Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Буаве, П. М. Готье, П. В. Парамонов, Продолжения типа Рунге и Уолша гладких субгармонических функций на открытых римановых поверхностях, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 1, 5–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8345>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:02:33

УДК 517.574+517.545

А. Буаве, П. М. Готье, П. В. Парамонов

Продолжения типа Рунге и Уолша гладких субгармонических функций на открытых римановых поверхностях

Изучается несколько постановок проблемы C^m -субгармонических продолжений на открытых римановых поверхностях. Эта проблема полностью решается (при всех $m \in [0, +\infty)$) для так называемых продолжений типа Рунге. Несколько (в определенном смысле точных) достаточных условий и контрпримеров найдено также для продолжений типа Уолша. В качестве приложений эти результаты позволяют доказать существование C^m -субгармонических продолжений, автоморфных относительно некоторых подходящих групп автоморфизмов произвольной открытой римановой поверхности.

Библиография: 22 названия.

Ключевые слова: субгармоническая функция, риманова поверхность, функция Грина, локализационный оператор, группа автоморфизмов.

DOI: 10.4213/sm8345

§ 1. Введение

В настоящей статье продолжается и в определенном смысле завершается длинная серия работ, посвященных субгармоническим (или супергармоническим) продолжениям функций. С результатами, касающимися C^m -продолжений субгармонических функций в евклидовых областях, читатель может ознакомиться в работах [1] и [2], а также в приведенной там литературе. В работе [1] указанная проблема была полностью решена (при всех $m \in [0, +\infty)$) для так называемых продолжений типа Рунге. Ранее в работе [3] аналогичный результат был установлен для непрерывных продолжений (т.е. C^0 -продолжений) на римановых многообразиях. В настоящей статье доказывается, что результаты, полученные в работах [1] и [2], остаются справедливыми для произвольных открытых римановых поверхностей. Для продолжений типа Уолша приведено несколько контрпримеров, показывающих, что соответствующие достаточные условия (приведенные здесь и в [2]) являются в определенном смысле точными.

В § 2 рассматриваются C^m -субгармонические продолжения типа Рунге. В § 3 мы имеем дело с C^m -субгармоническими продолжениями типа Уолша. В § 4 в качестве приложений доказывается существование C^m -субгармонических

Все авторы частично поддерживаются грантами NSERC (Канада). Работа третьего автора также частично поддержана Программой поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2900.2014.1).

продолжений, инвариантных относительно некоторых подходящих групп автоморфизмов произвольной открытой римановой поверхности. В § 5 кратко обсуждаются новые задачи и возможные обобщения наших результатов.

§ 2. Характеристика пар

C^m -субгармонического продолжения типа Рунге

Для любой открытой римановой поверхности Ω существует голоморфное отображение ρ поверхности Ω в комплексную плоскость $\mathbb{C}$, являющееся локальным гомеоморфизмом (см. [4]). Отображение ρ индуцирует комплексную структуру на Ω , совпадающую с исходной комплексной структурой на Ω , поскольку ρ локально биголоморфно. Мы будем называть отображение ρ *размазывающим* для Ω , а пару $\{\Omega, \rho\}$ – *размазанной римановой поверхностью* или, сокращенно, *РР-поверхностью*. РР-поверхность $\{\Omega, \rho\}$ есть риманова поверхность Ω , где мы попросту фиксировали тот из (эквивалентных) атласов для Ω , который индуцирован ρ . Обозначим через $P(q, r)$ параметрический диск (определяемый ρ) в Ω с центром в точке $q \in \Omega$ и с радиусом $r > 0$ (если таковой существует). Последнее означает, что $P(q, r)$ является открытой связной окрестностью точки q , причем ρ отображает $P(q, r)$ взаимно однозначно на плоский круг

$$B(\rho(q), r) := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |z - \rho(q)| < r\}.$$

Поскольку всякая замена координат (с помощью ρ) является тождественным отображением, мы можем определить частные производные функций на $\{\Omega, \rho\}$ и, следовательно, ввести C^m -пространства гладких функций на $\{\Omega, \rho\}$. Конкретно, для произвольного открытого множества W в Ω и для любого $m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ обозначим через $C^m(W)$ пространство (вещественнозначных) функций $f(p)$ на W таких, что для всякого параметрического диска $P(q, r)$, лежащего в W , функция $f_{qr}(z) = f(\rho_{qr}^{-1}(z))$ (где $\rho_{qr}^{-1}(z)$ есть голоморфная ветвь обратной функции к ρ , которая отображает $B(\rho(q), r)$ на $P(q, r)$) принадлежит классу $C^m(B(\rho(q), r))$. При $p \in W$ параметрический диск $P(p, t)$ существует для достаточно малых t , поэтому все следующие производные:

$$\partial^\beta f(p) := \left. \frac{\partial^{\beta_1 + \beta_2} f_{pt}(z)}{\partial^{\beta_1} x \partial^{\beta_2} y} \right|_{z=\rho(p)},$$

определены корректно для любых $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ с условием $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 \leq m$.

Определим также банаховы пространства

$$BC^m(W) := \left\{ f \in C^m(W) : \|f\|_{mW} = \max_{|\beta| \leq m} \|\partial^\beta f\|_W < +\infty \right\},$$

где $\|f\|_E := \sup_{p \in E} |f(p)|$ – равномерная норма на непустом множестве E в Ω . При этом пространства $C^m(W)$ естественно становятся пространствами Фреше.

Банаховы пространства $BC^m(W)$ и $B\text{Lip}^m(W)$ (с конечными нормами $\|f\|_{mW}$), а также пространства Фреше $C^m(W)$ и $\text{Lip}^m(W)$ на открытых множествах W в $\{\Omega, \rho\}$ могут быть определены и для всех $m \geq 0$ дословно, как

в случае $\Omega = \mathbb{C}$ (см. [2; § 5]). Единственное (небольшое) различие состоит в том, как определяется модуль непрерывности $\omega_E^m(f, \delta)$. Во-первых, мы вводим расстояние $d_\Omega(p, q)$ между точками p и q в Ω как нижнюю грань длин путей σ , соединяющих p и q , где длина пути σ считается равной евклидовой длине соответствующей проекции $\rho(\sigma)$. Теперь для вещественной функции g , ограниченной на (более чем одноточечном) множестве $E \subset \Omega$, и заданного $m \in [0, 1]$ так называемый m -модуль непрерывности функции g на E определяется ($\delta > 0$ является переменной) следующим образом:

$$\omega_E^m(f, \delta) := \sup \frac{|g(p) - g(q)|}{(d_\Omega(p, q))^m},$$

где верхняя грань берется по всем $p \in E$ и $q \in E$ с условием $0 < d_\Omega(p, q) < \delta$.

Пусть теперь X – замкнутое множество в Ω и $m \geq 0$ произвольно. Обозначим через $BC^m(X)$ (соответственно $B\text{Lip}^m(X)$, $m > 0$) пространство функций f на X таких, что f может быть продолжена до функции из пространства $BC^m(\Omega)$ (соответственно из $B\text{Lip}^m(\Omega)$). Для $f \in BC^m(X)$ (соответственно $f \in B\text{Lip}^m(X)$) определим (банахову) норму:

$$\|f\|_{mX} := \inf \|F\|_{m\Omega},$$

где указанная нижняя грань взята по всем возможным продолжениям $F \in BC^m(\Omega)$ (соответственно $F \in B\text{Lip}^m(\Omega)$) с условием $F|_X = f$.

При этом пространства Фреше $C^m(X)$ (соответственно $\text{Lip}^m(X)$, $m > 0$) для замкнутых множеств X определяются по аналогии с тем, как это делается для открытых множеств. Для компактных множеств X пространства $C^m(X)$ могут быть отождествлены с $BC^m(X)$ (соответственно $\text{Lip}^m(X)$ отождествим с $B\text{Lip}^m(X)$).

Для открытого множества W в Ω обозначим через $SH(W)$ (соответственно через $SH(W)$) класс всех гармонических (соответственно субгармонических) функций на W . Как обычно, $C_0^\infty(W)$ обозначает пространство всех C^∞ -функций на W с компактным носителем в W .

Пусть W – открытое множество в Ω и $m \geq 0$. Мы говорим, что (W, Ω) является парой C^m -субгармонического продолжения типа Рунге для замкнутых множеств (короче, C^m СГПР-парой), если для всякого замкнутого (в Ω) множества X , $X \subset W$, и для любой функции $f \in SH(W) \cap C^m(W)$ найдется такая функция $F \in SH(\Omega) \cap C^m(\Omega)$, что $F|_X = f|_X$.

Пусть $\Omega^* = \Omega \cup \infty_\Omega$ обозначает одноточечную компактификацию Ω по Александру. Подмножество A в Ω называется Ω -ограниченным, если A относительно компактно в Ω . Последнее означает, что замыкание $\bar{A}$ множества A (в Ω) является компактным подмножеством в Ω . Назовем Ω -дырой множества A любую Ω -ограниченную компоненту (связности) множества $\Omega \setminus A$. Ясно, что $\Omega^* \setminus A$ связно тогда и только тогда, когда A не имеет Ω -дыр. Всякая Ω -ограниченная область D с C^∞ -гладкой границей в Ω будет кратко называться ОГ-областью.

В следующей теореме дается чисто топологическая характеристика C^m СГПР-пар, аналогичная той, которая была получена в [3] и [1].

ТЕОРЕМА 1. Пусть W – открытое подмножество открытой римановой поверхности Ω , и пусть $m \geq 0$. Следующие условия эквивалентны:

- (a) (W, Ω) является C^m СГПР-парой;
- (b) $\Omega^* \setminus W$ связно.

Отметим, что, в отличие от C^m -субгармонических продолжений типа Уолша (рассматриваемых в § 3 ниже), характеристика, данная в теореме 1, не зависит от конкретного значения параметра гладкости m , а также от выбора ρ . Полезно также отметить, что для открытых множеств W в Ω пространства функций $SH(W)$ и $C^m(W)$ могут быть корректно определены независимо от выбора размазывающего отображения ρ в Ω .

Следующий базовый частный случай этой теоремы является следствием ее доказательства (а не только формулировки).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\{\Omega, \rho\}$ – РР-поверхность, W открыто в Ω и $m \geq 0$. Если $\Omega^* \setminus W$ связно и $f \in SH(W) \cap BC^m(W)$, то для любого замкнутого (в Ω) множества X , $X \subset W$, найдется функция $F \in SH(\Omega) \cap C^m(\Omega)$ такая, что $F|_X = f|_X$, и для каждого компактного множества Y в Ω мы можем дополнительно иметь оценку

$$\|F\|_{mY} \leq A \|f\|_{mW},$$

где $A > 0$ не зависит от f .

Доказательство теоремы 1 основывается на приведенных ниже семи леммах. Результаты первых трех лемм хорошо известны, однако нам не удалось найти прямых доступных ссылок. Поэтому приводим их краткие доказательства для удобства читателя.

