Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Арутюнов, Б. Д. Гельман, О структуре множества точек совпадения, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 3, 35–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8351>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:39:22

УДК 517+515.124+515.126

А. В. Арутюнов, Б. Д. Гельман

О структуре множества точек совпадения

Исследуется структура множества точек совпадения двух отображений, действующих из одного метрического пространства в другое. Изучены мощностные, метрические и топологические свойства множества точек совпадения. Получены условия, при которых это множество: содержит не менее чем две точки; содержит не менее чем n точек; содержит счетное подмножество; несчетно. В качестве приложения полученные результаты применены для изучения структуры множества двойных точек и множества неподвижных точек многозначных сжимающих отображений.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: многозначное отображение, точка совпадения, метрика Хаусдорфа, накрывающее отображение.

DOI: 10.4213/sm8351

§ 1. Постановка задачи

В работах [1], [2] разработаны методы исследования существования точек совпадения двух отображений, действующих в метрических пространствах. В работах [3], [4], стимулировавших настоящее исследование, получены условия, при которых у многозначного сжимающего отображения существует не менее двух неподвижных точек. Настоящая работа является естественным развитием указанных работ [1]–[4].

Пусть (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) – метрические пространства с метриками ρ_X , ρ_Y . Пусть заданы многозначные отображения $\Psi, \Phi: X \rightrightarrows Y$, ставящие в соответствие каждому $x \in X$ непустые замкнутые множества $\Psi(x) \subset Y$ и $\Phi(x) \subset Y$ соответственно. Пусть также заданы числа $\alpha > \beta \geq 0$.

Через $B_X(x, r) = \{\xi \in X : \rho_X(x, \xi) \leq r\}$ обозначим замкнутый шар в пространстве X с центром в точке x радиуса r , аналогично – в пространстве Y . Для произвольного подмножества $M \subset Y$ положим $B_Y(M, r) = \bigcup_{y \in M} B_Y(y, r)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть задано $\alpha > 0$. Многозначное отображение $\Psi: X \rightrightarrows Y$ называется α -накрывающим, если

$$\Psi(B_X(x, r)) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha r) \quad \forall r \geq 0, \quad \forall x \in X.$$

Многозначное отображение $\Phi: X \rightrightarrows Y$ называется β -липшицевым, если

$$h(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leq \beta \rho_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X,$$

Работа выполнена в рамках реализации государственного задания Министерства образования и науки РФ в сфере научной деятельности (проект № 1.333.2014/К) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00468).

где h – (расширенная) метрика Хаусдорфа в пространстве Y . Если $\beta < 1$ и $X = Y$, то β -липшицевое отображение называется β -сжимающим или *сжимающим*, если не надо уточнять коэффициент сжатия β .

Всюду в дальнейшем относительно отображений Ψ и Φ будем предполагать, что они удовлетворяют следующим *основным предположениям*:

- отображение Ψ является α -накрывающим и замкнутым, а отображение Φ является β -липшицевым;
- график хотя бы одного из этих отображений, $\text{grh}(\Psi)$ или $\text{grh}(\Phi)$, является полным подпространством пространства $X \times Y$.

Напомним, что многозначное отображение $F: X \rightrightarrows Y$ называется замкнутым, если его график $\text{grh}(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$ замкнут, а метрика в декартовом произведении пространств $X \times Y$ определяется соотношением

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{\rho_X(x_1, x_2), \rho_Y(y_1, y_2)\}.$$

В метрическом пространстве (Y, ρ_Y) , как обычно, через dist обозначим расстояние (зазор) между непустыми множествами M, N , определяемое соотношением

$$\text{dist}(M, N) = \inf\{\rho_Y(y_1, y_2) : y_1 \in M, y_2 \in N\}.$$

Аналогичное обозначение будем использовать для расстояний между множествами и в других метрических пространствах.

Для произвольного множества $A \subset Y$, как обычно, положим

$$\Psi^{-1}(A) = \{x \in X : \Psi(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Если точка ξ удовлетворяет соотношению

$$\Psi(\xi) \cap \Phi(\xi) \neq \emptyset, \tag{1.1}$$

то она называется точкой совпадения отображений Ψ и Φ . Множество точек совпадения обозначим через $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$. Если отображения Ψ и Φ являются однозначными, т.е. при всех $x \in X$ каждое из множеств $\Psi(x)$ и $\Phi(x)$ является одноточечным, то условие (1.1) принимает вид $\Psi(\xi) = \Phi(\xi)$.

Понятие точки совпадения является естественным развитием понятия неподвижной точки отображения, действующего из метрического пространства в себя. Мы приходим от точки совпадения к неподвижной точке при $X = Y$ и когда Ψ – тождественное отображение.

Обозначим через $\Gamma(\Psi, \Phi)$ множество пар $(\xi, \eta) \in X \times Y$ таких, что $\eta \in \Phi(\xi) \cap \Psi(\xi)$. Очевидно, $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ является проекцией множества $\Gamma(\Psi, \Phi)$ на пространство X , т.е. $\xi \in \text{Coin}(\Psi, \Phi)$ тогда и только тогда, когда $(\xi, \eta) \in \Gamma(\Psi, \Phi)$ для некоторого $\eta \in Y$. Кроме того, очевидно, что

$$\Gamma(\Psi, \Phi) = \text{grh}(\Psi) \cap \text{grh}(\Phi).$$

По условию многозначное отображение Φ удовлетворяет условию Липшица, и, значит, оно непрерывно и поэтому полунепрерывно сверху. Но любое полунепрерывное сверху многозначное отображение, действующее из одного метрического пространства в другое, замкнуто (см. [5; теорема 1.2.29]), и, значит,

Φ замкнуто. Многочленное отображение Ψ замкнуто по предположению. Таким образом, множество $\Gamma(\Psi, \Phi)$ замкнуто как пересечение двух замкнутых множеств $\text{grh}(\Psi)$ и $\text{grh}(\Phi)$.

Для отображений, удовлетворяющих основным предположениям, приведем важное утверждение относительно множества $\Gamma(\Psi, \Phi)$ (это теорема 3 из работы [2] с учетом рассуждений, приведенных в ней после доказательства теоремы 1), на котором основаны приводимые ниже рассуждения.

ТЕОРЕМА А. *Множество $\Gamma(\Psi, \Phi)$ непусто, и, более того, для произвольных $x \in X$, $y \in Y$ и $\varepsilon > 0$ существуют такие $(\xi, \eta) \in \Gamma(\Psi, \Phi)$, что*

$$\rho_X(\xi, x) \leq \frac{\text{dist}(y, \Psi(x)) + \text{dist}(y, \Phi(x))}{\alpha - \beta} + \varepsilon, \quad (1.2)$$

$$\rho_Y(\eta, y) \leq \frac{\beta \text{dist}(y, \Psi(x)) + \alpha \text{dist}(y, \Phi(x))}{\alpha - \beta} + \varepsilon. \quad (1.3)$$

Если же, кроме того, многозначные отображения компактнозначны (т.е. при каждом $x \in X$ множества $\Psi(x)$ и $\Phi(x)$ компактны), то оценки (1.2) и (1.3) справедливы при $\varepsilon = 0$.

Отметим, что последнее предположение теоремы автоматически выполняется, если отображения $\Psi(x)$ и $\Phi(x)$ являются не многозначными, а однозначными отображениями. Кроме того, когда $X = Y$, а Ψ – тождественное отображение, из теоремы вытекает принцип сжимающих отображений и, более общо, теорема Надлера о том, что сжимающее многозначное отображение, действующее из полного метрического пространства в себя, имеет хотя бы одну неподвижную точку.

§ 2. Мощность множества точек совпадения

В дальнейшем будем считать, что заданы $\xi_* \in \text{Coin}(\Psi, \Phi)$ и

$$\eta_* \in \Psi(\xi_*) \cap \Phi(\xi_*).$$

ЛЕММА 1. *Пусть заданы*

$$x \in X, \quad y \in \Psi(x), \quad \gamma \geq 0: \quad \text{dist}(y, \Phi(\xi_*)) \leq \gamma \rho_X(x, \xi_*). \quad (2.1)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют $(\xi, \eta) = (\xi(\varepsilon), \eta(\varepsilon)) \in \Gamma(\Psi, \Phi)$ такие, что

$$\rho_X(\xi, x) \leq \frac{\beta + \gamma + \varepsilon}{\alpha - \beta} \rho_X(\xi_*, x), \quad \rho_Y(\eta, y) \leq \alpha \frac{\beta + \gamma + \varepsilon}{\alpha - \beta} \rho_X(\xi_*, x). \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x = \xi_*$, то в силу (2.1) точка y принадлежит $\Psi(\xi_*) \cap \Phi(\xi_*)$, и поэтому утверждение леммы, очевидно, выполняется при $\xi = \xi_*$, $\eta = y$. Поэтому ограничимся рассмотрением случая $x \neq \xi_*$. Используя последнее, выберем $\tilde{\varepsilon} > 0$ такое, что $\tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon \rho_X(\xi_*, x)$.

