Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Клевцова, О единственности стационарной меры для стохастической системы модели Лоренца бароклинной атмосферы, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 3, 91–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8352>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 08:32:37

УДК 517.955.4

Ю. Ю. Клевцова

О единственности стационарной меры для стохастической системы модели Лоренца бароклиной атмосферы

Рассматривается одна нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных с параметрами. Эта система описывает двухслойную квазисолеоидальную модель Лоренца бароклиной атмосферы на вращающейся двумерной сфере. Правая часть системы возмущается белым шумом. Выводятся достаточные условия на параметры и правую часть для существования единственной стационарной меры.

Библиография: 40 названий.

Ключевые слова: двухслойная квазисолеоидальная модель Лоренца бароклиной атмосферы, возмущение белым шумом, существование единственной стационарной меры.

DOI: 10.4213/sm8352

§ 1. Введение

Следуя [1] и [2], в настоящей работе мы продолжаем рассматривать систему уравнений двухслойной квазисолеоидальной модели Лоренца бароклиной атмосферы

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 u + \nu A_2 u + A_3 u + B(u) = g, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

заданную на единичной двумерной сфере S с центром в нуле в сферической системе координат

$$(\lambda, \varphi), \quad \lambda \in [0, 2\pi), \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \mu = \sin \varphi.$$

Здесь $\nu > 0$ – коэффициент кинематической вязкости, $u(t, x, \omega) = (u_1(t, x, \omega), u_2(t, x, \omega))^T$ – неизвестная и $g(t, x, \omega) = (g_1(t, x, \omega), g_2(t, x, \omega))^T$ – заданная случайные вектор-функции, $x = (\lambda, \mu)$, $\omega \in \Omega$, $(\Omega, F, \mathbb{P})$ – полное вероятностное пространство. Операторы, входящие в уравнение (1.1), определены на сфере S

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-6147.2014.5) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 14-01-31110-мол_а и № 14-05-91330-ННИО_а).

и задаются соотношениями

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta + \gamma I \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0 & \Delta^2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -k_0 \Delta & 2k_0 \Delta \\ k_0 \Delta & -(2k_0 + k_1 + \nu \gamma) \Delta + \rho I \end{pmatrix},$$

$$B(u) = (J(\Delta u_1 + 2\mu, u_1) + J(\Delta u_2, u_2), J(\Delta u_2 - \gamma u_2, u_1) + J(\Delta u_1 + 2\mu, u_2))^T.$$

Здесь $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$ – числовые параметры, I – единичный оператор,

$$J(\psi, \theta) = \psi_\lambda \theta_\mu - \psi_\mu \theta_\lambda$$

– оператор Якоби и

$$\Delta \psi = ((1 - \mu^2) \psi_\mu)_\mu + (1 - \mu^2)^{-1} \psi_{\lambda\lambda}$$

– оператор Лапласа–Бельтрами (см., например, [3; § 1]). Отметим, что константы γ, ρ, k_0, k_1 неотрицательны, а ν положительна. В [1] в качестве правой части системы (1.1) рассматривалась случайная вектор-функция

$$g = f + \eta, \tag{1.2}$$

где случайная внешняя сила

$$f(t, x, \omega) = (f_1(t, x, \omega), f_2(t, x, \omega))^T$$

почти наверное является локально квадратично суммируемой по t и случайная вектор-функция

$$\eta(t, x, \omega) = (\eta_1(t, x, \omega), \eta_2(t, x, \omega))^T$$

– белый шум по t . Для этой системы в [1] было доказано существование единственного решения задачи Коши со случайными начальными данными в некоторых функциональных пространствах и была приведена оценка непрерывной зависимости этого решения от совокупности случайных начальных данных и внешней силы на конечном отрезке изменения переменной t . А в [2] при некоторых дополнительных ограничениях на параметры и правую часть было получено существование стационарной меры для системы (1.1), (1.2), когда f не зависит от t . В настоящей работе будет рассмотрен вопрос о единственности такой меры. А именно, при ограничениях на параметры и правую часть из [2] в предположении, что f зависит только от x , и некоторых дополнительных ограничениях на белый шум η будет доказана единственность стационарной меры. В предисловии к книге В. П. Дымникова [4] подробно описывается необходимость исследования вопроса о существовании единственной стационарной меры у систем уравнений, описывающих динамику атмосферы, для изучения проблемы предсказуемости климата.