Напомним, что согласно хорошо известной теореме Римана об униформизации универсальной накрывающей поверхностью для Ω является либо открытый круг, либо вся комплексная плоскость. В первом случае Ω называют гиперболической, а во втором – параболической (см. [5]). Эта классификация используется геометрами, и мы будем называть ее геометрической классификацией, поскольку имеется другая традиционная классификация, восходящая еще к М. Брелю (не опубликовано), которая используется аналитиками. Мы будем говорить, что открытая риманова поверхность является гиперболической или параболической в смысле теории потенциала в зависимости от того, существует на ней непостоянная положительная супергармоническая функция или нет (см. [6; гл. V, § 2]). Хорошо известно, что открытая риманова поверхность является гиперболической (в смысле теории потенциала), если и только если на ней имеется функция Грина. Комплексная плоскость $\mathbb{C}$ является параболической, а единичный круг (в $\mathbb{C}$) – гиперболическим соответственно в обеих классификациях. Дважды проколотаая плоскость $\mathbb{C}'' = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ является примером области, которая гиперболична в первом смысле, но не гиперболична во втором. Для доказательства гиперболичности $\mathbb{C}''$ в первом смысле предположим, что ее универсальная накрывающая поверхность есть $\mathbb{C}$. В этом случае соответствующее универсальное накрывающее отображение является целой функцией, непринимаящей два значения и, следовательно, постоянной по теореме Пикара. Следовательно, $\mathbb{C}$ не может быть универсальной накрывающей поверхностью. Поэтому таковой является диск, откуда $\mathbb{C}''$ является

гиперболической в геометрическом смысле. Чтобы установить, что $\mathbb{C}''$ не является гиперболической в смысле теории потенциала, предположим, что функция u ограничена снизу и супергармонична на $\mathbb{C}''$. Поскольку изолированные особенности устранимы для ограниченных снизу супергармонических функций (см. [7; теорема III. 30]), u продолжается до супергармонической функции на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$. Следовательно, u постоянна, и мы показали, что не существует непостоянной ограниченной снизу супергармонической функции на $\mathbb{C}''$. Таким образом, $\mathbb{C}''$ является параболической в смысле теории потенциала. В настоящей работе мы будем пользоваться только классификацией в смысле теории потенциала, просто говоря о римановой поверхности – “гиперболическая” или “параболическая”.

Всюду далее мы фиксируем нормальное исчерпание $\{\Omega_j\}_{j=1}^{+\infty}$ римановой поверхности Ω . Последнее означает, что Ω_j являются ОГ-областями, удовлетворяющими условиям: $\overline{\Omega_j} \subset \Omega_{j+1}$ для всех j и $\Omega = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \Omega_j$. Напомним также, что всякая ОГ-область регулярна относительно задачи Дирихле (см. [6; гл. III, § 2], [5], [7]).

ЛЕММА 1. *Если Ω является гиперболической и $W \subset \Omega$ – область в Ω , то W – тоже гиперболическая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u – непостоянная положительная супергармоническая функция на Ω , и пусть $p \in W$. Выберем точку $q \in \Omega$ так, чтобы $u(p) \neq u(q)$, и найдем некоторую ОГ-область D в Ω , граница которой содержит точки p и q . Пусть u_D – модификация Пуассона функции u , соответствующая области D . Последнее означает, что на D функция u_D совпадает с обобщенным решением задачи Дирихле с граничными данными u , а на $\Omega \setminus D$ имеем $u_D = u$. Тогда u_D также является положительной супергармонической функцией на Ω . Покажем, что u_D непостоянна на D . В самом деле, поскольку u_D супергармонична и D регулярна, мы имеем

$$\liminf_{x \rightarrow p, x \in D} u_D(x) = u_D(p) = u(p) \neq u(q) = u_D(q) = \liminf_{x \rightarrow q, x \in D} u_D(x),$$

т.е. u_D непостоянна на D . Поскольку u_D гармонична на D , она непостоянна на каждом открытом подмножестве в D . В частности, она непостоянна на $D \cap W$. Итак, $u_D|_W$ – непостоянная положительная супергармоническая функция на W , т.е. W гиперболична, как и утверждалось. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Для произвольной римановой поверхности Ω и ОГ-области D в Ω области D и $\Omega \setminus \overline{D}$ (в случае связности последней) являются гиперболическими.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega \setminus \overline{D}$ связна. Достаточно найти непостоянную положительную супергармоническую функцию u на $\Omega \setminus \overline{D}$; остальное тривиально. Рассмотрим упомянутое выше нормальное исчерпание $\{\Omega_j\}_{j=1}^{+\infty}$ для Ω . Мы можем предположить, что $\overline{D} \subset \Omega_1$, поэтому найдется ОГ-область Ω_0 с условием $\overline{\Omega_0} \subset \Omega_1 \setminus \overline{D}$. Пусть $D_0 \supset D_1 \supset \dots \supset D$ – семейство последовательно вложенных ОГ-областей ($\Omega_0 \cap \overline{D_0} = \emptyset$), пересечение которых есть $\overline{D}$; таким образом, $\{\Omega_j \setminus \overline{D_j} : j \in \mathbb{N}\}$ является исчерпанием множества $\Omega \setminus \overline{D}$. Пусть ω_j – гармоническая мера множества $\partial\Omega_0$ относительно $(\Omega_j \setminus \overline{D_j}) \setminus \overline{\Omega_0}$. Возрастающая

последовательность функций ω_j сходится к неотрицательной гармонической функции ω на $(\Omega \setminus \overline{D}) \setminus \overline{\Omega}_0$. Обозначая через h решение задачи Дирихле на $(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega}_0) \setminus \overline{D}$ с граничными данными 0 на ∂D и 1 на $\partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_1$, мы имеем $\omega_j < h < 1$ на $(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega}_0) \setminus \overline{D}_j$. Поскольку каждая функция ω_j имеет граничные значения, равные 1 на $\partial\Omega_0$, и $\{\omega_j\}$ является возрастающей, мы получаем, что функция ω также имеет граничные значения, равные 1 на $\partial\Omega_0$, а поскольку $\omega \leq h < 1$ на $(\Omega_1 \setminus \overline{\Omega}_0) \setminus \overline{D}_j$, мы заключаем, что ω непостоянна. Положим u равной ω на $(\Omega \setminus \overline{D}) \setminus \overline{\Omega}_0$ и равной 1 на Ω_0 . Тогда u непостоянная, неотрицательная и супергармоническая. Следовательно, $\Omega \setminus \overline{D}$ гиперболична. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть Ω_0 – произвольная ОГ-область в Ω , и пусть D – какая-либо связная компонента множества $\Omega \setminus \Omega_0$, не являющаяся Ω -ограниченной. Положим $\Gamma = \partial D$ ($\Gamma \subset \partial\Omega_0$). Тогда найдется функция $g \in H(D) \cap C^1(\overline{D})$ такая, что $g|_{\Gamma} \equiv 0$ и $g > 0$ в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D_0 – некоторая связная окрестность множества $\overline{D}$ с гладкой границей. Согласно предыдущим леммам соответствующая риманова поверхность D_0 является гиперболической. Фиксируем $q_0 \in D_0 \setminus \overline{D}$ и определим $g_0(p) = G_0(p, q_0)$, где G_0 – функция Грина на D_0 . Без ограничения общности мы можем предположить, что $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1$.

Рассмотрим два случая. В первом случае предположим, что найдется хотя бы одна последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$ в D с условиями $p_n \rightarrow \infty_{\Omega}$ и $g_0(p_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ положим $D_j = \Omega_j \cap D$ (D_j является ОГ-областью), и пусть $\Gamma_j = \partial D_j \setminus \Gamma = \partial\Omega_j \cap D$. Выберем $h_j \in H(D_j) \cap C(\overline{D}_j)$ с условиями $h_j|_{\Gamma} \equiv 1$ и $h_j|_{\Gamma_j} \equiv 0$. Пусть $a = \min_{p \in \Gamma} \{g_0(p)\}$, откуда $a > 0$ и $ah_j(p) \leq g_0(p)$ на D_j . Поскольку $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ возрастает и ограничена, функция $h(p) = \lim_{j \rightarrow +\infty} h_j(p)$ принадлежит $H(D)$. Более того, $0 \leq h \leq 1$. Из условий $h|_{\Gamma} \equiv 1$ и

$$\liminf_{p \rightarrow \Gamma} h(p) \geq \liminf_{p \rightarrow \Gamma} h_j(p) = 1$$

вытекает, что $h \in H(D) \cap C(\overline{D})$. При любом фиксированном j и всех $k > j$ имеем $ah_k \leq g_0$ на D_k , откуда следует, что $ah_k \leq g_0$ на D_j . Поскольку это верно для всех $k > j$, мы получаем, что $ah \leq g_0$ на D_j , и ввиду произвольности j находим, что $ah \leq g_0$ на D . Но тогда $h(p_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Таким образом, h – непостоянная функция и $h(p) < 1$ на D . Остается взять $g = 1 - h$.

Во втором случае не существует указанной выше последовательности $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, откуда следует, что $\liminf_{p \in D, p \rightarrow \infty_{\Omega}} g_0(p) > 0$. По [6; теорема V.12J] мы можем найти функцию $u_0 \in H(D_0)$ такую, что $\lim_{p \in D, p \rightarrow \infty_{\Omega}} u_0(p) = +\infty$. Мы также можем предположить, что $u_0 > 0$ в $\overline{D}$. Положим $b = \max_{p \in \Gamma} \{u_0(p)\}$ и $b_1 = \max_{p \in \Gamma_1} \{u_0(p)\}$. Определим функцию $u_-(p) = \max\{0, u_0(p) - (b + 1)\}$ в $\overline{D}$, для которой $u_-|_{\Gamma} \equiv 0$, $u_-(p) \rightarrow +\infty$ при $p \rightarrow \infty_{\Omega}$ ($p \in D$) и $u_- \in SH(D) \cap C(\overline{D})$. Теперь возьмем $u_1 = 1 - h_1$ (h_j введены чуть выше) и положим $u_+(p) = \min\{(b_1 + 1)u_1(p), u_0(p)\}$ при $p \in \overline{D}_1$ и $u_+(p) = u_0(p)$ при $p \in D \setminus \overline{D}_1$, приняв во внимание, что на D_1 функция u_- является гармонической, а u_+ супергармонической. Тогда $(-u_+) \in SH(D) \cap C(\overline{D})$, $u_+(p) = (b_1 + 1)u_1(p)$ в некоторой окрестности Γ (в $\overline{D}$) и $u_-(p) \leq u_+(p)$ в $\overline{D}$. Последовательность функций $g_j(p) \in H(D_j) \cap C(\overline{D}_j)$ с условиями $g_j|_{\Gamma} \equiv 0$ и $g_j|_{\Gamma_j} \equiv u_+|_{\Gamma_j}$ является убывающей и удовлетворяет неравенству $g_j|_{\Gamma_j} \geq u_-|_{\Gamma_j}$. Поэтому функция

$g(p) = \lim_{j \rightarrow +\infty} g_j(p)$ принадлежит $H(D) \cap C(\overline{D})$ и удовлетворяет свойствам $g|_{\Gamma} = 0$ и $g(p) \geq u_-(p) \rightarrow +\infty$ при $p \rightarrow \infty_{\Omega}$ ($p \in D$), что и требовалось.

Свойство $g \in C^1(\overline{D})$ следует из локальных рассуждений (на параметрических дисках в Ω , пересекающих Γ) с использованием конформного отображения на единичный круг и принципа симметрии для гармонических функций. Лемма доказана.

Всюду далее мы также фиксируем покрытие РР-поверхности $\{\Omega, \rho\}$ параметрическими дисками $\{P_n = P(q_n, r_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ и ассоциированное с ним разбиение единицы $\{\psi_n \in C_0^\infty(P_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ со следующими свойствами:

1°) для каждого n удвоенный параметрический диск $2P_n = P(q_n, 2r_n)$ также определен (т.е. отображение $\rho: 2P_n \rightarrow 2B_n = B(\rho(q_n), 2r_n)$ является биголоморфным с обратной функцией $\rho_n^{-1}: 2B_n \rightarrow 2P_n$);

2°) для каждой точки $q \in \Omega$ можно найти параметрический диск $P(q, r)$, пересекающий только конечное число дисков P_n ;

3°) $\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(p) \equiv 1$ на Ω .