В силу теоремы А, поскольку $y \in \Psi(x)$, то существуют $(\xi, \eta) \in \Gamma(\Psi, \Phi)$ такие, что

$$\rho_X(\xi, x) \leq \frac{\text{dist}(y, \Phi(x)) + \tilde{\varepsilon}}{\alpha - \beta}, \quad \rho_Y(\eta, y) \leq \frac{\alpha \text{dist}(y, \Phi(x)) + \alpha \tilde{\varepsilon}}{\alpha - \beta}. \quad (2.3)$$

В силу очевидных свойств расстояния dist и метрики Хаусдорфа h имеем

$$\begin{aligned} \text{dist}(y, \Phi(x)) &\leq \text{dist}(y, \Phi(\xi_*)) + h(\Phi(\xi_*), \Phi(x)) \\ &\leq \gamma \rho_X(\xi_*, x) + \beta \rho_X(\xi_*, x) = (\beta + \gamma) \rho_X(\xi_*, x). \end{aligned}$$

Отсюда в силу выбора $\tilde{\varepsilon}$ получаем, что

$$\text{dist}(y, \Phi(x)) + \tilde{\varepsilon} \leq (\gamma + \beta + \varepsilon) \rho_X(\xi_*, x).$$

Подставляя это неравенство в (2.3), завершаем рассуждения. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если многозначные отображения Ψ и Φ компактнозначны, то утверждение леммы 1 выполняется, даже если в оценках (2.2) взять $\varepsilon = 0$. Это вытекает из второй части теоремы А.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть существуют $x \in X$ и $\gamma \geq 0$, для которых

$$x \neq \xi_*, \quad \text{dist}(\Psi(x), \Phi(\xi_*)) \leq \gamma \rho_X(x, \xi_*), \quad 2\beta + \gamma < \alpha. \quad (2.4)$$

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и

$$y \in \Psi(x): \quad \text{dist}(y, \Phi(\xi_*)) \leq \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2} \right) \rho_X(x, \xi_*),$$

существует $(\xi, \eta) \in \Gamma(\Psi, \Phi)$ такое, что $\xi \neq \xi_*$ и справедливы оценки

$$\rho_X(\xi, x) \leq \frac{\beta + \gamma + \varepsilon}{\alpha - \beta} \rho_X(\xi_*, x), \quad \rho_Y(\eta, y) \leq \alpha \frac{\beta + \gamma + \varepsilon}{\alpha - \beta} \rho_X(\xi_*, x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу последнего неравенства из (2.4), уменьшая $\varepsilon > 0$, добьемся того, чтобы выполнялось

$$\frac{\beta + \gamma + \varepsilon}{\alpha - \beta} < 1. \quad (2.5)$$

По лемме 1 существуют $(\xi, \eta) \in \Gamma(\Psi, \Phi)$, для которых выполняется (2.2). В силу (2.5) и первого неравенства из (2.2) имеем $\rho_X(\xi, x) < \rho_X(\xi_*, x)$, поскольку $x \neq \xi_*$. Следовательно, $\xi \neq \xi_*$. Таким образом, (ξ, η) являются искомыми. Предложение доказано.

Из предложения 1 при $\gamma = 0$ вытекает следующее важное утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\alpha > 2\beta, \quad (2.6)$$

$$\exists x \in X: \quad x \neq \xi_*, \quad \Psi(x) \cap \Phi(\xi_*) \neq \emptyset. \quad (2.7)$$

Тогда для любых $y \in \Psi(x) \cap \Phi(\xi_*)$ и $\varepsilon > 0$ существует точка $(\xi, \eta) \in \Gamma(\Psi, \Phi)$ такая, что $\xi \neq \xi_*$ и выполняется

$$\rho_X(\xi, x) \leq \frac{\beta + \varepsilon}{\alpha - \beta} \rho_X(\xi_*, x), \quad \rho_Y(\eta, y) \leq \alpha \frac{\beta + \varepsilon}{\alpha - \beta} \rho_X(\xi_*, x).$$

В частности, если выполняется (2.6) и множество $\Psi^{-1}(\Phi(\xi_*))$ содержит хотя бы одну точку, отличную от точки ξ_* , то существует точка $\xi \in \text{Coin}(\Psi, \Phi)$, отличная от точки ξ_* .

Из второй части теоремы 1 при $y = \eta_*$ получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполняется (2.6) и множество $\Psi^{-1}(\eta_*)$ содержит хотя бы одну точку, отличную от ξ_* . Тогда существует точка $\xi \in \text{Coin}(\Psi, \Phi)$, отличная от точки ξ_* .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если многозначные отображения Ψ и Φ компактнозначны, то оценки в предложении 1 и теореме 1 выполняются даже при $\varepsilon = 0$. Это вытекает из замечания 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если множество $\Phi(\xi_*) \setminus \Psi(\xi_*)$ непусто, то выполняется предположение (2.7). Это вытекает из того, что отображение Ψ является α -накрывающим.

Рассмотрим частный случай задачи о точках совпадения, а именно задачу о неподвижных точках сжимающего многозначного отображения. Итак, пусть $(X, \rho_X) = (Y, \rho_Y)$, $\Psi(x) \equiv x$, $\Phi: X \rightrightarrows X$ – заданное β -сжимающее отображение при $\beta < 1/2$. Пусть $\xi \in X$ является неподвижной точкой, т.е. $\xi \in \Phi(\xi)$.

Тогда в силу второй части теоремы 1, если множество $\Phi(\xi)$ содержит хотя бы одну точку, отличную от ξ , то отображение Φ имеет не менее двух неподвижных точек. Это утверждение обобщает теорему 2 из [3], в которой рассматривалось β -сжимающее отображение при $\beta < 1/2$, действующее из выпуклого замкнутого подмножества банахова пространства в себя.

Возникает естественный вопрос: можно ли в теореме 1 и следствии 1 (и в утверждении из предыдущего абзаца) ослабить предположение (2.6)? Следующий пример, развивающий пример 3 из [4], показывает, что это предположение существенно, и в нем строгое неравенство нельзя заменить даже на равенство.

ПРИМЕР 1. Пусть, как обычно, $\mathbb{R}$ – вещественная прямая, а $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ – множество целых чисел. Рассмотрим факторпространство $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ относительно отношения эквивалентности в $\mathbb{R}$, определяемого условием

$$x_1 \sim x_2 \iff (x_1 - x_2) \in \mathbb{Z},$$

с естественной метрикой, индуцированной из $\mathbb{R}$.

Положим $X = Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и определим отображения $\Psi, \Phi: X \rightarrow Y$ соотношениями $\Psi(x) = 2x$, $\Phi(x) = x$. Непосредственно проверяется, что пара отображений (Ψ, Φ) удовлетворяет основным предположениям при $\alpha = 2$ и $\beta = 1$.

Очевидно, $\Psi(1/2) = \Psi(0)$. Таким образом, все предположения теоремы 1 (и следствия 1), за исключением условия (2.6), выполняются, причем (2.6) нарушается, поскольку в нем строгое неравенство превращается в равенство при $\alpha = 2$ и $\beta = 1$. В то же время множество точек совпадения пары отображений (Ψ, Φ) состоит из единственной точки (а не из двух точек), точнее $\text{Coin}(\Psi, \Phi) = \{0\}$.

Отметим, что в приведенном примере существенно, что в качестве пространства X нельзя брать банахово пространство. Действительно, в [4] доказано, что если Φ – сжимающее отображение выпуклого замкнутого подмножества банахова пространства в себя, имеющее неподвижную точку ξ , и $\Phi(\xi)$ содержит

хотя бы одну точку, отличную от ξ , то отображение Φ имеет не менее двух неподвижных точек.

При условии выполнения предположения (2.6) выведем критерий того, что множество точек совпадения является одноточечным. Для этого нам потребуется следующая конструкция.

Для $x \in X$ положим

$$M(x) = \{\tilde{x} \in X : \Psi(\tilde{x}) \cap \Phi(x) \neq \emptyset\}. \quad (2.8)$$

Очевидно, $M(x) = \Psi^{-1}(\Phi(x))$ и $x \in M(x)$ тогда и только тогда, когда $x \in \text{Coin}(\Psi, \Phi)$.

ЛЕММА 2. Пусть $\xi \in \text{Coin}(\Psi, \Phi)$ и множество $M(\xi)$ является одноточечным. Тогда множество $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ состоит из единственной точки $\{\xi\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное $\tilde{\beta} > \beta$. Докажем, что

$$M(x_2) \subset B_X(M(x_1), \tilde{\beta}\alpha^{-1}\rho_X(x_1, x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X. \quad (2.9)$$

Положим $r = \rho_X(x_1, x_2)$. Пусть $x \in M(x_2)$. Тогда $\Psi(x) \cap \Phi(x_2) \neq \emptyset$. Возьмем произвольное $y \in \Psi(x) \cap \Phi(x_2)$. Тогда $\text{dist}(y, \Phi(x_1)) \leq \beta r$, поскольку отображение Φ является β -липшицевым. Поэтому существует $\tilde{y} \in \Phi(x_1)$ такое, что $\rho_Y(\tilde{y}, y) \leq \beta r$. В силу α -накрываемости отображения Ψ существует $\tilde{x} \in X$ такое, что $\tilde{y} \in \Psi(\tilde{x})$, $\rho_X(\tilde{x}, x) \leq \tilde{\beta}\alpha^{-1}r$. Поэтому $\Psi(\tilde{x}) \cap \Phi(x_1) \neq \emptyset$ и, значит, $\tilde{x} \in M(x_1)$, откуда $x \in B_X(M(x_1), \tilde{\beta}\alpha^{-1}r)$. Соотношение (2.9) доказано.