Автор выражает благодарность В. П. Дымникову и В. Н. Крупчатникову за постановку задачи, А. Р. Ширикяну и В. В. Нерсесяну за полезные дискуссии, рецензенту за полезные замечания.

§ 2. Предварительные сведения

2.1. Функциональные пространства. Везде ниже $T > 0$ – любое, X – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, $B_X(R)$ – замкнутый шар в пространстве X с центром в нуле радиуса R .

Пусть $L_2(S)$ – лебегово пространство измеримых функций $\psi: S \rightarrow \mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|\psi\|_{L_2(S)} = \left(\int_S |\psi|^2 dS \right)^{1/2} < \infty.$$

При этом $L_2(S)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\psi, \theta) = \int_S \psi \theta dS.$$

Обозначим через $L_2(0, T; X)$ банахово пространство измеримых по Бохнеру функций $\psi: [0, T] \rightarrow X$, для которых конечна норма

$$\|\psi\|_{L_2(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|\psi(t)\|_X^2 dt \right)^{1/2} < \infty,$$

и через $L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}_+; X)$, где $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$, – пространство измеримых по Бохнеру функций $\psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ таких, что

$$\int_I \|\psi(t)\|_X^2 dt < \infty$$

для любого отрезка $I \subset \mathbb{R}_+$. При этом функции, отличающиеся на множествах лебеговой меры нуль, отождествляются. Заметим, что если X – гильбертово пространство, то $L_2(0, T; X)$ – гильбертово пространство.

Нам будут необходимы также пространства непрерывных функций с областью значений в банаховом пространстве. Обозначим через $C(0, T; X)$ и $C(\mathbb{R}_+; X)$ пространства всех непрерывных функций $\psi: [0, T] \rightarrow X$ и $\psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ соответственно. Снабженное нормой

$$\|\psi\|_{C(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|_X$$

пространство $C(0, T; X)$ является банаховым пространством. Снабженное метрикой

$$d(\psi, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{\|\psi - \theta\|_{C(0, i; X)}}{1 + \|\psi - \theta\|_{C(0, i; X)}}$$

пространство $C(\mathbb{R}_+; X)$ является полным метрическим пространством. Обозначим через $\dot{C}(\mathbb{R}_+; X)$ замкнутое подпространство $C(\mathbb{R}_+; X)$ таких функций $\psi \in C(\mathbb{R}_+; X)$, что $\psi(0) = 0$.

Обозначим через $C^\infty(S)$ пространство таких бесконечно гладких функций $\psi: S \rightarrow \mathbb{R}$, для которых выполнено

$$\int_S \psi dS = 0.$$

Функция $\psi: S \rightarrow \mathbb{R}$ называется *бесконечно гладкой* (см., например, замечание 1 к определению 1 в [3; § 2] и [5; гл. I, § 3.2]), если для любой декартовой системы координат $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ с началом координат в центре единичной сферы S функция

$$\tilde{\psi}(\varphi, \lambda) = \psi(\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, -\sin \varphi)$$

принадлежит пространству $C^\infty((-\pi/2, \pi/2) \times [0, 2\pi])$. Здесь φ и λ – углы в сферической системе координат, связанной с декартовой системой координат $\bar{x}$.