Обозначим через $G(p, q)$ функцию Грина (соответственно ядро Эванса) для Ω , если Ω является гиперболической (соответственно параболической; см. [6; гл. V, §§ 2, 3]). Для произвольно заданных $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in C_0^\infty(P_n)$ и открытого множества $W \subset \Omega$, содержащего P_n , определим оператор типа Витушкина (см. [8]) $V_\varphi[f]: C^2(W) \rightarrow C(\Omega)$ по формуле

$$V_\varphi[f](p) = \frac{1}{\pi i} \int_{B_n} G(p, \rho_n^{-1}(\zeta)) \frac{\partial^2 f(\rho_n^{-1}(\zeta))}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \varphi(\rho_n^{-1}(\zeta)) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}. \quad (1)$$

Обозначим через $\text{Supp } \varphi$ носитель функции φ .

ЛЕММА 4. Для каждого $m \geq 0$ и каждого открытого множества $W \subset \Omega$ с условием $P_n \subset W$ оператор V_φ может быть продолжен до непрерывного оператора из $C^m(W)$ в $C^m(\Omega)$. Точнее, для каждого компактного множества Y в Ω найдется постоянная $A > 0$ с условием

$$\|V_\varphi[f]\|_{mY} \leq A \|f\|_{m \text{ Supp } \varphi} \quad \text{для всех } f \in C^m(W). \quad (2)$$

Более того, $\Delta(V_\varphi[f]) = \varphi \Delta f$ в Ω в обобщенном смысле, откуда $V_\varphi[f] \in H(\Omega \setminus \text{Supp } \varphi)$ и $V_\varphi[f] \in H(D)$ (соответственно $V_\varphi[f] \in SH(D)$) на каждом открытом множестве $D \subset P_n$, где $f \in H(D)$ (соответственно $f \in SH(D)$) и $\varphi(p) \geq 0$ в D).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы предполагает использование обобщенных функций на римановой поверхности Ω . Однако поскольку мы имеем дело с РР-поверхностями, с помощью размазывающего отображения ρ мы можем применять теорию обобщенных функций на Ω абсолютно так же, как на произвольных открытых множествах евклидова пространства. Эта лемма доказана при $m = 0$ в [9; теорема 2.1.2] (см. также [10; лемма 1]). Поскольку равномерная оценка гармонической функции на некоторой области включает C^m -оценки этой функции на компактных подмножествах этой области, легко показать, что (2) справедливо для любого компакта $Y \subset \Omega \setminus P_n$. Установим (2) для компактов $Y \subset 2P_n$. Ядро $G(p, q)$ при $(p, q) \in 2P_n \times 2P_n$ имеет вид $G(p, q) = -\log |\rho(p) - \rho(q)| + h(p, q)$, где $h(p, q)$ гармонична на $2P_n$ по

переменной p при любом фиксированном $q \in 2P_n$. Кроме того, $h(p, q)$ является непрерывной на $2P_n \times 2P_n$ по совокупности переменных. Таким образом, доказательство леммы 4 сведено к хорошо известному случаю $\Omega = \mathbb{C}$ и $G(z, w) = -\log|z - w|$ (см. [1; с. 209] и приведенную там литературу). Возьмем теперь $\psi \in C_0^\infty(P(q_n, 5/(3r_n)))$ с условием $\psi(p) = 1$ на $P(q_n, 4/(3r_n))$. Для доказательства (2) при произвольном Y остается рассмотреть функции $\psi V_\varphi[f]$ и $(1 - \psi)V_\varphi[f]$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Предложение 1 справедливо при условии компактности множества X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathbf{P} = (\Omega, \rho, \{\Omega_j\}_{j=1}^{+\infty}, \{P_n, \psi_n\}_{n=1}^{+\infty}, W, m, X)$ и фиксируем f в рассматриваемых условиях. Пусть $M = \|f\|_{mW}$. Выберем $\psi \in C_0^\infty(W)$, $0 \leq \psi(p) \leq 1$, $\psi(p) = 1$ на X . По теореме Сарда (см. [11; теорема 1.4.6]) найдется $t \in (0, 1)$ такое, что множество уровня $T = \{p \in W : \psi(p) = t\}$ состоит из конечного числа попарно не пересекающихся C^∞ -гладких жордановых кривых (т.е. t – регулярное значение функции ψ). Следовательно, множество $E = \{p \in W : \psi(p) > t\}$ является конечным объединением попарно не пересекающихся ОГ-областей. При этом $X \subset E \subset \overline{E} \subset W$ и $\partial E = T$. Пусть $\{Q_j\}_{j=1}^J$ – семейство всех Ω -ограниченных компонент множества $\Omega \setminus \overline{E}$. Тогда каждая Q_j содержится в W (поскольку $\Omega^* \setminus W$ связно) и $\overline{Q_j} \subset W$. Положим

$$W_1 = E \cup \bigcup_{j=1}^J \overline{Q_j};$$

тогда W_1 есть C^∞ -гладкое Ω -ограниченное открытое множество, для которого $\partial W_1 \subset T$ и $\Omega^* \setminus W_1$ связно. Выберем $\varphi_1 \in C_0^\infty(W)$ с условиями $0 \leq \varphi_1(p) \leq 1$, $\varphi_1(p) = 1$ в некоторой окрестности U_1 множества $\overline{W_1}$, $\overline{U_1} \subset W$ и определим

$$f_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} V_{\varphi_1 \psi_n}[f].$$

По лемме 4 имеем $f_1 \in C^m(\Omega) \cap SH(\Omega)$. Более того, для любого компакта $Y \subset \Omega$ найдется $A_1 = A_1(\mathbf{P}, Y) > 0$ такое, что

$$\|f_1\|_{mY} \leq A_1 M.$$

Положим $g_1 = f - f_1$. Поскольку $\Delta g_1(p) = (1 - \varphi_1(p))\Delta f(p)$, имеем $g_1 \in H(U_1)$. Ясно, что $\|g_1\|_{mU_1} \leq (1 + A_1)M$. Пусть $\varphi_2 \in C_0^\infty(U_1)$, $0 \leq \varphi_2(p) \leq 1$, $\varphi_2(p) = 1$ на $\overline{W_1}$ (функция φ_2 будет выбрана позже), и пусть $f_2 = \varphi_2 g_1$. Так как $f = f_1 + f_2$ на $\overline{W_1}$ (следовательно, и на X), остается нужным образом продолжить функцию f_2 . Напомним, что $f_2 \in H(W_1)$, $f_2 \in C_0^\infty(U_1)$, и для каждого $\ell \geq 0$ имеем

$$\|f_2\|_{\ell U_1} = \|f_2\|_{\ell \Omega} \leq A_3 M$$

при $A_3 = A_3(\mathbf{P}, \varphi_2, \ell)$. В частности,

$$\|\Delta f_2\|_{U_1} \leq A_4 M, \quad A_4 = A_4(\mathbf{P}, \varphi_2).$$

Пусть теперь $D_1, \dots, D_S$ суть Ω -неограниченные компоненты множества $\Omega \setminus \overline{W_1}$. Пользуясь леммой 3, для каждого $s \in \{1, \dots, S\}$ выберем функцию $g_s \in H(D_s) \cap C^1(\overline{D_s})$ с условиями $g_s|_{\partial D_s} \equiv 0$ и $g(p) > 0$ на D_s . Кроме того, положим $g_s = 0$ вне $\overline{D_s}$. Фиксируем $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell > \max\{2, m\}$, и определим $F_s = (g_s)^\ell$. Утверждается, что $F_s \in C^m(\Omega) \cap SH(\Omega)$. Действительно, из соотношений

$$\frac{\partial F_s}{\partial x} = \ell \cdot g_s^{\ell-1} \cdot \frac{\partial g_s}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_s}{\partial y} = \ell \cdot g_s^{\ell-1} \cdot \frac{\partial g_s}{\partial y}$$

непосредственно вытекает (в следующей формуле мы полагаем правую часть равной 0 на ∂D_s), что

$$\Delta F_s(p) = \ell(\ell-1)(g_s(p))^{\ell-2} |\nabla g_s(p)|^2, \quad 1 \leq s \leq S.$$

Мы можем дополнительно считать, что $\|F_s\|_{mY} \leq A_5(\mathbf{P}, Y)$. По теореме Сарда для каждого s найдется достаточно малое $t_s > 0$ такое, что линия уровня $T_s = \{p \in \Omega \mid g_s(p) = t_s\}$ является гладкой (регулярной для g_s), $T_s \subset U_1$ и T_s “хорошо приближает” ∂D_s изнутри D_s . Поскольку $\nabla g_s(p) \neq 0$ на T_s , существуют непересекающиеся окрестности (коридоры) V_s множеств T_s в U_1 с условиями $|\nabla g_s(p)| \geq \epsilon_s > 0$ и $|g_s(p)| \geq \epsilon_s > 0$ в V_s , где ϵ_s зависят только от W_1 и, возможно, от некоторых других параметров в $\mathbf{P}$. Теперь мы выберем вышеупомянутую функцию φ_2 так, чтобы

$$\{p \in \Omega \mid 0 < \varphi_2(p) < 1\} \subset \bigcup_{s=1}^S V_s.$$

Поскольку f_2 является гармонической вне $V_1 \cup \dots \cup V_S$, остается найти $\lambda_1, \dots, \lambda_S > 0$ с условием, чтобы для любого $p \in V_1 \cup \dots \cup V_S$, например $p \in V_{s_0}$, выполнялась оценка

$$\Delta f_2(p) + \Delta \sum_{s=1}^S \lambda_s F_s(p) \geq -A_4 M + \lambda_{s_0} \cdot \ell(\ell-1) \epsilon_{s_0}^{\ell-2} \cdot \epsilon_{s_0}^2 \geq 0.$$

Мы можем взять

$$\lambda_s = \frac{A_4 M}{\ell(\ell-1) \epsilon_s^\ell}, \quad 1 \leq s \leq S.$$

Наконец, положим

$$F = f_1 + f_2 + \sum_{s=1}^S \lambda_s F_s.$$

Поскольку указанные λ_s оцениваются через $M = \|f\|_{mW}$, мы имеем требуемую оценку

$$\|F\|_{mY} \leq A \|f\|_{mW},$$

где $A > 0$ не зависит от f . Лемма доказана.

Окончания доказательств теоремы 1 и следствия 1 аналогичны приведенным в [1; леммы 3, 4]. Поскольку эти доказательства весьма короткие, мы приведем их здесь для полноты изложения и соответствия в обозначениях.

ЛЕММА 6. Пусть $E \subset V \subset \Omega$, где E замкнуто (в Ω), V открыто и $\Omega^* \setminus V$ связно. Тогда найдется открытое множество U такое, что $E \subset U \subset \overline{U} \subset V$, граница ∂U является гладкой и оба множества $\Omega^* \setminus U$ и $\Omega^* \setminus \overline{U}$ связны. Более того, для любого заданного исчерпания $\{\Omega_j\}_{j=1}^{+\infty}$ поверхности Ω (с указанными выше свойствами) и для любого компактного множества K в Ω найдется такое j , что каждая Ω -дыра множества $\overline{U} \cup K$ содержится в Ω_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдется $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ с условиями: $0 \leq \varphi(p) \leq 1$, $\varphi(p) = 0$ на E и $\varphi(p) = 1$ на $\Omega \setminus V$. По теореме Сарда найдется такое $\lambda \in (0, 1)$, что линия уровня $\{p \in \Omega : \varphi(p) = \lambda\}$ является C^∞ -гладкой (регулярной). Положим $U_\lambda = \{p \in \Omega : \varphi(p) < \lambda\}$, и пусть U является объединением U_λ и всех компактных компонент множества $\Omega \setminus U_\lambda$. Указанное U есть то, что нужно.