Возьмем произвольное $x \in \text{Coin}(\Psi, \Phi)$ и докажем, что тогда $x = \xi$. Уменьшая $\tilde{\beta} > \beta$, будем считать, что $\tilde{\beta} \in (\beta, \alpha)$. Тогда $\gamma = \tilde{\beta}\alpha^{-1} < 1$. Очевидно, $x \in M(x)$ и по условию $M(\xi) = \{\xi\}$. Отсюда в силу (2.9) имеем $x \in B_X(\xi, \gamma\rho_X(x, \xi))$ и, значит, $\rho_X(x, \xi) \leq \gamma\rho_X(x, \xi)$. Поэтому $\rho_X(x, \xi) = 0$, поскольку $\gamma < 1$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что выполняется (2.6) и ξ является точкой совпадения. Тогда для того чтобы множество точек совпадения $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ было одноточечным, необходимо и достаточно, чтобы множество

$$\Psi^{-1}(\Phi(\xi))$$

было одноточечным.

Справедливость этой теоремы непосредственно вытекает из теоремы 1 и леммы 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть существует точка совпадения $\xi \in \text{Coin}(\Psi, \Phi)$ такая, что $\Psi^{-1}(\Phi(\xi)) = \{\xi\}$. Тогда множество $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ состоит из единственной точки ξ .

Иными словами, предложение 2 означает, что достаточность в теореме 2 справедлива и без предположения (2.6). Справедливость предложения 2 вытекает из леммы 2, так как в рассматриваемом случае $M(\xi) = \Psi^{-1}(\Phi(\xi)) = \{\xi\}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для натурального $n \geq 2$ существуют попарно различные точки $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, такие, что

$$x_i \neq \xi_*, \quad \Psi(x_i) \cap \Phi(\xi_*) \neq \emptyset \quad \forall i, \quad (2.10)$$

$$\rho_X(x_i, x_j) > \frac{\beta}{\alpha - \beta} (\rho_X(x_i, \xi_*) + \rho_X(x_j, \xi_*)) \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.11)$$

Тогда для любых $y_i \in \Psi(x_i) \cap \Phi(\xi_*)$ и $\varepsilon > 0$ существуют точки $(\xi_i, \eta_i) \in \Gamma(\Psi, \Phi)$, $i = 1, \dots, n$, такие, что все точки ξ_i попарно различны, $\xi_i \neq \xi_*$ для любого i и справедливы оценки

$$\rho_X(\xi_i, x_i) \leq \frac{\beta + \varepsilon}{\alpha - \beta} \rho_X(\xi_*, x_i), \quad \rho_Y(\eta_i, y_i) \leq \alpha \frac{\beta + \varepsilon}{\alpha - \beta} \rho_X(\xi_*, x_i) \quad \forall i. \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (2.11) является строгим. Поэтому из него в силу неравенства треугольника вытекает (2.6). Уменьшая $\varepsilon > 0$, добьемся того, чтобы выполнялось

$$\rho_X(x_i, x_j) > \frac{\beta + \varepsilon}{\alpha - \beta} (\rho_X(x_i, \xi_*) + \rho_X(x_j, \xi_*)) \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

По теореме 1 существуют $(\xi_i, \eta_i) \in \Gamma(\Psi, \Phi)$, для которых справедливы неравенства (2.12) и $\xi_i \neq \xi_*$ при каждом i . Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что все точки ξ_i попарно различны. Сделаем это.

Пусть для определенности $i = 1$, $j = 2$. Предположим противное, т.е. что $\xi_1 = \xi_2 = \xi$. Тогда, используя неравенство треугольника и первое неравенство из (2.12), имеем

$$\begin{aligned} \rho_X(x_1, x_2) &\leq \rho_X(x_1, \xi) + \rho_X(\xi, x_2) \\ &= \rho_X(x_1, \xi_1) + \rho_X(x_2, \xi_2) \leq \frac{\beta + \varepsilon}{\alpha - \beta} (\rho_X(x_1, \xi_*) + \rho_X(x_2, \xi_*)). \end{aligned}$$

Получили противоречие с (2.13), которое доказывает, что $\xi_1 \neq \xi_2$. Таким образом, точки $\xi_*, \xi_1, \dots, \xi_n$ попарно различны, удовлетворяют оценкам (2.12) и $(\xi_i, \eta_i) \in \Gamma(\Psi, \Phi)$ при любом i . Теорема доказана.

Приведем очевидное следствие полученной теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть для натурального $n \geq 2$ существуют попарно различные точки $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, для которых выполняются условия (2.10) и (2.11). Тогда множество $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ содержит не менее $n + 1$ точек.

Отметим, что если многозначные отображения Ψ и Φ компактнозначны, то оценки (2.12) выполняются даже при $\varepsilon = 0$.

Возникает естественный вопрос: можно ли в теореме 3 ослабить предположение (2.11)? Следующий пример, показывает, что оно существенно и в нем строгие неравенства нельзя заменить даже на равенства.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим метрические пространства, введенные в примере 1. На них определим отображения $\Psi, \Phi: X \rightarrow Y$ соотношениями $\Psi(x) = 3x$,

$\Phi(x) = x$. Непосредственно проверяется, что пара отображений (Ψ, Φ) удовлетворяет основным предположениям при $\alpha = 3$ и $\beta = 1$.

Очевидно, $\Psi(1/3) = \Psi(2/3) = \Psi(0)$. Таким образом, при $n = 2$ все предположения теоремы 2, за исключением условия (2.11), выполняются, а условие (2.11) при $\alpha = 3$ и $\beta = 1$ нарушается, превращаясь в равенство. В то же время множество точек совпадения отображений (Ψ, Φ) состоит из двух (а не из трех) точек, точнее $\text{Coin}(\Psi, \Phi) = \{0, 1/2\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть выполняется (2.6) и ξ_* является предельной точкой множества $\Psi^{-1}(\eta_*)$. Тогда существует такая последовательность точек $\{(\xi_i, \eta_i)\} \subset \Gamma(\Psi, \Phi)$, что

$$\xi_i \rightarrow \xi_*, \quad \eta_i \rightarrow \eta_*, \quad i \rightarrow \infty, \quad (2.14)$$

и все точки ξ_i попарно различны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию существует последовательность попарно различных точек $\{x_i\} \subset X$ такая, что

$$x_i \rightarrow \xi_*, \quad i \rightarrow \infty, \quad \eta_* \in \Psi(x_i) \quad \forall i.$$

По теореме 1 для каждого натурального i существуют $(\xi_i, \eta_i) \in \Gamma(\Psi, \Phi)$ такие, что имеет место

$$\xi_i \neq \xi_*, \quad \rho_X(\xi_i, x_i) \leq \frac{\beta + 1}{\alpha - \beta} \rho_X(\xi_*, x_i), \quad \rho_Y(\eta_i, \eta_*) \leq \alpha \frac{\beta + 1}{\alpha - \beta} \rho_X(\xi_*, x_i). \quad (2.15)$$

Отсюда вытекает, что последовательности $\{\xi_i\}$ и $\{\eta_i\}$ сходятся к точкам ξ_* и η_* соответственно, поскольку по построению последовательность $\{x_i\}$ сходится к ξ_* . Поскольку $\xi_i \neq \xi_*$ для любого i , то из сходящейся к ξ_* последовательности $\{\xi_i\} \subset \text{Coin}(\Psi, \Phi)$ можно выбрать подпоследовательность, состоящую из попарно различных точек, и, значит, построенная последовательность $\{(\xi_i, \eta_i)\}$ будет искомой. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть выполняется (2.6) и ξ_* является предельной точкой множества $\Psi^{-1}(\Phi(\xi_*))$. Тогда ξ_* является предельной точкой множества $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ и, значит, это множество бесконечно (т.е. содержит бесконечное множество точек).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассуждать аналогично доказательству предложения 3. Возьмем последовательность попарно различных точек $\{x_i\} \subset X$, которая сходится к ξ_* . По теореме 1 для каждого натурального i существует точка $\xi_i \in \text{Coin}(\Psi, \Phi)$, для которой выполняются первые два соотношения из (2.15). Следовательно, $\xi_i \rightarrow \xi_*$. Поскольку $\xi_i \neq \xi_*$ для любого i , то из сходящейся последовательности $\{\xi_i\} \subset \text{Coin}(\Psi, \Phi)$ можно выбрать подпоследовательность, состоящую из попарно различных точек, которая является искомой. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Очевидно, $\Psi^{-1}(\eta_*) \subseteq \Psi^{-1}(\Phi(\xi_*))$, и это включение может оказаться строгим. Поэтому предположение предложения 3, вообще говоря, сильнее, чем в предложении 4, но и утверждение в предложении 3 сильнее, чем в предложении 4.

Исследуем мощность множества $\Gamma(\Psi, \Phi)$. Как отмечалось выше, это множество замкнуто.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполняется (2.6). Предположим, что для любых $(\xi, \eta) \in \Gamma(\Psi, \Phi)$ точка ξ является предельной для множества $\Psi^{-1}(\eta)$. Тогда множество $\Gamma(\Psi, \Phi)$ несчетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию хотя бы один из графиков $\text{grh}(\Psi)$ или $\text{grh}(\Phi)$ является полным метрическим пространством. Обозначим через G тот график, который является полным. Рассмотрим в нем замкнутое подмножество $G_0 = \Gamma(\Psi, \Phi)$ и будем считать G_0 метрическим пространством с метрикой ρ , индуцированной из декартова произведения $X \times Y$. Из полноты пространства G и замкнутости его подмножества G_0 вытекает полнота метрического пространства (G_0, ρ) . В силу предложения 3 в метрическом пространстве (G_0, ρ) изолированных точек нет.

