Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Лاپик, О семействах векторных мер, равновесных во внешнем поле, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 2, 41–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8347>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 10:48:21

УДК 517.53

М. А. Лапик

О семействах векторных мер, равновесных во внешнем поле

Рассматриваются векторные экстремальные задачи теории логарифмического потенциала с внешним полем на примере двумерных задач с матрицей взаимодействия Никишина и переменными массами первой и второй компонент векторной меры: $2x$ и x соответственно. Изучается зависимость носителей равновесных мер, констант равновесия, энергии от параметра x . Получены интегральные формулы для восстановления экстремальной меры массы x по носителям экстремальных мер меньшей массы.

Библиография: 27 названий.

Ключевые слова: векторный логарифмический потенциал, векторная экстремальная мера.

DOI: 10.4213/sm8347

§ 1. Введение

В работе [1], посвященной слабой асимптотике масштабированных многочленов, ортогональных относительно весов Фройда, Е. А. Рахманов показал, что эта асимптотика описывается потенциалом некоторой равновесной (во внешнем поле) меры. Тогда же А. А. Гончар и Е. А. Рахманов (см. [2]) ввели понятие векторной задачи равновесия логарифмического потенциала, в связи с изучением полиномов совместной ортогональности, которые возникли при рассмотрении аппроксимаций Эрмита–Паде. Такие задачи равновесия были исследованы в серии работ [3]–[9]. В настоящее время векторные задачи равновесия возникают во многих известных проблемах, см. [10], в частности, в теории случайных матриц [11]. Важным применением равновесных мер в задачах математической физики является полученное Л. Пастуром и М. Щербиной [12], а также П. Дейфтом с соавторами [13] доказательство гипотезы об универсальности предельного поведения ансамблей матричных случайных величин. А. И. Аптекаревым, П. Блехером и А. Куэлаарсом в [14] с помощью векторных задач равновесия получена теорема о предельном распределении собственных значений гауссовых случайных матриц с внешним источником, используемая в описании броуновских мостов.

Мы будем рассматривать векторные задачи равновесия логарифмического потенциала во внешнем поле. В работе [15] (см. также [16]) В. С. Буяров и

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-01-12430, № 14-01-00604, № 12-01-00988) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2900.2014.1).

Е. А. Рахманов провели в скалярном случае глубокое исследование семейств экстремальных мер, параметризованных массой. Они предложили формулу, позволяющую найти меру массы x , экстремальную во внешнем поле, по носителям экстремальных мер меньшей массы. Нашей целью является получение аналогичных результатов в векторном случае. Во многом мы будем следовать идеям и методам работы [15].

Напомним основные аспекты скалярной теории логарифмического потенциала, которыми мы будем пользоваться (более подробно см. [17]–[19]). Пусть $\mathcal{M}^x(\Gamma)$ – множество борелевских мер μ массы x с носителями на регулярном компакте Γ : $S_\mu \subset \Gamma \subset \mathbb{C}$. *Логарифмическим потенциалом* скалярной меры μ с компактным носителем называют функцию

$$U^\mu(z) = \int \log \frac{1}{|z - y|} d\mu(y).$$

Эта функция определена в $\overline{\mathbb{C}}$, но может принимать значения $\pm\infty$. Логарифмический потенциал меры μ супергармоничен в $\mathbb{C}$ и субгармоничен вне носителя меры, т.е. $U^\mu \in \text{SPH}(\mathbb{C}) \cap \text{SBH}(\overline{\mathbb{C}} \setminus S_\mu)$. В каждой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ потенциал непрерывен в тонкой топологии, т.е. существует множество E_0 , разреженное в точке z_0 и такое, что

$$U^\mu(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0, z \notin E_0} U^\mu(z).$$

Энергией меры μ во внешнем поле Q называют величину

$$I^Q(\mu) = \iint \left(\log \frac{1}{|z - y|} + Q(y) + Q(z) \right) d\mu(y) d\mu(z) = \int (U^\mu + 2Q) d\mu, \quad (1.1)$$

где Q – непрерывная на Γ функция. *Экстремальной мерой* называют меру $\lambda_Q^x(\Gamma) = \lambda_Q^x \in \mathcal{M}^x(\Gamma)$ с минимальной энергией (1.1) в классе $\mathcal{M}^x(\Gamma)$

$$I^Q(\lambda_Q^x) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}^x(\Gamma)} I^Q(\mu). \quad (1.2)$$

Такая мера существует, она единственная и характеризуется с помощью соотношений *равновесия*

$$(U^{\lambda_Q^x} + Q)(z) \begin{cases} = F^x, & z \in S_{\lambda_Q^x}, \\ \geq F^x, & z \in \Gamma, \end{cases} \quad (1.3)$$

где F^x – некоторая константа, называемая *константой равновесия*. Множество, где в (1.3) достигается равенство, называют *множеством равновесия* $S^{\lambda_Q^x}$, а экстремальную меру называют также *равновесной мерой*. Из (1.3) следует, что потенциал экстремальной меры непрерывен в $\mathbb{C}$, поскольку он непрерывен на носителе экстремальной меры (принцип непрерывности).

Константу равновесия экстремальной меры компакта Γ без внешнего поля называют *постоянной Робена* $W(\Gamma)$ компакта Γ , она равна энергии этой меры $W(\Gamma) = I^0(\lambda_0^1)$. *Логарифмической емкостью* называют величину $\text{cap}(\Gamma) =$

$\exp(-W(\Gamma))$. Соотношения равновесия (1.3) верны для регулярных компактов. Для произвольных компактов соотношения равновесия (1.3) усложняются: соотношение $U^{\lambda_Q^x} + Q \geq F^x$ должно быть верно квазिवсюду на Γ , т.е. за исключением множества нулевой емкости, всюду на носителе равновесной меры верно $U^{\lambda_Q^x} + Q \leq F^x$ (см. [18]).

Утверждения, изложенные в настоящей статье, можно распространить на более общие случаи векторных задач равновесия. Конкретнее, можно рассматривать задачи произвольной размерности или с некоторым другим классом матриц взаимодействия. Для упрощения обозначений мы рассматриваем размерность 2 и специальный случай матрицы взаимодействия (называемый случаем Никишина). Часть результатов настоящей работы анонсирована в [20].

Автор выражает глубокую благодарность А. И. Аптекареву, В. С. Буярову, В. Г. Лысову и Д. Н. Тулякову за полезные обсуждения.

