = 0, \quad \text{т.е.} \\ \alpha_m(0) = \beta_m(0) = \gamma_m(0) = a_m(0) = b_m(0) = c_m(0) = 0 \quad \forall m. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Кроме того, если б.м. изгибания принадлежат классу C^1 , то сначала покажем, что, добавив вращения 2-го порядка малости по ε , можно добиться выполнения равенства

$$d\mathbf{r}_\varepsilon(0, 0) = d\mathbf{r}(0, 0),$$

т.е.

$$\frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial y}(0, 0) = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial y}(0, 0) = 0, \quad (2.16)$$

а затем посмотрим, какие ограничения на $\alpha(\rho, \theta), \dots, c(\alpha, \theta)$ накладывают условия (2.15) и (2.16).

Подвергнем продеформированную поверхность $\mathbf{r}_\varepsilon$ из (2.3) преобразованию с некоторой матрицей $A(\varepsilon)$, ортогональной с точностью до порядка $o(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Это значит, что матрица $A(\varepsilon)$ имеет вид

$$A(\varepsilon) = E + 2\varepsilon A_1 + 2\varepsilon^2 A_2 + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где E – единичная матрица, и выполнено условие $A^{-1}(\varepsilon) = A^T(\varepsilon) + o(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ (т.е. равенство обратной и транспонированной матриц с точностью до матриц с элементами порядка $o(\varepsilon^2)$). Следовательно, должно иметь место соотношение $A(\varepsilon)A^T(\varepsilon) = E + o(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. А так как

$$A(\varepsilon)A^T(\varepsilon) = E + 2\varepsilon(A_1 + A_1^T) + 2\varepsilon^2(A_2^T + 2A_1A_1^T + A_2) + o(\varepsilon^2),$$

матрица A_1 должна быть кососимметрической, т.е.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & l & m \\ -l & 0 & n \\ -m & -n & 0 \end{pmatrix},$$

а матрица

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

должна иметь элементы

$$\begin{aligned} a_1 &= -(l^2 + m^2), & b_2 &= -(l^2 + n^2), & c_3 &= -(m^2 + n^2), \\ a_2 &= -2mn - b_1, & a_3 &= 2ln - c_1, & b_3 &= -2lm - c_2 \end{aligned}$$

с произвольными значениями элементов b_1, c_1, c_2 . После действия на точки поверхности с радиус-вектором $\mathbf{r}_\varepsilon$ преобразования, матрица которого в разложении по ε в начальной части имеет вид матрицы $A(\varepsilon)$, получаем новую поверхность с радиус-вектором $\mathbf{R}_\varepsilon = \mathbf{r} + 2\varepsilon\mathbf{V}_1 + 2\varepsilon^2\mathbf{V}_2 + o(\varepsilon^2)$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{U}_1 + (ly + mz)\mathbf{i} + (-lx + nz)\mathbf{j} + (-mx - ny)\mathbf{k}, \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{U}_2 + 2A_1\mathbf{U}_1 + A_2\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Непосредственным вычислением проверяется, что поля $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ удовлетворяют уравнениям (2.4) и (2.5), т.е. они дают для исходной поверхности ее б.м. изгибание 2-го порядка.

Пусть

$$\frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x}(0,0) = f_1\mathbf{k} + g_1\mathbf{i} + h_1\mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial y}(0,0) = f_2\mathbf{k} + g_2\mathbf{i} + h_2\mathbf{j}.$$

Уравнение $d\mathbf{r}d\mathbf{U}_1(0,0) = 0$ дает нам равенства $g_1 = h_2 = 0, h_1 + g_2 = 0$. Так как

$$\frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial x}(0,0) = f_1\mathbf{k} + h_1\mathbf{j} - l\mathbf{j} - m\mathbf{k}, \quad \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial y}(0,0) = f_2\mathbf{k} + g_2\mathbf{i} + li - n\mathbf{k},$$

то при выборе $m = f_1, l = h_1 = -g_2, n = f_2$ получаем требуемые равенства

$$\frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Пусть

$$\frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial x}(0,0) = F_1\mathbf{k} + G_1\mathbf{i} + H_1\mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial y}(0,0) = F_2\mathbf{k} + G_2\mathbf{i} + H_2\mathbf{j}.$$

Уравнения (2.4) и (2.5) в точке $(0,0)$ дают равенства

$$G_1 = -(f_1^2 + h_1^2), \quad H_2 = -(f_2^2 + g_2^2), \quad G_2 + H_1 = -2f_1f_2.$$

Используя эти равенства и соотношение $d\mathbf{V}_2 = d\mathbf{U}_2 + 2A_1d\mathbf{U}_1 + A_2d\mathbf{r}$, находим, что если мы выберем значения свободных переменных b_1 , c_1 и c_2 равными соответственно H_1 , F_1 и F_2 , то для поля $\mathbf{V}_2$ получим требуемые равенства

$$\frac{\partial \mathbf{V}_2}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \mathbf{V}_2}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Итак, мы показали, что добавлением движения 2-го порядка мы можем добиться, чтобы поля б.м. изгибаний 2-го порядка вместе с (2.14) удовлетворяли и условиям (2.15) и (2.16). В дальнейшем поля с выполнением этих условий мы по-прежнему будем обозначать как $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$.

В работе [1] для б.м. изгибаний 1-го порядка с использованием уравнений системы (2.6) были установлены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha_\rho(0, \theta) = 0, \quad \frac{\alpha}{\rho} \rightarrow 0, \quad \frac{\alpha_\theta}{\rho} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0, \\ \beta_\rho(0, \theta) = 0, \quad \frac{\beta}{\rho} \rightarrow 0, \quad \frac{\beta_\theta}{\rho} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0, \\ \gamma_\rho(0, \theta) = 0, \quad \frac{\gamma}{\rho} \rightarrow 0, \quad \frac{\gamma_\theta}{\rho} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

С учетом этих соотношений, условий (2.16) и уравнений системы (2.7) легко получаем, что справедливы соотношения, аналогичные (2.17):

$$\begin{aligned} a_\rho(0, \theta) = 0, \quad \frac{a}{\rho} \rightarrow 0, \quad \frac{a_\theta}{\rho} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0, \\ b_\rho(0, \theta) = 0, \quad \frac{b}{\rho} \rightarrow 0, \quad \frac{b_\theta}{\rho} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0, \\ c_\rho(0, \theta) = 0, \quad \frac{c}{\rho} \rightarrow 0, \quad \frac{c_\theta}{\rho} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В дальнейшем составляющие полей $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$, соответствующие номерам $\pm m$ из (2.8) и (2.9), будем называть *m-й гармоникой* этих полей. Ради краткости это же слово “гармоника” мы будем применять и как название коэффициентов $\alpha_m(\rho)$, $\beta_m(\rho)$ и т.д., и из контекста будет ясно, идет ли речь о коэффициентах или о самом поле б.м. изгиба 1-го или 2-го порядка.

В книге [5] показано, что гармоники с номерами $m = 0, \pm 1$ поля $\mathbf{U}_1$ соответствуют тривиальным б.м. изгибаниям 1-го порядка. Нетрудно проверить, что для ненулевых гармоник с номерами 0 и 1 б.м. изгиба 1-го порядка не выполнены условия (2.14)–(2.15), поэтому можем считать, что гармоники для $\mathbf{U}_1$ имеют номера $|m| \geq 2$.

Проведенное выше исследование позволяет утверждать, что требования (2.17)–(2.18) приводят к следующим условиям на гармоники $\alpha_m(\rho), \dots, c_m(\rho)$:

$$\alpha_k(\rho) = \beta_k(\rho) = \gamma_k(\rho) = 0, \quad k = 0, 1, \quad \alpha'_m(0) = \beta'_m(0) = \gamma'_m(0) = 0 \quad \forall |m| \geq 2, \quad (2.19)$$

$$a'_m(0) = b'_m(0) = c'_m(0) = 0 \quad \forall m. \quad (2.20)$$

2.3. Уравнения для гармоник б.м. изгибаний 1-го и 2-го порядков.

Вернемся к уравнениям б.м. изгибаний. Мы сначала выпишем уравнения для гармоник полей б.м. изгибаний 1-го и 2-го порядков для исследования их локального существования в окрестности полюса поверхности вращения в минимальном классе гладкости C^1 .

Напомним уравнения для гармоник б.м. изгибания 1-го порядка:

$$\begin{cases} \varphi'(\rho)\alpha'_m + \beta'_m = 0, \\ im\varphi'(\rho)\alpha_m + im\beta_m - \gamma_m + \rho\gamma'_m = 0, \\ \beta_m + im\gamma_m = 0. \end{cases} \quad i^2 = -1, \quad |m| \geq 2. \quad (2.21)$$

Отсюда для β_m и γ_m получаем соотношения

$$\gamma_m = \frac{i}{m}\beta_m, \quad \beta_m = -\int_0^\rho \varphi'(t)\alpha'_m(t) dt. \quad (2.22)$$

Исключая из системы (2.21) неизвестную $\gamma_m(\rho)$, получаем уравнения

$$\alpha'_m(\rho) = \frac{m^2}{\rho}\alpha_m(\rho) + \frac{m^2-1}{\rho\varphi'(\rho)}\beta_m(\rho), \quad (2.23)$$

$$\beta'_m(\rho) = -\frac{m^2\varphi'(\rho)}{\rho}\alpha_m(\rho) - \frac{m^2-1}{\rho}\beta_m(\rho), \quad \rho > 0, \quad (2.24)$$

откуда, предполагая, что все происходит в классе гладкости C^2 , для $\alpha_m(\rho)$ приходим к уравнению

$$\rho\varphi'(\rho)\alpha''_m + \rho\varphi''(\rho)\alpha'_m - m^2\varphi''(\rho)\alpha_m = 0. \quad (2.25)$$

В классе C^1 -гладких деформаций из системы (2.21) и уравнения (2.24) имеем полезные соотношения

$$\frac{\beta'_m(\rho)}{\varphi'(\rho)} \rightarrow 0, \quad \frac{\beta_m(\rho)}{\rho\varphi'(\rho)} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0. \quad (2.26)$$

Для гармоник поля б.м. изгибания 2-го порядка имеем уравнения

$$\begin{cases} \varphi'(\rho)a'_k + b'_k = A_k, \\ ik\varphi'(\rho)a_k + ikb_k - c_k + \rho c'_k = 2B_k, \\ \rho(b_k + ikc_k) = C_k, \end{cases} \quad (2.27)$$

где через A_k , B_k и C_k обозначены k -е коэффициенты Фурье правых частей соответствующих уравнений системы (2.7).