Таким образом, полное метрическое пространство (G_0, ρ) не содержит изолированных точек. Но, как известно, любое полное метрическое пространство без изолированных точек несчетно (последнее непосредственно вытекает из теоремы Бэра о категориях). Поэтому множество $G_0 = \Gamma(\Psi, \Phi)$ несчетно. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. На самом деле доказано более сильное утверждение. А именно, как известно (см., например, [6; гл. 5, теорема 23]), любое полное метрическое пространство без изолированных точек содержит подпространство, гомеоморфное канторову совершенному множеству. Поэтому в предположениях теоремы 4 $\Gamma(\Psi, \Phi)$ содержит подпространство, которое гомеоморфно канторову совершенному множеству.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполняется (2.6), для любых $(\xi, \eta) \in \Gamma(\Psi, \Phi)$ точка ξ является предельной для множества $\Psi^{-1}(\eta)$ и, кроме того, хотя бы одно из отображений Ψ или Φ является однозначным. Тогда множество $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ несчетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если отображение Ψ является однозначным, то для любого $x \in \text{Coin}(\Psi, \Phi)$ множество $\{y : (x, y) \in \Gamma(\Psi, \Phi)\}$ состоит из единственной точки $\Psi(x)$. Поэтому множества $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ и $\Gamma(\Psi, \Phi)$ равномощны и, значит, по теореме 4 множество $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ несчетно. Такие же точно рассуждения проводятся в случае, когда однозначным является отображение Φ . Следствие доказано.

Отметим, что в следствии 3 предположение об однозначности хотя бы одного из отображений Ψ или Φ можно ослабить, заменив предположением, что при каждом $x \in X$ множество $\Psi(x) \cap \Phi(x)$ не более чем счетно.

§ 3. Метрические и топологические свойства множества точек совпадения

Пусть многозначные отображения $\Psi, \Phi: X \rightrightarrows Y$ удовлетворяют основным предположениям. Начнем с вопроса о неограниченности множества точек совпадения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть подмножество $A \subset Y$ ограничено, однако множество $\Psi^{-1}(A)$ неограничено. Тогда множество $\Psi^{-1}(y)$ неограничено для любой точки $y \in Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда найдется такая точка $y \in Y$, что множество $\Psi^{-1}(y)$ ограничено, и, значит, существуют число $r > 0$ и точка $x \in \Psi^{-1}(y)$ такие, что $\Psi^{-1}(y) \subset B_X(x, r)$. В силу ограниченности множества A существует $R > 0$ такое, что $A \subset B_Y(y, R)$. Поскольку множество $\Psi^{-1}(A)$ неограничено, то существует точка $x_0 \in \Psi^{-1}(A)$ такая, что $\rho_X(x_0, x) > r + R/\alpha$. Возьмем точку $y_0 \in \Psi(x_0) \cap A$. Для нее, очевидно, $\rho_Y(y_0, y) \leq R$.

Таким образом, поскольку отображение Ψ является α -накрывающим, то в шаре $B_X(x_0, R/\alpha)$ найдется точка x_1 такая, что $\Psi(x_1) = y$. Следовательно, $x_1 \in \Psi^{-1}(y) \subset B_X(x, r)$ и, значит, $\rho_X(x, x_1) \leq r$. В то же время с помощью неравенства треугольника получаем

$$\rho_X(x, x_1) \geq \rho_X(x, x_0) - \rho_X(x_1, x_0) > \left(r + \frac{R}{\alpha}\right) - \frac{R}{\alpha} = r.$$

Полученное противоречие доказывает предложение.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть существует точка $y \in Y$ такая, что множество $\Psi^{-1}(y)$ ограничено. Тогда для любого ограниченного подмножества $A \subset Y$ множество $\Psi^{-1}(A)$ также ограничено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть существует $x \in X$, для которого множество $M(x)$, определенное соотношением (2.8), ограничено. Тогда множество $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ также ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное $\tilde{\beta} \in (\beta, \alpha)$. Тогда $\gamma = \tilde{\beta}\alpha^{-1} < 1$. Пусть для некоторого $x \in X$ множество $M(x)$ ограничено. Возьмем произвольное $\xi \in \text{Coin}(\Psi, \Phi)$ и положим $r = \rho_X(x, \xi)$. Тогда $\xi \in M(\xi)$, откуда в силу включения (2.9), полученного в процессе доказательства леммы 2, имеет место $\xi \in B_X(M(x), \gamma r)$. Вследствие ограниченности множества $M(x)$ существует $R > 0$ такое, что $M(x) \subset B_X(x, R)$. Тогда $r = \rho_X(x, \xi) \leq \gamma r + R$, откуда $\rho_X(x, \xi) \leq (1 - \gamma)^{-1}R$ и, значит, $\text{Coin}(\Psi, \Phi) \subset B_X(x, (1 - \gamma)^{-1}R)$. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 5. 1. Пусть выполняется условие (2.6) и существует точка $y \in Y$, для которой множество $\Psi^{-1}(y)$ неограничено. Тогда множество $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ неограничено.

2. Пусть существуют $x \in X$ и $y \in Y$ такие, что множества $\Phi(x) \subset Y$ и $\Psi^{-1}(y) \subset X$ ограничены. Тогда множество $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Возьмем $(\xi_*, \eta_*) \in \Gamma(\Psi, \Phi)$. В силу предложения 5 множество $\Psi^{-1}(\eta_*)$ неограничено. Предположим противное, т.е. что множество $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ ограничено. Тогда существует число $R > 0$ такое, что $\text{Coin}(\Psi, \Phi) \subset B_X(\xi_*, R)$. В силу (2.6) существует такое $\varepsilon > 0$, что $\alpha - 2\beta - \varepsilon > 0$. Поскольку множество $\Psi^{-1}(\eta_*)$ неограничено, то существует точка $x_0 \in \Psi^{-1}(\eta_*)$ такая, что

$$\rho_X(\xi_*, x_0) \geq \frac{R(\alpha - \beta)}{\alpha - 2\beta - \varepsilon}.$$

Поскольку $\eta_* \in \Psi(x_0)$, то по лемме 1 существует точка $\xi \in \text{Coin}(\Phi, \Psi)$, для которой выполняется

$$\rho_X(\xi, x_0) \leq \frac{\beta + \varepsilon}{\alpha - \beta} \rho_X(\xi_*, x_0).$$

Оценим расстояние $\rho_X(\xi_*, \xi)$. Используя неравенство треугольника, имеем

$$\rho_X(\xi_*, \xi) \geq \rho_X(\xi_*, x_0) - \rho_X(x_0, \xi) > \rho_X(\xi_*, x_0) - \frac{\beta + \varepsilon}{\alpha - \beta} \rho_X(\xi_*, x_0) \geq R.$$

Однако по построению $\rho_X(\xi_*, \xi) \leq R$. Получили противоречие.

2. Рассмотрим множество $M(x)$, определенное соотношением (2.8). Поскольку $M(x) = \Psi^{-1}(\Phi(x))$, то в силу следствия 4 множество $M(x)$ ограничено. Поэтому ограниченность $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ вытекает из предложения 6.

Теорема доказана.

Обсудим теперь вопрос: когда множество точек совпадения компактно? В [4] доказано, что если многозначное отображение G , действующее из полного метрического пространства в себя, является сжимающим и компактнозначным, то множество его неподвижных точек $\{x : x \in G(x)\}$ компактно (это теорема 1 из [4]) и непусто. Обобщим это утверждение на множество точек совпадения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть многозначное отображение Φ компактнозначно. Тогда множество $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задана последовательность $\{\xi_i\} \subset \text{Coin}(\Psi, \Phi)$, которая сходится к точке x_0 . Докажем, что $x_0 \in \text{Coin}(\Psi, \Phi)$.

Для каждого i выберем $y_i \in \Psi(\xi_i) \cap \Phi(\xi_i)$. Тогда (поскольку липшицево многозначное отображение Φ полунепрерывно сверху) $\text{dist}(y_i, \Phi(x_0)) \rightarrow 0$, откуда в силу компактности множества $\Phi(x_0)$, переходя к подпоследовательности, имеем $y_i \rightarrow y_0 \in \Phi(x_0)$. Отсюда в силу замкнутости отображения Ψ имеем $y_0 \in \Psi(x_0)$ и, значит, $y_0 \in \Psi(x_0) \cap \Phi(x_0) \neq \emptyset$, откуда $x_0 \in \text{Coin}(\Psi, \Phi)$. Значит, множество $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ замкнуто. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть выполняется соотношение (2.6), многозначное отображение Φ компактнозначно и для любого $\xi \in \text{Coin}(\Psi, \Phi)$ точка ξ является предельной для множества $\Psi^{-1}(\Phi(\xi))$. Тогда множество точек совпадения $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ несчетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 7 множество $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ замкнуто, а в силу предложения 4 оно не содержит изолированных точек. Поэтому множество $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ несчетно, поскольку любое полное метрическое пространство без изолированных точек несчетно. Следствие доказано.

Доказанное утверждение является естественным дополнением следствия 3.

Приведем пример, показывающий, что в предложении 7 предположение компактнозначности многозначного отображения Φ существенно.