§ 2. Векторная экстремальная задача теории потенциала с внешним полем. Основные результаты

Введем необходимые понятия для формулировки основного результата работы. Пусть $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ – векторный компакт в $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ с непересекающимися регулярными компонентами $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ с пустой внутренностью $\Gamma_i^0 = \emptyset$. Обозначим через $\mathcal{M}_\Gamma^x$ множество векторных борелевских мер $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$:

$$\mathcal{M}^x = \mathcal{M}_\Gamma^x = \{\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2), S_{\mu_i} \subset \Gamma_i, i = 1, 2; \mu_1(\Gamma_1) = 2x, \mu_2(\Gamma_2) = x\}.$$

Внешним полем будем называть непрерывную вектор-функцию

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2), \quad Q_i: \Gamma_i \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2.$$

Вектор-функцию $\mathbf{W}_\mathbf{Q}^{\bar{\mu}} = (W_{\mathbf{Q},1}^{\bar{\mu}}, W_{\mathbf{Q},2}^{\bar{\mu}})$ такую, что

$$(W_{\mathbf{Q},1}^{\bar{\mu}}(z), W_{\mathbf{Q},2}^{\bar{\mu}}(z)) = (U^{\mu_1}(z), U^{\mu_2}(z)) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (Q_1(z), Q_2(z)),$$

называют *векторным логарифмическим потенциалом* меры $\bar{\mu} \in \mathcal{M}^x$ с *внешним полем* $\mathbf{Q}$ и *матрицей взаимодействия* Никишина

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задачи теории потенциала с такими матрицами впервые появились в [21], последние продвижения см. в [7], [9], [8], [22]. Энергия для векторных мер $\bar{\mu} \in \mathcal{M}^x$ во внешнем поле $\mathbf{Q}$ задается функционалом

$$I^\mathbf{Q}(\bar{\mu}) = I_1^\mathbf{Q}(\bar{\mu}) + I_2^\mathbf{Q}(\bar{\mu}), \quad I_i^\mathbf{Q}(\bar{\mu}) = \int (W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\mu}}(z) + Q_i(z)) d\mu_i(z). \quad (2.1)$$

Аналогично скалярному случаю ставится *векторная экстремальная задача с внешним полем*: найти меру $\bar{\lambda}^x = \bar{\lambda}^x \in \mathcal{M}^x$ такую, что

$$I^\mathbf{Q}(\bar{\lambda}^x) = \inf_{\bar{\mu} \in \mathcal{M}^x} I^\mathbf{Q}(\bar{\mu}). \quad (2.2)$$

Экстремальные мера этой задачи играет ключевую роль в описании асимптотики и сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для важного класса аналитических функций, так называемых систем Никишина (см. [3], [5], [6], [17], [23]–[25]).

Существует единственное решение $\bar{\lambda}^x \in \mathcal{M}^x$ задачи (2.2) (см. [3], [5]). Экстремальная мера однозначно характеризуется следующими соотношениями равновесия:

$$W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\lambda}^x}(z) \begin{cases} = F_i^x, & z \in S_{\lambda_i^x}, \\ \geq F_i^x, & z \in \Gamma_i, \end{cases} \quad (2.3)$$

для некоторых констант F_i^x , $i = 1, 2$. Множество, на котором в (2.3) достигается равенство, называют *множеством равновесия*, а экстремальную меру еще называют *равновесной мерой*. Мы будем обозначать множество равновесия через $\mathbf{S}^{\bar{\lambda}^x} = (S_1^{\bar{\lambda}^x}, S_2^{\bar{\lambda}^x})$. Очевидно, что справедливо включение $\mathbf{S}_{\bar{\lambda}^x} \subset \mathbf{S}^{\bar{\lambda}^x}$, при этом множество равновесия и носитель могут существенно отличаться.

Мерой Робена компакта (не обязательно регулярного) $\mathbf{K} \subset \mathbf{\Gamma}$ для нашей постановки экстремальной задачи называют меру $\bar{\omega}_{\mathbf{K}} \in \mathcal{M}_{\mathbf{K}}^1$, минимизирующую энергию (2.1) в отсутствие внешнего поля ($\mathbf{Q} \equiv 0$). В [17] показано, что условия равновесия для меры $\bar{\omega}_{\mathbf{K}}$ суть

$$\begin{aligned} 2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}} & \begin{cases} \leq \gamma_1 & \text{на } S_{\omega_{\mathbf{K},1}}, \\ \geq \gamma_1 & \text{кв. в. на } K_1, \end{cases} \\ 2U^{\omega_{\mathbf{K},2}} - U^{\omega_{\mathbf{K},1}} & \begin{cases} \leq \gamma_2 & \text{на } S_{\omega_{\mathbf{K},2}}, \\ \geq \gamma_2 & \text{кв. в. на } K_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Энергию векторной меры Робена компакта $\mathbf{K}$ обозначим через $\mathcal{W}(\mathbf{K})$; очевидно, $\mathcal{W}(\mathbf{K}) = 2\gamma_1 + \gamma_2$. По аналогии со скалярным случаем величину $\exp(-\mathcal{W}(\mathbf{K}))$ назовем *логарифмической емкостью* компакта $\mathbf{K}$, а $\mathcal{W}(\mathbf{K})$ – *постоянной Робена*.

Далее мы будем исследовать свойства множеств, мер и величин

$$\mathbf{S}_{\bar{\lambda}^x}, \quad \mathbf{S}^{\bar{\lambda}^x}, \quad \bar{\lambda}^x, \quad F^x = 2F_1^x + F_2^x, \quad \mathcal{W}(\mathbf{S}_{\bar{\lambda}^x}), \quad \mathcal{W}(\mathbf{S}^{\bar{\lambda}^x})$$

в зависимости от x . Чтобы подчеркнуть сходство с работой [15], введем упрощающие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_x &= \mathbf{S}_{\bar{\lambda}^x}, & \mathbf{S}^x &= \mathbf{S}^{\bar{\lambda}^x}, & W_i^x &= W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\lambda}^x}, & S_{x,i} &= S_{\lambda_i^x}, & S_i^x &= S_i^{\bar{\lambda}^x}, \\ \bar{\omega}_x &= \bar{\omega}_{\mathbf{S}_x}, & \bar{\omega}^x &= \bar{\omega}_{\mathbf{S}^x}, & \mathcal{W}^x &= \mathcal{W}(\mathbf{S}^x), & \mathcal{W}_x &= \mathcal{W}(\mathbf{S}_x). \end{aligned}$$

В настоящей статье сходимость векторных и скалярных мер понимается в слабом смысле. Все векторные выражения следует понимать покомпонентно. Теперь мы готовы сформулировать основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 2.1. 1. *Семейства носителей равновесных мер $\mathbf{S}_x$ и множеств равновесия $\mathbf{S}^x$ монотонно возрастают по x , для любого x и для любого $0 <$*

$\varepsilon < x$ верно соотношение $\mathbf{S}^{x-\varepsilon} \subset \mathbf{S}_x \subset \mathbf{S}^x$. Эти семейства непрерывны справа, т.е.

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \mathbf{S}^{x+\varepsilon} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathbf{S}_{x+\varepsilon} = \mathbf{S}^x, \quad (2.5)$$

и непрерывны слева, т.е.

$$\overline{\bigcup_{\varepsilon>0} \mathbf{S}_{x-\varepsilon}} = \overline{\bigcup_{\varepsilon>0} \mathbf{S}^{x-\varepsilon}} = \mathbf{S}_x. \quad (2.6)$$

2. Величины $\mathcal{W}_x$ и $\mathcal{W}^x$ монотонно убывают по x , для любого x верно неравенство $\mathcal{W}^x \leq \mathcal{W}_x$. Всюду, за исключением не более чем счетного множества, $\mathcal{W}_x$ и $\mathcal{W}^x$ непрерывны по x и $\mathcal{W}^x = \mathcal{W}_x$. Разрывы имеют место только там, где $\mathcal{W}^x \neq \mathcal{W}_x$ и на не более чем счетном множестве N таком, что

$$N = \{x \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{W}_x \neq \mathcal{W}_{x-0}\}.$$