Мы рассмотрим сначала случай продолжения в б.м. изгибание 2-го порядка б.м. изгибания 1-го порядка с одной гармоникой при некотором произвольном выборе ее номера $m \geq 2$. Но тут есть одна тонкость, связанная с нахождением m -й гармоники поля б.м. изгибания 1-го порядка через решения системы (2.23)–(2.24) с выполнением условий (2.19). Если мы представим комплекснозначные коэффициенты рядов в (2.8) в виде

$$\alpha_m(\rho) = \alpha_m^{(1)} + i\alpha_m^{(2)}, \quad \beta_m = \beta_m^{(1)} + i\beta_m^{(2)},$$

то найдем, что

$$\alpha_m(\rho, \theta) = \alpha_m^{(1)} \cos m\theta - \alpha_m^{(2)} \sin m\theta, \quad \beta_m(\rho, \theta) = \beta_m^{(1)} \cos m\theta - \beta_m^{(2)} \sin m\theta,$$

где пары $(\alpha_m^{(1)}, \beta_m^{(1)})$ и $(\alpha_m^{(2)}, \beta_m^{(2)})$ являются решениями системы (2.23)–(2.24) с выполнением условий (2.19). Однако в работе [1] в теоремах 1 и 2 показано, что при некоторых условиях линейное пространство решений системы (2.23)–(2.24) с выполнением условий (2.19) является одномерным² и при этих условиях и, вообще, при априорном предположении одномерности пространства таких решений получаем, что общий вид m -й гармоники б.м. изгибаения 1-го порядка, т.е. общее решение системы (2.6), при данном m имеет такое представление:

$$\begin{aligned} \alpha(\rho, \theta) &= (\lambda \cos m\theta + \mu \sin m\theta) \alpha_m(\rho), & \beta(\rho, \theta) &= (\lambda \cos m\theta + \mu \sin m\theta) \beta_m(\rho), \\ \gamma(\rho, \theta) &= (-\mu \cos m\theta + \lambda \sin m\theta) \gamma_m(\rho), & \gamma_m &= -\frac{\beta_m}{m}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где $(\alpha_m(\rho), \beta_m(\rho))$ – некоторое действительное решение системы (2.23)–(2.24), удовлетворяющее условиям (2.19), а λ и μ – произвольные действительные числа. Это же представление, как *частное* решение системы (2.6), верно для *любого* решения системы с выполнением условий (2.19). Следовательно, по *каждому* решению уравнения (2.25) или системы (2.23)–(2.24) с выполнением условий (2.19) можно составить *два* линейно независимых поля б.м. изгибаний 1-го порядка, и в случае одномерности пространства таких решений множество гармоник с данным номером будет двухпараметрическим множеством. На это мы обратили внимание еще в работе [1].

Но в принципе может быть, что система (2.23)–(2.24) имеет два линейно независимых решения с выполнением условий (2.19)³. Тогда гармоники с номером m составят 4-параметрическое множество; например, будем иметь

$$\alpha_m(\rho, \theta) = (\lambda_1 \alpha_m^{(1)}(\rho) + \lambda_2 \alpha_m^{(2)}(\rho)) \cos m\theta + (\mu_1 \alpha_m^{(1)}(\rho) + \mu_2 \alpha_m^{(2)}(\rho)) \sin m\theta,$$

где $\alpha_m^{(1)}(\rho)$ и $\alpha_m^{(2)}(\rho)$ – компоненты двух линейно независимых решений системы (2.23)–(2.24) с выполнением условий (2.19). Хотя примеры такого случая пока не известны, для строгости доказательств и аккуратности формулировок

²Пользуясь случаем, заметим, что формулировки теорем единственности в [1] содержат некоторую неточность, а именно, под единственностью решения там нужно понимать единственность с точностью до умножения на постоянный коэффициент, так как речь идет о решениях однородного уравнения.

³Вообще вопрос о свойствах решений системы (2.23)–(2.24) в общем случае является очень сложным. В случае выпуклости поверхности в окрестности полюса или при степенном порядке убывания $\varphi'(\rho)$ и/или $\alpha_n'(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$ имеются два решения, одно убывающее к нулю, другое неограниченно растущее (обычно рассматриваются именно эти случаи, поэтому в литературе нет работ, посвященных возможным случаям существования двух линейно независимых решений, оба регулярных в окрестности полюса), но если известно только условие $0 < \varphi'(\rho) \rightarrow 0$, тогда, во-первых, неизвестно, как зависит разрешимость системы от параметра m , во-вторых, поведение двух линейно независимых решений при данном m становится неконтролируемым, в частности, неизвестно, будут ли они обращаться в нуль в счетном множестве точек с точкой сгущения в полюс.

надо иметь в виду такую возможность. Для этого мы далее будем предполагать, что для гармоники $\alpha_m(\rho)$ полюс является изолированным нулем (тогда и функция $\beta_m(\rho)$ имеет в полюсе изолированный нуль). В конце статьи в приложении мы докажем, что в таком случае система (2.23)–(2.24) имеет единственное, с точностью до постоянного множителя, решение с выполнением требуемого условия (2.19), поэтому m -я гармоника рассматриваемого б.м. изгибания 1-го порядка имеет вид (2.28).

Для найденного поля $\mathbf{U}_1 = \alpha \mathbf{k} + \beta \mathbf{e}(\theta) + \gamma \mathbf{e}'(\theta)$ разложение в ряд Фурье выражения $(d\mathbf{U}_1)^2$ имеет гармоники с номерами 0 и $2m$. Поэтому для поля б.м. изгибания 2-го порядка ищем его гармоники с теми же номерами, т.е. полагаем

$$\mathbf{U}_2 = a_0(\rho)\mathbf{k} + b_0(\rho)\mathbf{e} + c_0(\rho)\mathbf{e}' + (a_{-2m}\mathbf{k} + b_{-2m}\mathbf{e} + c_{-2m}\mathbf{e}')e^{-2im\theta} + (a_{2m}\mathbf{k} + b_{2m}\mathbf{e} + c_{2m}\mathbf{e}')e^{2im\theta}. \quad (2.29)$$

Учитывая равенства (2.10), мы можем “подогнать” вид $\mathbf{U}_2$ к виду (2.2) и написать

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_2 = a\mathbf{k} + b\mathbf{e} + c\mathbf{e}' = & [a_0 + 2(a_{2m} \cos 2m\theta - \tilde{a}_{2m} \sin 2m\theta)]\mathbf{k} \\ & + [b_0 + 2(b_{2m} \cos 2m\theta - \tilde{b}_{2m} \sin 2m\theta)]\mathbf{e} \\ & + [c_0 + 2(c_{2m} \cos 2m\theta - \tilde{c}_{2m} \sin 2m\theta)]\mathbf{e}', \end{aligned} \quad (2.30)$$

где коэффициенты a , b , c и $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ с индексами – действительные функции от ρ (мы заменили в (2.30) комплекснозначные коэффициенты a_{2m} и т.д. на $a_{2m} + i\tilde{a}_{2m}$ и т.д. с вещественными значениями коэффициентов). Теперь из (2.7) получаем уравнения для нулевой гармоники поля $\mathbf{U}_2$

$$\begin{cases} \varphi' a'_0(\rho) + b'_0(\rho) = -\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} \left[(\alpha'_m)^2 + \left(1 + \frac{1}{m^2}\right) (\beta'_m)^2 \right], \\ \rho c'_0(\rho) - c_0(\rho) = 0, \\ \rho b_0(\rho) = -\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} \left[m^2 \alpha_m^2 + \left(m - \frac{1}{m}\right)^2 \beta_m^2 \right]. \end{cases} \quad (2.31)$$

А для гармоники с номером $2m$ имеем уравнения

$$\begin{cases} 4\varphi'(\rho)a'_{2m}(\rho) + 4b'_{2m}(\rho) = (\mu^2 - \lambda^2) \left[\alpha'^2_m + \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \beta'^2_m \right], \\ 2\varphi'(\rho)\tilde{a}'_{2m}(\rho) + 2\tilde{b}'_{2m}(\rho) = \lambda\mu \left[(\alpha'_m)^2 + \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) (\beta'_m)^2 \right], \\ \rho c'_{2m} - 2m(\varphi'\tilde{a}_{2m} + \tilde{b}_{2m}) - c_{2m} = -\lambda\mu \left[m\alpha_m\alpha'_m + \left(m - \frac{1}{m}\right) \beta_m\beta'_m \right], \\ 2\rho\tilde{c}'_{2m} + 4m(\varphi'a_{2m} + b_{2m}) - 2\tilde{c}_{2m} = (\mu^2 - \lambda^2) \left[m\alpha_m\alpha'_m + \left(m - \frac{1}{m}\right) \beta_m\beta'_m \right], \\ 4\rho(b_{2m} - 2m\tilde{c}_{2m}) = (\lambda^2 - \mu^2) \left[m^2 \alpha_m^2 + \left(m - \frac{1}{m}\right)^2 \beta_m^2 \right], \\ 2\rho(\tilde{b}_{2m} + 2m\tilde{c}_{2m}) = -\lambda\mu \left[m^2 \alpha_m^2 + \left(m - \frac{1}{m}\right)^2 \beta_m^2 \right]. \end{cases} \quad (2.32)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Система получилась необычно большая, потому что, по-видимому, впервые в литературе явно учтено, что по одному решению системы (2.23)–(2.24) или уравнения (2.25) на самом деле можно построить два линейно независимых поля б.м. изгибания 1-го порядка, как это мы уже отметили выше (в работе [2] это обстоятельство скрыто в комплексной форме записи, что на самом деле не позволяет четко проследить за различиями в двух классах решений).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На первый взгляд кажется, что изменением начала отсчета угла θ систему (2.33) можно существенно упростить, добившись представления уравнений системы (2.28) с одним косинусом или синусом в виде

$$\alpha(\rho, \theta) = C\alpha_m(\rho) \cos m\psi, \quad \psi = \theta + \theta_0/m = \theta + \arccos \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}},$$

и т.д. Но это представление, во-первых, не упразднит факт зависимости m -й гармоники поля б.м. изгибания от двух параметров (или факт двумерности линейного пространства б.м. изгибаний с m -й гармоникой), во-вторых, оно несколько усложнит связь между коэффициентами $2m$ -й гармоники поля б.м. изгибаний 2-го порядка, так как тогда изменится представление подвижного вектора $\mathbf{e}(\theta)$ через стандартные векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, и к тому же перенос начала отсчета угла θ к новой точке для упрощения представления гармоники с номером m не даст такого же упрощения для гармоники с номером $2m$.

Из систем (2.31)–(2.32) видим, как должна ставиться задача о продолжении б.м. изгибаний 1-го порядка в б.м. изгибания 2-го порядка. А именно, имеем два варианта.

1) Дано некоторое конкретное поле б.м. изгибания 1-го порядка (в нашем случае это означает, что даны конкретные значения коэффициентов λ и μ); спрашивается, имеет ли система (2.32) какую-нибудь тройку решений $(a_m, b_m, \tilde{c}_m)$ или $(\tilde{a}_m, \tilde{b}_m, c_m)$ или обе тройки? Это будет задача о продолжении *данного* поля б.м. изгибаний 1-го порядка.

2) Дано общее поле б.м. изгибаний 1-го порядка; определить, найдется ли некоторое конкретное поле, продолжимое в поле б.м. изгибания 2-го порядка, или же любое существующее поле б.м. изгибаний может быть продолжено в поле б.м. изгибаний 2-го порядка и сколькими способами это можно сделать.

Аналогичные задачи можно ставить и в случае рассмотрения общей поверхности, а не только поверхности вращения.

Система (2.32) допускает уменьшение числа уравнений путем исключения неизвестных c_m и $\tilde{c}_m$. Используя 5-е и 4-е уравнения системы и 3-е и 6-е уравнения, получаем две системы

$$\begin{cases} a'_{2m}(\rho) - \frac{4m^2}{\rho} a_{2m} - \frac{4m^2 - 1}{\rho\varphi'(\rho)} b_{2m} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{4\rho^2\varphi'(\rho)} F_m, \\ b'_{2m}(\rho) + \frac{4m^2}{\rho} \varphi'(\rho) a_{2m} + \frac{4m^2 - 1}{\rho} b_{2m}(\rho) = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{2\rho^2} G_m, \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\begin{cases} \tilde{a}'_{2m}(\rho) - \frac{4m^2}{\rho}\tilde{a}_{2m} - \frac{4m^2-1}{\rho\varphi'(\rho)}\tilde{b}_{2m} = \frac{\lambda\mu}{2\rho^2\varphi'(\rho)}F_m, \\ \tilde{b}'_{2m}(\rho) + \frac{4m^2}{\rho}\varphi'(\rho)\tilde{a}_{2m} + \frac{4m^2-1}{\rho}\tilde{b}_{2m}(\rho) = \frac{\lambda\mu}{\rho^2}G_m, \end{cases} \quad (2.34)$$

где

$$G_m = m^2(m^2+1)\alpha_m^2 + (m^2-1)\left[\frac{m^2}{\varphi'} - (m^2+1)\varphi'\right]\alpha_m\beta_m - (m^2-1)^2\beta_m^2, \quad (2.35)$$

$$F_m = m^2[(m^2-1)\varphi'^2 - m^2 - 2]\alpha_m^2 + 4m^2(m^2-1)\varphi'\alpha_m\beta_m + \frac{(m^2-1)^2}{m^2}\left(\frac{m^2}{\varphi'^2} + 3m^2 - 1\right)\beta_m^2. \quad (2.36)$$

Теперь заметим, что так как

$$b'_{2m}(\rho) = -\varphi'(\rho)a'_{2m}(\rho) + (\mu^2 - \lambda^2)\left[\alpha_m'^2 + \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)\beta_m'^2\right],$$

то при нужной регулярности a_{2m} и α_m (т.е. когда их производные стремятся к нулю при $\rho \rightarrow 0$) такой же регулярностью обладает и b_{2m} , поэтому в дальнейшем достаточно следить за регулярностью функции $a_{2m}(\rho)$.