ПРИМЕР 3 (это пример 4 из [7]). Пусть $X = [0, 1]$, $Y = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\} \cup \{0\}$, $\Psi(x) = \{x^{-1}\}$ для любого $x \in (0, 1]$, а $\Psi(0) = \{0\}$. Пусть $\Phi(x) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$

для любого $x \in X$. Очевидно, что многозначное отображение Ψ замкнуто и является 1-накрывающим, а Φ постоянно. Легко видеть, что $\text{Coin}(\Psi, \Phi) = (0, 1]$ представляет собой полуинтервал. Таким образом, в этом примере множество точек совпадения незамкнуто. Здесь нарушено предположение компактнозначности Φ .

ТЕОРЕМА 6. Пусть многозначные отображения $\Phi: X \rightrightarrows Y$ и $\Psi^{-1}: Y \rightrightarrows X$ компактнозначны (компактнозначность Ψ^{-1} означает, что для каждого $y \in Y$ множество $\Psi^{-1}(y)$ компактно). Тогда множество $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ компактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем его, следуя доказательству теоремы 1 из [4]. Поскольку в силу предложения 7 множество $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ замкнуто, то достаточно доказать, что оно вполне ограничено, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ оно имеет конечную ε -сеть. Предположим противное, т.е. что существуют $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{\xi_i\} \subset \text{Coin}(\Psi, \Phi)$ такие, что $\rho_X(\xi_i, \xi_j) \geq \varepsilon$ для любых $i \neq j$. В силу предположений теоремы и п. 2 теоремы 5 множество $\text{Coin}(\Psi, \Phi)$ ограничено. Поэтому множество чисел $r > 0$, для каждого из которых существует $x(r) \in X$ такое, что шар $B_X(x(r), r)$ содержит бесконечное число элементов последовательности $\{\xi_i\}$, непусто. Обозначим точную нижнюю грань этого множества через r_0 . Очевидно, $r_0 \geq \varepsilon/2 > 0$.

Возьмем $\tilde{\beta} \in (\beta, \alpha)$ и положим $\gamma = \alpha^{-1}\tilde{\beta}$. Тогда $\gamma \in (0, 1)$. Возьмем такое $\delta > 0$, что $\tilde{r} = \gamma(r_0 + \delta) + \delta < r_0$. Тогда существует $x \in X$ такое, что множество $J = \{i : \xi_i \in B_X(x, r_0 + \delta/2)\}$ бесконечно. Поскольку $\xi_i \in \text{Coin}(\Psi, \Phi)$, то $\xi_i \in M(\xi_i)$ для любого i . Поэтому в силу (2.9) для каждого $i \in J$ имеем

$$\text{dist}(\xi_i, M(x)) \leq h(M(\xi_i), M(x)) \leq \gamma \rho_X(\xi_i, x) < \gamma(r_0 + \delta).$$

Поэтому существуют $x_i \in M(x)$ такие, что $\rho_X(x_i, \xi_i) \leq \gamma(r_0 + \delta)$.

Покажем, что множество $M(x)$ компактно. Действительно, многозначное отображение Ψ является накрывающим. Поэтому $\Psi(X) = Y$ и из условия теоремы вытекает, что обратное многозначное отображение Ψ^{-1} каждому $y \in Y$ ставит в соответствие непустое компактное подмножество $\Psi^{-1}(y) \subset X$. Кроме того, из α -накрываемости Ψ вытекает, что обратное к нему отображение Ψ^{-1} является α^{-1} -липшицевым, и, значит, оно полунепрерывно сверху. Но $M(x) = \Psi^{-1}(\Phi(x))$, а по условию множество $\Phi(x)$ компактно. Но для полунепрерывного сверху многозначного отображения образ компакта является компактом (см., например, [5; теорема 1.2.35]). Поэтому множество $M(x)$ компактно.

В силу компактности $M(x)$ существует такое $\tilde{x} \in M(x)$, что множество $\tilde{J} = \{i \in J : \rho_X(x_i, \tilde{x}) < \delta\}$ бесконечно. Для каждого $i \in \tilde{J}$ с помощью неравенства треугольника получаем

$$\rho_X(\xi_i, \tilde{x}) \leq \rho_X(\xi_i, x_i) + \rho_X(x_i, \tilde{x}) \leq \gamma(r_0 + \delta) + \delta = \tilde{r} < r_0.$$

Таким образом, в шар $B_X(\tilde{x}, \tilde{r})$ существует бесконечное число элементов ξ_i , что противоречит выбору числа r_0 , поскольку $\tilde{r} < r_0$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Пример 3 и пример 4 ниже показывают, что в теореме 6 предположение компактнозначности обоих многозначных отображений Φ и Ψ^{-1} существенно.

ПРИМЕР 4. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$ и (однозначные) отображения $\Psi, \Phi: X \rightrightarrows Y$ определены соотношениями $\Psi(x) = x_2$, $\Phi(x) \equiv 0$, где $x = (x_1, x_2)$. Очевидно, $\text{Coin}(\Psi, \Phi) = \{x : x = (x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R}\}$. Это множество точек совпадения хотя и замкнуто, но не ограничено и, значит, не компактно, хотя Φ компактнозначно. В этом примере нарушено предположение компактности многозначного отображения Ψ^{-1} .

Приведем одно отображение, которое также характеризует множество точек совпадения. Для $x \in X$ через $\Xi(x)$ обозначим множество тех точек совпадения $\xi \in \text{Coin}(\Psi, \Phi)$, для которых выполняется

$$\rho_X(x, \xi) \leq \frac{\text{dist}(\Psi(x), \Phi(x))}{\alpha - \beta}.$$

В силу теоремы А множество $\tilde{X} = \{x \in X : \Xi(x) \neq \emptyset\}$ непусто.

Для $\Xi(\cdot)$ справедливо следующее утверждение (это лемма 1 из [7]).

Пусть многозначные отображения Ψ и Φ непрерывны, Φ компактнозначно и в пространстве X любое замкнутое ограниченное множество компактно. Тогда множество $\tilde{X} = \{x \in X : \Xi(x) \neq \emptyset\}$ замкнуто, при каждом $x \in X$ множество $\Xi(x)$ замкнуто и на подпространстве $\tilde{X}$ отображение $\Xi(\cdot)$ секвенциально полунепрерывно сверху.

Приведенные в [7] примеры 3 и 5 показывают, что многозначное отображение $\Xi(\cdot)$ может не быть секвенциально полунепрерывным снизу и что заменить в приведенном утверждении непрерывность Ψ на секвенциальную полунепрерывность сверху также нельзя (подробнее см. [7], [8]).

§ 4. Приложение. Двойные точки

Полученные выше результаты применим для исследования структуры так называемых двойных точек, являющихся естественным обобщением понятия неподвижных точек. Вначале приведем следствие теоремы А, которое будем использовать ниже (это теорема 2 из [1]).

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть заданы $\alpha > \beta \geq 0$ и многозначные отображения $\Psi, \Phi: X \rightrightarrows Y$ удовлетворяют основным предположениям. Тогда для произвольного $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует точка совпадения $\xi \in \text{Coin}(\Psi, \Phi)$ такая, что

$$\rho_X(x, \xi) \leq \frac{\text{dist}(\Psi(x), \Phi(x))}{\alpha - \beta} + \varepsilon.$$

Напомним понятие двойной точки. Пусть заданы многозначные отображения $F: X \rightrightarrows Y$ и $G: Y \rightrightarrows X$, ставящие в соответствие каждому $x \in X$ и каждому $y \in Y$ непустое замкнутое множество $F(x) \subset Y$ и $G(y) \subset X$ соответственно. Пара точек (x, y) , где $x \in X$, $y \in Y$, называется *двойной*, если имеют место включения

$$y \in F(x), \quad x \in G(y).$$

Множество двойных точек пары отображений (F, G) будем обозначать через $D(F, G)$. Двойные точки естественным образом возникают, например, при исследовании седловых точек в теории игр (см. [9; гл. XVI, § 5]).

Очевидно, (x, y) – двойная точка тогда и только тогда, когда x является неподвижной точкой композиции отображений $G \circ F: X \rightrightarrows X$, т.е. $x \in G(F(x))$, и, аналогично, y является неподвижной точкой композиции отображений $F \circ G: Y \rightrightarrows Y$. Таким образом, нахождение двойных точек можно свести к нахождению неподвижных точек, однако при этом возникает следующая проблема. А именно, некоторые значения композиций $G \circ F$ и $F \circ G$, т.е. множества $(G \circ F)(x)$ или $(F \circ G)(y)$, могут оказаться незамкнутыми. Нахождение двойных точек можно свести и к нахождению точек совпадения отображений F^{-1} и G или F и G^{-1} соответственно (см. [2]). Однако при этом надо дополнительно предполагать, что хотя бы одно из отображений F или G сюръективно. А один из двух случаев, которые мы рассмотрим ниже, этого не предполагает (это случай, когда F и G удовлетворяют условию Липшица). Поэтому чтобы не накладывать лишних предположений и при этом действовать единообразно, мы сведем задачу о двойных точках к нахождению точек совпадения двух отображений другим методом, а именно методом проекции графика, предложенным в [10].

В дальнейшем будем предполагать, что графики многозначных отображений F и G замкнуты и хотя бы один из них является полным подпространством пространства $X \times Y$. Для определенности будем считать, что полным является график $\text{grh}(G) = \{(x, y) : x \in G(y)\}$.

Рассмотрим полное метрическое пространство $Z = \text{grh}(G)$. Следуя [10], определим два отображения $\Psi, \Phi: Z \rightrightarrows Y$ следующим образом. Для $z = (x, y) \in Z$ положим $\Psi(z) = \{y\}$, $\Phi(z) = F(x)$. Таким образом, отображение Ψ является однозначным, а Φ , вообще говоря, нет.