Введем в пространстве $C^\infty(S)$ семейство норм

$$\|\psi\|_p = ((-\Delta)^p \psi, \psi)^{1/2}, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим через h^p , $p \in \mathbb{Z}$, пространства, полученные пополнением¹ по нормам $\|\cdot\|_p$, $p \in \mathbb{Z}$, пространства $C^\infty(S)$. Имеют место следующие вложения:

$$\dots \subset h^2 \subset h^1 \subset h^0 \subset h^{-1} \subset h^{-2} \subset \dots,$$

где операторы вложения компактны (см., например, [7; гл. I, § 3, лемма 1.6]) и, следовательно, непрерывны (см., например, [6; гл. I, § 6, гл. X, § 1]). Заметим, что h^p плотно и компактно вложено в h^q при $q < p$ (см., например, [7; гл. I, § 3, лемма 1.6]).

Оператор $-\Delta$ на пространстве $C^\infty(S)$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ положительно определен (см., например, [3; § 2, доказательство леммы 1, формула (22)] и [7; гл. I, § 3, лемма 1.2]). Поэтому он может быть расширен до самосопряженного по Фридрихсу (см., например, [8; § 31], [7; гл. I, § 3] и [9; § 5])

$$-\Delta: D(-\Delta) = h^{p+2} \subset h^p \rightarrow h^p, \quad p \in \mathbb{Z},$$

где $D(A)$ – область определения оператора A . Тогда положительно определен и самосопряжен оператор

$$(-\Delta)^{q/2}: D((- \Delta)^{q/2}) = h^{p+q} \subset h^p \rightarrow h^p, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q > 0$$

(см., например, [10], [8; § 31], [11; гл. XIII] и [7; гл. I, § 3]), и

$$\|\psi\|_p = ((-\Delta)^{p/2} \psi, (-\Delta)^{p/2} \psi)^{1/2} \quad \text{для любого } \psi \in h^p, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ может быть продолжено до билинейного непрерывного отображения $h^p \times h^{-p} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$, следующим образом:

$$(\psi, \theta) = ((-\Delta)^{p/2} \psi, (-\Delta)^{-p/2} \theta), \quad p \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

где $\psi \in h^p$, $\theta \in h^{-p}$. Тогда имеет место обобщенное неравенство Коши–Буняковского

$$|(\psi, \theta)| \leq \|\psi\|_p \|\theta\|_{-p} \quad \text{для любых } \psi \in h^p, \quad \theta \in h^{-p}, \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

¹См., например, доказательство теоремы о пополнении в [6; гл. I, § 10].

Обозначим через $H^p = h^p \times h^p$, $p \in \mathbb{Z}$, пространства измеримых вектор-функций $\psi: S \rightarrow \mathbb{R}^2$ с нормой

$$\begin{aligned} \|\psi\|_p &= \langle A_0^{p/2} \psi, A_0^{p/2} \psi \rangle^{1/2}, \\ p \in \mathbb{Z}, \quad A_0 &= \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix}, \quad \langle \psi, \theta \rangle = \int_S \langle \psi, \theta \rangle_{\mathbb{R}^2} dS, \\ \langle \psi, \theta \rangle_{\mathbb{R}^2} &- \text{ скалярное произведение в } \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

и через $\varkappa_T$ и $\varkappa$ соответственно пространства

$$\varkappa_T := C(0, T; H^2) \cap L_2(0, T; H^3), \quad \|\psi\|_{\varkappa_T}^2 = \|\psi\|_{C(0, T; H^2)}^2 + \|\psi\|_{L_2(0, T; H^3)}^2, \quad (2.3)$$

и

$$\varkappa := C(\mathbb{R}_+; H^2) \cap L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^3). \quad (2.4)$$

Обозначим через $\dot{\varkappa}_T$ пространство

$$\dot{\varkappa}_T := \{\psi \in \varkappa_T : \psi(0) = 0\}. \quad (2.5)$$

Заметим, что $H^p = h^p \times h^p$, $p \in \mathbb{Z}$, являются сепарабельными гильбертовыми пространствами (см., например, [1; § 2]). Обозначим через Ξ_T пространство

$$\Xi_T := \left\{ \psi \in L_2(0, T; H^3) : \frac{\partial}{\partial t} \psi \in L_2(0, T; H^1) \right\}, \quad (2.6)$$