Если все рассмотрения ведутся в классе гладкости C^2 и выше, достаточно иметь уравнение для a_{2m} , так как тогда b'_{2m} находится через функцию a_{2m} прямым применением 1-го уравнения из (2.33). А уравнение 2-го порядка для $a_{2m}(\rho)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \rho\varphi'(\rho)a''_{2m} + \rho\varphi''(\rho)a'_{2m} - 4m^2\varphi''(\rho)a_{2m} \\ = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{4\rho^2}[\rho F'_m + 2(2m^2 - 1)F_m + 2(4m^2 - 1)G_m] \end{aligned} \quad (2.37)$$

(уравнение для $\tilde{a}_{2m}$ имеет аналогичный вид с соответствующим изменением коэффициента перед квадратной скобкой в правой части).

§ 3. Существование б.м. изгибаний 2-го порядка в окрестности полюса

3.1. Существование нулевой гармоники б.м. изгибания 2-го порядка. Приступим к исследованию существования б.м. изгибаний 2-го порядка в окрестности полюса. Заметим, что на самом деле получатся теоремы о существовании б.м. изгибаний 1-го и 2-го порядков в любом промежутке $[0, a)$, в котором $\varphi'(\rho) \neq 0$, $\rho \in (0, a)$, так как решение, существующее в достаточно малой окрестности полюса, продолжается дальше до тех пор, пока $\varphi'(\rho)$ не обратится в нуль в силу отсутствия при этом условия особенностей в коэффициентах обыкновенных дифференциальных уравнений системы.

Начнем с решения системы (2.31). Пусть $\alpha_m(\rho)$, $\beta_m(\rho)$ – решение системы уравнений (2.23)–(2.24) с выполнением условий (2.19). Так как $c'_0(0) = 0$, то

уравнение для c_0 имеет только нулевое решение. Значения $b_0(\rho)$ и $b'_0(\rho)$ явно вычисляются из третьего уравнения системы, и далее легко проверяется, что требуемые при этом из равенства (2.20) условия выполнены. Что касается коэффициента $a_0(\rho)$, то определяемое из первого уравнения системы (2.31) значение его производной (с учетом уравнений (2.23)–(2.24))

$$\begin{aligned} \varphi'(\rho)a'_0(\rho) = & -\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2\rho^2} \left[m^2(1 - m^2 + (m^2 + 1)\varphi'^2)\alpha_m^2 \right. \\ & \left. + (m^2 - 1)^2 \left(3 + \frac{1}{\varphi'^2} \right) \beta_m^2 + 4m^2(m^2 - 1)\varphi'\alpha_m\beta_m \right] \end{aligned}$$

должно стремиться к нулю при $\rho \rightarrow 0$, что положено по (2.20). В правой части полученного выражения имеем группу слагаемых

$$\left[\frac{(m^2 + 1)\varphi'^2(\rho)\alpha_m^2(\rho)}{\rho^2} + 3(m^2 - 1) \left(\frac{\beta_m(\rho)}{\rho} \right)^2 + 4m^2(m^2 - 1)\varphi'(\rho) \frac{\alpha_m\beta_m}{\rho^2} \right],$$

каждое из которых в силу наложенных на гармоники условий при подходе к полюсу имеет порядок $o(\varphi'(\rho))$, $\rho \rightarrow 0$ (в частности, надо учесть соотношение (2.26)). Остальные слагаемые в правой части можно представить в виде

$$\left(\alpha'_m - m^2 \frac{\alpha_m}{\rho} \right)^2 - m^2(m^2 - 1) \frac{\alpha_m^2}{\rho^2},$$

и так как левая часть при $\rho \rightarrow 0$ в силу требования $a_0(\rho) \rightarrow 0$ должна быть порядка $o(\varphi'(\rho))$, то получаем, что для существования гармоники $a_0(\rho)$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\left(\alpha'_m - m^2 \frac{\alpha_m}{\rho} \right)^2 - m^2(m^2 - 1) \frac{\alpha_m^2}{\rho^2} = o(\varphi'(\rho)), \quad \rho \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Проверка выполнения этого условия по известному уравнению меридиана представляется довольно затруднительной (так как нет явного выражения $\alpha_m(\rho)$ через $\varphi'(\rho)$), но его можно проверить по самой функции α_m . Именно, существуют формулы, явно выражающие $\beta_m(\rho)$ и $\varphi'(\rho)$ через $\alpha_m(\rho)$:

$$\beta_m(\rho) = C\rho_0^{m^2-1}\rho^{1-m^2} \exp\left(m^2(m^2-1) \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{\alpha_m(t)}{t(t\alpha'_m - m^2\alpha_m)} dt\right), \quad C = \beta_m(\rho_0), \quad (3.2)$$

$$\varphi'(\rho) = C\rho_0^{m^2-1} \frac{(m^2-1)\rho^{1-m^2}}{\rho\alpha'_m - m^2\alpha_m} \exp\left(m^2(m^2-1) \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{\alpha_m(t)}{t(t\alpha'_m - m^2\alpha_m)} dt\right) \quad (3.3)$$

(формула для $\varphi'(\rho)$ дана в [1] без включения произвольной константы, что не влияет на справедливость проведенных там рассуждений с участием этой формулы). Заметим, что при достаточно малом ρ_0 знаменатель в подынтегральном выражении обращается в нуль только в точке $\rho = 0^4$.

⁴Но формулы верны и в общем случае, т.е. без свойства изолированности нуля знаменателя, так как знаменатель может иметь нули только 1-го порядка, и тогда интегралы можно вычислять в смысле главных значений.

Теперь проверку выполнения условия (3.1) можно осуществить по рассматриваемому значению функции $\alpha_m(\rho)$, и тем самым приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. *Для возможности продолжения m -й гармоники данного поля б.м. изгиба 1-го порядка с известной компонентой $\alpha_m(\rho)$ в C^1 -гладкое б.м. изгибание 2-го порядка необходимо, чтобы при $\rho \rightarrow 0$ было выполнено условие*

$$\left[\frac{(\rho\alpha' - m^2\alpha)^2}{m^2(m^2 - 1)} - \alpha^2 \right] \rho^{m^2-3} (\rho\alpha' - m^2\alpha) \exp\left(m^2(1-m^2) \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{\alpha(t)}{t(\alpha' - m^2\alpha)} dt\right) \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

(здесь для достижения краткости записи положено $\alpha = \alpha_m(\rho)$). Это условие является и достаточным для существования компоненты $a_0(\rho) \in C^1[0, \rho_0]$ с некоторым $\rho_0 > 0$, но его пока нельзя считать достаточным и для продолжаемости рассматриваемого б.м. изгиба 1-го порядка в б.м. изгибание 2-го порядка, так как для этого нужно еще существование гармоники $a_{2m}(\rho) \in C^1[0, \rho_0]$.

Продемонстрируем эффективность этой теоремы, показав, что существуют поверхности вращения, для которых в окрестности полюса m -я гармоника поля б.м. изгиба заведомо не допускает продолжения в б.м. изгибание 2-го порядка. Рассмотрим функцию

$$\alpha_m(\rho) = \frac{\rho^{\nu}}{\nu - m^2}, \quad 1 < \nu < m^2.$$

Вычислим по ней с использованием формул (3.2) и (3.3) функции $\beta_m(\rho)$ и $\varphi'(\rho)$. Получим

$$\varphi'(\rho) = \rho^{(\nu^2-\nu)/(m^2-\nu)} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

(равенство с точностью до постоянного множителя; вид функции β_m нам сейчас не понадобится). Значит, взятое значение $\alpha_m(\rho)$ определяет выпуклую поверхность вращения, у которой для меридиана $z = \varphi(\rho)$ имеем $0 < \varphi'(\rho) \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$, и для которой $\alpha_m(\rho)$ является вертикальной компонентой m -й гармоники б.м. изгиба 1-го порядка. В то же время для возможности продолжения этого C^1 -гладкого б.м. изгиба 1-го порядка в C^1 -гладкое б.м. изгибание 2-го порядка по утверждению теоремы 1 необходимо выполнение условия (3.4)⁵. Но его левая часть эквивалентна $\rho^{(\nu-1)(2m^2-3\nu)/(m^2-\nu)}$ и она может стремиться к нулю при $\rho \rightarrow 0$, только когда $3\nu < 2m^2$. Если обозначить показатель степени ρ в (3.5) через $2k - 1$, то получим, что неравенство $3\nu < 2m^2$ сводится к условию $6k + 3 < 4m^2$, следовательно, если $6k + 3 \geq 4m^2$, тогда существующая гармоника с номером m поля б.м. изгиба 1-го порядка не продолжается в поле б.м. изгиба 2-го порядка даже в классе гладкости C^1 .

В рассмотренном примере мы имеем дело с поверхностями со степенным порядком убывания $\varphi'(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$, и в этом классе поверхностей полученный результат совпадает с соответствующим утверждением теоремы 2 из [2]. Но

⁵Можно провести вычисления также и по левой части формулы (3.1) и потребовать выполнения нужного сравнения с правой частью.

наш результат на самом деле более общий, так как в [2] исследование было проведено в предположении принадлежности поверхности и полей ее деформации гладкости по крайней мере класса C^2 вне полюса, а наша теорема 1 предполагает гладкость только класса C^1 . Более того, из теоремы 1 можно получить признаки непродолжаемости гармоник б.м. изгибаия 1-го порядка и для других видов меридианов. Например, рассмотрим гармоники вида $\alpha_m(\rho) = \rho^\mu \ln^\varepsilon \frac{1}{\rho}$, $\mu > 1$, $\varepsilon \neq 0$. Вычисление $\varphi'(\rho)$ по формуле (3.3) дает следующее поведение $\varphi'(\rho)$:

$$\begin{aligned}\varphi'(\rho) &\sim C\rho^{1-2m^2+\frac{m^4-m^2}{2\varepsilon}\ln\frac{1}{\rho\rho_0}}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{1-\varepsilon}, & \rho \rightarrow 0 \quad (\text{при } \mu = m^2), \\ \varphi'(\rho) &\sim C\rho^{\frac{\mu(\mu-1)}{m^2-\mu}}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\varepsilon\frac{\mu(m^2-\mu)+m^2(\mu-1)}{(m^2-\mu)^2}}, & \rho \rightarrow 0 \quad (\text{при } m^2 \neq \mu).\end{aligned}$$

Из этих формул мы видим, что μ должно быть не больше m^2 , иначе $\varphi'(\rho) \not\rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Далее, функция $\varphi'(\rho) \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$, при $\mu = m^2$ и $\varepsilon < 0$, а при $\mu = m^2$ и $\varepsilon > 0$ она стремится к нулю с убыванием бесконечного порядка, в то время как левая часть формулы (3.1) имеет убывание степенно-логарифмического типа, поэтому при $\mu = m^2$, $\varepsilon > 0$ поле б.м. изгибаия 1-го порядка с рассматриваемой гармоникой α_m не может продолжаться в б.м. изгибание 2-го порядка. А при $\mu < m^2$ левая часть формулы (3.1) эквивалентна $C\rho^{2\mu-2}\ln^{2\varepsilon}(1/\rho)$, $C \neq 0$, поэтому соотношение (3.1) при $2\mu - 2 < \mu(\mu - 1)/(m^2 - \mu)$, т.е. при $2m^2 < 3\mu < 3m^2$, не выполнимо ни при каком ε . Это же верно и при $2m^2 = 3\mu$ с $\varepsilon < 0$. Тем самым мы нашли новые виды меридианов $z = \varphi(\rho)$, для которых соответствующая поверхность вращения имеет в окрестности полюса некоторое поле б.м. изгибаия 1-го порядка, непродолжимое в поле б.м. изгибаия 2-го порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Не следует, однако, думать, что мы нашли примеры поверхностей с локальной жесткостью 2-го порядка, так как поля б.м. изгибаний 1-го порядка рассматриваемых поверхностей не исчерпываются одной или даже несколькими гармониками, а мы получили примеры непродолжаемости только *одной* гармоники. По-видимому, для построения примера локальной жесткости 2-го порядка надо воспользоваться методом работы [6].