Пусть заданы числа $\beta_F, \beta_G \geq 0$ и числа $\alpha_F, \alpha_G > 0$.

ЛЕММА 3. *Предположим, что отображения F и G являются β_F -липшицевым и β_G -липшицевым соответственно, причем $\beta_G > 0$. Введем в Z метрику ρ_1 соотношением*

$$\rho_1(z_1, z_2) = \max\{\beta_G^{-1}\rho_X(x_1, x_2), \rho_Y(y_1, y_2)\}, \quad z_1 = (x_1, y_1), \quad z_2 = (x_2, y_2) \quad (4.1)$$

(метрика ρ_1 эквивалентна исходной метрике ρ).

Тогда отображение $\Phi: (Z, \rho_1) \rightrightarrows Y$ является $(\beta_F\beta_G)$ -липшицевым и для произвольного $\varepsilon \in (0, 1)$ отображение $\Psi: (Z, \rho_1) \rightrightarrows Y$ является $(1 - \varepsilon)$ -накрывающим, причем его график замкнут и является полным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in Z$. Тогда $x_1 \in G(y_1), x_2 \in G(y_2)$ и, значит,

$$\begin{aligned} h(\Phi(z_1), \Phi(z_2)) &= h(F(x_1), F(x_2)) \\ &\leq \beta_F \rho_X(x_1, x_2) = \beta_F \beta_G (\beta_G^{-1} \rho_X(x_1, x_2)) \leq \beta_F \beta_G \rho_1(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Итак, $(\beta_F\beta_G)$ -липшицевость отображения Φ доказана.

Возьмем произвольное $\varepsilon \in (0, 1)$ и докажем, что отображение Ψ является $(1 - \varepsilon)$ -накрывающим. Пусть $z_0 \in Z$ и $y_0 = \Psi(z_0)$. Тогда $z_0 = (x_0, y_0)$, где $x_0 \in G(y_0)$. Возьмем произвольный $y \in Y$. Поскольку отображение G является

β_G -липшицевым, то имеет место

$$x_0 \in G(y_0) \subset B_X(G(y), \beta_G \rho_Y(y, y_0)(1 - \varepsilon)^{-1})$$

и, значит, существует такое $x \in G(y)$, что $(1 - \varepsilon)\beta_G^{-1}\rho_X(x, x_0) \leq \rho_Y(y, y_0)$. Положим $z = (x, y)$. Тогда по построению $z \in Z$ и $(1 - \varepsilon)\rho_1(z, z_0) \leq \rho_Y(y, y_0)$. Следовательно, отображение Ψ является $(1 - \varepsilon)$ -накрывающим. Замкнутость и полнота его графика вытекают из полноты пространства (Z, ρ_1) . Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Предположим, что отображения F и G являются α_F -накрывающим и α_G -накрывающим соответственно. Введем в Z метрику ρ_2 соотношением*

$$\rho_2(z_1, z_2) = \max\{\alpha_G^{-1}\rho_X(x_1, x_2), \rho_Y(y_1, y_2)\}, \quad z_1 = (x_1, y_1), \quad z_2 = (x_2, y_2) \quad (4.2)$$

(метрика ρ_2 эквивалентна исходной метрике ρ).

Тогда отображение $\Phi: (Z, \rho_2) \rightrightarrows Y$ является $(\alpha_F\alpha_G)$ -накрывающим, а отображение $\Psi: (Z, \rho_2) \rightrightarrows Y$ является 1-липшицевым, причем его график замкнут и является полным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть заданы произвольные $z_0 \in Z$, $y_0 \in \Phi(z_0)$ и $y \in Y$. Пусть $z_0 = (\xi_0, \eta_0)$. Тогда в силу определения Z и Φ имеет место $\xi_0 \in G(\eta_0)$, $y_0 \in F(\xi_0) = \Phi(z_0)$. Поэтому в силу α_F -накрываемости отображения F существует $x \in X$ такое, что $y \in F(x)$ и $\rho_X(x, \xi_0) \leq \alpha_F^{-1}\rho_Y(y, y_0)$. Аналогично, в силу α_G -накрываемости отображения G существует $\tilde{y} \in Y$ такое, что $x \in G(\tilde{y})$ и $\rho_Y(\tilde{y}, \eta_0) \leq \alpha_G^{-1}\rho_X(x, \xi_0)$. Следовательно, для $z = (x, \tilde{y})$ имеет место

$$y \in F(x) = \Phi(z), \quad \rho_Y(\tilde{y}, \eta_0) \leq \alpha_G^{-1}\alpha_F^{-1}\rho_Y(y, y_0), \\ \alpha_G^{-1}\rho_X(x, \xi_0) \leq \alpha_F^{-1}\alpha_G^{-1}\rho_Y(y, y_0)$$

и, значит, $\rho_2(z, z_0) \leq \alpha_F^{-1}\alpha_G^{-1}\rho_Y(y, y_0)$. Итак, $(\alpha_F\alpha_G)$ -накрываемость отображения Φ доказана. 1-липшицевость отображения Ψ , замкнутость и полнота его графика очевидны. Лемма доказана.

Теперь получим для двойных точек аналог теоремы A.

ЛЕММА 5. *Предположим, что отображения F и G являются β_F -липшицевым и β_G -липшицевым соответственно, причем $\beta = \beta_F\beta_G < 1$. Тогда множество двойных точек $D(F, G)$ непусто и, более того, для произвольных $x \in X$, $y \in Y$ и любого $\varepsilon > 0$ существует двойная точка $(\xi, \eta) \in D(F, G)$ такая, что*

$$\rho_X(x, \xi) \leq \frac{\beta_G \text{dist}(y, F(x)) + \text{dist}(x, G(y))}{1 - \beta_F\beta_G} + \varepsilon, \\ \rho_Y(y, \eta) \leq \frac{\text{dist}(y, F(x)) + \beta_F \text{dist}(x, G(y))}{1 - \beta_F\beta_G} + \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим вначале, что $\beta_G > 0$. Зафиксируем произвольные $x \in X$, $y \in Y$ и $\tilde{\varepsilon} > 0$. Выберем $\tilde{x} \in X$ такое, что $\tilde{x} \in G(y)$ и $\rho_X(x, \tilde{x}) \leq \text{dist}(x, G(y)) + \tilde{\varepsilon}$.

Рассмотрим метрическое пространство (Z, ρ_1) с метрикой ρ_1 , определяемой соотношением (4.1). В силу леммы 3 определенные выше отображения $\Psi, \Phi: Z \rightrightarrows Y$ удовлетворяют основным предположениям при $\alpha = 1$, $\beta = \beta_F \beta_G < 1$ (причем отображение Ψ является однозначным). Поэтому в силу следствия 6 для $\tilde{z} = (\tilde{x}, y) \in Z$ существует $z = (\xi, \eta) \in Z$ такое, что

$$\Psi(z) \in \Phi(z), \quad \rho_1(\tilde{z}, z) \leq \frac{\text{dist}(\Psi(\tilde{z}), \Phi(\tilde{z}))}{1 - \beta} + \tilde{\varepsilon} = \frac{\text{dist}(y, F(\tilde{x}))}{1 - \beta} + \tilde{\varepsilon},$$

где последнее равенство вытекает из определения Ψ и Φ .

Отсюда заключаем, что $(\xi, \eta) \in D(F, G)$, и, значит, множество $D(F, G)$ непусто. Кроме того, используя неравенство треугольника, получаем

$$\rho_X(x, \xi) \leq \rho_X(x, \tilde{x}) + \rho_X(\tilde{x}, \xi) \leq \text{dist}(x, G(y)) + \rho_X(\tilde{x}, \xi) + \tilde{\varepsilon},$$

$$\max\{\beta_G^{-1} \rho_X(\tilde{x}, \xi), \rho_Y(y, \eta)\} = \rho_1(\tilde{z}, z) \leq \frac{\text{dist}(y, F(\tilde{x}))}{1 - \beta} + \tilde{\varepsilon},$$

$$\text{dist}(y, F(\tilde{x})) \leq \text{dist}(y, F(x)) + h(F(x), F(\tilde{x}))$$

$$\leq \text{dist}(y, F(x)) + \beta_F \rho_X(x, \tilde{x}) \leq \text{dist}(y, F(x)) + \beta_F (\text{dist}(x, G(y)) + \tilde{\varepsilon}).$$

Из полученных неравенств после простых преобразований в силу произвольности $\tilde{\varepsilon} > 0$ получаем искомые оценки. В случае, когда $\beta_G = 0$, многозначное отображение G постоянно и утверждение очевидно. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Предположим, что отображения F и G являются α_F -накрывающим и α_G -накрывающим соответственно, причем $\alpha = \alpha_F \alpha_G > 1$. Тогда множество двойных точек $D(F, G)$ непусто и, более того, для произвольных $x \in X$, $y \in Y$ и любого $\varepsilon > 0$ существует двойная точка $(\xi, \eta) \in D(F, G)$ такая, что*

$$\rho_X(x, \xi) \leq \frac{\text{dist}(x, G(y)) + \alpha_G \text{dist}(y, F(x))}{\alpha_F \alpha_G - 1} + \varepsilon,$$

$$\rho_Y(y, \eta) \leq \frac{\alpha_F \text{dist}(x, G(y)) + \text{dist}(y, F(x))}{\alpha_F \alpha_G - 1} + \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольные $x \in X$, $y \in Y$ и $\varepsilon > 0$. Поскольку отображение G является α_G -накрывающим, то существует $\tilde{y} \in Y$ такое, что $x \in G(\tilde{y})$ и $\rho_Y(y, \tilde{y}) \leq \alpha_G^{-1} \text{dist}(x, G(y))$.