Действительно, так как ∂U является гладкой, связность множества $\Omega^* \setminus \overline{U}$ следует из связности $\Omega^* \setminus U$. Предположим от противного, что для некоторого исчерпания $\{\Omega_j\}_{j=1}^{+\infty}$ поверхности Ω найдутся компакт K в Ω и последовательность $\{Q_j\}_{j=1}^{+\infty}$ различных Ω -дыр множества $\overline{U} \cup K$ такие, что Q_j пересекает $\Omega \setminus \overline{\Omega}_j$, $j \in \{1, 2, \dots\}$. Выберем j_1 такое, что $W_1 := \Omega_{j_1}$ содержит K . Поскольку каждое Q_j связно и его замыкание пересекает K (иначе Q_j является Ω -дырой для $\overline{U}$, что не так), найдется точка $a_j \in Q_j \cap \partial W_1$, $j \geq j_1$. Выбирая (при необходимости) подпоследовательность, мы можем предполагать, что $\{a_j\}_{j \geq j_1}$ сходится к некоторой точке $a \in \partial W_1$. Поскольку $a \notin K$ и разные точки a_j принадлежат разным Ω -дырам множества $\overline{U} \cup K$, мы получаем, что $a \in \partial U$. Ясно, что $\varphi(a) = \lambda$ и $\nabla \varphi(a) \neq 0$ согласно выбору λ . Следовательно, точка a имеет окрестность, в которой множество $\{p : \varphi(p) > \lambda\}$ связно. Однако это противоречит тому, что каждая окрестность точки a пересекает бесконечно много различных Q_j . Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\Omega^* \setminus W$ связно и $f \in SH(W) \cap C^m(W)$, то для каждого компактного множества X , $X \subset W$, найдется такое $F \in SH(\Omega) \cap C^m(\Omega)$, что $F|_X = f|_X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь леммой 6, мы можем найти такую открытую окрестность U множества X , которая компактно вложена в W , и при этом $\Omega^* \setminus U$ связно. Ясно, что $f \in BC^m(U) \cap SH(U)$, и мы можем применить лемму 5.

ЛЕММА 7. Пусть $E \subset V \subset \Omega$, где E замкнуто (в Ω), V открыто и $\Omega^* \setminus V$ связно. Пусть $m \geq 0$, $f \in SH(V) \cap C^m(V)$, и пусть K – компакт в Ω . Тогда найдутся окрестность V_1 множества $E \cup K$ и $f_1 \in SH(V_1) \cap C^m(V_1)$ такие, что $\Omega^* \setminus V_1$ связно и $f_1 = f$ на E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\Omega_j\}_{j=1}^{+\infty}$ – нормальное исчерпание для Ω . Найдется такое j_0 , что $K \subset \Omega_{j_0}$. По лемме 6 можно найти открытое множество U с условиями: $E \subset U \subset \overline{U} \subset V$, ∂U гладкое, $\Omega^* \setminus \overline{U}$ связно, причем найдется $j_1 > j_0$ такое, что каждая Ω -дыра множества $\overline{U} \cup \overline{\Omega}_{j_0}$ содержится в Ω_{j_1} . Пусть E_1 является объединением замкнутого множества $\overline{U} \cup \overline{\Omega}_{j_0}$ со всеми его Ω -дырами. Тогда E_1 замкнуто и $E_1 \subset \overline{U} \cup \overline{\Omega}_{j_1}$. Множество E_1 не имеет Ω -дыр, поэтому нетрудно (от противного) показать, что внутренность V_1 множества E_1 также не имеет Ω -дыр; иными словами, $\Omega^* \setminus V_1$ связно. Ясно также, что $E \cup K \subset V_1$. Мы утверждаем, что $V_1 \subset \overline{\Omega}_{j_1} \cup U$. Действительно,

$V_1 \subset E_1 \subset \overline{\Omega_{j_1}} \cup \overline{U}$ и, следовательно, ни одна точка $a \in \partial U \setminus \overline{\Omega_{j_1}}$ не может быть внутренней для E_1 . Отсюда немедленно вытекает, что $V_1 \subset \overline{\Omega_{j_1}} \cup U \subset \Omega_{j_1+1} \cup U$.

Для рассматриваемой функции f , $X = \overline{U} \cap \overline{\Omega_{j_1+1}}$ и $W = V$ мы можем применить следствие 1 и найти функцию $F_1 \in SH(\Omega) \cap C^m(\Omega)$ такую, что $F_1 = f$ на $\overline{U} \cap \Omega_{j_1+1}$. Более того, если $f \in SH(V) \cap BC^m(V)$, то, дополнительно применяя лемму 5, мы можем выбрать F_1 так, что для всякого компакта Y в Ω выполняется оценка $\|F_1\|_{mY} \leq A\|f\|_{mV}$. Остается определить $f_1 = F_1$ в $\Omega_{j_1+1} \cap V_1$ и $f_1 = f$ на $U \cap V_1 = U$. Как уже было замечено, $V_1 \subset \overline{\Omega_{j_1}} \cup \overline{U}$, поэтому f_1 определена корректно на V_1 . Лемма доказана.

Мы готовы доказать теорему 1 и предложение 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 И ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Часть (а) $\implies$ (b) в теореме 1 может быть доказана по аналогии со случаем $m = 0$ (см. [3; с. 48]). Действительно, предположим, что $\Omega \setminus W$ имеет Ω -ограниченную компоненту K . Пусть $\{W_j\}$ – регулярное исчерпание множества W . Тогда при некотором j компонента G множества $\Omega \setminus \overline{W_j}$, содержащая K , является относительно компактной в Ω . Выберем $p_0 \in \partial K$. Поскольку вторая проблема Кузена разрешима на открытых римановых поверхностях (см. [5]), найдется мероморфная функция $\Phi(p)$ на Ω , которая не имеет нулей и имеет в точности один простой полюс в точке p_0 . Положим $f = \log |\Phi|$. Тогда $f(p_0) = +\infty$ и f является гармонической на $\Omega \setminus \{p_0\}$ и, в частности, на W . Выберем $p_1 \in G \cap W$ так близко к точке p_0 , чтобы

$$f(p_1) > \sup_{p \in \partial G} f(p).$$

Положим $X = \partial G \cup \{p_1\}$. Тогда по принципу максимума f не может быть даже непрерывно продолжена с множества X до функции, субгармонической на Ω . Часть (а) $\implies$ (b) установлена.

Остается доказать (b) $\implies$ (а). Пусть $\{\Omega_j\}_{j=1}^{+\infty}$ – исчерпание для Ω . Положим $f_0 = f$ на $V_0 = W$, и пусть $E_0 = X$. По лемме 7 мы можем по индукции построить последовательность функций f_j , субгармонических и класса C^m на соответствующих окрестностях V_j замкнутых множеств $E_j = X \cup \overline{\Omega_j}$ (взяв $K = \overline{\Omega_j}$ на j -м шаге), причем $\Omega^* \setminus V_j$ связны и $f_j = f_{j-1}$ на E_{j-1} . Функция F , равная f_j на E_j , является корректно определенной функцией класса $SH(\Omega) \cap C^m(\Omega)$. Теорема 1 и предложение 1 доказаны.

Мы также рассмотрим другой вид C^m -субгармонических продолжений типа Рунге, тесно связанный с уже рассмотренным выше. Пусть X – замкнутое подмножество в Ω и $m \geq 0$. Мы скажем, что (X, Ω) является *смешанной парой C^m -субгармонического продолжения типа Рунге для замкнутых множеств* (короче, *смешанной C^m СГПР-парой*), если для каждой окрестности W множества X в Ω и для каждой функции $f \in SH(W) \cap C^m(W)$ найдется функция $F \in SH(\Omega) \cap C^m(\Omega)$ с условием $F = f$ на некоторой окрестности множества X .

В следующей теореме мы даем чисто топологическую характеристику смешанных C^m СГПР-пар, аналогичную данной в [12; гл. 6] для случая $m = 0$ (непрерывное субгармоническое продолжение типа Рунге в сильном смысле).

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – замкнутое подмножество открытой римановой поверхности Ω . Следующие условия эквивалентны:

- (a) (X, Ω) является смешанной C^m СГПР-парой;
- (b) множество $\Omega^* \setminus X$ связно и локально связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство (a) $\implies$ (b) представляет собой подходящую модификацию (и упрощение) аналогичной части доказательства в [12; теорема 6.1].

Предположим сначала от противного, что (a) выполняется, но $\Omega^* \setminus X$ не является связным, т.е. у этого множества есть некоторая Ω -ограниченная компонента D . Фиксируем $q \in D$ и положим $f(p) = G(p, q)$, где $G(p, q)$, как и раньше, есть функция Грина (соответственно ядро Эванса) для Ω , если Ω гиперболическая (соответственно параболическая). По предположению, поскольку f гармоническая в некоторой окрестности множества X , найдутся $F \in SH(\Omega) \cap C^m(\Omega)$ и окрестность W множества X в Ω такие, что $F = f$ на W . Пусть V – некоторая ОГ-область с условием $\overline{D} \subset V \subset D \cup W$. Тогда $F = f$ на ∂D и на ∂V . Пусть $F_D = f_D$ (соответственно $F_V = f_V$) – обобщенное решение в D (соответственно решение в V) задачи Дирихле с граничными данными $F|_{\partial D} = f|_{\partial D}$ (соответственно с граничными данными $F|_{\partial V} = f|_{\partial V}$). Поскольку $(-f)$ и F принадлежат $SH(\Omega)$, мы, очевидно, имеем $f_D \geq f_V$ и $F_D \leq F_V$ в D , откуда $f_D = f_V$ в D . Таким образом, $h = (f_V - f) \in SH(V) \cap C(\overline{V} \setminus \{q\})$, $h \leq 0$ в V и $h = 0$ на ∂V . Тогда ясно, что $h < 0$ в V , но это противоречит поведению в регулярной граничной точке p области D , где $f_V(p) = f_D(p)$ должны быть равны $f(p)$.

Теперь предположим (снова от противного), что $\Omega^* \setminus X$ связно, но не локально связно. Отсюда следует, что (при фиксированном, как ранее, исчерпании $\{\Omega_j\}_{j=1}^{+\infty}$ для Ω) пара (Ω, X) не удовлетворяет так называемому (K, L) -условию (см. [12; §3.7]). Последнее означает, что существует такой компакт K в Ω , что для каждого j найдется Ω -ограниченная компонента D_j множества $\Omega \setminus (K \cup X)$, которая пересекает K и $\Omega \setminus \overline{\Omega_j}$. Взяв, если необходимо, подпоследовательность, мы можем предположить, что $K \subset \Omega_1$ и $D_j \subset \Omega_{j+1}$ при всех j . При каждом j фиксируем $q_j \in D_j \setminus \overline{\Omega_j}$ ($q_j \in \Omega_{j+1}$) и $\varepsilon_j > 0$ такие, что функции $f_j(p) = \varepsilon_j G(p, q_j)$ удовлетворяют оценкам $\|f_j\|_{m\Omega_j} < 2^{-j}$. Возьмем $f(p) = \sum_{j=1}^{+\infty} f_j(p)$. Тогда функция f является гармонической в некоторой окрестности множества X , откуда в силу (b) найдутся функция $F \in SH(\Omega) \cap C^m(\Omega)$ и окрестность W для X в Ω такие, что $F = f$ на W . Заметим, что каждая D_j пересекает $\partial\Omega_1$. Но тогда мы можем найти такое $n \geq 1$, что $(\overline{D_n} \cap \partial\Omega_1) \subset W$. Пусть D – связная компонента множества $D_n \setminus \Omega_1$, содержащая q_n . Поскольку $\partial D \subset W$, достаточно повторить доказательство из предыдущего абзаца для наших новых f, F, D и W .