Но в аналитическом классе поверхностей, когда есть случаи существования только конечного числа нетривиальных аналитических гармоник, можно надеяться получить примеры поверхностей, не жестких относительно аналитических б.м. изгибаний 1-го порядка и локально жестких относительно аналитических б.м. изгибаний 2-го порядка. Так будет, если удастся найти поверхность с конечным числом гармоник б.м. изгибаия 1-го порядка с номерами m , которые *все* удовлетворяют неравенству $4m^2 \leq 6k + 3$ (что соответствует неравенству $3\nu \geq 2m^2$), где $2k$ – порядок убывания меридиана $z = \varphi(\rho)$.

3.2. Существование гармоники б.м. изгибаия 2-го порядка с номером $2m$. Проведем теперь исследование существования решений системы

(2.33) (по аналогии также и системы (2.34)). Применим сначала прямой метод исследования системы (2.33), а именно напишем решения уравнений системы (2.33) как решения линейных уравнений. Имеем

$$a_{2m}(\rho) = \rho^{4m^2} \left(C + \int_{\rho}^{\rho_0} t^{-4m^2} \left(\frac{\lambda^2 - \mu^2}{4t^2 \varphi'(t)} F_m(t) - \frac{4m^2 - 1}{t \varphi'(t)} b_{2m}(t) \right) dt \right), \quad (3.6)$$

$$b_{2m}(t) = -\rho^{1-4m^2} \int_0^{\rho} t^{4m^2-1} \left(\frac{\lambda^2 - \mu^2}{2t^2} G_m(t) + \frac{4m^2}{t} \varphi'(t) a_{2m}(t) \right) dt. \quad (3.7)$$

Подставим значение $b_{2m}(t)$ из (3.7) в (3.6). Получим интегральное уравнение для $a_{2m}(\rho)$:

$$a_{2m}(\rho) = \rho^{4m^2} \left(C + 4m^2(4m^2 - 1) \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{t^{-8m^2}}{\varphi'(t)} dt \int_0^t \tau^{4m^2-2} \varphi'(\tau) a_{2m}(\tau) d\tau \right) + A(\rho), \quad (3.8)$$

где

$$A(\rho) = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{4} \rho^{4m^2} \left[\int_{\rho}^{\rho_0} \frac{t^{-4m^2-2}}{\varphi'(t)} F_m(t) dt + 2(4m^2 - 1) \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{t^{-8m^2}}{\varphi'(t)} dt \int_0^t \tau^{4m^2-3} G_m(\tau) d\tau \right]. \quad (3.9)$$

Таким образом, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Для продолжаемости m -й гармоники поля б.м. изгибаия 1-го порядка в C^1 -гладкое поле б.м. изгибаия 2-го порядка необходимо и достаточно, чтобы было выполнено соотношение (3.4) и чтобы интегральное уравнение (3.8) имело решение $a_{2m}(\rho) \in C^1[0, \rho_0]$ со свойствами $a_{2m}(\rho) \rightarrow 0$ и $a'_{2m}(\rho) \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$.*

Исследование существования такого решения в общем случае представляется весьма трудной задачей. Поэтому мы сначала приведем, по аналогии с теоремой 1, одно необходимое для этого условие, справедливое для широкого класса меридианов с $\varphi'(0) = 0$, $\varphi'(\rho) > 0$, $0 < \rho < \rho_0$.

ТЕОРЕМА 3. *Если*

$$\int_0^t \tau^{4m^2-1} \varphi'(\tau) d\tau < C \rho^{4m^2} \varphi'(\rho), \quad (3.10)$$

то для продолжаемости данной m -й гармоники в C^1 -гладкое б.м. изгибание 2-го порядка необходимо, чтобы функция $A(\rho)$, определяемая рассматриваемой гармоникой по формуле (3.9), удовлетворяла условиям $A(\rho) \rightarrow 0$ и $A'(\rho) \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть уравнение (3.8) имеет решение $a_{2m}(\rho) \in C^1[0, \rho_0]$ такое, что $a_{2m}(\rho) \rightarrow 0$, $a'_{2m}(\rho) \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$. Тогда $|a_{2m}(\rho)| = o(1)\rho$, $\rho \rightarrow 0$, и

в силу условия (3.10) имеем неравенства

$$\begin{aligned}
 & \left| \rho^{4m^2} \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{t^{-8m^2}}{\varphi'(t)} dt \int_0^t \tau^{4m^2-2} \varphi'(\tau) a_{2m}(\tau) d\tau \right| \\
 & \leq \left(\rho^{4m^2} \int_{\rho}^{\rho_0} t^{-4m^2} \frac{t^{-4m^2}}{\varphi'(t)} dt \int_0^t \tau^{4m^2-1} \varphi'(\tau) d\tau \right) o(1) \leq o(1)\rho, \quad \rho \rightarrow 0, \\
 & \left| \left(\rho^{4m^2} \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{t^{-8m^2}}{\varphi'(t)} dt \int_0^t \tau^{4m^2-2} \varphi'(\tau) a_{2m}(\tau) d\tau \right)' \right| \\
 & \leq 4m^2 \rho^{4m^2-1} \int_{\rho}^{\rho_0} t^{-4m^2} \frac{t^{-4m^2}}{\varphi'(t)} dt \int_0^t \tau^{4m^2-2} \varphi'(\tau) |a_{2m}(\rho)| d\tau \\
 & \quad + \frac{\rho^{-4m^2}}{\varphi'(\rho)} \int_0^{\rho} t^{4m^2-2} \varphi'(t) |a_{2m}(t)| dt = C_1 o(1) + C_2 o(1) \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Следовательно, в соотношении (3.8) первые два члена стремятся к нулю и имеют производные, тоже стремящиеся к нулю при $\rho \rightarrow 0$, значит, и функция $A(\rho)$ должна иметь такое же поведение.

Отметим, что C^1 -гладкие выпуклые меридианы $z = \varphi(\rho)$ или гладкие меридианы со степенным порядком убывания $\varphi'(\rho)$ заведомо удовлетворяют условию (3.10) и поэтому соответствующие поверхности попадают под действие теоремы 3. Более того, для степенных порядков убывания $\varphi'(\rho)$ это необходимое условие оказывается и достаточным для разрешимости (3.8) в классе функций $C^1[0, \rho_0]$ с требуемыми свойствами $a_{2m}(\rho) \rightarrow 0$, $a'_{2m}(\rho) \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$. Действительно, в этом случае легко проверить, что норма интегрального оператора в (3.8) в классе непрерывных функций меньше 1, свободные члены принадлежат классу C^1 , поэтому стандартным методом последовательных приближений получаем существование требуемого решения. Это утверждение мы получим ниже еще и другим способом и там приведем его в виде отдельной теоремы с точной формулировкой.

Для более эффективного описания решений системы (2.33) применим стандартный метод вариации произвольных постоянных. Вспомним, что если для системы

$$\begin{cases} y'_x = p(x)y + q(x)z, \\ z'_x = r(x)y + s(x)z \end{cases}$$

известно некоторое ее решение (y_1, z_1) , то по формулам

$$\begin{aligned}
 y_2 &= -y_1 \int_x^{x_0} \frac{q}{y_1^2} \exp \left\{ - \int_t^{x_0} (p+s) d\tau \right\} dt, \\
 z_2 &= -z_1 \int_x^{x_0} \frac{q}{y_1^2} \exp \left\{ - \int_x^{x_0} (p+s) dx \right\} dx + \frac{1}{y_1} \exp \left\{ - \int_x^{x_0} (p+s) dt \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

можно построить еще одно линейно независимое от (y_1, z_1) решение (y_2, z_2) этой же системы, см., например, [7].

Однородная система, соответствующая системе (2.33), совпадает с системой (2.23)–(2.24) с заменой m на $2m$. У нас поверхность имеет б.м. изгибания

с гармоникой с номером m , но тогда она вовсе не обязана иметь б.м. изгибания с $2m$ -й гармоникой⁶. Но в любом варианте есть два решения, регулярных вне полюса.

В нашем случае для коэффициентов рассматриваемой системы (2.23)–(2.24) имеем представления

$$p = \frac{m^2}{\rho}, \quad q = \frac{m^2 - 1}{\rho\varphi'(\rho)}, \quad r = -\frac{m^2\varphi'(\rho)}{\rho}, \quad s = -\frac{m^2 - 1}{\rho}.$$

Значит, сумма $p + s$ в формуле (3.4) равна $1/\rho$. С учетом этого по решению α_{2m} , β_{2m} однородной системы, соответствующей (2.33), построим второе ее решение

$$\tilde{\alpha}_{2m}(\rho) = \frac{(1 - 4m^2)\alpha_{2m}(\rho)}{\rho_0} \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{dt}{\varphi'(t)\alpha_{2m}^2(t)}, \quad (3.12)$$

$$\tilde{\beta}_{2m}(\rho) = \frac{\rho}{\rho_0\alpha_{2m}(\rho)} + \frac{(1 - 4m^2)\beta_{2m}(\rho)}{\rho_0} \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{dt}{\varphi'(t)\alpha_{2m}^2(t)}, \quad (3.13)$$

где ρ_0 – произвольно малое значение аргумента, и рассмотрения будут вестись при $\rho \rightarrow 0$.

Обратимся к системе (2.34). Ищем ее решение в виде

$$a_{2m} = C_1(\rho)\alpha_{2m} + C_2(\rho)\tilde{\alpha}_{2m}, \quad b_{2m} = C_1(\rho)\beta_{2m} + C_2(\rho)\tilde{\beta}_{2m}. \quad (3.14)$$

Подставляя эти выражения в (2.33) и учитывая, что $\Delta = \alpha_{2m}\tilde{\beta}_{2m} - \tilde{\alpha}_{2m}\beta_{2m} = \rho/\rho_0$, находим C'_1 и C'_2 , а затем C_1 и C_2 :

$$C_1(\rho) = (\lambda^2 - \mu^2)\rho_0 \int_{\rho}^{\rho_0} \left(\frac{\tilde{\beta}_{2m}(t)F_m(t)}{4t^3\varphi'(t)} - \frac{\tilde{\alpha}_{2m}(t)G_m(t)}{2t^3} \right) dt + C_1(\rho_0), \quad (3.15)$$

$$C_2(\rho) = (\lambda^2 - \mu^2)\rho_0 \int_{\rho}^{\rho_0} \left(-\frac{\beta_{2m}(t)F_m(t)}{4t^3\varphi'(t)} + \frac{\alpha_{2m}(t)G_m(t)}{2t^3} \right) dt + C_2(\rho_0), \quad (3.16)$$

где $G_m(\rho)$ и $F_m(\rho)$ определены соответственно формулами (2.35), (2.36). Для $\tilde{\alpha}_{2m}$ и $\tilde{\beta}_{2m}$ уравнения и решения будут аналогичными с заменой $\lambda^2 - \mu^2$ на $-2\lambda\mu$.