Величина $\mathcal{W}^x$ непрерывна справа по x , а $\mathcal{W}_x$ всюду, за исключением, быть может, не более чем счетного множества N , непрерывна слева:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \mathcal{W}^{x+\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \mathcal{W}_{x+\varepsilon} = \mathcal{W}^x, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \mathcal{W}^{x-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \mathcal{W}_{x-\varepsilon} \stackrel{x \in N^c}{=} \mathcal{W}_x. \quad (2.7)$$

3. Величина $F^x = 2F_1^x + F_2^x$ как функция от x всюду выпукла вверх. Всюду, за исключением, быть может, множества N , левые производные и всюду правые производные равны постоянным Робена множеств $\mathbf{S}_x$ и $\mathbf{S}^x$ соответственно:

$$\frac{\partial^-}{\partial x} F^x \stackrel{x \in N^c}{=} \mathcal{W}_x, \quad \frac{\partial^+}{\partial x} F^x = \mathcal{W}^x. \quad (2.8)$$

4. Константы равновесия F_i^x дифференцируемы по x всюду, за исключением не более чем счетного множества. Всюду существуют левые производные, за исключением, быть может, множества N , и всюду существуют правые производные, равные константам равновесия для мер Робена множеств $\mathbf{S}_x$ и $\mathbf{S}^x$:

$$\frac{\partial^-}{\partial x} F_i^x \stackrel{x \in N^c}{=} \gamma_{x,i}, \quad \frac{\partial^+}{\partial x} F_i^x = \gamma_i^x. \quad (2.9)$$

5. Семейство равновесных мер $\bar{\lambda}^x$ монотонно возрастает, непрерывно и дифференцируемо всюду за исключением не более чем счетного множества. Всюду существуют, за исключением, быть может, множества N , левые производные, и всюду существуют правые производные:

$$\frac{\partial^-}{\partial x} \bar{\lambda}^x \stackrel{x \in N^c}{=} \bar{\omega}_x, \quad \frac{\partial^+}{\partial x} \bar{\lambda}^x = \bar{\omega}^x. \quad (2.10)$$

6. Для экстремальной меры $\bar{\lambda}^x$ при $x > 0$ справедливо представление

$$\bar{\lambda}^x = \int_0^x \bar{\omega}_\tau d\tau. \quad (2.11)$$

§ 3. Доказательства

Доказательству теоремы 2.1 мы предпошлем изучение свойств одного функционала. В [26] Х. Маскаром и Э. Саффом был предложен функционал для скалярных задач равновесия логарифмического потенциала. Функционал Маскара–Саффа определен на компактах $K \subset \Gamma$ и достигает минимума на тех K , для которых носитель равновесной меры Робена S_{ω_K} заключен между носителем экстремальной меры и множеством равновесия. В [27] найдено обобщение этого функционала на векторный случай. Функционал в [27] определен на регулярных компактах, тогда как в настоящей работе нам потребуется определить его на произвольных компактах; мы проведем обобщение результата [27], необходимое для наших целей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Функционалом Маскара–Саффа* для векторных задач называют функционал, определенный на компактах $\mathbf{K} \subset \mathbf{\Gamma}$ формулой

$$F_{\mathbf{Q}}^x(\mathbf{K}) := x\mathcal{W}(\mathbf{K}) + \int Q_1 d\omega_{\mathbf{K},1} + \int Q_2 d\omega_{\mathbf{K},2}. \quad (3.1)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Для любого компакта $\mathbf{K} \subset \mathbf{\Gamma}$ справедливо неравенство*

$$F_{\mathbf{Q}}^x(\mathbf{K}) \geq F^x := 2F_1^x + F_2^x. \quad (3.2)$$

Равенство достигается, только если $\mathbf{S}_x \subset \mathbf{S}_{\bar{\omega}_K} \subset \mathbf{S}^x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} 2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}} &\begin{cases} = \gamma_1 & \text{кв. в. на } S_{\omega_{\mathbf{K},1}}, \\ < \gamma_1 & \text{на } \bar{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_{\mathbf{K},1}}, \end{cases} \\ 2U^{\omega_{\mathbf{K},2}} - U^{\omega_{\mathbf{K},1}} &\begin{cases} = \gamma_2 & \text{кв. в. на } S_{\omega_{\mathbf{K},2}}, \\ < \gamma_2 & \text{на } \bar{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_{\mathbf{K},2}}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из этих соотношений и (2.4), в частности, следует, что $\text{cap}(\mathbf{K} \setminus \mathbf{S}_{\omega_K}) = 0$.

Действительно, функция $2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}}$ субгармонична в $\bar{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_{\mathbf{K},1}}$. Из принципа максимума для субгармонических функций следует, что для любого $z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_{\mathbf{K},1}}$ верны неравенства

$$(2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}})(z) < \sup_{\zeta \in \bar{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_{\mathbf{K},1}}} (2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}})(\zeta) \leq \gamma_1.$$

Последнее неравенство докажем от противного. Пусть

$$M := \sup_{\zeta \in \bar{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_{\mathbf{K},1}}} (2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}})(\zeta) > \gamma_1.$$

По теореме отделимости для компактов Γ_1 и Γ_2 существуют непересекающиеся окрестности $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$, содержащие эти компакты.

Множество $E := \{z : (2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}})(z) > \gamma_1\} \cap \mathcal{O}_1$ открыто, так как логарифмический потенциал полунепрерывен снизу и $E \cap S_{\bar{\omega}_{\mathbf{K},1}} = \emptyset$. Выберем последовательность $\{z_n\}$ такую, что $z_n \in E$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}})(z_n) = M,$$

из принципа максимума вытекает, что $z_n \rightarrow z_0 \in S_{\bar{\omega}_{\mathbf{K},1}}$ при $n \rightarrow \infty$. Построим систему открытых множеств

$$\mathcal{U}_n = E \cap \left\{ z : |z - z_n| < \frac{1}{n} \right\} \cap \left\{ z : (2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}})(z) - (2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}})(z_n) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Так как потенциал непрерывен в тонкой топологии, то существует разреженное в точке z_0 множество E_0 такое, что

$$\lim_{\tilde{z}_n \rightarrow z_0} (2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}})(\tilde{z}_n) = (2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}})(z_0) \leq \gamma_1.$$

Для любого разреженного в точке z_0 множества E_0 можно выбрать $\tilde{z}_n \in \mathcal{U}_n \setminus E_0$ так, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}})(\tilde{z}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}})(z_n) = M.$$

Это противоречит предположению.

Для функции $2U^{\omega_{\mathbf{K},2}} - U^{\omega_{\mathbf{K},1}}$ рассуждения аналогичны, за исключением того, что в окрестности бесконечности она ограничена, так как веса первой и второй компоненты $\bar{\omega}_K$ равны 2 и 1 соответственно. Следует показать, что $2U^{\omega_{\mathbf{K},2}} - U^{\omega_{\mathbf{K},1}}$ не равна тождественно константе в $\bar{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_{\mathbf{K},2}}$.

Действительно, если $2U^{\omega_{\mathbf{K},2}} - U^{\omega_{\mathbf{K},1}} \equiv \text{const}$, то, рассматривая условия равновесия (2.4) на $S_{\bar{\omega}_{\mathbf{K},1}}$ получим, что $U^{\omega_{\mathbf{K},1}} = \text{const}$ на $S_{\bar{\omega}_{\mathbf{K},1}}$. Следовательно, $\omega_{\mathbf{K},1}$ пропорциональна мере Робена компакта $S_{\bar{\omega}_{\mathbf{K},1}}$ и $2U^{\omega_{\mathbf{K},2}} = \gamma_2 + U^{\omega_{\mathbf{K},1}}$, последнее противоречит принципу максимума.