где производная по времени понимается в смысле распределений (см., например, [12; гл. I, § 1.1] или [13; гл. I, § 1.2]). Снабженное нормой

$$\|\psi\|_{\Xi_T} = \left(\int_0^T \left(\|\psi(t)\|_3^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) \right\|_1^2 \right) dt \right)^{1/2}$$

пространство Ξ_T является гильбертовым (доказательство см., например, в [12; гл. I, § 2.2]). Пространство Ξ_T непрерывно вложено в пространство $C(0, T; H^2)$ (доказательство см., например, в [12; гл. I, § 7.3, теорема 7.7, и § 3.1, теорема 3.1] и [7; гл. I, § 3]) и, следовательно, в пространство $\varkappa_T$. Поэтому произвольная вектор-функция ψ из пространства Ξ_T является непрерывной как вектор-функция $[0, T] \rightarrow H^2$ после, быть может, изменения на множестве меры нуль. В частности, при любом $t \in [0, T]$ $\psi(t)$ является вектор-функцией в пространстве H^2 .

В дальнейшем нам будут необходимы некоторые базисы в пространствах h^0 и H^0 . Обозначим через $\{e_m^n\}_{|m| \leq n}^{1 \leq n} \in C^\infty(S)$ ортонормированный базис гильбертова пространства h^0 :

$$(e_m^n, e_i^j) = \delta_{mi} \delta_{nj},$$

$$\delta_{mi}, \delta_{nj} - \text{символы Кронекера,} \quad n, j = 1, 2, \dots, \quad |m| \leq n, \quad |i| \leq j,$$

состоящий из собственных функций оператора $-\Delta$ (см., например, [11; гл. XIII] и [8; § 31]). Пусть $\lambda_n = n(n+1)$ – соответствующее собственным функциям

$\{e_m^n\}_{|m| \leq n}$ собственное значение оператора $-\Delta$ кратности $2n+1$, $n = 1, 2, \dots$. Рассмотрим следующую вектор-функцию:

$$E_m^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ e_{m-n-1}^n \end{pmatrix}, & 1 \leq m \leq 2n+1, \\ \begin{pmatrix} e_{m-3n-2}^n \\ 0 \end{pmatrix}, & 2n+2 \leq m \leq 4n+2. \end{cases}$$

Очевидно, что $\{E_m^n\}_{1 \leq m \leq 4n+2}^{1 \leq n} \in C^\infty(S) \times C^\infty(S)$ является ортонормированным базисом гильбертова пространства H^0 :

$$\langle E_m^n, E_i^j \rangle = \delta_{mi} \delta_{nj}, \quad n, j = 1, 2, \dots, \quad 1 \leq m \leq 4n+2, \quad 1 \leq i \leq 4j+2,$$

состоящим из собственных вектор-функций оператора A_0 . Тогда $\lambda_n = n(n+1)$ – соответствующее собственным вектор-функциям $\{E_m^n\}_{1 \leq m \leq 4n+2}$ собственное значение оператора A_0 кратности $4n+2$, $n = 1, 2, \dots$.

Введем гильбертово пространство l_2 последовательностей $\{b_i\}_{i=1}^\infty$ вещественных чисел с конечной нормой

$$\|b\| = \|\{b_i\}_{i=1}^\infty\|_{l_2} = \left(\sum_{i=1}^\infty b_i^2 \right)^{1/2} < \infty \quad (2.7)$$

и подмножество этого пространства

$$l_2^+ = \{\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2 : b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots\}.$$

2.2. Необходимые сведения из теории вероятностей. Введем понятие полного вероятностного пространства (см., например, [14; гл. I, § 2 и § 4]).