Для завершения доказательства мы представляем следующую лемму, которая хорошо известна в данной тематике.

ЛЕММА 8. Пусть X – замкнутое подмножество в Ω , для которого $\Omega^* \setminus X$ связно и локально связно. Тогда для всякой окрестности W множества X в Ω можно найти окрестность W_1 множества X такую, что $\overline{W_1} \subset W$ и множество $\Omega^* \setminus W_1$ связно. Более того, если X – компакт, то W_1 можно выбрать Ω -ограниченной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Сарда найдется окрестность U множества X с гладкой границей и условием $\overline{U} \subset W$. Кроме того, U можно выбрать Ω -ограниченным, если X компактно. Пусть $\{\Omega_j\}_{j=1}^{+\infty}$ – упомянутое выше исчерпание для Ω . Пусть $\{E_i\}_{i \in I}$ суть Ω -ограниченные компоненты множества $\Omega \setminus U$ (если таковые имеются, иначе нечего доказывать). Нетрудно видеть, что для каждого j найдется лишь конечное число множеств E_i (скажем, при $i \in I_j$), которые пересекают множество $\Omega_j \setminus \Omega_{j-1}$ (полагаем $\Omega_0 = \emptyset$). Для каждого $i \in I_j$ (с минимально возможным j) фиксируем $a_i \in E_i \cap \Omega_j$. Используя связность и локальную связность множества $\Omega^* \setminus X$, мы можем найти (непрерывные) пути $\gamma_i: [0, +\infty) \rightarrow \Omega \setminus X$ такие, что $\gamma_i(0) = a_i$, $\gamma_i(t) \rightarrow \infty_\Omega$ при $t \rightarrow +\infty$, причем для каждого j' найдется лишь конечное число путей γ_i , пересекающих $\Omega_{j'}$. Положим $\Gamma_i = \gamma_i([0, +\infty))$. Остается взять $W_1 = U \setminus (\bigcup_{i \in I} \Gamma_i)$. Лемма доказана.

Для доказательства включения (b) $\implies$ (a) в теореме 2 мы используем последнюю лемму дважды:

$$X \subset W_2 \subset \overline{W}_2 \subset W_1 \subset \overline{W}_1 \subset W.$$

Теперь остается применить теорему 1 к паре $(\overline{W}_2, W_1)$ для получения нужного продолжения, которое согласуется с f на $\overline{W}_2$, а значит, и в окрестности множества X .

Теорема 2 доказана.

§ 3. Необходимые условия и достаточные условия для смешанных пар C^m -субгармонического продолжения типа Уолша

В этом параграфе мы исследуем проблему характеризации так называемых смешанных пар C^m -субгармонического продолжения типа Уолша. В этом направлении получен ряд необходимых и ряд достаточных условий. Сначала напомним некоторые обозначения. Как и ранее, мы фиксируем произвольную РР-поверхность $\{\Omega, \rho\}$ и $m \geq 0$. Для произвольного замкнутого (непустого) множества X в Ω вместо пространств $BC^m(X)$ и $C^m(X)$, рассматриваемых в § 2, мы будем иметь дело с пространствами типа Уитни $BC_{\text{jet}}^m(X)$ и $C_{\text{jet}}^m(X)$, которые отличаются от предыдущих только при $m \geq 1$ или при $X \neq \overline{X}^\circ$ (см. [13; гл. VI] и [14]). Пространство $BC_{\text{jet}}^m(X)$ состоит из всех (различных) элементов (струй) $F_X := \{\partial^\beta F|_X\}_{|\beta| \leq m}$, $F \in BC^m(\Omega)$, имеющих норму

$$\|F_X\|_{mX} := \inf \{ \|F^*\|_{m\Omega} : F^* \in BC^m(\Omega), F_X^* = F_X \}.$$

В связи с этими пространствами вводятся соответствующие пространства Фреше $C_{\text{jet}}^m(X) = \{F_X \mid F \in C^m(\Omega)\}$. А именно, топология в $C_{\text{jet}}^m(X)$ определяется с помощью счетного семейства полунорм $\|F_X\|_j := \|F_{X_j}\|_{mX_j}$, $j \in \mathbb{N}$, где $X_j = X \cap \overline{\Omega_j}$ (напомним, что $\{\Omega_j\}_{j=1}^{+\infty}$ – фиксированное ранее нормальное исчерпание Ω). Пусть F_X – какая-либо струя в $C_{\text{jet}}^m(X)$. Мы пишем $F_X \in H(X^\circ)$ или $F_X \in SH(X^\circ)$, если F (некоторый представитель для F_X в $BC^m(\Omega)$), суженный на X° , принадлежит $H(X^\circ)$ или $SH(X^\circ)$ соответственно. Заметим, что эти условия определены корректно.

Для заданных РР-поверхности $\{\Omega, \rho\}$, числа $m \geq 0$ и замкнутого множества X в Ω (мы всегда исключаем тривиальные случаи $X = \emptyset$ и $X = \Omega$) мы говорим, что пара (X, Ω) является *смешанной парой C^m -субгармонического продолжения типа Уолша* (или, коротко, *смешанной C^m СГПУ-парой*), если каждая струя $F_X \in C_{\text{jet}}^m(X) \cap SH(X^\circ)$ может быть продолжена до функции $F^* \in C^m(\Omega) \cap SH(\Omega)$ в том смысле, что $F_X^* = F_X$.

При $m \in [0, 1)$ мы не знаем ни одного нетривиального примера замкнутого множества X в Ω (кроме дискретных множеств) такого, что (X, Ω) является смешанной C^m СГПУ-парой. Известно (см. [2; пример 1.3]), что для всякого $m \in [0, 1)$, если X – аналитическая замкнутая жорданова кривая или замкнутая жорданова область в $\mathbb{C}$ с аналитической границей, то $(X, \mathbb{C})$ не является смешанной C^m СГПУ-парой. Дальнейшие результаты в этом параграфе являются новыми даже для $\Omega = \mathbb{C}$. Предыдущие примеры (аналитических замкнутых жордановых кривых и замкнутых жордановых областей с аналитическими границами) при этом представляются простейшими частными случаями.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – замкнутое множество в $\{\Omega, \rho\}$, причем $\Omega^* \setminus X$ не связно. Тогда при всех $m \geq 0$ пара (X, Ω) не является смешанной C^m СГПУ-парой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала фиксируем произвольное $m \in [0, 1)$, и пусть D – некоторая Ω -ограниченная компонента множества $\Omega \setminus X$. Найдем параметрический диск P с условиями $P \subset D$ и $\partial P \cap \partial D = \{q\} \in X$. Выберем $r_0 > 0$ так, чтобы параметрический диск $P_0 = P(q, r_0)$ был определен. Мы можем дополнительно предположить, что $\rho(P_0) = B(0, r_0) := B_0$ (в частности, $\rho(q) = 0$) и что $B = \rho(P) = B(-t, t)$ при некотором $t \in (0, r_0/4)$, которое будет выбрано позже. Фиксируем произвольное $\mu \in (m, 1)$ и определим функцию $h_t(z) = (z/(z+t))^\mu$ (с условием $h_t(0) = 0$), где голоморфная (конформная) ветвь последней функции вне $[-t, 0]$ выбрана так, что $h_t(x) > 0$ при $x > 0$. Поскольку функция $z/(z+t)$ отображает область $U = \mathbb{C} \setminus \overline{B}$ на $B(1, 1)$, функция h_t отображает область U на некую жорданову область V с условием

$$\overline{V} \setminus \{0\} \subset \left\{ z \in B(1, 1) : |\arg(z)| < \frac{\mu\pi}{2} \right\}. \quad (3)$$

Последнее можно легко проверить, используя элементарные неравенства

$$(2 \cos(\theta))^\mu < 2(\cos(\theta))^\mu < 2 \cos(\mu\theta), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Теперь выберем $t = t_0$ с условием $|h_{t_0}(z) - 1| < 1/2$ при $|z| \geq r_0/2$. Определим функцию

$$g(z) := \max\{\log |1 - h_{t_0}(z)|, -\log(2)\}$$

при $z \in \overline{U_0}$, где $U_0 = \mathbb{C} \setminus \overline{B(-t_0, t_0)}$. Ясно, что $g \in B \text{Lip}^\mu(\overline{U_0}) \subset C^m(\overline{U_0})$, $g \in SH(U_0)$ и $g(0) = 0$. Более того, из (3) имеем $g(z) < 0$ в $\overline{U_0} \setminus \{0\}$, и найдутся такие $\varepsilon_0 \in (0, t_0/3)$ и $A_\mu \in (0, 1)$, что оценка

$$eA_\mu \frac{|z|^\mu}{|t_0|^\mu} \leq -g(z) \leq A_\mu^{-1} \frac{|z|^\mu}{|t_0|^\mu} \quad (4)$$

справедлива при всех $z \in \overline{U_0}$ с условием $0 < |z| < \varepsilon_0$. Мы можем дополнительно предположить, что g является гармонической в области $U_0 \cap B(0, \varepsilon_0)$.

Положим $f(p) = g(\rho(p))$ в $\rho^{-1}(B_0 \cap \overline{U_0})$ и $f(p) = -\log(2)$ вне P_0 (где $\rho^{-1}(z)$ есть обратная голоморфная ветвь отображения ρ , которая отображает B_0 на P_0). Ясно, что $f|_X \in BC^m(X) \cap SH(X^\circ)$. Мы докажем, что функция $f|_X$ не может быть продолжена с множества X до C^m -субгармонической функции на Ω . Допустим противное: мы можем найти такое $F(p) \in C^m(\Omega) \cap SH(\Omega)$. Определим $G(z) = F(\rho^{-1}(z))$ на B_0 ($\rho^{-1}(z)$ определена чуть выше). Ясно, что тогда $G(z) \in C^m(B_0) \cap SH(B_0)$. Мы утверждаем, что можно найти такое $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, что при всех $z \in \mathbb{C}$ с условием $0 < |z| < \varepsilon$ имеем $G(z) < 0$. Поскольку $G(0) = 0$, последнее неравенство даст нам нужное противоречие со свойством среднего значения для субгармонической функции G в точке $z = 0$. Пусть $V_0 = \rho(D \cap P_0)$. Нетрудно видеть, что $F(p) < 0$ в $\overline{D} \setminus \{q\}$, откуда $G(z) < 0$ в $\overline{V_0} \setminus \{0\}$. Остается нужным образом оценить функцию G вне $\overline{V_0}$ около точки $z = 0$. Положим $Y_0 = \rho(X \cap \overline{P(q, r_0/2)})$. Тогда $Y_0 \cap V_0 = \emptyset$ и $G(z) = g(z) < 0$ на $Y_0 \setminus \{0\}$. Пусть $W = B(0, \varepsilon_0) \setminus (\overline{V_0} \cup Y_0)$. Тогда $\partial W \subset Y_0 \cup (\partial B(0, \varepsilon_0) \cap \overline{U_0})$. Так как

$$\overline{B\left(-\frac{t_0}{2}, \frac{t_0}{2}\right)} \cap (\partial B(0, \varepsilon_0) \cap \overline{U_0}) = \emptyset,$$

то можно найти константу $A > 0$ такую, что $G(z) \leq g(z) + A \log(|2z + t_0|/t_0)$ на ∂W и, следовательно, на W . Это доказывает наше утверждение в силу (4) и поскольку $\log(|2z + t_0|/t_0) = o(|z|^\mu)$ при $|z| \rightarrow 0$.