Мы доказали справедливость неравенств (3.3). Приступим к доказательству утверждения 3.1.

Рассмотрим произвольный регулярный компакт $\mathbf{K}$. Проинтегрируем (2.3) по $\omega_{\mathbf{K},i}$, $i = 1, 2$, и сложим оба неравенства. Применяя теорему Фубини и учитывая (3.3), получим

$$\begin{aligned} F^x &\leq \int [2U^{\lambda_1^x} - U^{\lambda_2^x} + Q_1] d\omega_{\mathbf{K},1} + \int [2U^{\lambda_2^x} - U^{\lambda_1^x} + Q_2] d\omega_{\mathbf{K},2} \\ &= \int [2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}} - \gamma_1] d\lambda_1^x + \int [2U^{\omega_{\mathbf{K},2}} - U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - \gamma_2] d\lambda_2^x + F_{\mathbf{Q}}^x(\mathbf{K}) \\ &\leq F_{\mathbf{Q}}^x(\mathbf{K}). \end{aligned}$$

В первом неравенстве равенство имеет место, только если $\mathbf{S}_{\omega_K} \subset \mathbf{S}^{\bar{\lambda}^x}$; это следует из определения множества равновесия. В последнем неравенстве равенство имеет место, только если $\mathbf{S}_{\bar{\lambda}^x} \subset \mathbf{S}_{\omega_K}$, так как справедливо (3.3). Утверждение 3.1 доказано.

Для доказательства основной теоремы нам понадобятся несколько лемм.

ЛЕММА 3.1. Для любого положительного ε разность $\bar{\lambda}^{x+\varepsilon} - \bar{\lambda}^x$ есть мера и

$$\mathbf{S}_x \subset \mathbf{S}^x \subset \mathbf{S}_{x+\varepsilon} \subset \mathbf{S}^{x+\varepsilon}. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что мера $\bar{\nu} := \bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x + \bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon$ равна $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x+\varepsilon}$. Принадлежность $\bar{\nu}$ классу $\mathcal{M}^{x+\varepsilon}$ очевидна. Запишем теперь условия равновесия для экстремальной меры $\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon$

$$W_{W_{\mathbf{Q}}^x,1}^{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon}(z) = W_{\mathbf{Q},1}^{\bar{\nu}}(z) = 2U^{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,1}(z) - U^{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,2}(z) + W_{\mathbf{Q},1}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x}(z) \begin{cases} = F_1^\varepsilon, & z \in S_{\lambda_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,1}, \\ \geq F_1^\varepsilon, & z \in \Gamma_1, \end{cases} \quad (3.5)$$

$$W_{W_{\mathbf{Q}}^x,2}^{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon}(z) = W_{\mathbf{Q},2}^{\bar{\nu}}(z) = 2U^{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,2}(z) - U^{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,1}(z) + W_{\mathbf{Q},2}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x}(z) \begin{cases} = F_2^\varepsilon, & z \in S_{\lambda_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,2}, \\ \geq F_2^\varepsilon, & z \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Так как условия равновесия однозначно характеризуют меру, нам нужно показать, что на $\mathbf{S}_{\bar{\nu}} = \mathbf{S}_x \cup \mathbf{S}_{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{Q},1}^{\bar{\nu}}(z) &= 2U^{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,1}(z) - U^{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,2}(z) + W_{\mathbf{Q},1}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x}(z) = F_1^\varepsilon, \\ W_{\mathbf{Q},2}^{\bar{\nu}}(z) &= 2U^{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,2}(z) - U^{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,1}(z) + W_{\mathbf{Q},2}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x}(z) = F_2^\varepsilon. \end{aligned}$$

Докажем, что на $\mathbf{S}_{x,i} \setminus \mathbf{S}_{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon}$ для $i = 1, 2$ имеет место неравенство

$$W_{W_{\mathbf{Q}}^x,i}^{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon} \leq F_i^\varepsilon. \quad (3.7)$$

Действительно, функция $2U^{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,1} - U^{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,2}$ субгармоническая в области $\bar{\mathbb{C}} \setminus S_{\lambda_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,1}$, а функция $2U^{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,2} - U^{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,1}$ субгармоническая в области $\bar{\mathbb{C}} \setminus S_{\lambda_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,2}$. Далее будем применять принцип максимума для субгармонических функций и принцип непрерывности для логарифмического потенциала. Рассмотрим $z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus S_{\lambda_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,1}$ и, учитывая (2.3), получим

$$\begin{aligned} 2U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,1}(z) - U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,2}(z) &< \sup_{\zeta \in \bar{\mathbb{C}} \setminus S_{\lambda_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,1}} (2U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,1} - U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,2})(\zeta) \\ &\leq \sup_{\zeta \in S_{\lambda_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,1}} (2U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,1} - U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,2})(\zeta) \\ &\leq F_1^\varepsilon - \inf_{\zeta \in S_{\lambda_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon,1}} W_{\mathbf{Q},1}^{\bar{\lambda}_{W_{\mathbf{Q}}^x}^\varepsilon}(\zeta) = F_1^\varepsilon - F_1^x. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Рассмотрим $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\lambda_{W_{\mathbf{Q},2}}^\varepsilon}$. Из-за поведения в бесконечности возникает два случая: либо

$$\begin{aligned} (2U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q},2}}^\varepsilon} - U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q},1}}^\varepsilon})(z) &< \sup_{\zeta \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\lambda_{W_{\mathbf{Q},2}}^\varepsilon}} (2U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q},2}}^\varepsilon} - U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q},1}}^\varepsilon})(\zeta) \\ &\leq \sup_{\zeta \in S_{\lambda_{W_{\mathbf{Q},2}}^\varepsilon}} (2U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q},2}}^\varepsilon} - U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q},1}}^\varepsilon})(\zeta) \leq F_2^\varepsilon - \inf_{\zeta \in S_{\lambda_{W_{\mathbf{Q},2}}^\varepsilon}} W_{\mathbf{Q},1}^{\overline{\lambda_{W_{\mathbf{Q},2}}^\varepsilon}}(\zeta) = F_2^\varepsilon - F_2^x, \end{aligned} \quad (3.9)$$

либо

$$\begin{aligned} (2U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q},2}}^\varepsilon} - U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q},1}}^\varepsilon})(z) &\equiv \sup_{\zeta \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\lambda_{W_{\mathbf{Q},2}}^\varepsilon}} (2U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q},2}}^\varepsilon} - U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q},1}}^\varepsilon})(\zeta) \\ &= \sup_{\zeta \in S_{\lambda_{W_{\mathbf{Q},2}}^\varepsilon}} (2U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q},2}}^\varepsilon} - U^{\lambda_{W_{\mathbf{Q},1}}^\varepsilon})(\zeta) \leq F_2^\varepsilon - \inf_{\zeta \in S_{\lambda_{W_{\mathbf{Q},2}}^\varepsilon}} W_{\mathbf{Q},1}^{\overline{\lambda_{W_{\mathbf{Q},2}}^\varepsilon}}(\zeta) = F_2^\varepsilon - F_2^x. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Следовательно, на $\mathbf{S}_{\overline{\nu}}$ для $\overline{\nu}$ имеет место (3.7), т.е. выполняются соотношения равновесия (2.3). Лемма 3.1 доказана.