Полученные пары решений $(a_{2m}(\rho), b_{2m}(\rho))$ и $(\tilde{a}_{2m}(\rho), \tilde{b}_{2m}(\rho))$ в одинаковой степени регулярны в промежутке $(0, \rho_0]$ (они там имеют тот же класс гладкости, что и меридиан $z = \varphi(\rho)$). Но нам нужно определенно знать их гладкость в самом полюсе, например, для гладкости класса $C^1[0, \rho_0]$ нужно, чтобы $a'_{2m}(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Как видим, в общем случае мы можем привести лишь формальные утверждения в виде теоремы 2 или формулы (3.14) или привести аналогии теорем существования и единственности⁷ решений из работы [1].

⁶Вообще вопрос о свойствах решений системы (2.23)–(2.24) в общем случае является очень сложным. При известном степенном порядке убывания $\varphi'(\rho)$ и/или $\alpha'_n(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$ имеются два решения, одно убывающее к нулю, другое неограниченно растущее (причем тогда система имеет такие решения при всех $m \geq 2$), но если известно только условие $0 < \varphi'(\rho) \rightarrow 0$, тогда, во-первых, неизвестно, как зависит разрешимость системы от параметра m , во-вторых, поведение двух линейно независимых решений при данном m становится неконтролируемым, в частности неизвестно, не будут ли они обращаться в нуль в счетном множестве точек с точкой сгущения в полюс.

Но есть случаи, когда получается точный и компактный ответ, это случаи степенного порядка убывания функции $\varphi'(\rho)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть для C^1 -гладкого меридиана $z = \varphi(\rho)$ выполнено условие $\varphi'(\rho) \sim C\rho^a$, $a > 0$, $C \neq 0$. Пусть

$$\nu_m = \frac{1 - a + \sqrt{4am^2 + (1 - a)^2}}{2}.$$

Тогда для того, чтобы C^1 -гладкое поле б.м. изгибания с m -й гармоникой допускало продолжение в C^1 -гладкое поле б.м. изгибания 2-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие $2\nu_m - a > 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем достаточность. В условиях, наложенных по теореме на $\varphi'(\rho)$, система (2.23)–(2.24) имеет решение при любом $m \geq 2$. При ее решении возникает уравнение, аналогичное уравнению (3.8), с заменой в его интегральном операторе параметра $2m$ на m , и с отсутствием слагаемого $A(\rho)$ (так как система однородная). Имеем (выписываем только главную часть оценки)

$$0 < m^2(m^2 - 1)\rho^{m^2} \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{t^{-2m^2}}{\varphi'(t)} dt \int_0^t \tau^{m^2-2} \varphi'(\tau) d\tau < \frac{m^2 - 1}{m^2 - 1 + a} = q < 1.$$

Полученные решения $\alpha_m(\rho)$, $\beta_m(\rho)$, $\alpha_{2m}(\rho)$ и $\beta_{2m}(\rho)$ имеют при $\rho \rightarrow 0$ следующее поведение⁸:

$$\alpha_m(\rho) \sim \rho^{\nu_m}, \quad \beta_m(\rho) \sim -\frac{C\nu_m}{a + \nu_m} \rho^{a+\nu_m}, \quad (3.17)$$

$$\alpha_{2m}(\rho) \sim \rho^{\nu_{2m}}, \quad \beta_{2m}(\rho) \sim -\frac{C\nu_{2m}}{a + \nu_{2m}} \rho^{a+\nu_{2m}}, \quad (3.18)$$

где

$$\nu_m = \frac{1 - a + \sqrt{4am^2 + (1 - a)^2}}{2}, \quad \nu_{2m} = \frac{1 - a + \sqrt{16am^2 + (1 - a)^2}}{2}.$$

Зная эти эквивалентности, мы из формул (2.36), (2.37) и (3.11) легко можем найти главные части для $G_m(\rho)$, $F_m(\rho)$, $\tilde{\alpha}_m(\rho)$, $\tilde{\beta}_m(\rho)$, $\tilde{\alpha}_{2m}(\rho)$, $\tilde{\beta}_{2m}(\rho)$:

$$\begin{aligned} G_m(\rho) &\sim m^2 \frac{2\nu_m + a(m^2 + 1)}{a + \nu_m} \rho^{2\nu_m}, \\ F_m(\rho) &\sim \left[\frac{\nu_m^2(m^2 - 1)^2}{(a + \nu_m)^2} - m^2(m^2 + 2) \right] \rho^{2\nu_m}, \\ \tilde{\alpha}_m(\rho) &\sim \rho^{\tilde{\nu}_m}, \quad \tilde{\beta}_m(\rho) \sim -\frac{C\tilde{\nu}_m}{a + \tilde{\nu}_m} \rho^{a+\tilde{\nu}_m}, \\ \tilde{\alpha}_{2m}(\rho) &\sim \rho^{\tilde{\nu}_{2m}}, \quad \tilde{\beta}_{2m}(\rho) \sim -\frac{C\tilde{\nu}_{2m}}{a + \tilde{\nu}_{2m}} \rho^{a+\tilde{\nu}_{2m}}, \quad \rho \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

⁷Повторим, что формулировки теорем единственности в [1] содержат некоторую неточность, а именно, под единственностью решения там нужно понимать единственность с точностью до умножения на постоянный коэффициент, так как речь идет о решениях однородного уравнения.

⁸Доказательство аналогичных утверждений в [1] дано при более сильных условиях на меридиан, но и оценка решения там более подробная, включающая второй член асимптотики.

где

$$\tilde{\nu}_m = 1 - a - \nu_m, \quad \tilde{\nu}_{2m} = 1 - a - \nu_{2m}.$$

Определив затем из (3.15), (3.16) главные части для $C_1(\rho)$ и $C_2(\rho)$, найдем соответственно из (3.14) поведение $a_{2m}(\rho)$ и b_{2m} . Получим

$$a_{2m}(\rho) = A_1 \rho^{2\nu_m - (a+1)} + o(\rho^{2\nu_m - (a+1)}), \quad b_{2m}(\rho) = A_2 \rho^{2\nu_m - 1} + o(\rho^{2\nu_m - 1}), \quad (3.20)$$

где A_1 и A_2 – некоторые постоянные⁹, зависящие от a и m . Значит, для того чтобы иметь $a'_{2m}(\rho) \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$, достаточно, чтобы было $2\nu_m - (a+1) > 1$. Если мы заменим, аналогично тому, как это делалось при интерпретации формулы (3.5), показатель a обозначением $2k-1$, то увидим, что из неравенства $2\nu - (a+1) > 1$ следует неравенство $3\nu_m < 2m^2$ (которое, как мы знаем, равносильно неравенству $6k+3 < 4m^2$). Следовательно, в условиях теоремы 2 обе гармоники с номерами 0 и $2m$ поля б.м. изгибания 2-го порядка существуют и принадлежат классу $C^1[0, \rho_0]$ с обращением в нуль их производных в точке $\rho = 0$, что и требовалось доказать.

Необходимость условия доказывается просто: если уравнение меридиана удовлетворяет условиям теоремы и C^1 -гладкая m -я гармоника поля б.м. изгибания 1-го порядка продолжается в C^1 -гладкое поле б.м. изгибания 2-го порядка с обращением в нуль нужных производных, тогда в силу найденных эквивалентностей (3.17), (3.18) при $A_1 \neq 0$ из C^1 -гладкости функции a_{2m} с обращением в нуль ее производной при $\rho = 0$ должно следовать неравенство $2\nu_m - (a+1) > 1$. Если же $A_1 = 0$, тогда обратимся к необходимому условию (3.1) для $a'_0(\rho)$. С учетом эквивалентностей (3.17) легко убедиться, что левая часть в (3.17) эквивалентна $A\rho^{2\nu_m-2}$, $A < 0$, поэтому для выполнения нужного соотношения (3.1) должно выполняться неравенство $2\nu_m - 2 > a$. Теорема доказана.

Так как выпуклая поверхность вращения в окрестности полюса имеет в классе C^1 поля б.м. изгибаний с любым номером гармоники, то получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Если для меридиана $z = \varphi(\rho) \in C^1[0, \rho_0]$ выпуклой поверхности вращения выполнено условие $\varphi'(\rho) \sim \rho^{2k-1}$, $\rho \rightarrow 0$, то для продолжительности гармоники с номером m в C^1 -гладкое поле б.м. изгибания 2-го порядка необходимо и достаточно, чтобы ее номер удовлетворял неравенству $m \geq \sqrt{6k+3}/2$. В частности, при условии $2k \leq 13/3$ каждая гармоника продолжается в б.м. изгибание 2-го порядка (в этот класс попадают все поверхности вращения без уплощения в полюсе).

⁹Легко показать, что ни один из коэффициентов при главных частях $G_m(\rho)$ и $F_m(\rho)$ не равен нулю и что коэффициенты A_1 и A_2 в (3.20) не обращаются одновременно в нуль, но один из них может равняться нулю. Более того, возможно тождественное обращение в нуль одной из функций a_{2m} или b_{2m} ; например, при продолжении гармоники с номером $m = 2$ б.м. изгибания 1-го порядка параболоида $z = x^2 + y^2$ в б.м. изгибание 2-го порядка имеем $\alpha_2(\rho) = \rho^2$, $\beta_2(\rho) = -4\rho^3/3$, а как продолжение в поле б.м. изгибания 2-го порядка получаем $a_0(\rho) = \rho^2$, $b_0(\rho) = -2\rho^3 - 2\rho^5$, $a_4(\rho) = 0$, $b_4(\rho) = -\rho^3/3 - 3\rho^5/5$.

Таким образом, существуют выпуклые поверхности вращения, для которых есть б.м. изгибания 1-го порядка, не продолжаемые в б.м. изгибания 2-го порядка даже в классе C^1 -гладких деформаций (например, для $k \geq 5/2$ такова гармоника с номером $m = 2$).

На основании формулы (3.19) проверяется, что случаи невыполнения приведенного в теореме 3 необходимого условия продолжаемости б.м. изгибания 1-го порядка в C^1 -гладкое б.м. изгибание 2-го порядка соответствуют как раз установленной в теореме 4 ситуации с жесткостью 2-го порядка. Это показывает, что необходимое условие по теореме 2 действительно является существенно значимым.