Теперь фиксируем $m \geq 1$. Предположим, что $\Omega^* \setminus X$ не связно, но (X, Ω) является смешанной C^m СППУ-парой. Пусть D – некоторая Ω -ограниченная компонента множества $\Omega \setminus X$ и точка $q \in D$ фиксирована. Рассмотрим функцию $f(p) = G(p, q)$, где G , как и ранее, есть функция Грина или ядро Эванса в Ω . При этом струя f_X принадлежит $C_{\text{jet}}^m(X) \cap H(X^\circ)$. По предположению должна существовать функция $F \in C^m(\Omega) \cap SH(\Omega)$ с условием $F_X = f_X$, откуда легко вытекает, что $f = F$ и $\nabla f = \nabla F$ на X . Положим $g = F - f$; тогда $g \in SH(\Omega) \cap C^m(\Omega \setminus \{q\})$, $g < 0$ в D (по принципу максимума) и $g(p) = o(\text{dist}(p, \partial D))$ при $p \rightarrow \partial D$ ($p \in D$). Фиксируем некоторый маленький параметрический диск $P = P(q, r)$ с условием $\overline{P} \subset D$ и положим $W = D \setminus \overline{P}$, что является Ω -ограниченной областью. Выберем нормальное исчерпание $\{D_j\}_{j=1}^{+\infty}$ области D (с условием $\overline{P} \subset D_1$) и положим $W_j = W \cap D_j$. Пусть g_j является решением задачи Дирихле в W_j с граничными данными g на ∂P и 0 на ∂D_j . Последовательность $\{g_j\}_{j=1}^{+\infty}$ является убывающей в W_l при каждом $l \in \mathbb{N}$. По теореме Харнака и принципу максимума функция $g_W = \lim_{j \rightarrow \infty} (g_j)$ принадлежит $H(W)$, причем $g(p) \leq g_W(p) < 0$ в W . Из этого вытекает, что функция h , равная функции g_W на W и 0 вне D , принадлежит классу $C^1(\Omega \setminus \overline{P}) \cap H(\Omega \setminus (\overline{P} \cup \partial D))$. Тогда функция $\partial h = \partial h / \partial z$ непрерывна на $\Omega \setminus \overline{P}$ и голоморфна вне своих нулей. По теореме Радо (см. [15], [16; теорема 12.14]) имеем $\partial h = 0$, откуда $h = \text{const}$ в $\Omega \setminus \overline{P}$, что и приводит к нужному противоречию. Теорема доказана.

При $\Omega = \mathbb{C}$ (здесь всегда $\rho(z) = z$) имеется другой широкий класс контрпримеров.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть Y – такое замкнутое множество в $\Omega = \mathbb{C}$, что его внутренность Y° имеет (непустую) Ω -ограниченную компоненту D . Тогда при любом $t \in [0, 1/2)$ пара (Y, Ω) не является смешанной C^m СГПУ-парой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3 мы можем предположить, что $\Omega^* \setminus Y$ связно, откуда следует, что область D должна быть односвязной. Фиксируем $t \in [0, 1/2)$ и положим $X = Y \setminus D$. Замечая, что $\Omega^* \setminus X$ несвязно, мы следуем первой части доказательства теоремы 3 для построения специальной функции f (используя h_t и g) с условием $f|_X \in BC^m(X) \cap SH(X^\circ)$. Пусть f_D – решение задачи Дирихле в D с граничными данными $f|_{\partial D}$. Определим $f_*(p) = f(p)$ при $p \in Y \setminus D$ и $f_*(p) = f_D(p)$ внутри D . Из [17; лемма 3.2] следует, что $f_D \in C^m(\overline{D}) \cap H(D)$, откуда получаем $f_* \in C^m(Y) \cap SH(Y^\circ)$. Теперь из доказательства теоремы 3 непосредственно следует, что функция f_* не может быть продолжена с множества Y до некоторой функции класса $C^m(\Omega) \cap SH(\Omega)$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть область D такая же, как в предложении 2. Предположим, что D и $t \in [1/2, 1)$ дополнительно удовлетворяют условию (1) из [17; теорема 1.3]. Из доказательства теоремы 1.3 в [17] следует, что $f_D \in C^m(\overline{D}) \cap H(D)$, поэтому те же аргументы, что и выше, дают, что пара (Y, Ω) не является смешанной C^m СГПУ-парой.

Теперь (до конца этого параграфа) рассмотрим случай $t \geq 1$. Сначала мы установим два простых результата для произвольных $\{\Omega, \rho\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $t \geq 3$, то для всех замкнутых множеств X в $\{\Omega, \rho\}$ пара (X, Ω) не является смешанной C^m СГПУ-парой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности мы можем предположить, что найдется такой параметрический диск $P_0 = P(p_0, r_0)$, что для некоторого $r \in (0, r_0/2)$ выполняются равенства $P(p_0, r) \cap X = \emptyset$ и $\overline{P(p_0, r)} \cap X = p_1$ при $\rho(p_0) = 0$ и $\rho(p_1) = r$. Положим $g(z) = (x^2 + y^2)^3 - (9/4)r^2(x^2 + y^2)^2$ (как обычно, $z = x + iy$). Легко проверить, что $\Delta g(z) \geq 0$ при $|z| \geq r$ и $\Delta g(z) = 0$ при $|z| = r$. Пусть $\rho^{-1}(z)$ – обратная голоморфная ветвь для ρ , которая отображает $B_0 = B(0, r_0)$ на P_0 . Положим $f_1(p) = g(\rho(p))$ при $p \in P(p_0, 2r)$ и $f_1(p) = g(2r) = 28r^6$ при $p \notin P(p_0, 2r)$. Выберем теперь функцию $\varphi \in C_0^\infty(P(p_0, 2r))$ с условиями $\varphi \geq 0$ в Ω , $\varphi = 1$ в $P(p_0, 3r/2)$ и определим $f = V_\varphi[f_1]$ (см. равенство (1) выше).

По лемме 4 $f_X \in C^m(X) \cap SH(X^\circ)$ (поскольку $\Delta f = \varphi \Delta f_1 \geq 0$ на X°). С другой стороны, струя f_X не может быть продолжена C^m -субгармонически на некоторую окрестность точки p_1 , поскольку $\Delta(f_1) = 0$ в точке p_1 , $\partial/\partial x(\Delta(f_1)) > 0$ в p_1 , и, следовательно, всякое C^m -продолжение струи f_X должно иметь отрицательный лапласиан при $p \in \rho^{-1}((r - \delta, r))$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $t \in [2, 3)$ и $X \neq \overline{X^\circ}$ замкнуто в $\{\Omega, \rho\}$, то пара (X, Ω) не является смешанной C^m СГПУ-парой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем доказательство для $\Omega = \mathbb{C}$. Общий случай может быть получен с помощью оператора типа Витушкина, как это сделано в доказательстве предложения 3. Предположим, что $z = 0 \in X$, но диск

$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ не пересекает X° при некотором $r > 0$. Положим

$$f(z) = (x^2 + y^2)^2 - 4r^2(x^2 + y^2).$$

Струя $f_X \in C^m(X) \cap SH(X^\circ)$ не может быть продолжена C^m -субгармонически на некоторую окрестность начала координат, поскольку $\Delta f < 0$ при $z = 0$. Предложение доказано.

Как следует из [2; теорема 4.1], если X является конечным объединением попарно не пересекающихся замкнутых жордановых областей Дини–Ляпунова в $\mathbb{C}$, то пара $(X, \mathbb{C})$ является смешанной C^m СГПУ-парой для всех $m \in [1, 3)$. С другой стороны (см. [18; теорема 3.1]), существует жорданова область D в $\mathbb{C}$ с C^1 -гладкой границей, но при этом пара $(\overline{D}, \mathbb{C})$ не является смешанной C^1 СГПУ-парой. В следующем предложении мы приведем новые примеры жордановых областей D_m в $\mathbb{C}$ с кусочно аналитическими границами, для которых пары $(D_m, \mathbb{C})$ не являются смешанными C^m СГПУ-парами для соответствующих $m \in (1, 3)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. При $\alpha \in (0, \pi)$ определим

$$X_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, \arg(z) \in \left[-\pi + \frac{\alpha}{2}, \pi - \frac{\alpha}{2} \right] \right\}.$$

Тогда при каждом $m \in (1, \pi/\alpha)$ пара $(X_\alpha, \mathbb{C})$ не является смешанной C^m СГПУ-парой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим

$$V_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, \arg(z) \in \left[\pi - \frac{\alpha}{2}, \pi + \frac{\alpha}{2} \right] \right\},$$

$$\Gamma_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, \arg(z) = \pm \left(\pi - \frac{\alpha}{2} \right) \right\}.$$

Фиксируем $m \in (1, \pi/\alpha)$ и $\mu \in (m, \pi/\alpha)$ с условием $\cos(\mu(\pi - \alpha/2)) \neq 0$. Положим $f_\mu(z) = -\operatorname{Re}(z_{(o)}^\mu) / \cos(\mu(\pi - \alpha/2))$ (полагаем $f_\mu(0) = 0$) в X_α , где голоморфная ветвь $z_{(o)}^\mu$ аналитической функции z^μ выбрана следующим образом: при $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \in X_\alpha \setminus 0$ с условием $\theta \in (-\pi, \pi)$ мы полагаем $z_{(o)}^\mu = |z|^\mu(\cos(\mu\theta) + i\sin(\mu\theta))$. Таким образом, $f_\mu \in H(X_\alpha^\circ) \cap C^m(X_\alpha)$ и $f_\mu(z) = -|z|^\mu$ на Γ_α . Мы утверждаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти $\mu \in (\pi/\alpha - \varepsilon, \pi/\alpha)$ (среди рассматриваемых выше) такое, что f_μ не может быть продолжена с множества X_α даже до функции класса $C(\overline{B}) \cap SH(B)$, где $B = B(0, 1)$ (тогда, очевидно, f_μ нельзя продолжить C^m -субгармонически с множества X_α на $\Omega = \mathbb{C}$). Снова для получения противоречия предположим, что мы всегда можем найти требуемое продолжение F . Определим функцию $g_\mu(z) = -\operatorname{Re}((-z)_{(o)}^\mu) / \cos(\mu\alpha/2)$ ($g_\mu(0) = 0$) класса $C^m(V_\alpha) \cap H(V_\alpha^\circ)$, где $g_\mu(z) = -|z|^\mu = f_\mu(z)$ на Γ_α . Рассмотрим также функцию $F_\mu \in C(\overline{B})$ с условиями $F_\mu(z) = f_\mu(z)$ на X_α и $F_\mu(z) = g_\mu(z)$ на V_α . Легко получить, что при

каждом $\delta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0, \delta)} F_\mu(z) |dz| &= -2 \int_0^{\alpha/2} \delta^\mu \frac{\cos(\mu\theta)}{\cos(\mu\alpha/2)} \delta d\theta - 2 \int_0^{\pi-\alpha/2} \delta^\mu \frac{\cos(\mu\theta)}{\cos(\mu(\pi-\alpha/2))} \delta d\theta \\ &= -\frac{2\delta^{\mu+1}}{\mu} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\mu\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\mu\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \right). \end{aligned}$$

Наконец, определим функцию $h(z)$ в $V_\alpha \setminus \{-\exp(i\alpha/2), -\exp(-i\alpha/2)\}$ как решение (обобщенной) задачи Дирихле в V_α с граничными данными $h(z) = 0$ на Γ_α и $h(z) = 1$ на $\partial V_\alpha \setminus \Gamma_\alpha$ (которая на самом деле является гармонической мерой в V_α° граничного множества $\partial V_\alpha \setminus \Gamma_\alpha$). Хорошо известно (и может быть легко проверено с помощью конформного отображения области V_α° на верхнюю полуплоскость с последующим использованием формулы Пуассона), что $h(z) = O(|z|^{\pi/\alpha}) = o(|z|^\mu)$ при $z \rightarrow 0$ в V_α . Поскольку F ограничено в V_α , по принципу максимума имеем $F(z) \leq F_\mu(z) + Ah(z)$ в V_α с некоторой постоянной $A > 0$. Следовательно, для достаточно малых $\delta > 0$ получаем

$$\int_{\partial B(0, \delta)} F(z) |dz| \leq o(\delta^{\mu+1}) - \frac{2\delta^{\mu+1}}{\mu} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\mu\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\mu\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \right).$$

Поскольку $\operatorname{tg}(\mu\alpha/2) \rightarrow +\infty$ при $\mu \rightarrow \pi/\alpha - 0$, остается выбрать надлежащее μ с условием $\operatorname{tg}(\mu\alpha/2) + \operatorname{tg}(\mu(\pi - \alpha/2)) > 0$, что, очевидно, может быть сделано. Снова мы получаем противоречие со свойством среднего значения в точке $z = 0$ для F . Предложение доказано.