ЛЕММА 3.2. *Для любого положительного $\varepsilon < x$ справедливы соотношения:*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{x+\varepsilon} &\leq \frac{F^{x+\varepsilon} - F^x}{\varepsilon} \leq \mathcal{W}_x, & \mathcal{W}^{x+\varepsilon} &\leq \frac{F^{x+\varepsilon} - F^x}{\varepsilon} \leq \mathcal{W}^x, \\ \mathcal{W}_x &\leq \frac{F^x - F^{x-\varepsilon}}{\varepsilon} \leq \mathcal{W}_{x-\varepsilon}, & \mathcal{W}^x &\leq \frac{F^x - F^{x-\varepsilon}}{\varepsilon} \leq \mathcal{W}^{x-\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что вторая строка отличается от первой лишь обозначениями, так что докажем утверждения только для положительного приращения. Используя свойство (3.2) функционала (3.1), получим

$$\begin{aligned} F^{x+\varepsilon} &\leq F_{\mathbf{Q}}^{x+\varepsilon}(\mathbf{S}_x) = x\mathcal{W}_x + \varepsilon\mathcal{W}_x + \int Q_1 d\omega_{x,1} + \int Q_2 d\omega_{x,2} = F^x + \varepsilon\mathcal{W}_x, \\ F^x &\leq F_{\mathbf{Q}}^x(\mathbf{S}_{x+\varepsilon}) = (x+\varepsilon)\mathcal{W}_{x+\varepsilon} - \varepsilon\mathcal{W}_{x+\varepsilon} + \int Q_1 d\omega_{x+\varepsilon,1} + \int Q_2 d\omega_{x+\varepsilon,2} \\ &= F^{x+\varepsilon} - \varepsilon\mathcal{W}_{x+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Второе неравенство получим аналогично подстановкой в функционал $\mathbf{S}^x$ и замечая, что $F_{\mathbf{Q}}^x(\mathbf{S}_x) = F_{\mathbf{Q}}^x(\mathbf{S}^x) = 2F_1^x + F_2^x = F^x$:

$$\begin{aligned} F^{x+\varepsilon} &\leq F_{\mathbf{Q}}^{x+\varepsilon}(\mathbf{S}^x) = x\mathcal{W}^x + \varepsilon\mathcal{W}^x + \int Q_1 d\omega_{x,1} + \int Q_2 d\omega_{x,2} = F^x + \varepsilon\mathcal{W}^x, \\ F^x &\leq F_{\mathbf{Q}}^x(\mathbf{S}^{x+\varepsilon}) = (x+\varepsilon)\mathcal{W}^{x+\varepsilon} - \varepsilon\mathcal{W}^{x+\varepsilon} + \int Q_1 d\omega_{x+\varepsilon,1} + \int Q_2 d\omega_{x+\varepsilon,2} \\ &= F^{x+\varepsilon} - \varepsilon\mathcal{W}^{x+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Лемма 3.2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Величины $\mathcal{W}_x$ и $\mathcal{W}^x$ как функции от x монотонно убывают по x , причем $\mathcal{W}^x \leq \mathcal{W}_x$, непрерывны всюду за исключением не более чем счетного множества и имеют левый и правый предел $\mathcal{W}_{x-0}$, $\mathcal{W}^{x-0}$, $\mathcal{W}_{x+0}$ и $\mathcal{W}^{x+0}$ соответственно, причем $\mathcal{W}_{x-0} = \mathcal{W}^{x-0}$ и $\mathcal{W}_{x+0} = \mathcal{W}^{x+0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество равновесия $\mathbf{S}^x$ содержит $\mathbf{S}_x$, из экстремальности энергии следует, что энергия меры $\bar{\omega}_x$ не меньше энергии меры $\bar{\omega}^x$, что в точности есть $\mathcal{W}^x \leq \mathcal{W}_x$.

Равенство $\mathcal{W}_{x-0} = \mathcal{W}^{x-0}$ немедленно следует из предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0+$ в неравенстве $\mathcal{W}^{x-\varepsilon} \leq \mathcal{W}_{x-\varepsilon} \leq \mathcal{W}^{x-2\varepsilon}$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Величина $F^x := 2F_1^x + F_2^x$ как функция от x выпукла вверх, и

$$\frac{\partial^\pm}{\partial x} F^x = \mathcal{W}_{x\pm 0}. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых x и y , $x < y$, можно записать (3.11) как

$$\mathcal{W}_{(x+y)/2} \leq \frac{F^{(x+y)/2} - F^x}{(y-x)/2} \leq \mathcal{W}^x, \quad \mathcal{W}_y \leq \frac{F^y - F^{(x+y)/2}}{(y-x)/2} \leq \mathcal{W}^{(x+y)/2}.$$

Отсюда $F^x + F^y \leq 2F^{(x+y)/2}$. Производная функции F^x существует везде, за исключением не более чем счетного множества точек; из леммы 3.2 следует, что в точках непрерывности $\mathcal{W}_x$ производная $\frac{\partial F^x}{\partial x} = \mathcal{W}_x$. У выпуклых функций в каждой точке существуют левые и правые производные, непрерывные слева и справа соответственно, это дает нам (3.12). Следствие доказано.

ЛЕММА 3.3. Для любого положительного $\varepsilon < x$ для $i = 1, 2$ справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} (W_i^{x+\varepsilon} - W_i^x)(z) & \begin{cases} = F_i^{x+\varepsilon} - F_i^x, & z \in S_i^x, \\ < F_i^{x+\varepsilon} - F_i^x, & z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S_i^x, \end{cases} \\ (W_i^x - W_i^{x-\varepsilon})(z) & \begin{cases} = F_i^x - F_i^{x-\varepsilon}, & z \in S_i^{x-\varepsilon}, \\ < F_i^x - F_i^{x-\varepsilon}, & z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S_i^{x-\varepsilon}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первую часть утверждения, поскольку вторая совпадает с ней с точностью до обозначений. Утверждение леммы на множестве $S_{x+\varepsilon, i}$ следует из соотношений равновесия. Докажем неравенство на $\overline{\mathbb{C}} \setminus S_{x+\varepsilon, i}$. На этом множестве векторный логарифмический потенциал меры $\bar{\lambda}^{x+\varepsilon} - \bar{\lambda}^x$ является непрерывной в $\mathbb{C}$ субгармонической в $\overline{\mathbb{C}} \setminus S_{x+\varepsilon, i}$ функцией, следовательно, для нее имеет место принцип максимума: для $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S_{x+\varepsilon, i}$ выполняются соотношения

$$W_i^{x+\varepsilon}(z) - W_i^x(z) < \sup_{S_{x+\varepsilon, i}} (W_i^{x+\varepsilon} - W_i^x) = F_i^{x+\varepsilon} - F_i^x.$$

Случай, когда вторая компонента векторного логарифмического потенциала равна константе, рассматривается аналогично случаю, рассмотренному при доказательстве утверждения 3.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Заметим, что для любого положительного ε мера

$$\Delta_x^{\pm\varepsilon} := \frac{\bar{\lambda}^x - \bar{\lambda}^{x\pm\varepsilon}}{\mp\varepsilon} \in \mathcal{M}^1.$$

Из теоремы о слабой компактности сферы в сопряженном пространстве следует, что из множества $\Delta_x^{\pm\varepsilon_n}$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$\Delta_x^{\pm\varepsilon_n} \rightarrow \tilde{\Delta}_x^{\pm}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.14)$$

Для того чтобы доказать дифференцируемость равновесных мер справа и слева, достаточно показать, что слабые пределы $\tilde{\Delta}_x^+$ и $\tilde{\Delta}_x^-$ являются мерами Робена $\mathbf{S}^x$ и $\mathbf{S}_x$ соответственно.