Рассмотрим метрическое пространство (Z, ρ_2) с метрикой ρ_2 , определяемой соотношением (4.2). В силу леммы 4 определенные выше отображения $\Psi, \Phi: (Z, \rho_2) \rightrightarrows Y$ удовлетворяют основным предположениям при $\alpha = \alpha_F \alpha_G$ и $\beta = 1$. Поэтому в силу следствия 6 для $\tilde{z} = (x, \tilde{y}) \in Z$ существует $z = (\xi, \eta) \in Z$ такое, что

$$\Psi(z) \in \Phi(z), \quad \rho_2(z, \tilde{z}) \leq \frac{\text{dist}(\Psi(\tilde{z}), \Phi(\tilde{z}))}{\alpha - 1} + \varepsilon \min\{\alpha_G^{-1}, 1\}.$$

Так же, как это было сделано при доказательстве предыдущей леммы, получаем

$$\begin{aligned}
 (\xi, \eta) &\in D(F, G), \\
 \rho_Y(y, \eta) &\leq \rho_Y(y, \tilde{y}) + \rho_Y(\tilde{y}, \eta) \leq \alpha_G^{-1} \text{dist}(x, G(y)) + \rho_Y(\tilde{y}, \eta), \\
 \max\{\alpha_G^{-1} \rho_X(x, \xi), \rho_Y(\tilde{y}, \eta)\} &= \rho_2(\tilde{z}, z) \leq \frac{\text{dist}(\tilde{y}, F(x))}{\alpha - 1} + \varepsilon \min\{\alpha_G^{-1}, 1\}, \\
 \text{dist}(\tilde{y}, F(x)) &\leq \rho_Y(\tilde{y}, y) + \text{dist}(y, F(x)) \leq \alpha_G^{-1} \text{dist}(x, G(y)) + \text{dist}(y, F(x)).
 \end{aligned}$$

Из полученных неравенств после простых преобразований получаем искомые оценки. Лемма доказана.

Существование двойных точек изучалось в [11], [12], причем для локально накрывающих отображений (аналог леммы 6). Однако основной результат в [11] относительно двойных точек – теорема 6.1, на которой основаны дальнейшие выводы, – является ошибочным даже для глобального случая и однозначных отображений (подробности и соответствующий контрпример см. в [2]). Что касается теоремы 2 из [12] относительно двойных точек, то у нее ошибочно доказательство.

Перейдем к исследованию структуры множества двойных точек. Пусть задана двойная точка (ξ_*, η_*) , т.е.

$$\eta_* \in F(\xi_*), \quad \xi_* \in G(\eta_*).$$

ТЕОРЕМА 7. *Предположим, что отображения F и G являются β_F -липшицевым и β_G -липшицевым соответственно, причем имеет место*

$$\beta = \beta_F \beta_G < \frac{1}{2}. \quad (4.3)$$

1. Пусть существует точка $x \in G(\eta_*)$, $x \neq \xi_*$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая двойная точка $(\xi, \eta) \in D(F, G)$, что

$$\xi \neq \xi_*, \quad \rho_X(\xi, x) \leq \frac{\beta + \varepsilon}{1 - \beta} \rho_X(x, \xi_*), \quad \beta_G \rho_Y(\eta, \eta_*) \leq \frac{\beta + \varepsilon}{1 - \beta} \rho_X(x, \xi_*). \quad (4.4)$$

2. Множество двойных точек $D(F, G)$ состоит из единственной точки (ξ_*, η_*) тогда и только тогда, когда оба множества $F(\xi_*) \subset Y$ и $G(F(\xi_*)) \subset X$ являются одноточечными. (При этом первое из них состоит из точки η_* , а второе – из точки ξ_* .)

3. Пусть для натурального $n \geq 2$ существуют попарно различные точки $x_i \in G(\eta_*)$, $x_i \neq \xi_*$, $i = 1, \dots, n$, такие, что

$$\rho_X(x_i, x_j) > \frac{\beta}{1 - \beta} (\rho_X(x_i, \xi_*) + \rho_X(x_j, \xi_*)) \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют точки $(\xi_i, \eta_i) \in D(F, G)$, $i = 1, \dots, n$, такие, что

$$\xi_i \neq \xi_* \quad \forall i, \quad \xi_i \neq \xi_j \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

и справедливы оценки

$$\rho_X(\xi_i, x_i) \leq \frac{\beta + \varepsilon}{1 - \beta} \rho_X(\xi_*, x_i), \quad \beta_G \rho_Y(\eta_i, \eta_*) \leq \frac{\beta + \varepsilon}{1 - \beta} \rho_X(\xi_*, x_i) \quad \forall i.$$

4. Пусть ξ_* является предельной точкой множества $G(\eta_*)$. Тогда существует последовательность $\{(\xi_i, \eta_i)\} \subset D(F, G)$, для которой имеет место (2.14), и все точки ξ_i попарно различны.

5. Пусть для любой двойной точки $(\xi, \eta) \in D(F, G)$ точка ξ является предельной для множества $G(\eta)$. Тогда множество двойных точек $D(F, G)$ несчетно.

6. Пусть существует точка $y \in Y$ такая, что множество $G(y)$ неограничено. Тогда множество $D(F, G)$ также неограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Уменьшая $\varepsilon > 0$ и увеличивая β_G , в силу (4.3) добьемся того, чтобы выполнялось

$$\beta_G > 0, \quad \frac{\beta + \varepsilon}{1 - \beta} < 1. \quad (4.6)$$

Положим $\tilde{z} = (x, \eta_*)$. Тогда по условию $\tilde{z} \in Z$ и $\tilde{z} \neq (\xi_*, \eta_*)$. Из теоремы 1 при $\alpha = 1 - \tilde{\varepsilon}$, где $\tilde{\varepsilon} > 0$ выбрано достаточно малым, с учетом леммы 3 получаем существование такого $z = (\xi, \eta) \in Z$, что

$$\Psi(z) \in \Phi(z), \quad \rho_1(z, \tilde{z}) \leq \frac{\beta + \varepsilon}{1 - \beta} \rho_1(\tilde{z}, (\xi_*, \eta_*)).$$

Отсюда непосредственно вытекают оба неравенства из (4.4), а затем из первого из этих неравенств вытекает соотношение $\xi \neq \xi_*$.

2. Очевидно, имеет место

$$\Psi^{-1}(\Phi(\xi_*, \eta_*)) = \Psi^{-1}(F(\xi_*)) = \bigcup_{y \in F(\xi_*)} (G(y), y). \quad (4.7)$$

Поэтому множество $\Psi^{-1}(\Phi(\xi_*, \eta_*))$ является одноточечным тогда и только тогда, когда одноточечными являются оба множества $F(\xi_*)$ и $G(F(\xi_*))$. Теперь справедливость искомого утверждения вытекает из теоремы 2.

3. Из строгого неравенства (4.5) в силу неравенства треугольника получаем (4.3). Поэтому, уменьшая $\varepsilon > 0$ и увеличивая β_G , в силу (4.3) добьемся того, чтобы выполнялось (4.6). Положим $\tilde{z}_i = (x_i, \eta_*)$. Тогда по условию $\tilde{z}_i \in Z$, $\tilde{z}_i \neq (\xi_*, \eta_*)$, $\Psi(\tilde{z}_i) = \eta_*$ для всех i и точки $\tilde{z}_i$ попарно различны. Из теоремы 3 при $\alpha = 1 - \tilde{\varepsilon}$, где $\tilde{\varepsilon} > 0$ выбрано достаточно малым, с учетом леммы 3 вытекает существование таких $z_i = (\xi_i, \eta_i) \in Z$, что при всех i выполняется

$$\Psi(z_i) \in \Phi(z_i), \quad \rho_1(z_i, (\xi_*, \eta_*)) \leq \frac{\beta + \varepsilon}{1 - \beta} \rho_1(\tilde{z}_i, (\xi_*, \eta_*)).$$

Дальнейшие рассуждения такие же, как и выше.

4. Очевидно, имеет место $\Psi^{-1}(\eta_*) = (G(\eta_*), \eta_*)$. Поэтому справедливость искомого утверждения вытекает из предложения 3 и леммы 3 при $\alpha = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ выбрано достаточно малым.

5. Это вытекает из теоремы 4.

6. Это вытекает из теоремы 5.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8. *Предположим, что отображения F и G являются α_F -накрывающим и α_G -накрывающим соответственно, причем имеет место*

$$\alpha = \alpha_F \alpha_G > 2.$$

1. Пусть существует точка $x \in G(\eta_*)$, $x \neq \xi_*$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая двойная точка $(\xi, \eta) \in D(F, G)$, что

$$\xi \neq \xi_*, \quad \rho_X(\xi, x) \leq \frac{1+\varepsilon}{\alpha-1} \rho_X(x, \xi_*), \quad \rho_Y(\eta, \eta_*) \leq \frac{1+\varepsilon}{\alpha_G(\alpha-1)} \rho_X(x, \xi_*).$$

2. Множество двойных точек $D(F, G)$ состоит из единственной точки (ξ_*, η_*) тогда и только тогда, когда оба множества $F(\xi_*) \subset Y$ и $G(F(\xi_*)) \subset X$ являются односточечными.