Завершим этот пункт несколькими дополнительными комментариями.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Легко показать, что из условия $3\nu_m < 2m^2$ следует неравенство $2\nu_m - (a + 1) > 1$, которое достаточно для существования б.м. изгибания 2-го порядка. Следовательно, в случае поверхностей вращения со степенным порядком убывания $\varphi'(\rho)$ выполнение условия теоремы 1 является необходимым и достаточным признаком продолжаемости поля C^1 -гладкого б.м. изгибания 1-го порядка с данной m -й гармоникой в C^1 -гладкое поле б.м. изгибания 2-го порядка в окрестности полюса. Но даже для такого класса поверхностей этот критерий не дает еще возможности построить пример нежесткой поверхности с *локальной* жесткостью 2-го порядка окрестности полюса, так как он не охватывает возможность продолжения б.м. изгибаний 1-го порядка, являющихся суммой бесконечного числа нетривиальных гармоник.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Как и в работе [2], можно рассмотреть поверхности и б.м. изгибания с гладкостью произвольного класса. В проколотой окрестности полюса гладкость б.м. изгибаний и 1-го, и 2-го порядка будет такая же, как гладкость самой поверхности вращения. В случае степенного порядка уплощения (т.е. когда $\varphi'(\rho) \sim \rho^a$, $a > 0$) скорость убывания гармоник $a_0(\rho)$ и $a_{2m}(\rho)$ поля изгибания 2-го порядка одна и та же и совпадает с $\rho^{2\nu-(a+1)}$, $\rho \rightarrow 0$. Если число a нецелое, тогда б.м. изгибания принадлежат классу C^n , $n = \min\{p, [2\nu - (a + 1)]\}$, где p – порядок класса гладкости поверхности, $[x]$ – целая часть числа x .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если поле б.м. изгибания 1-го порядка состоит из суммы конечного числа гармоник с наибольшим номером M , то в исследовании вопроса о продолжении такого б.м. изгибания в б.м. изгибание 2-го порядка первым этапом исследования является установление существования/несуществования решения $a_{2M}(\rho)$, $b_{2M}(\rho)$ системы вида (2.33) и (2.34), правая часть которой будет зависеть только от гармоники б.м. изгибания 1-го порядка с номером M (но правая часть уравнения для $a_0(\rho)$ будет зависеть от всех гармоник рассматриваемого поля б.м. изгибания 1-го порядка). Если функции $a_{2M}(\rho)$ с нужными свойствами нет, тогда рассматриваемое поле б.м. изгибания не продолжается в поле б.м. изгибания 2-го порядка. Если же нужная функция $a_{2M}(\rho)$ существует, надо искать функции $a_j(\rho)$, $b_j(\rho)$ с номерами $j < M$. Алгоритм поиска, хотя и громоздкий, является вполне очевидным.

Вопрос о продолжении б.м. изгибаия 1-го порядка со счетным числом гармоник представляется безнадежно запутанным. Кстати, для поверхностей вращения “в целом” до настоящего момента нет примера регулярной нежесткой поверхности с бесконечным числом нетривиальных гармоник.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. По поводу б.м. изгибаний высших порядков см. [3] и [4].

3.3. Существование б.м. изгибаия 2-го порядка в окрестности полюса в аналитическом классе гладкости. Перейдем от случая минимальной гладкости класса C^1 к случаю аналитических поверхностей с аналитическими полями деформации. Тогда меридиан поверхности около полюса является выпуклой кривой с уравнением вида

$$\varphi(\rho) = \rho^{2k} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^{2j}, \quad c_0 \neq 0, \quad (3.21)$$

и мы можем работать с уравнениями (2.25) и (2.37) (в дальнейшем считаем $c_0 = 1$). Для этих уравнений точка $\rho = 0$ является по теории Фукса¹⁰ регулярной особой точкой, и соответственно применение теории Фукса к уравнению (2.25) дает следующий вид его регулярного решения $\alpha_m(\rho)$:

$$\alpha_m(\rho) = \rho^{\nu_m} \alpha_m^0(\rho), \quad (3.22)$$

где

$$\nu_m = 1 - k + \sqrt{m^2(2k - 1) + (k - 1)^2} \quad (3.23)$$

является положительным корнем уравнения

$$\nu^2 - 2(1 - k)\nu - (2k - 1)m^2 = 0,$$

а аналитическая функция

$$\alpha_m^0(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \rho^{2j}, \quad A_0 \neq 0,$$

состоит из суммы четных степеней ρ (сходимость этого ряда следует по теории Фукса из регулярности особой точки). В классе гладкости C^2 и тем более в аналитическом случае решение системы (2.23)–(2.24) сводится к решению уравнения (2.25), поэтому ее решения тоже будут получаться на основании теории Фукса. Нас будет интересовать второе линейно независимое решение $\tilde{\alpha}_{2m}(\rho)$, $\tilde{\beta}_{2m}(\rho)$ системы (2.23)–(2.24) со значением параметра $2m$ вместо m , т.е. однородной системы, соответствующей неоднородной системе (2.34). Пусть

$$\alpha_{2m}(\rho) = \rho^{\nu_{2m}} \alpha_{2m}^0(\rho), \quad \alpha_{2m}^0(\rho) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j^0 \rho^{2j}, \quad (3.24)$$

является регулярным решением соответствующей системы. Второе ее решение выражается формулами (3.12), (3.13). Число ν_{2m} всегда положительно. Пусть

¹⁰Подробное изложение этой теории можно найти, например, в [8; пп.97–99] и [9; гл. 4, § 12].

оно нецелое. Тогда в интеграле в (3.12) будут слагаемые вида $(t^q/t) dt$, где q – число нецелое или целое нечетное, так что $\tilde{\alpha}_{2m}(\rho)$ и $\tilde{\beta}_{2m}(\rho)$ будут суммами степеней ρ с главными частями, выписанными в формуле (3.19). Если же $\nu_{2m}(\rho)$ является целым положительным числом, тогда после вычисления интеграла

$$\int_{\rho}^{\rho_0} \frac{dt}{\varphi'(t)\alpha_{2m}^2(t)} \quad (3.25)$$

может появиться слагаемое вида $c \ln \rho$ (в теории Фукса это соответствует случаю положительной целочисленной разности двух корней характеристического уравнения Фукса). Коэффициент c при логарифме равен коэффициенту $c_{k-1+\nu_{2m}}^0$ при степени ρ^{2j} с целым показателем

$$2j = 2k - 2 + 2\nu_{2m} \quad (3.26)$$

в разложении функции $f(\rho) = 1/(\psi(\rho)(\alpha_{2m}^0(\rho))^2)$ в ряд

$$f(\rho) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j^0 \rho^{2j}, \quad (3.27)$$

где $\psi(\rho)$ определяется представлением $\varphi'(\rho) = 2k\rho^{2k-1}\psi(\rho)$ с $\psi(0) \neq 0$ (т.е. индекс коэффициента c_j^0 соответствует такому его значению, при котором в интеграле (3.25) появляется слагаемое dt/t). Если этот коэффициент равен нулю, тогда главные части для $\tilde{\alpha}_{2m}(\rho)$ и $\tilde{\beta}_{2m}(\rho)$ тоже будут как (3.19), причем при их вынесении за скобку в скобке останется аналитическая функция в виде суммы четных степеней ρ (как в уравнениях (3.21), (3.22) и (3.24)).

При вычислении $a_{2m}(\rho)$ по формуле (3.14) нужно еще учитывать вид функций $C_1(\rho)$ и $C_2(\rho)$, заданных интегралами (3.15)–(3.16). В них тоже могут быть интегралы, дающие $\ln \rho$. Учитывая главные части участвующих в них функций, получаем, что в интеграле (3.16) логарифмы появиться не могут (под интегралом могут быть только положительные степени переменной t), а при вычислении интеграла (3.15) с учетом формул (3.12), (3.13), (3.25) и (3.27) функция $c \ln \rho$ может появиться лишь в случае, когда

$$-\nu_{2m} + 2\nu_m - 2k + 2i = 0 \quad (3.28)$$

при некотором $i \geq 0$. Если функции $\tilde{\alpha}_{2m}(\rho)$ и $C_1(\rho)$ не содержат логарифмического слагаемого, то будем говорить, что поверхность и гармоника с номером m ее аналитического б.м. изгибания 1-го порядка *удовлетворяют условию M*. Это условие гарантированно выполнено, если равенства (3.26) и (3.28) не удовлетворяются ни при каких натуральных j и i (это так, если, например, ν_{2m} является нецелым или целым нечетным числом).

Положим $\nu_m = 1 - k + x$, $x = \sqrt{m^2(2k-1) + (k-1)^2}$. Решение (3.22) определяет аналитическую гармонику $\alpha_m(\rho, \theta) = \alpha_m(\rho) \cos m\theta$ лишь для натуральных значений $k \geq 1$ и $m \geq 2$, связанных диофантовым уравнением Пелля (см. [10])

$$x^2 - (2k-1)m^2 = (k-1)^2, \quad (3.29)$$

решение которого с натуральным $x > 1$ определяет $\nu_m = x - k + 1$. Для полюса с уплотнением всегда $k \geq 2$, а решения уравнения (3.29) для m идут с большими лакунами. При условии, что ν_{2m} нецелое, или целое нечетное, или четное, но с нулевым значением коэффициента $C_{k-1+\nu_{2m}}^0$ в (3.27), верны эквивалентности (3.19), а тогда верны равенства (3.20). Следовательно, для $a_{2m}(\rho)$ имеем следующее представление:

$$a_{2m}(\rho) = \rho^{2\nu_m-2k} \left(A_0^{(2m)} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j^{(2m)} \rho^{2j} \right). \quad (3.30)$$

Для аналитичности гармоник $\alpha_m(\rho) \cos m\theta$ и $a_{2m}(\rho) \cos 2m\theta$ необходимо и достаточно, чтобы числа ν_m и k удовлетворяли условиям

$$\nu_m = m + 2p, \quad 2\nu_m - 2k = 2m + 2q, \quad (3.31)$$

где p, q – целые числа, $p \geq 0, q \geq 0$. Покажем, что для любого решения (x, m) уравнения (3.29) определяемое им значение $\nu_m = x - k + 1$ удовлетворяет первому условию в (3.31). Действительно, положим $n = k - 1$ и представим уравнение (3.29) в виде $(x - n)(x + n) = (2n + 1)m^2$. Отсюда имеем $x > n$. Пусть $x - n = m + P$, тогда $x + n = 2n + m + P$ и

$$(m + P)(2n + m + P) = P^2 + 2(n + m)P + m(2n + m) = (2n + 1)m^2.$$

Так как $P(P + 2n + 2m) = 2nm(m - 1)$, то P должно быть четным числом. Допустим, $P < 0$. Тогда

$$0 < x - n < m, \quad \frac{1}{x - n} > \frac{1}{m} \Rightarrow (x + n) = \frac{(2n + 1)m^2}{x - n} > (2n + 1)m.$$

Значит, $x + n = 2n + m + P > (2n + 1)m$, т.е. $P = 2p > 0$. Тогда $\nu_m = x - (k - 1) = x - n = m + 2p$, что и утверждалось.

Для удовлетворения второго условия в (3.31) нужно отобрать среди решений x уравнения (3.29) те их значения, для которых x имеет вид $x = m + q + 2k - 1$ с четным значением суммы $k + q$. Следовательно, среди решений уравнения (3.29) нас устраивают только те x и m , для которых выполнено соотношение $x = m + k - 1 + 2p$ с $2p \geq k$. Если мы отобрали x и m с выполнением этого условия, а коэффициент $A_0^{(2m)}$ в (3.30) равен нулю, тогда показатели степени $2\nu_m - 2k + 2j$ с $j \geq 1$ будут отличаться от $2m$ на положительное четное число, поэтому аналитичность $a_{2m}(\rho) \cos 2m\theta$ тоже будет гарантирована. Если же $a_{2m}(\rho)$ тождественно равно нулю (а такое бывает, как это отмечено в сноске 6), тогда в соотношениях (3.20) коэффициент $A_2 \neq 0$, и отсюда выводим, что при выбранных значениях ν_m остальные две компоненты б.м. изгибания 2-го порядка будут аналитическими функциями. Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 5. Пусть аналитическая поверхность вращения с меридианом $z = \varphi(\rho) \sim \rho^{2k}$, $\rho \rightarrow 0$, и гармоника с номером m ее аналитического б.м. изгибания 1-го порядка удовлетворяют условию M . Тогда для продолжаемости

рассматриваемой гармоники б.м. изгиба 1-го порядка в окрестности полюса в аналитическое б.м. изгибание 2-го порядка необходимо и достаточно, чтобы уравнение (3.29) имело решение вида $x = t + k - 1 + 2p$ с $2p \geq k$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если номер t гармоники аналитического б.м. изгиба 1-го порядка окрестности полюса таков, что число ν_{2m} не является целым четным и уравнение (3.29) имеет решение вида $x = t + k - 1 + 2p$ с $2p \geq k$, тогда эта гармоника допускает продолжение в аналитическое б.м. изгибание 2-го порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если число ν_{2m} нецелое ли целое нечетное, тогда равенства (3.26) и (3.28) невозможны, значит, все условия теоремы 6 выполнены.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Мы хотим обратить внимание на то, что, во-первых, при данном k аналитическая гармоника для б.м. изгиба 1-го порядка существует не для всякого номера t , во-вторых, без априорного требования аналитичности гармоники существуют для любого номера t , в-третьих, требование на выбор значений x и t является необходимым условием возможности соответствующего продолжения и без предположения выполнения условия M .