Докажем, что множество

$$\left\{ \frac{F_1^x - F_1^{x\pm\varepsilon_n}}{\mp\varepsilon_n}, \frac{F_2^x - F_2^{x\pm\varepsilon_n}}{\mp\varepsilon_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

ограничено. Для $z \in \Gamma_i$ верны неравенства

$$-\infty \neq W_{\mathbf{0},i}^{\tilde{\Delta}_x^{\pm}}(z) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} W_{\mathbf{0},i}^{\Delta_x^{\pm\varepsilon_n}}(z) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{F_i^x - F_i^{x\pm\varepsilon_n}}{\mp\varepsilon_n}. \quad (3.15)$$

Первое неравенство следует из определения слабой сходимости мер и из [17; гл. 5, теорема 1.1] (принцип понижения), а второе – из леммы 3.3. Неравенства (3.15) и лемма 3.2 дают нам ограниченность данного множества. Теперь, без ограничения общности, можно считать, что существуют пределы

$$\tilde{\gamma}_1^{\pm} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_1^x - F_1^{x\pm\varepsilon_n}}{\mp\varepsilon_n}, \quad \tilde{\gamma}_2^{\pm} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_2^x - F_2^{x\pm\varepsilon_n}}{\mp\varepsilon_n}, \quad (3.16)$$

причем $2\tilde{\gamma}_1^{\pm} + \tilde{\gamma}_2^{\pm} = \mathcal{W}_{x\pm 0}$.

Докажем слабую непрерывность экстремальной меры, т.е. $\bar{\lambda}^{x-\varepsilon} \rightarrow \bar{\lambda}^x$ и $\bar{\lambda}^{x+\varepsilon} \rightarrow \bar{\lambda}^x$ при $\varepsilon \searrow 0$. Рассмотрим произвольную непрерывную функцию f на Γ ; ее модуль ограничен некоторой константой M . Интеграл от f по мере $\bar{\lambda}^x - \bar{\lambda}^{x-\varepsilon}$ стремится к 0 при $\varepsilon \searrow 0$, поскольку

$$\left| \int f d(\bar{\lambda}^x - \bar{\lambda}^{x-\varepsilon}) \right| \leq 3M\varepsilon.$$

Аналогично доказывается непрерывность справа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. 1. Для произвольного $\varepsilon > 0$ и $i = 1, 2$

$$\lambda_i^x \left(S_{x,i} \setminus \overline{\bigcup_{\varepsilon>0} S_i^{x-\varepsilon}} \right) \leq \lambda_i^x(S_{x,i} \setminus S_i^{x-\varepsilon}) = (\lambda_i^x - \lambda_i^{x-\varepsilon})(S_{x,i} \setminus S_i^{x-\varepsilon}) \leq \frac{2\varepsilon}{i}.$$

Слева стоит неотрицательная константа, из выбора произвольного $\varepsilon > 0$ заключаем, что $\bar{\lambda}^x(\mathbf{S}_x \setminus \overline{\bigcup_{\varepsilon>0} \mathbf{S}_x^{x-\varepsilon}}) = 0$. Носитель меры есть минимальное замкнутое подмножество $\mathbf{S}_x$, так что $\bar{\lambda}^x(\Gamma \setminus \mathbf{S}_x) = 0$. Следовательно, верно (2.6).

Из (3.4) следует включение $\mathbf{S}^x \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathbf{S}_{x+\varepsilon}$. Рассмотрим произвольное

$$z \in \bigcap_{\varepsilon > 0} S_{x+\varepsilon, i} = \bigcap_{\varepsilon_n} S_{x+\varepsilon_n, i}, \quad i = 1, 2.$$

Из (3.16) следует, что $F_i^{x+\varepsilon_n} \rightarrow F_i^x$ при $n \rightarrow \infty$ и $\bar{\lambda}^{x+\varepsilon_n} \rightarrow \bar{\lambda}^x$. Тогда по принципу понижения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_i^{x+\varepsilon_n}(z) \geq W_i^x(z),$$

$$W_i^{x+\varepsilon_n}(z) = F_i^{x+\varepsilon_n} \rightarrow F_i^x \leq W_i^x(z), \quad n \rightarrow \infty.$$

Это дает обратное включение $\mathbf{S}^x \supset \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathbf{S}_{x+\varepsilon}$. Мы получили (2.5) и завершили доказательство п. 1.

Доказательство п. 2–5. Докажем, что мера дифференцируема справа. Используя принцип максимума для субгармонических функций, принцип понижения для логарифмического потенциала, (2.5) и лемму 3.3, мы получим неравенства

$$W_{0,1}^{\tilde{\Delta}_x^+}(z) \leq \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} W_{0,1}^{\tilde{\Delta}_x^{+\varepsilon_n}}(z) = \tilde{\gamma}_1^+ & \text{на } S_1^x \supset S_{\tilde{\Delta}_x^+}^1, \\ \tilde{\gamma}_1^+ & \text{на } \mathbb{C}, \end{cases} \quad (3.17)$$

$$W_{0,2}^{\tilde{\Delta}_x^+}(z) \leq \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} W_{0,2}^{\tilde{\Delta}_x^{+\varepsilon_n}}(z) = \tilde{\gamma}_2^+ & \text{на } S_2^x \supset S_{\tilde{\Delta}_x^+}^2, \\ \tilde{\gamma}_2^+ & \text{на } \mathbb{C}. \end{cases}$$

Интегрируя (3.17) почленно по $\tilde{\Delta}_{x,i}^+$, мы докажем, что $I(\tilde{\Delta}_x^+) \leq 2\tilde{\gamma}_1^+ + \tilde{\gamma}_2^+ = \mathscr{W}_{x+0} \leq \mathscr{W}^x$. Носитель $\tilde{\Delta}_x^+$ содержится в $\mathbf{S}^x$, из экстремальности энергии меры $\bar{\omega}^x$ следует, что $\tilde{\Delta}_x^+ = \bar{\omega}^x$. Из единственности равновесной меры следует дифференцируемость справа $\bar{\lambda}^x$, $\tilde{\gamma}_i^+ = \gamma_i^x$ и $\mathscr{W}^x = \mathscr{W}_{x+0}$. Это вместе со следствиями 3.1 и 3.2 дает нам справедливость п. 2–5 теоремы при положительном приращении.