3. Пусть для натурального $n \geq 2$ существуют попарно различные точки $x_i \in G(\eta_*)$, $x_i \neq \xi_*$, $i = 1, \dots, n$, такие, что

$$\rho_X(x_i, x_j) > \frac{\rho_X(x_i, \xi_*) + \rho_X(x_j, \xi_*)}{\alpha - 1} \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют точки $(\xi_i, \eta_i) \in D(F, G)$, $i = 1, \dots, n$, такие, что

$$\xi_i \neq \xi_* \quad \forall i, \quad \xi_i \neq \xi_j \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

и справедливы оценки

$$\rho_X(\xi_i, x_i) \leq \frac{1+\varepsilon}{\alpha-1} \rho_X(\xi_*, x_i), \quad \rho_Y(\eta_i, \eta_*) \leq \frac{1+\varepsilon}{\alpha_G(\alpha-1)} \rho_X(\xi_*, x_i) \quad \forall i.$$

4. Пусть ξ_* является предельной точкой множества $G(\eta_*)$. Тогда существует последовательность $\{(\xi_i, \eta_i)\} \subset D(F, G)$, для которой имеет место (2.14) и все точки ξ_i попарно различны.

5. Пусть для любой двойной точки $(\xi, \eta) \in D(F, G)$ точка ξ является предельной для множества $G(\eta)$. Тогда множество двойных точек $D(F, G)$ несчетно.

6. Пусть существует точка $y \in Y$ такая, что множество $F^{-1}(y)$ неограничено. Тогда множество двойных точек $D(F, G)$ также неограничено.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7, в нем лишь следует ссылку на лемму 3 заменить ссылкой на лемму 4.

Для однозначных отображений имеется следующее общее достаточное условие, гарантирующее единственность двойной точки.

Пусть отображения F и G являются однозначными. Предположим, что отображение F является α_F -накрывающим, отображение G является α_G -накрывающим и $\alpha_F \alpha_G > 1$. Тогда двойная точка является единственной.

Справедливость этого утверждения вытекает из леммы 4, предложения 2 и формулы (4.7). Отметим, что если отображение F является β_F -липшицевым, отображение G является β_G -липшицевым и $\beta_F\beta_G < 1$, то единственность двойной точки очевидна, поскольку отображение $G \circ F: X \rightarrow X$ является сжимающим.

§ 5. Приложение. Неподвижные точки

Перейдем непосредственно к исследованию структуры множества неподвижных точек многозначных сжимающих отображений.

Пусть метрическое пространство (X, ρ_X) полно и задано сжимающее многозначное отображение $G: X \rightrightarrows X$. Тогда, как отмечалось выше, множество его неподвижных точек $\text{Fix}(G) = \{x : x \in G(x)\}$ непусто и, более того, в силу предложения 2, если $\xi \in G(\xi)$ и множество $G(\xi)$ одноточечно, то и множество неподвижных точек $\text{Fix}(G)$ является одноточечным.

Предположим теперь, что многозначное отображение G удовлетворяет более сильному предположению: G является β -сжимающим при $\beta < 1/2$. Тогда множество его неподвижных точек $\text{Fix}(G)$ обладает следующими свойствами.

Зафиксируем произвольную неподвижную точку $\xi_* \in \text{Fix}(G)$.

1. Пусть существует точка $x \in G(\xi_*)$, $x \neq \xi_*$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая неподвижная точка $\xi \in \text{Fix}(G)$, что

$$\xi \neq \xi_*, \quad \rho_X(\xi, x) \leq \frac{\beta + \varepsilon}{1 - \beta} \rho_X(x, \xi_*).$$

2. Для того чтобы множество неподвижных точек $\text{Fix}(G)$ являлось одноточечным, необходимо и достаточно, чтобы множество $G(\xi_*)$ являлось одноточечным.

3. Пусть для натурального $n \geq 2$ существуют попарно различные точки $x_i \in G(\xi_*)$, $x_i \neq \xi_*$, $i = 1, \dots, n$, такие, что

$$\rho_X(x_i, x_j) > \frac{\beta}{1 - \beta} (\rho_X(x_i, \xi_*) + \rho_X(x_j, \xi_*)) \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют точки $\xi_i \in \text{Fix}(G)$, $i = 1, \dots, n$, такие, что

$$\xi_i \neq \xi_*, \quad \rho_X(\xi_i, x_i) \leq \frac{\beta + \varepsilon}{1 - \beta} \rho_X(\xi_*, x_i) \quad \forall i, \quad \xi_i \neq \xi_j \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

4. Пусть ξ_* является предельной точкой множества $G(\xi_*)$. Тогда ξ_* является также предельной точкой множества $\text{Fix}(G)$.

5. Пусть любая неподвижная точка $\xi \in \text{Fix}(G)$ является предельной для множества $G(\xi)$. Тогда множество неподвижных точек $\text{Fix}(G)$ несчетно.

6. Пусть для любого $x \in X$ множество $G(x)$ не содержит изолированных точек. Тогда множество неподвижных точек $\text{Fix}(G)$ несчетно.

7. Пусть существует точка $x \in X$ такая, что множество $G(x)$ неограниченно. Тогда множество $\text{Fix}(G)$ также неограничено.

Приведенные утверждения являются непосредственными следствиями теоремы 7 при $(X, \rho_X) = (Y, \rho_Y)$ и $F(x) \equiv \{x\}$, т.е. когда F – тождественное отображение.

Приведем примеры, иллюстрирующие структуру множества неподвижных точек многозначных сжимающих отображений. Как показывает пример 3 из [4], в пп. 1, 2 ослабить предположение $\beta < 1/2$, заменив его хотя бы на равенство $\beta = 1/2$, нельзя. Приведем еще один такой пример.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим пространство $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ из примера 1 и определим на нем отображение $G: X \rightrightarrows X$ соотношением $G(x) = \{0, x/2\}$. Оно, очевидно, $1/2$ -сжимающее, у него единственная неподвижная точка $x = 0$, однако множество $G(0) = \{0, 1/2\}$ содержит две точки. Здесь нарушено предположение $\beta < 1/2$.

В следующем примере неподвижная точка ξ единственна, хотя $\beta < 1/2$, и при всех $x \neq \xi$ множество $G(x)$ не содержит изолированных точек.

ПРИМЕР 6. Пусть снова $X = \mathbb{R}$. Определим многозначное отображение $G: X \rightrightarrows X$ соотношением $G(x) = [-\beta x, \beta x]$, где $\beta \in (0, 1/2)$ задано. Оно, очевидно, является β -сжимающим и имеет единственную неподвижную точку $x = 0$. В то же время при $x \neq 0$ множество $G(x)$ не имеет изолированных точек, и лишь множество $G(0)$ состоит из единственной (изолированной) точки.

Авторы искренне благодарны профессору Е.Р. Авакову и профессору Б.А. Пасынкову за плодотворные дискуссии и ценные советы.

Список литературы

- [1] А.В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *Докл. РАН*, **416:2** (2007), 151–155; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Covering mappings in metric spaces and fixed points”, *Dokl. Math.*, **76:2** (2007), 665–668.
- [2] А.В. Арутюнов, “Задача о точках совпадения многозначных отображений и устойчивость по Уламу–Хайерсу”, *Докл. РАН*, **455:4** (2014), 379–383; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “The coincidence point problem for set-valued mappings and Ulam–Hyers stability”, *Dokl. Math.*, **89:2** (2014), 188–191.
- [3] J. Saint Raymond, “Points fixes des contractions multivoques”, *Fixed point theory and applications* (Marseille, 1989), Pitman Res. Notes Math. Ser., **252**, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991, 359–375.
- [4] J. Saint Raymond, “Multivalued contractions”, *Set-Valued Anal.*, **2:4** (1994), 559–571.
- [5] Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, Книжный дом «Либроком», М., 2011, 224 с.
- [6] П.С. Александров, *Введение в теорию множеств и общую топологию*, Наука, М., 1977, 367 с.
- [7] А.В. Арутюнов, “Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений”, *Матем. заметки*, **86:2** (2009), 163–169; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Stability of coincidence points and properties of covering mappings”, *Math. Notes*, **86:2** (2009), 153–158.

- [8] А. В. Арутюнов, *Лекции по выпуклому и многозначному анализу*, Физматлит, М., 2014, 188 с.
- [9] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, 2-е изд., Наука, М., 1977, 742 с.; англ. пер.: L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, Oxford–Elmsford, N.Y., 1982, xiv+589 pp.
- [10] Б. Д. Гельман, В. К. Мусиенко, “О теореме А. В. Арутюнова”, *Актуальные проблемы математики и информатики. Труды математического факультета ВГУ*, 2010, № 2, 81–91.
- [11] A. D. Ioffe, “Regularity on a fixed set”, *SIAM J. Optim.*, **21**:4 (2011), 1345–1370.
- [12] A. D. Ioffe, “Towards variational analysis in metric spaces: metric regularity and fixed points”, *Math. Program.*, **123**:1, Ser. B (2010), 241–252.

Арам Владимирович Арутюнов

(Aram V. Arutyunov)

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: arutun@orc.ru

Поступила в редакцию

02.03.2014

Борис Данилович Гельман

(Boris D. Gel'man)

Воронежский государственный университет

E-mail: gelman@math.vsu.ru