Пусть Ω – произвольное множество, F – некоторое семейство его подмножеств; F называется σ -алгеброй, если $\emptyset \in F$ и F замкнуто относительно операций дополнения и объединения счетного числа множеств из F . При этом пара (Ω, F) – *измеримое пространство*, если F – σ -алгебра подмножеств Ω . *Мерой* называют неотрицательную счетно-аддитивную функцию, определенную на некоторой σ -алгебре измеримого пространства; $\mathbb{P}$ – *вероятностная мера* на измеримом пространстве (Ω, F) , если $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Тройку $(\Omega, F, \mathbb{P})$ называют *вероятностным пространством*. Под *полным* $F_{\mathbb{P}}$ σ -алгебры F по вероятностной мере $\mathbb{P}$ будем понимать $F \cup N_{\mathbb{P}}$, где $N_{\mathbb{P}}$ – семейство таких подмножеств $M_1 \subset \Omega$, что существует подмножество $M_2 \subset \Omega$, $M_2 \in F$, такое, что $M_1 \subset M_2$ и $\mathbb{P}(M_2) = 0$. Если $F_{\mathbb{P}} = F$, то $(\Omega, F, \mathbb{P})$ – *полное вероятностное пространство*.

В дальнейшем полагаем, что $(\Omega, F, \mathbb{P})$ – полное вероятностное пространство.

Определим банахово пространство $L_2(\Omega; X)$ (см., например, [15; гл. II, § 10.5, теорема 7]) измеримых по Бохнеру функций $\psi: \Omega \rightarrow X$ таких, что конечна норма

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega; X)} = \sqrt{E\|\psi\|_X^2} = \left(\int_{\Omega} \|\psi\|_X^2 d\mathbb{P} \right)^{1/2} < \infty.$$

При этом функции, отличающиеся на множествах $\mathbb{P}$ -меры нуль, отождествляются.

В следующих четырех абзацах приведены определения из [14; гл. I, § 2, § 7], [16; гл. II, § 1, и гл. IV, § 5], [17; гл. I, § 1.1 и § 3.3] и [18; гл. I, § 1.1].

В пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$ введем *фильтрацию* $\{F_t\}_{t \geq 0}$ – неубывающее семейство σ -алгебр $F_s \subset F_t$, $s < t$, при этом $F_t \subset F$, $t \geq 0$. Фильтрацию $\{F_t\}_{t \geq 0}$ назовем *непрерывной справа*, если

$$\bigcap_{s > t} F_s = F_t, \quad t \geq 0.$$

Будем говорить, что фильтрация $\{F_t\}_{t \geq 0}$ удовлетворяет *обычным условиям*, если $\{F_t\}_{t \geq 0}$ – непрерывная справа фильтрация такая, что все множества $\mathbb{P}$ -меры нуль σ -алгебры F содержатся в F_0 .

В дальнейшем полагаем, что фильтрация $\{F_t\}_{t \geq 0}$ удовлетворяет обычным условиям.

Рассмотрим два произвольных измеримых пространства (Ω_1, σ_1) и (Ω_2, σ_2) . Отображение $\psi: (\Omega_1, \sigma_1) \rightarrow (\Omega_2, \sigma_2)$ называют $\sigma_1|_{\sigma_2}$ -измеримым, если $\{\omega \in \Omega_1: \psi(\omega) \in M\} \in \sigma_1$ для любого $M \in \sigma_2$. Иногда, когда ясно о каком пространстве (Ω_2, σ_2) идет речь, мы будем для удобства изложения говорить, что ψ σ_1 -измеримо. Пусть $\psi: (\Omega_1, \sigma_1) \rightarrow (\Omega_2, \sigma_2)$ – $\sigma_1|_{\sigma_2}$ -измеримое отображение и $\mathbb{P}_1$ – вероятностная мера на (Ω_1, σ_1) . Обозначим через $\psi_*(\mathbb{P}_1)$ вероятностную меру на измеримом пространстве (Ω_2, σ_2) вида

$$\psi_*(\mathbb{P}_1)(M) = \mathbb{P}_1\{\omega \in \Omega_1: \psi(\omega) \in M\}, \quad M \in \sigma_2. \quad (2.8)$$