Пусть в точке x емкость непрерывна слева $\mathscr{W}_{x-0} = \mathscr{W}_x$. Используя принцип максимума для субгармонических функций, принцип понижения для логарифмического потенциала, (2.6) и лемму 3.3, мы получим неравенства

$$W_{0,1}^{\tilde{\Delta}_x^-}(z) \leq \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} W_{0,1}^{\tilde{\Delta}_x^{-\varepsilon_n}}(z) = \tilde{\gamma}_1^- & \text{на } S_1^x \supset S_{\tilde{\Delta}_x^-}^1, \\ \tilde{\gamma}_1^- & \text{на } \mathbb{C}, \end{cases} \quad (3.18)$$

$$W_{0,2}^{\tilde{\Delta}_x^-}(z) \leq \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} W_{0,2}^{\tilde{\Delta}_x^{-\varepsilon_n}}(z) = \tilde{\gamma}_2^- & \text{на } S_2^x \supset S_{\tilde{\Delta}_x^-}^1, \\ \tilde{\gamma}_2^- & \text{на } \mathbb{C}. \end{cases}$$

Интегрируя (3.18) почленно по $\tilde{\Delta}_{x,i}^-$, мы докажем, что $I(\tilde{\Delta}_x^-) \leq 2\tilde{\gamma}_1^- + \tilde{\gamma}_2^- = \mathscr{W}_x$, т.е. $\tilde{\Delta}_x^- = \bar{\omega}_x$. Из единственности равновесной меры следует дифференцируемость слева $\bar{\lambda}^x$ и $\tilde{\gamma}_i^- = \gamma_i^x$ (в точках непрерывности емкости слева, т.е. там, где $\mathscr{W}_{x-0} = \mathscr{W}_x$). Мы доказали п. 2–5.

Для завершения доказательства теоремы нам осталось установить справедливость формулы (2.11) для равновесной меры.

Положим $\bar{\mu}^x := \int_0^x \bar{\omega}_\tau d\tau$ и рассмотрим нейтральный заряд $\bar{\nu}^x := \bar{\lambda}^x - \bar{\mu}^x$. Наша цель доказать, что $\bar{\nu}^x$ есть нулевой заряд.

Докажем сначала, что $\bar{\nu}^x$ не зависит от x . Заряд $\bar{\nu}^x$ непрерывен по x . Мера $\bar{\mu}$ дифференцируема слева и справа в точках непрерывности $\bar{\omega}$ слева и справа соответственно. Покажем, что $\bar{\omega}_{x+\varepsilon} \rightarrow \bar{\omega}^x$ при $\varepsilon \searrow 0$. Из $\bar{\omega}_{x+\varepsilon}$ можно выбрать сходящуюся к $\tilde{\omega}$ подпоследовательность по теореме о слабой компактности единичного шара в сопряженном пространстве. Из принципа понижения для логарифмического потенциала следует, что $I(\tilde{\omega}) \leq \lim_{\varepsilon \searrow 0} I(\bar{\omega}_{x+\varepsilon}) = \mathcal{W}_{x+0} = \mathcal{W}^x$. Носитель $S_{\tilde{\omega}} \subset S^x$, и из минимальности энергии экстремальной меры следует, что $\tilde{\omega} = \bar{\omega}^x$. Аналогичные рассуждения показывают, что если логарифмическая емкость непрерывна слева в точке x , т.е. если $\mathcal{W}_{x-0} = \mathcal{W}_x$, то $\bar{\omega}_{x-\varepsilon} \rightarrow \bar{\omega}_x$ при $\varepsilon \searrow 0$.

Мы показали, что заряд $\bar{\nu}^x$ непрерывен по x и всюду существуют правые производные, равные нулю, и всюду, за исключением не более чем счетного множества, существуют нулевые левые производные

$$\frac{\partial^+}{\partial x} \bar{\nu}^x = 0, \quad \frac{\partial^-}{\partial x} \bar{\nu}^x \stackrel{x \in N^c}{=} 0.$$

Рассмотрим произвольное борелевское множество $\mathbf{B} \subset \mathbf{\Gamma}$ и определим функцию $f(x) := \bar{\nu}^x(\mathbf{B})$. Функция f непрерывна, и производная справа от нее всюду равна нулю, а слева равна нулю всюду, за исключением не более чем счетного множества. Учитывая, что $\bar{\lambda}^x$ и $\bar{\mu}^x$ – возрастающие меры, получим, что $f_1(x) := \bar{\lambda}^x(\mathbf{B})$ и $f_2(x) := \bar{\mu}^x(\mathbf{B})$ – абсолютно непрерывные функции. Следовательно, $f = f_1 - f_2$ – абсолютно непрерывная функция всюду, за исключением не более чем счетного множества, и с равной нулю производной. Следовательно, f – константа, и заряд $\bar{\nu} = \bar{\nu}^x$ не зависит от x .

Допустим, что $\bar{\nu}$ – ненулевой заряд с полной вариацией $A > 0$. Рассмотрим разложение Жордана заряда $\bar{\nu}$: пусть $\mathbf{S}_+$ и $\mathbf{S}_-$ такие подмножества $\mathbf{\Gamma}$, что $\bar{\nu}(\mathbf{S}_+) = -\bar{\nu}(\mathbf{S}_-) = A/2$. Тогда для любого x имеем

$$\bar{\lambda}^x(\mathbf{S}_-) = \bar{\mu}^x(\mathbf{S}_-) + \bar{\nu}(\mathbf{S}_-) = \bar{\mu}^x(\mathbf{S}_-) - \frac{A}{2} \geq 0,$$

что приводит к противоречию при $0 < x < A/2$. Следовательно, существует точка x_0 такая, что $\bar{\nu} \equiv 0$ при $0 < x \leq x_0$.

Пусть теперь $\bar{\lambda}^x = \bar{\mu}^x$ при $x \leq x_0$ и $\bar{\lambda}^x \neq \bar{\mu}^x$ при некотором $x > x_0$. Тогда при этом x , как и раньше, $\bar{\nu} := \bar{\lambda}^x - \bar{\mu}^x$ – нулевой заряд, который можно представить в виде разности двух мер:

$$\bar{\nu} := (\bar{\lambda}^x - \bar{\lambda}^{x_0}) - (\bar{\mu}^x - \bar{\mu}^{x_0}) = (\bar{\lambda}^x - \bar{\lambda}^{x_0}) - \int_{x_0}^x \bar{\omega}_\tau d\tau.$$

Как в предыдущем случае, рассмотрим разложение Жордана заряда $\bar{\nu}$. Пусть $\mathbf{S}_+$ и $\mathbf{S}_-$ такие, что $\bar{\nu}(\mathbf{S}_+) = -\bar{\nu}(\mathbf{S}_-) = A/2$, тогда

$$(\bar{\lambda}^x - \bar{\lambda}^{x_0})(\mathbf{S}_-) = (\bar{\mu}^x - \bar{\mu}^{x_0})(\mathbf{S}_-) + \bar{\nu}(\mathbf{S}_-) = (\bar{\mu}^x - \bar{\mu}^{x_0})(\mathbf{S}_-) - \frac{A}{2} \geq 0.$$

Аналогично предыдущему приходим к противоречию при $x - x_0 < A/2$. Следовательно, в качестве x_0 можно выбрать $x_0 + A/2$ и повторить последние рассуждения. Повторяя этот процесс, можно получить, что формула (2.11) верна для любого x . Теорема 2.1 доказана.