Для замкнутого множества X в Ω обозначим через I_X совокупность всех точек из ∂X со следующим свойством: для каждой точки $q \in I_X$ найдется такая окрестность $V = V_q$ этой точки в Ω , что для любой открытой окрестности U точки q с условием $U \subset V$ множество $U \setminus X$ имеет бесконечно много компонент связности.

ЛЕММА 9. Пусть X – замкнутое множество в Ω со связным $\Omega^* \setminus X$. Если множество I_X является Ω -ограниченным, то $\Omega^* \setminus X$ локально связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем, как раньше, нормальное исчерпание $\{\Omega_j\}_{j=1}^{+\infty}$ для Ω . Предположим от противного, что $\Omega^* \setminus X$ связно, но не является локально связным. Тогда, как указано в теореме 2, пара (Ω, X) не удовлетворяет (K, L) -условию, т.е. найдется такой компакт K в Ω , что для каждого j существует ограниченная компонента D_j множества $\Omega \setminus (K \cup X)$, которая пересекает K и $\Omega \setminus \overline{\Omega_j}$. Взяв, если нужно, подпоследовательность, мы можем предположить, что $K \subset \Omega_1$ и $I_X \subset \Omega_1$. Поскольку каждое D_j пересекает $\partial\Omega_1$, мы можем найти такое $q \in \partial\Omega_1$, что всякая открытая окрестность U точки q с условием $U \subset \Omega_2 \setminus (K \cup I_X)$ пересекает бесконечное число множеств D_j . Поскольку, очевидно, $q \in \partial X$, мы получаем $q \in I_X$, что и есть противоречие. Лемма доказана.

Будем говорить, что замкнутое множество X в Ω является локально жордановым, если $X = \overline{X}^\circ$, и для всякой точки $q \in \partial X$ найдется открытая окрестность U точки q в Ω такая, что $U \cap \partial X$ является открытой жордановой дугой

(т.е. жордановой дугой без концевых точек). Заметим, что для каждого такого X имеем $I_X = \emptyset$, поэтому лемма 9 применима.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 (о локализации). Пусть X – локально жорданово множество в $\{\Omega, \rho\}$, $t \in [1, 3)$. Пусть $f \in C^m(X) \cap SH(X^\circ)$ и для каждого $q \in \partial X$ найдется открытая окрестность U точки q и функция $g \in C^m(U) \cap SH(U)$ с условием $g = f$ на $X \cap U$. Тогда существуют окрестность W множества X в Ω и функция $h \in C^m(W) \cap SH(W)$ такие, что $h = f$ на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\Gamma_j\}_{j \in J}$ – семейство всех (различных) компонент связности множества $\Gamma = \partial X$. Поскольку Γ локально является жордановой дугой, т.е. локально связна, каждая точка $p \in \Gamma$ ($p \in \Gamma_j$) имеет окрестность, которая пересекает в точности одну компоненту Γ_j . А поскольку Γ замкнуто, каждая точка $p \in \Omega \setminus \Gamma$ имеет окрестность, которая не пересекает ни одной из компонент множества Γ . Отсюда следует, что семейство $\{\Gamma_j\}_{j \in J}$ является локально конечным и, следовательно, не более чем счетным. Каждая компонента Γ_j гомеоморфна окружности (если Γ_j компактно) или открытому интервалу (в противном случае). Нетрудно проверить, что (в условиях предложения 6) для любых $j \in J$, $q \in \Gamma_j$ и достаточно малой открытой жордановой дуги γ_q с условием $q \in \gamma_q \subset \Gamma_j$ найдется область U_q с условием $U_q \cap \Gamma = \gamma_q$ и функция $g_q \in C^m(U_q) \cap SH(U_q)$ такие, что $g_q = f$ на $X \cap U_q$. Предполагая в дальнейшем, что $\text{diam}(\gamma_q) < \text{dist}(q, \Gamma \setminus \Gamma_j)/4$, мы можем дополнительно потребовать, чтобы $\text{diam } U_q < \text{dist}(q, \Gamma \setminus \Gamma_j)/3$.

Мы утверждаем, что различные множества U_q имеют пустое пересечение, если соответствующие точки q принадлежат разным компонентам Γ_j . Действительно, пусть $x_p \in U_p$ и $x_q \in U_q$, где p и q принадлежат разным компонентам множества Γ , которые мы обозначим через Γ_p и Γ_q соответственно. Напомним, что расстояние $d_\Omega(\cdot, \cdot)$ в $\{\Omega, \rho\}$ было определено в § 2. Итак, из неравенства треугольника имеем

$$\begin{aligned} d_\Omega(x_p, x_q) &\geq d_\Omega(p, q) - d_\Omega(p, x_p) - d_\Omega(q, x_q) \\ &\geq \frac{\text{dist}(p, \Gamma_q) + \text{dist}(q, \Gamma_p)}{2} - \frac{\text{dist}(p, \Gamma_q)}{3} - \frac{\text{dist}(q, \Gamma_p)}{3} > 0, \end{aligned}$$

что и требовалось.

В указанных обозначениях мы можем найти не более чем счетное семейство $\Phi = \{(q_s, \gamma_{q_s}, U_{q_s}, g_{q_s})\}_{s \in S}$ с условиями $\bigcup_{s \in S} \gamma_{q_s} = \Gamma$, и, кроме того, для любых трех различных точек q_s в этом семействе пересечение соответствующих трех множеств $\overline{\gamma_{q_s}}$ всегда пусто. Теперь, уменьшая надлежащим образом соответствующие U_{q_s} , мы можем дополнительно добиться того, чтобы любые три различные множества U_{q_s} имели пустое пересечение.

Остается доказать следующее утверждение о сращивании.

Пусть $(q_1, \gamma_1, U_1, g_1)$ и $(q_2, \gamma_2, U_2, g_2)$ – различные элементы в Φ с условиями, что $\gamma_0 = \gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$ и $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ – открытые жордановы дуги на Γ . Тогда найдутся такие область U и функция $g \in C^m(U) \cap SH(U)$, для которых $g = f$ на $X \cap U$ и дополнительно выполняются следующие условия: $U \cap \Gamma = \gamma$, $U \subset U_1 \cup U_2$, $U_{12} = U_1 \setminus \overline{U_2} \subset U$ и $U_{21} = U_2 \setminus \overline{U_1} \subset U$, $g = g_1$ на U_{12} и $g = g_2$ на U_{21} .

Для доказательства этого утверждения мы воспользуемся основной идеей доказательства теоремы 2.5 из [18]. Фиксируем такой достаточно маленький параметрический диск Q , чтобы множество $\overline{Q} \cap X = \{q\}$ состояло только из одной точки, $q \in \gamma_0$, и чтобы некоторый параметрический диск $P = P(q, r) \subset U_1 \cap U_2$ содержал $\overline{Q}$. Пусть область V с условием $\overline{V} \subset U_1 \cup U_2$ является настолько “тоненькой” окрестностью дуги γ_0 , что соответствующие сужения функций g_1 и g_2 на $\overline{V}_0$ (где $V_0 = V \setminus \overline{Q}$) дают корректно определенную функцию $g_0 \in C^m(\overline{V}_0) \cap SH(V_0)$. Остается надлежащим образом продолжить функцию g_0 на ту часть окрестности точки q , которая принадлежит Q . С помощью [18; теорема 2.2] и [19; теорема 1.1] мы можем найти достаточно малый параметрический диск $Q_0 = P(q, r_0) \subset P$ (с условием $Q_0 \setminus \overline{V}_0 \subset Q$) такой, что g_0 может быть C^m -продолжена из $\overline{V}_0$ до функции $g_{12} \in C^m(\overline{V}_0 \cup \overline{Q}_0) \cap SH(V_0 \cup Q_0)$. В завершение мы полагаем $U = U_{12} \cup U_{21} \cup V_0 \cup Q_0$ и берем функцию g равной g_1 , g_2 и g_{12} на U_{12} , U_{21} и $V_0 \cup Q_0$ соответственно. Утверждение доказано.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $t \in [1, 3)$ и X – локально жорданово множество в $\{\Omega, \rho\}$ с гладкой (локально дини-ляпуновской) границей. Следующие условия эквивалентны:

- (a) пара (X, Ω) является смешанной C^m СГПУ-парой;
- (b) множество $\Omega^* \setminus X$ связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть (a) $\implies$ (b) следует из теоремы 3. Для доказательства включения (b) $\implies$ (a) мы сначала применяем [18; теорема 2.2] и [19; теорема 1.1] для локального продолжения. Теперь остается воспользоваться предложением 6, леммой 9 и теоремой 2. Теорема доказана.

Отметим, что результат теоремы 4 не зависит от ρ . Более того, здесь $X = \overline{X^\circ}$, поэтому пространства $C_{\text{jet}}^m(X) = C^m(X)$ также можно определить независимо от ρ .

§ 4. Приложения. G -инвариантные C^m -субгармонические продолжения на Ω

Пусть Ω – произвольная риманова поверхность и $\text{Aut}(\Omega)$ – группа биголоморфных отображений поверхности Ω на себя (группа автоморфизмов для Ω). Например, $\text{Aut}(\mathbb{C})$ есть группа всех обратимых линейных преобразований плоскости $\mathbb{C}$ (т.е. $z \rightarrow az + b$, где $a \neq 0$ и b – комплексные постоянные). Пусть G – подгруппа в $\text{Aut}(\Omega)$ (говорят, что G действует на Ω). При $p \in \Omega$ пусть $[p] = G(p) = \{g(p) \mid g \in G\}$ есть G -орбита точки p . Обозначим через Ω/G пространство всех G -орбит в Ω с топологией, индуцированной проекцией

$$\pi: \Omega \rightarrow \Omega/G \quad (\pi: p \mapsto [p]).$$

По определению (см. [20; с. 119]) группа G действует собственнo разрывно на Ω , если для любого компакта K в Ω свойство $g(K) \cap K \neq \emptyset$ может иметь место только для конечного числа элементов $g \in G$. Для таких G топологическое пространство Ω/G является хаусдорфовым.

Говорят, что группа G действует свободно на Ω , если среди действий $g \in G$ неподвижную точку может иметь только тождественное отображение на Ω .

В этом параграфе группа G будет называться допустимой, если она действует собственноразрывно и свободно на Ω одновременно.

Нам потребуется следующий хорошо известный факт (см. [20; с. 120]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть Ω – риманова поверхность и G – допустимая подгруппа в $\text{Aut}(\Omega)$. Тогда проекция $\pi: \Omega \rightarrow \Omega/G$ является локальным гомеоморфизмом. Индуцированная комплексная структура на Ω/G делает Ω/G римановой поверхностью, а проекцию π локально биголоморфной.