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Наличие логарифмического слагаемого в интеграле (3.25) или (3.12) само по себе не закрывает возможность аналитичности $a_{2m}(\rho)$, а только сильно усложняет дальнейшее исследование этого вопроса.

Практическое применение теоремы (т.е. проверку наличия нужного вида решения уравнения (3.29)) можно проводить двумя способами.

1) Для решения уравнения (3.29) существует хорошо разработанный метод. Тогда к известным программам решения этого уравнения нужно добавить программу отбора для данного k тех значений номеров t нетривиальных гармоник, для которых выполнено условие, что число $x = t + k - 1$ является неотрицательным четным числом.

2) В уравнение (3.29) подставить вместо x его требуемое значение $x = t + k - 1 + 2p$ и получить диофантово уравнение относительно p и t (которое, однако, является довольно сложным), а затем составить программу для его решения в целых числах. Полученные значения $p \geq 0$ и $t \geq 2$ дадут уже без всякого отбора нужную картину распределения порядков уплощения, дающих нежесткие поверхности с известной аналитической нежесткостью/жесткостью 2-го порядка.

Чтобы убедиться, что существуют оба вида поверхностей (т.е. с жесткостью или нежесткостью 2-го порядка), достаточно получить из уравнения для p и t некоторые простые неравенства, дающие достаточные условия для возможности продолжения/непродолжения гармоник с номером t в б.м. изгибание 2-го порядка. Например, условие $3(k - 1) > 2m(m - 2)$ является достаточным для невозможности продолжения, а условие $3(k - 1) \leq 2m(m - 2)$ является необходимым для возможности продолжения. Такой прямой проверкой с использованием таблицы 1 номеров нетривиальных гармоник из [1] можно убедиться,

что, например, для уплощений порядка $2k - 2 = 14, 20$ и 32 нетривиальные гармоники соответственно с номерами $m = 4$, $m = 3$ и $m = 4$ нельзя продолжить в аналитические б.м. изгибания 2-го порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Если удастся найти порядок уплощения такой, что поле аналитических б.м. изгибаний 1-го порядка окрестности полюса с соответствующим уплощением содержит только одну нетривиальную гармонику и для этого номера нет его продолжения в б.м. изгибание 2-го порядка, тогда эта поверхность будет первым примером с локальной жесткостью 2-го порядка.

§ 4. Б.м. изгибания поверхности вращения с двумя полюсами

Теперь рассмотрим вопрос о жесткости/нежесткости 2-го порядка для поверхностей вращения “в целом” с уплощениями в полюсах. На этот раз меридианом поверхности является гладкая кривая вида $(x(t), z(t))$ с $x(t) \geq 0$, ортогонально пересекающая ось Oz в двух точках, скажем, с $z = z_1 = 0$ и $z = z_2 = 1$. В работах [10], [11] доказано, что если такая кривая имеет внутреннюю точку, в которой касательная к кривой параллельна оси Ox , то соответствующая поверхность не допускает б.м. изгибаний 2-го порядка для очень широкого класса меридианов (в частности, это верно для всех аналитических кривых с таким свойством). Поэтому вопрос о жесткости/нежесткости 2-го порядка надо рассматривать лишь для поверхностей с однозначной проекцией ее меридиана на ось Oz , представимом уравнением вида $x = \rho(z)$, $\rho(0) = \rho(1) = 0$ с соответствующими требованиями на гладкость. В окрестности полюсов должны выполняться условия

$$\rho(z) \sim z^p, \quad 0 < p < 1, \quad z \rightarrow 0; \quad \rho(z) \sim (1 - z)^q, \quad 0 < q < 1 \quad (4.1)$$

(уплощения соответствуют значениям $p < 1/2$, $q < 1/2$). Сказанное является полезным для конкретного нахождения изгибающих полей, а мы хотим установить только качественную картину на основе установленной выше информации о б.м. изгибаниях 2-го порядка в окрестности полюса. Условие, наложенное на меридиан, обеспечивает существование и продолжение гармоник для б.м. изгибаний и 1-го, и 2-го порядков в интервале (z_1, z_2) , значит, нам интересно изучить их поведение только в окрестностях полюсов. Поэтому мы можем применить проведенное выше исследование, выбрав в качестве аргумента ρ , расстояние от оси вращения¹¹. Очевидно, если в окрестности какого-нибудь полюса для данной гармоники с номером m нет ее продолжения в б.м. изгибание 2-го порядка, такого продолжения нет и на всей поверхности. Значит,

¹¹ Более подробно это можно описать так: мы рассматриваем уравнения и их решения в целом на всем интервале (z_1, z_2) , а при изучении их поведения при $z \rightarrow z_1 = 0$ или $z \rightarrow z_2 = 1$ переходим в полученных соотношениях к переменной ρ , дающей расстояние от точек меридиана до оси вращения. Тогда решения, регулярные в геометрическом смысле в целом на поверхности, переходят в решения, регулярные в каждом полюсе относительно регулярной декартовой параметризации с представлением поверхности в виде $z = z(x, y)$ (выбор z как одной из внутренних координат поверхности не дает в окрестности полюса регулярную параметризацию поверхности), с последующим переходом к полярным координатам.

предполагаем, что в окрестности каждого полюса выполнены условия теоремы 5, гарантирующие локальное существование б.м. изгибания 2-го порядка.

Пусть аналитическая поверхность вращения рода 0 в целом допускает аналитическое б.м. изгибание 1-го порядка, представленное гармоникой с номером $m \geq 2$. Рассмотрим б.м. изгибания 1-го порядка с гармоникой с номером $2m$, которые существуют на поверхности с выколотыми полюсами. Возможны два варианта.

1) Эта гармоника дает б.м. изгибание всей поверхности. Это значит, что в окрестности каждого полюса функция $\alpha_{2m}(\rho)$ имеет убывание порядка $\rho^{\nu_{2m}(k_1)}$ и $\rho^{\nu_{2m}(k_2)}$, где целые числа $k_1 \geq 1$ и $k_2 \geq 1$, $k_1 \neq k_2$, определяют порядки уплощений $2k_1 - 2$ и $2k_2 - 2$ в полюсах (они связаны с параметрами p из q (4.1) равенствами $2k_1 = 1/p$, $2k_2 = 1/q$).

2) Эта гармоника дает б.м. изгибание 1-го порядка в окрестности одного полюса, и ее продолжение нерегулярно в окрестности другого полюса. Это значит, что $\alpha_{2m}(\rho)$ имеет порядок $\rho^{\nu_{2m}(k_1)}$ в окрестности, скажем, первого полюса, и порядок $\rho^{2-2k_2-\nu_{2m}(k_2)}$ в окрестности второго полюса.

Рассмотрим первый вариант. Тогда в окрестностях полюсов функция $a_{2m}(\rho)$ получается точно по такому же правилу, как это было сделано выше в локальном рассмотрении. Так как мы предполагаем, что решения уравнения (3.29) в обоих случаях выбраны соответствующим образом, то построенная по формуле (3.14) функция $a_{2m}(\rho)$ обеспечивает продолжение рассматриваемой гармоники в аналитическое поле б.м. изгибания 2-го порядка всей поверхности.

Пусть выполнен второй вариант и пусть в первом полюсе есть продолжение в б.м. изгибание 2-го порядка. Мы приходим к второму полюсу с интегралами (3.15), (3.16) для $C_1(\rho)$ и $C_2(\rho)$ с другим поведением α_{2m} , нежели в первом полюсе. А именно, убывающая около первого полюса гармоника $\alpha_{2m}^{(1)}(\rho)$ подходит ко второму полюсу как неограниченно возрастающая функция $\tilde{\alpha}_{2m}^{(2)}(\rho)$ и, аналогично, возрастающая около первого полюса функция $\tilde{\alpha}_{2m}^{(1)}(\rho)$ переходит в убывающую около второго полюса гармонику $\alpha_{2m}^{(2)}(\rho)$. Это значит, что функция $C_1(\rho)$, определенная в окрестности первого полюса формулой (3.15), в окрестности второго полюса будет определена интегралом

$$(\lambda^2 - \mu^2)\rho_0 \int_{\rho}^{\rho_0} \left(\frac{\tilde{\beta}_{2m}(t)F_m^{(2)}(t)}{4t^3\varphi_2'(t)} - \frac{\tilde{\alpha}_{2m}(t)G_m^{(2)}(t)}{2t^3} \right) dt,$$

т.е. как $-C_2(\rho)$. Следовательно, выражение (3.14) для $a_{2m}(\rho)$ сохранит свой вид и определит б.м. изгибание 2-го порядка для всей поверхности. Итак, получена

ТЕОРЕМА 6. *Для того чтобы гармоника с номером m , задающая аналитическое б.м. изгибание 1-го порядка на всей поверхности с однозначно проектирующимся на ось вращения аналитическим меридианом $\rho = \rho(z)$ и удовлетворяющая в окрестности каждого полюса условию M , была продолжаема на всей поверхности в аналитическое б.м. изгибание 2-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы она была продолжаема в аналитическое б.м. изгибание 2-го порядка в окрестности каждого полюса.*

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Эту теорему, как и теорему 6, можно рассматривать как обобщение установленного в работе [12] признака нежесткости 2-го порядка поверхности вращения с полюсами без уплощения. В этой работе доказывается продолжаемость в регулярное б.м. изгибание 2-го порядка гармоник с номером m в предположении, что поверхность не допускает регулярной гармоник с номером $2m$, причем под регулярностью понимается обращение компонент б.м. изгиба в нуль в полюсах, а в полюсах кривизна поверхности положительна, т.е. в них нет уплощения. Мы же допускаем, что гармоника с номером $2m$ может обращаться в полюсах в нуль любого нецелого или целого нечетного порядка, и это условие оказывается достаточным для справедливости теоремы даже локально, в окрестности одного полюса (при отсутствии в полюсах уплощения имеем $\nu_m = m$, $\nu_{2m} = 2m$, поэтому может быть выполнено запрещенное равенство (3.28), значит, при наличии регулярной хотя бы в одном полюсе $(2m)$ -й гармоник нельзя гарантировать, что даже только в окрестности этого полюса есть локальная нежесткость 2-го порядка, именно поэтому в работе [12] и предположено, что нет регулярной на всей поверхности гармоник с номером $2m$). По-видимому, теорема о продолжаемости б.м. изгиба 1-го порядка верна в предположении, что *поверхность в целом не допускает аналитической гармоник порядка $2m$* , т.е. и без требования невозможности равенства (3.28).