Список литературы

- [1] Е. А. Рахманов, “Об асимптотических свойствах многочленов, ортогональных на вещественной оси”, *Матем. сб.*, **119(161)**:2(10) (1982), 163–203; англ. пер.: Е. А. Rakhmanov, “On asymptotic properties of polynomials orthogonal on the real axis”, *Math. USSR-Sb.*, **47**:1 (1984), 155–193.
- [2] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его девяностолетию, Тр. МИАН СССР, **157**, 1981, 31–48; англ. пер.: А. А. Gonchar, Е. А. Rakhmanov, “On the convergence of simultaneous Padé approximants for systems of functions of Markov type”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **157** (1983), 31–50.
- [3] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О задаче равновесия для векторных потенциалов”, *УМН*, **40**:4(244) (1985), 155–156; англ. пер.: А. А. Gonchar, Е. А. Rakhmanov, “On the equilibrium problem for vector potentials”, *Russian Math. Surveys*, **40**:4 (1985), 183–184.
- [4] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций”, *Матем. сб.*, **134(176)**:3(11) (1987), 306–352; англ. пер.: А. А. Gonchar, Е. А. Rakhmanov, “Equilibrium distributions and degree of rational approximation of analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2 (1989), 305–348.
- [5] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, “Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа”, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 33–58; англ. пер.: А. А. Gonchar, Е. А. Rakhmanov, V. N. Sorokin, “Hermite–Padé approximants for systems of Markov-type functions”, *Sb. Math.*, **188**:5 (1997), 671–696.
- [6] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, “Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде”, *Матем. сб.*, **201**:2 (2010), 29–78; англ. пер.: А. И. Aptekarev, V. G. Lysov, “Systems of Markov functions generated by graphs and the asymptotics of their Hermite–Padé approximants”, *Sb. Math.*, **201**:2 (2010), 183–234.
- [7] B. Beckermann, V. Kalyagin, A. C. Matos, F. Wielonsky, “Equilibrium problems for vector potentials with semidefinite interaction matrices and constrained masses”, *Constr. Approx.*, **37**:1 (2013), 101–134.
- [8] A. Hardy, A. B. J. Kuijlaars, “Weakly admissible vector equilibrium problems”, *J. Approx. Theory*, **164**:6 (2012), 854–868.
- [9] A. I. Aptekarev, G. López Lagomasino, A. Martínez-Finkelshtein, *On Nikishin systems with discrete components and weak asymptotics of multiple orthogonal polynomials*, arXiv: 1403.3729.
- [10] А. И. Аптекарев, В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены”, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 37–122; англ. пер.: А. И. Aptekarev, V. I. Buslaev, A. Martínez-Finkelshtein, S. P. Suetin, “Padé approximants, continued fractions, and orthogonal polynomials”, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1049–1131.
- [11] А. И. Аптекарев, А. Э. Койэлаарс, “Аппроксимации Эрмита–Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов”, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 123–190; англ.

- пер.: А. И. Аптекarev, А. В. J. Kuijlaars, “Hermite–Padé approximations and multiple orthogonal polynomial ensembles”, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1133–1199.
- [12] L. Pastur, M. Shcherbina, “Universality of the local eigenvalue statistics for a class of unitary invariant random matrix ensembles”, *J. Statist. Phys.*, **86**:1-2 (1997), 109–147.
- [13] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou, “Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **52**:11 (1999), 1335–1425.
- [14] А. И. Аптекarev, Р. М. Блехер, А. В. J. Kuijlaars, “Large n limit of Gaussian random matrices with external source. II”, *Comm. Math. Phys.*, **259**:2 (2005), 367–389.
- [15] В. С. Буяров, Е. А. Рахманов, “О семействах мер, равновесных во внешнем поле на вещественной оси”, *Матем. сб.*, **190**:6 (1999), 11–22; англ. пер.: V. S. Buyarov, E. A. Rakhmanov, “Families of equilibrium measures in an external field on the real axis”, *Sb. Math.*, **190**:6 (1999), 791–802.
- [16] В. С. Буяров, “О логарифмической асимптотике многочленов, ортогональных на $\mathbb{R}$ с несимметричным весом”, *Матем. заметки*, **50**:2 (1991), 28–36; англ. пер.: V. S. Buyarov, “Logarithmic asymptotics of polynomials orthogonal on $\mathbb{R}$ with asymmetric weights”, *Math. Notes*, **50**:2 (1991), 789–795.
- [17] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988, 256 с.; англ. пер.: E. M. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Transl. Math. Monogr., **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, viii+221 pp.
- [18] E. B. Saff, V. Totik, *Logarithmic potentials with external fields*, Grundlehren Math. Wiss., **316**, Springer-Verlag, Berlin, 1997, xvi+505 pp.
- [19] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966, 515 с.; англ. пер.: N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Grundlehren Math. Wiss., **180**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1972, x+424 pp.
- [20] М. А. Лапик, “Равновесная мера во внешнем поле для векторного потенциала с матрицей взаимодействия Никишина”, *УМН*, **67**:3(405) (2012), 179–180; англ. пер.: M. A. Lapik, “Equilibrium measure for the vector logarithmic potential problem with an external field and the Nikishin interaction matrix”, *Russian Math. Surveys*, **67**:3 (2012), 579–581.
- [21] Е. М. Никишин, “Об асимптотике линейных форм для совместных аппроксимаций Паде”, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, №2, 33–41; англ. пер.: E. M. Nikishin, “Asymptotic behavior of linear forms for simultaneous Padé approximants”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **30**:2 (1986), 43–52.
- [22] Е. А. Рахманов, С. П. Суегин, “Распределение нулей полиномов Эрмита–Паде для пары функций, образующей систему Никишина”, *Матем. сб.*, **204**:9 (2013), 115–160; англ. пер.: E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, “The distribution of the zeros of the Hermite–Padé polynomials for a pair of functions forming a Nikishin system”, *Sb. Math.*, **204**:9 (2013), 1347–1390.
- [23] Е. М. Никишин, “О совместных аппроксимациях Паде”, *Матем. сб.*, **113**(155):4(12) (1980), 499–519; англ. пер.: E. M. Nikishin, “On simultaneous Padé approximants”, *Math. USSR-Sb.*, **41**:4 (1982), 409–425.
- [24] А. И. Аптекarev, “Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина”, *Матем. сб.*, **190**:5 (1999), 3–44; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Strong asymptotics of multiply orthogonal polynomials for Nikishin systems”, *Sb. Math.*, **190**:5 (1999), 631–669.
- [25] А. И. Аптекarev, Г. Лопес Лагомасино, И. А. Роча, “Асимптотика отношения полиномов Эрмита–Паде для систем Никишина”, *Матем. сб.*, **196**:8 (2005), 3–20; англ. пер.: A. I. Aptekarev, G. López Lagomasino, I. A. Rocha, “Ratio asymptotics of Hermite–Padé polynomials for Nikishin systems”, *Sb. Math.*, **196**:8 (2005), 1089–1107.

- [26] Н. N. Mhaskar, E. B. Saff, “Where does the sup norm of a weighted polynomial live?”, *Constr. Approx.*, **1**:1 (1985), 71–91.
- [27] М. А. Лапик, “О носителе экстремальной меры в векторной задаче равновесия”, *Матем. сб.*, **197**:8 (2006), 101–118; англ. пер.: М. А. Lapik, “Support of the extremal measure in a vector equilibrium problem”, *Sb. Math.*, **197**:8 (2006), 1205–1221.

Мария Александровна Лапик
(Mariya A. Lapik)

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва
E-mail: mashalapik@gmail.com

Поступила в редакцию
17.02.2014 и 08.12.2014