Наименьшую σ -алгебру, содержащую все открытые множества топологического пространства $\mathcal{T}$, называют *борелевской σ -алгеброй* $\mathcal{T}$. Множества, принадлежащие борелевской σ -алгебре, называют *борелевскими*. Обозначим через $\sigma_{\mathcal{T}}$ борелевскую σ -алгебру $\mathcal{T}$. Отображение $\psi: (\Omega, F) \rightarrow (\mathcal{T}, \sigma_{\mathcal{T}})$ называют *случайной величиной*, если оно является $F|_{\sigma_{\mathcal{T}}}$ -измеримым. *Распределением случайной величины* ψ называют такую вероятностную меру $\mathbb{P}_{\psi}$ на измеримом пространстве $(\mathcal{T}, \sigma_{\mathcal{T}})$, что

$$\mathbb{P}_{\psi}(\Gamma) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega: \psi(\omega) \in \Gamma\} \quad \text{для любого } \Gamma \in \sigma_{\mathcal{T}}. \quad (2.9)$$

Произвольное непустое семейство случайных величин, индексированное некоторым множеством вещественных параметров, называют *случайным процессом*. Случайный процесс $\xi(t): \Omega \rightarrow X$, $t \geq 0$, согласован с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$, если отображение $\xi(t): F_t|_{\sigma_X}$ -измеримо при каждом $t \geq 0$. Случайный процесс $\xi(t): \Omega \rightarrow X$, $t \geq 0$, *прогрессивно измерим по отношению к фильтрации* $\{F_t\}_{t \geq 0}$, если для любого $t \geq 0$ отображение $(s, \omega) \rightarrow \xi(s, \omega)$, где $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega$, является $\sigma_{[0, t]} \otimes F_t|_{\sigma_X}$ -измеримым. Заметим, что под прямым произведением $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ σ -алгебр σ_1 и σ_2 двух произвольных множеств мы будем понимать наименьшую σ -алгебру, которая содержит все множества вида $M_1 \times M_2$, где $M_1 \in \sigma_1$ и $M_2 \in \sigma_2$.

Пусть $\mathcal{P}(X)$ – семейство вероятностных мер на измеримом пространстве (X, σ_X) . Обозначим через $C_b(X)$ пространство непрерывных ограниченных функций $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$. При этом пространство снабжается нормой

$$\|\psi\|_{\infty, X} = \sup_{\vartheta \in X} |\psi(\vartheta)|.$$

Определим действие меры $\mu \in \mathcal{P}(X)$ на функцию $\psi \in C_b(X)$ по следующему правилу:

$$(\psi, \mu) = \int_X \psi d\mu.$$

Тогда (ψ, μ) , $\psi \in C_b(X)$, – линейный непрерывный функционал на пространстве $C_b(X)$. Следовательно, $\mathcal{P}(X)$ можно рассматривать как подмножество сопряженного пространства $C_b^*(X)$. Поэтому можно рассмотреть в $\mathcal{P}(X)$ *-слабую топологию (см., например, [18; гл. I, § 3.7 и § 3.8] и [19; гл. IV, § 3.3]). Пусть везде ниже X сепарабельно. Тогда *-слабая топология в $\mathcal{P}(X)$ эквивалентна топологии, задаваемой следующим расстоянием между двумя мерами:

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{L, X}^* = \sup_{\substack{\psi \in C_b(X) \\ \|\psi\|_{L, X} \leq 1}} |(\psi, \mu_1) - (\psi, \mu_2)|, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(X) \quad (2.10)$$

(доказательство см., например, в [20; гл. XI, § 3, теорема 11.3.3]), где

$$\|\psi\|_{L, X} = \|\psi\|_{\infty, X} + \sup_{\vartheta_1 \neq \vartheta_2} \frac{|\psi(\vartheta_1) - \psi(\vartheta_2)|}{\|\vartheta_1 - \vartheta_2\|_X}. \quad (2.11)$$

Пусть (Ω_1, σ_1) – произвольное измеримое пространство, μ_1, μ_2 – две вероятностные меры на (Ω_1, σ_1) . Величину

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{\text{var}, \Omega_1} = \sup_{M \in \sigma_1} |\mu_1(M) - \mu_2(M)| \quad (2.12)$$

называют *расстоянием полной вариации между двумя вероятностными мерами* μ_1 и μ_2 (см., например, [21; гл. I, § 2.3, предложение 1.2.7 и замечание 1.2.8]).