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Выше мы получили некоторые признаки *продолжаемости* б.м. изгиба 1-го порядка в б.м. изгибание 2-го порядка. Что касается признаков *непродолжаемости* одной гармоник б.м. изгиба 1-го порядка в б.м. изгибание 2-го порядка, то нужно искать такой номер m и такие порядки уплощений в полюсах, что для одного из них или для обоих не выполнены нужные требования на решение системы (3.29). В работах [1] и [13] даны таблицы, в которых приводятся порядки уплощений и номера существующих для этих уплощений гармоник. Мы уже приводили пример использования таблицы из [1]. В [13] есть таблицы номеров нетривиальных гармоник для замкнутых поверхностей с согласованными порядками уплощений в полюсах (как известно из [14], такие поверхности допускают только конечное число линейно независимых полей б.м. изгибов 1-го порядка). Из соответствующей таблицы в [13] можно попытаться подобрать такие согласованные порядки уплощений, что конечная линейная комбинация существующих нетривиальных гармоник оказалась непродолжаемой в б.м. изгибание 2-го порядка. Тогда мы получим пример замкнутой поверхности рода 0 с жесткостью 2-го порядка. А для получения первого примера с локальной жесткостью 2-го порядка в аналитическом классе можно работать с уплощениями так называемого квадратного порядка, которые рассмотрены в работе [1].

Примеры. 1) Рассмотрим поверхность вращения с полюсами, имеющими уплощения порядка $2k_1 - 2 = 60$ (т.е. $k_1 = 31$) и $2k_2 - 2 = 132$ (т.е. $k_2 = 67$). Эта поверхность согласно [13] допускает б.м. изгибание с гармоникой с номером $m = 11$. На обоих полюсах значения ν_{2m} не являются целыми, следовательно,

по следствию 2 поверхность и гармоника удовлетворяют условию M . Можно проверить, что для первого полюса

$$x = 91 = m + k_1 - 1 + 2p = 11 + 30 + 2p < 2p = 50 > k_1,$$

следовательно, продолжение гармоник в б.м. изгибание 2-го порядка возможно. Такие же вычисления показывают, что для второго полюса $x = 143$, $2p = 66 < k_2 = 67$, значит, искомое продолжение в окрестности этого полюса, а следовательно, и на всей поверхности, невозможно.

2) Пусть $k_1 = 9$, $k_2 = 81$. Согласно [13] соответствующая поверхность вращения допускает б.м. изгибания с гармоникой с номером $m = 64$. На обоих полюсах значения ν_{2m} не являются целыми – условие M выполнено. На этот раз вычисления показывают, что на обоих полюсах получаем значения $2p > k$, значит, эта поверхность обладает нежесткостью 2-го порядка. Это первый конкретный пример аналитической поверхности с таким свойством.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Как отметил рецензент, в работе [15] строится пример гооморфной сфере поверхности вращения с нежесткостью 2-го порядка. Но, во-первых, построенная там поверхность заведомо не является аналитической (ее двусвязная аналитическая часть, ограниченная двумя параллелями, некоторым специальным образом искусственно продолжается до замкнутой поверхности с двумя полюсами, что может дать максимальную гладкость только класса C^∞), во-вторых, приведенное доказательство существования нужной нежесткой поверхности основано на предположении о непрерывной зависимости семейства решений дифференциального уравнения при непрерывном изменении его коэффициентов, но в данном случае происходит обращение в нуль коэффициента при старшей производной, поэтому справедливость этого предположения в такой ситуации желательно бы обосновать.

§ 5. Приложение: доказательство одного признака единственности гармоник с условиями (2.19)

ТЕОРЕМА 7. Пусть система (2.23)–(2.24) имеет решение с выполнением условий (2.19), для которого компонента $\alpha_m(\rho)$ имеет в точке $\rho = 0$ изолированный нуль. Тогда это решение является единственным (с точностью до постоянного множителя) решением этой системы с выполнением условий (2.19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в отрезке $[0, \rho_0]$ функция $\alpha_m(\rho)$ обращается в нуль только в точке $\rho = 0$ и пусть, скажем, в нем $\alpha(\rho) > 0$, $\rho \neq 0$. Умножая в случае необходимости на некоторое число, можем считать, что выполнено равенство $\alpha_m(\rho_0) = 1$. Обозначим эту функцию через $y_1(\rho)$, а соответствующую функцию $\beta_m(\rho)$ обозначим через $z_1(\rho)$. Будем рассматривать систему (2.23)–(2.24) как систему вида

$$\begin{cases} y'_x = p(x)y + q(x)z, \\ z'_x = r(x)y + s(x)z. \end{cases}$$

Тогда имеем

$$p = \frac{m^2}{\rho}, \quad q = \frac{m^2 - 1}{\rho\varphi'(\rho)}, \quad r = -\frac{m^2}{\rho}\varphi'(\rho), \quad s = -\frac{m^2 - 1}{\rho}.$$

Составим по формулам (3.11) новое решение (y_2, z_2) системы с $y_2(\rho_0) = 0$, $z_2(\rho_0) = 1$, линейно независимое от данного решения. Получим

$$y_2(\rho) = \frac{(1 - m^2)y_1(\rho)}{\rho_0} \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{dt}{\varphi'(t)y_1^2(t)}, \quad \rho < \rho_0, \quad (5.1)$$

$$z_2(\rho) = \frac{\rho}{\rho_0 y_1(\rho)} + \frac{(1 - m^2)z_1(\rho)}{\rho_0} \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{dt}{\varphi'(t)y_1^2(t)}, \quad \rho < \rho_0. \quad (5.2)$$

Так как $y_1(t) > 0$ при $t < \rho_0$, то в $(0, \rho_0)$ всюду $y_2(\rho) < 0$, но при $\rho \rightarrow 0$ в силу условий (2.19) должно быть

$$y_2(\rho) \rightarrow 0, \quad \frac{y_2(\rho)}{\rho} \rightarrow 0. \quad (5.3)$$

Для $z_2(\rho)$ имеем представление

$$z_2(\rho) = \frac{z_1(\rho)}{y_1(\rho)} y_2(\rho) + \frac{\rho}{\rho_0 y_1(\rho)} = \frac{\rho}{\rho_0 y_1(\rho)} \left(1 + \frac{y_2(\rho)z_1(\rho)}{\rho} \rho_0 \right).$$

Но в силу соотношений (2.17) и (5.3) имеем, что

$$\frac{\rho}{y_1(\rho)} \rightarrow \infty, \quad \frac{z_1(\rho)y_2(\rho)}{\rho} \rightarrow 0,$$

следовательно,

$$z_2(\rho) = \beta_m^{(2)}(\rho) \rightarrow \infty, \quad \rho \rightarrow 0,$$

что и доказывает несуществование второго регулярного решения. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Как мы уже упоминали выше, условие теоремы выполняется, в частности, для поверхностей вращения, выпуклых в окрестности полюса, и в случае степенного порядка уплощения поверхности в полюсе, а более общее условие дается теоремами 1 и 2 из [1]. Было бы интересно установить необходимые и достаточные условия единственности регулярного решения, и еще более интересно было бы найти признаки или хотя бы примеры меридианов гладких поверхностей, для которых система (2.23), (2.24) имеет в окрестности полюса два регулярных и линейно независимых решения¹². Тогда можно было бы легко построить примеры замкнутых нежестких поверхностей вращения: для этого достаточно, чтобы меридиан поверхности был из этого класса в окрестности каждого или хотя бы одного полюса, и в этом случае регулярное поле б.м. изгибания из окрестности одного полюса автоматически продолжится регулярным образом на всю поверхность.

¹²Такой пример в случае конического полюса приведен в [1].

В заключение считаю свои долгом выразить благодарность рецензенту за замечания, которые помогли улучшить изложение материала. В частности, последний параграф появился как ответ на соответствующее замечание рецензента.

Список литературы

- [1] И. Х. Сабитов, “Жесткость и неизгибаемость “в малом” и “в целом” поверхностей вращения с уплощениями в полюсах”, *Матем. сб.*, **204**:10 (2013), 127–160; англ. пер.: I. Kh. Sabitov, “Infinitesimal and global rigidity and inflexibility of surfaces of revolution with flattening at the poles”, *Sb. Math.*, **204**:10 (2013), 1516–1547.
- [2] И. Иванова-Каратопраклиева, И. Х. Сабитов, “Бесконечно малые изгибания второго порядка поверхностей вращения с уплощением в полюсе”, *Матем. заметки*, **45**:1 (1989), 28–35; англ. пер.: I. Ivanova-Karatopraklieva, I. Kh. Sabitov, “Second-order infinitesimal bendings of surfaces of rotation with densification at a pole”, *Math. Notes*, **45**:1 (1989), 19–24.
- [3] I. Ivanova-Karatopraklieva, “Infinitesimal bendings of higher order of rotational surfaces”, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **43**:12 (1990), 13–16.
- [4] I. Ivanova-Karatopraklieva, “Infinitesimal bendings with sliding of higher order of rotational surfaces”, *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.*, **84**:1–2 (1990), 69–82 (Russian).
- [5] С. Э. Кон-Фоссен, “Нежесткие замкнутые поверхности”, *УМН*, **9**:1(59) (1954), 63–81; *Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом*, Физматгиз, М., 1959, 10–29; пер. с нем.: S. E. Cohn-Vossen, “Unstarre geschlossene Flächen”, *Math. Ann.*, **102**:1 (1929), 10–29.
- [6] Н. Г. Перлова, И. Х. Сабитов, “Жесткость второго порядка желобов вращения класса C^2 ”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. мех.*, 1975, №5, 47–52; англ. пер.: N. G. Perlova, I. H. Sabitov, “Second order rigidity of belts of revolution of class C^2 ”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **30**:5-6 (1975), 36–40.
- [7] А. Д. Александров, “Об одном классе замкнутых поверхностей”, *Матем. сб.*, **4(46)**:1 (1938), 69–77.
- [8] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т. III, 9-е изд., часть 2, ГИТТЛ, М.–Л., 1957, 464 с.; англ. пер.: V. I. Smirnov, *A course of higher mathematics, v. III: Complex variables. Special functions*, Part 2, Pergamon Press, Reading, Mass.–London; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1964, x+700 pp.
- [9] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970, 720 с.; пер. с англ.: Ph. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1964, xiv+612 pp.
- [10] И. Х. Сабитов, “О бесконечно малых изгибаниях желобов вращения. I”, *Матем. сб.*, **98(140)**:1(9) (1975), 113–129; англ. пер.: I. Kh. Sabitov, “On infinitesimal bendings of troughs of revolution. I”, *Math. USSR-Sb.*, **27**:1 (1975), 103–117.
- [11] И. Х. Сабитов, “О бесконечно малых изгибаниях желобов вращения. II”, *Матем. сб.*, **99(141)**:1 (1976), 49–57; англ. пер.: I. Kh. Sabitov, “On infinitesimal bendings of troughs of revolution. II”, *Math. USSR-Sb.*, **28**:1 (1976), 41–48.
- [12] Э. Г. Позняк, “Соотношение между нежесткостью первого и второго порядка для поверхностей вращения”, *УМН*, **14**:6(90) (1959), 179–184.
- [13] А. Ю. Нестеренко, “Нахождение целочисленных решений системы связанных уравнений Пелля”, *Матем. заметки*, **86**:4 (2009), 588–600; англ. пер.: A. Yu. Nesterenko, “Determination of integer solutions of a system of simultaneous Pell equations”, *Math. Notes*, **86**:4 (2009), 556–566.

- [14] И. Х. Сабитов, “Исследование жесткости и неизгибаемости аналитических поверхностей вращения с уплощением в полюсе”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 1986, № 5, 29–36; англ. пер.: I. Kh. Sabitov, “A study of the rigidity and inflexibility of analytic surfaces of revolution with flattening at the pole”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **41**:5 (1986), 33–41.
- [15] Э. Г. Позняк, “О нежесткости второго порядка”, *УМН*, **16**:1(97) (1961), 157–161.

Идждад Хакович Сабитов
(Idzhad Kh. Sabitov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: isabitov@mail.ru

Поступила в редакцию
06.02.2014 и 28.08.2014