Пусть Ω – открытая риманова поверхность и G – допустимая подгруппа в $\text{Aut}(\Omega)$. Для открытого G -инвариантного множества W в Ω (т.е. $g(W) = W$ для всех $g \in G$) положим $W_G = W/G$. Отметим, что G является допустимой подгруппой также в $\text{Aut}(W)$. Поскольку множество W_G открыто в Ω/G , оно наследует комплексную структуру из Ω/G . Поверхность W_G является римановой, если и только если она связна. Следующие приложения теорем 1–4 представляют самостоятельный интерес.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть Ω и G такие же, как в предложении 7, а риманова поверхность $\Omega_G = \Omega/G$ открыта. Пусть W – открытое G -инвариантное подмножество в Ω . Тогда при всех $m \geq 0$ следующие условия эквивалентны:

- (а) для всякой функции $f \in C^m(W) \cap SH(W)$, являющейся G -инвариантной (т.е. $f(g(p)) = f(p)$ для всех $p \in W$ и $g \in G$), и для всякого замкнутого (в Ω) G -инвариантного множества $X \subset W$ найдется такая G -инвариантная функция $F \in C^m(\Omega) \cap SH(\Omega)$, что $F|_X = f$;
- (б) множество $\Omega_G^* \setminus W_G$ связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 7 функция f (с условием (а)) естественно определяет функцию $f_G \in C^m(W_G) \cap SH(W_G)$ по формуле $f_G([p]) = f(p)$ (при некотором $p \in [p]$), и наоборот. Аналогично, всякое G -инвариантное замкнутое множество X в Ω определяет замкнутое множество X_G в Ω_G , $X_G \subset W_G$. Для завершения доказательства достаточно применить теорему 1 для пары (W_G, Ω_G) . Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть Ω и G удовлетворяют условиям предложения 7, а риманова поверхность $\Omega_G = \Omega/G$ открыта. Пусть X – замкнутое (в Ω) G -инвариантное множество, и пусть $X_G = X/G$. Тогда при всех $m \geq 0$ следующие условия эквивалентны:

- (а) для каждой G -инвариантной окрестности W множества X в Ω и для каждой G -инвариантной функции $f \in C^m(W) \cap SH(W)$ найдется такая G -инвариантная функция $F \in C^m(\Omega) \cap SH(\Omega)$, что $F = f$ в некоторой G -инвариантной окрестности множества X ;
- (б) множество $\Omega_G^* \setminus X_G$ является связным и локально связным.

Доказательство аналогично доказательству следствия 2, только теперь мы используем теорему 2 для смешанной пары (X_G, Ω_G) .

В качестве следствия из теоремы 4 и леммы 9 мы получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть Ω и G удовлетворяют условиям предложения 7, а риманова поверхность $\Omega_G = \Omega/G$ открыта. Пусть X – локально жорданово

(замкнутое в Ω) G -инвариантное множество с гладкой (дини-ляпуновской) границей. Тогда для каждого $m \in [1, 3)$ следующие условия эквивалентны:

- (а) для каждой G -инвариантной струи $F_X \in C_{\text{jet}}^m(X) \cap SH(X^\circ)$ найдется G -инвариантная функция $F^* \in C^m(\Omega) \cap SH(\Omega)$ с условием $F_X^* = F_X$;
- (б) множество $\Omega_G^* \setminus X_G$ связно.

Наконец, приведем два конкретных примера, в которых следствия 2–4 применяются естественным образом.

ПРИМЕР 1. Положим $\Omega = \mathbb{C}$, и пусть G – группа сдвигов $\{g_s(z) = z + s \mid s \in \mathbb{Z}\}$. Тогда G допустима и Ω_G открыта (цилиндрическая поверхность; здесь можно взять $\rho([z]) = \exp(2\pi iz)$). Пусть X – G -инвариантное замкнутое подмножество в Ω . Если $\Omega_G^* \setminus X_G$ связно и локально связно, то (по следствию 3) при любом $m \geq 0$ всякая функция f , G -инвариантная, субгармоническая и класса C^m в некоторой G -инвариантной окрестности множества X , может быть продолжена (из некоторой меньшей G -инвариантной окрестности множества X) до 1-периодической C^m -субгармонической функции на $\mathbb{C}$.

ПРИМЕР 2. Возьмем $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $N \in \mathbb{N}$ ($N \geq 2$), и пусть G – группа вращений $\{g_n(z) = z \exp(2\pi i n/N) \mid n \in \{1, \dots, N\}\}$ на Ω . Тогда G допустима и Ω_G открыто (здесь можно взять $\rho([z]) = z^N$). Отметим, что G не является допустимой при $\Omega = \mathbb{C}$. Пусть X – локально жорданово G -инвариантное подмножество в Ω с гладкой (дини-ляпуновской) границей. Если $\Omega_G^* \setminus X_G$ связно, то (по следствию 4) при любом $m \in [1, 3)$ всякая струя $F_X \in C_{\text{jet}}^m(X) \cap SH(X^\circ)$ продолжается до G -инвариантной C^m -субгармонической функции на Ω .

§ 5. Дополнение

Естественно задать следующий вопрос: какие из результатов настоящей работы могут быть обобщены на случай более высоких размерностей и решений других эллиптических неравенств и в каком смысле?

Пусть Ω является N -мерным C^∞ -многообразием, и пусть $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ есть C^∞ -отображение, являющееся локальным C^∞ -диффеоморфизмом. Назовем пару $\{\Omega, \rho\}$ размазанным N -многообразием, а отображение ρ – размазывающим Ω вдоль $\mathbb{R}^N$. Теорема Смейла–Хёрша (см. [21; следствие 8.2]) утверждает, что открытое N -мерное C^∞ -многообразие может быть размазано вдоль $\mathbb{R}^N$, если и только если оно параллелизуемо.

Поскольку отображение ρ индуцирует атлас, в котором все соотношения соседства являются тождественными отображениями, любой дифференциальный оператор (например, лапласиан Δ) может быть определен корректно в указанном атласе. Пусть L – произвольный однородный эллиптический оператор в $\{\Omega, \rho\}$ с постоянными (комплексными) коэффициентами, а D – область в Ω . Функция (обобщенная) f в D называется L -субэллиптической, если $Lf \geq 0$ в D в обобщенном смысле (при этом обычно рассматриваются только вещественные функции f , если L вещественный). Проблемы C^m - L -субэллиптических продолжений типов Рунге и Уолпа при этом могут быть сформулированы естественным образом.

Мы верим, что теоремы 1 и 2 остаются верными для субгармонических функций (т.е. при $L = \Delta$) во всех размерностях $N \geq 2$ на всех открытых размазанных N -многообразиях и что подходящие аналоги следствий 2 и 3 здесь также могут быть установлены. С помощью теории субгармонических функций на римановых многообразиях представляется возможным доказать эти результаты, в основном следуя указанным выше схемам. Труднее обстоит дело с обобщениями результатов из § 3. Более того, насколько нам известно, все имеющиеся на данный момент результаты, касающиеся рассматриваемых задач, относятся только к лапласиану $L = \Delta$ или оператору Коши–Римана $L = \partial/\partial\bar{z}$ в $\mathbb{C}$ (последний случай частично исследован в работе [22]).

Мы искренне сожалеем, что в октябре 2014 г., вскоре после принятия этой статьи к публикации, скончался наш соавтор и друг Андре Буаве.

Список литературы

- [1] A. Boivin, P. M. Gauthier, P. V. Paramonov, “ C^m -subharmonic extension of Runge type from closed to open subsets of $\mathbb{R}^N$ ”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **279**, МАИК, М., 2012, 219–226; *Proc. Steklov Inst. Math.*, **279** (2012), 207–214.
- [2] P. V. Paramonov, “On C^m -subharmonic extension sets of Walsh-type”, *Complex analysis and potential theory*, CRM Proc. Lecture Notes, **55**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, 201–209.
- [3] P. M. Gauthier, “Subharmonic extensions and approximations”, *Canad. Math. Bull.*, **37**:1 (1994), 46–53.
- [4] R. C. Gunning, R. Narasimhan, “Immersion of open Riemann surfaces”, *Math. Ann.*, **174**:2 (1967), 103–108.
- [5] D. Varolin, *Riemann surfaces by way of complex analytic geometry*, Grad. Stud. Math., **125**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, xviii+236 pp.
- [6] L. Sario, M. Nakai, *Classification theory of Riemann surfaces*, Grundlehren Math. Wiss., **164**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1970, xx+446 pp.
- [7] M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory*, Reprinting of the 1959 original, Chelsea Publishing Co., New York, 1975, x+590 pp.
- [8] А. Г. Витушкин, “Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений”, *УМН*, **22**:6(138) (1967), 141–199; англ. пер.: A. G. Vitushkin, “The analytic capacity of sets in problems of approximation theory”, *Russian Math. Surveys*, **22**:6 (1967), 139–200.
- [9] T. Bagby, P. M. Gauthier, “Approximation by harmonic functions on closed subsets of Riemann surfaces”, *J. Analyse Math.*, **51**:1 (1988), 259–284.
- [10] T. Bagby, “A Runge theorem for harmonic functions on closed subsets of Riemann surfaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **103**:1 (1988), 160–164.
- [11] R. Narasimhan, *Analysis on real and complex manifolds*, Adv. Stud. Pure Math., **1**, Masson & Cie, Éditeurs, Paris; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1968, x+246 pp.
- [12] S. J. Gardiner, “Harmonic approximation”, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **221**, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1995, xiv+132 pp.
- [13] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973, 342 с.; пер. с англ.: E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970, xiv+290 pp.

- [14] H. Whitney, “Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36**:1 (1934), 63–89.
- [15] T. Radó, “Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit”, *Math. Z.*, **20**:1 (1924), 1–6.
- [16] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987, xiv+416 pp.
- [17] П. В. Парамонов, “ C^m -приближения гармоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbb{R}^m$ ”, *Матем. сб.*, **184**:2 (1993), 105–128; англ. пер.: P. V. Paramonov, “ C^m -approximations by harmonic polynomials on compact sets in $\mathbb{R}^n$ ”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **78**:1 (1994), 231–251.
- [18] М. С. Мельников, П. В. Парамонов, “ C^1 -продолжение субгармонических функций с замкнутых жордановых областей в $\mathbb{R}^2$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:6 (2004), 105–118; англ. пер.: M. S. Mel’nikov, P. V. Paramonov, “ C^1 -extension of subharmonic functions from closed Jordan domains in $\mathbb{R}^2$ ”, *Izv. Math.*, **68**:6 (2004), 1165–1178.
- [19] П. В. Парамонов, “О C^m -продолжении субгармонических функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 139–152; англ. пер.: P. V. Paramonov, “ C^m -extension of subharmonic functions”, *Izv. Math.*, **69**:6 (2005), 1211–1223.
- [20] L. Kaup, B. Kaup, “Holomorphic functions of several variables. An introduction to the fundamental theory”, *De Gruyter Stud. Math.*, **3**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1983, xv+349 pp.
- [21] A. Phillips, “Submersions of open manifolds”, *Topology*, **6**:2 (1967), 171–206.
- [22] О. А. Зорина, “О C^m -продолжении субголоморфных функций с плоских жордановых областей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 21–34; англ. пер.: O. A. Zorina, “ C^m -extension of subholomorphic functions from plane Jordan domains”, *Izv. Math.*, **69**:6 (2005), 1099–1111.

Андре Буаве

(**André Boivin**)

Western University, London, ON, Canada

E-mail: boivin@uwo.ca

Поступила в редакцию

11.02.2014 и 26.06.2014

Поль М. Готье

(**Paul M. Gauthier**)

Université de Montréal, Canada

E-mail: gauthier@dms.umontreal.ca

Петр Владимирович Парамонов

(**Petr V. Paramonov**)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: petr.paramonov@list.ru