§ 3. Теорема, на которой основано доказательство единственности стационарной меры

В этом параграфе мы приведем основную теорему из [21], на которой будет базироваться доказательство теоремы 4.3 о единственности стационарной меры (формулировку теоремы см. в § 4).

Для формулировки теоремы нам будут необходимы несколько определений и обозначений.

Пусть $\{u(t, \omega, \vartheta)\}_{\vartheta \in X}$, $t \geq 0$, – семейство согласованных с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$ однородных марковских процессов, обладающих феллеровским свойством, с одним и тем же семейством переходных операторов. Эти процессы имеют область значений в сепарабельном банаховом пространстве X и начальное

условие $u(0, \omega, \vartheta) = \vartheta$, $\vartheta \in X$. Заметим, что в [2; § 3] приведены все определения, связанные с такими случайными процессами. Будем полагать, что траектории $u(t, \omega, \vartheta)$, $t \geq 0$, являются непрерывными для почти всех $\omega \in \Omega$ при любом $\vartheta \in X$ и являются непрерывными по $\vartheta \in X$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Пусть $P(t, \vartheta, \Gamma)$ – переходная функция:

$$P(t, \vartheta, \Gamma) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : u(t, \omega, \vartheta) \in \Gamma\}, \quad \vartheta \in X, \quad \Gamma \in \sigma_X, \quad t \geq 0,$$

и пусть P_t – марковская полугруппа, соответствующая этому семейству:

$$P_t \psi(\vartheta) = \int_X \psi(\theta) P(t, \vartheta, d\theta), \quad \psi \in C_b(X), \quad \vartheta \in X, \quad t \geq 0.$$

Рассмотрим еще одну полугруппу P_t^* :

$$P_t^* \mu(\Gamma) = \int_X P(t, \vartheta, \Gamma) \mu(d\vartheta), \quad \mu \in \mathcal{P}(X), \quad \Gamma \in \sigma_X, \quad t \geq 0.$$

Меру $\mu \in \mathcal{P}(X)$ называют *стационарной мерой семейства* $\{u(t, \omega, \vartheta)\}_{\vartheta \in X}$, $t \geq 0$, если

$$P_t^* \mu = \mu, \quad t \geq 0.$$

Определим еще одно семейство марковских процессов. Пусть $\mathbf{X} = X \times X$ – прямое произведение двух копий X . На $\mathbf{X}$ рассмотрим борелевскую σ -алгебру $\sigma_{\mathbf{X}}$. Имеет место равенство $\sigma_{\mathbf{X}} = \sigma_X \otimes \sigma_X$ (см., например, упражнение 2 к § 1.3 и § 4 гл. II в [22]). В случае $X = H^p$, где p – некоторое целое число, будем обозначать $\mathbf{X}$ символом $\mathbf{H}^p$. Мы будем писать $\vartheta = (\vartheta, \vartheta')^T \in \mathbf{X}$ и обозначать через

$$\Pi: \vartheta \mapsto \vartheta, \quad \Pi': \vartheta \mapsto \vartheta'$$

естественные проекции элементов прямого произведения $\mathbf{X}$ на его первый и второй множители соответственно. Обозначим через $(\Omega, \tilde{\mathbf{F}}, \mathbb{P})$ прямое произведение двух копий $(\Omega, F, \mathbb{P})$:

$$\Omega = \Omega \times \Omega, \quad \tilde{\mathbf{F}} = F \otimes F, \quad \mathbb{P} = \mathbb{P} \times \mathbb{P},$$

и через $\omega = (\omega, \omega')^T$ – элементы множества Ω . Здесь $\mathbb{P}$ – это единственная вероятностная мера в силу теоремы Андерсена–Иессена о произведении вероятностей (см., например, [23; гл. I, § 4.2]), для которой

$$\mathbb{P}(M_1 \times M_2) = \mathbb{P}(M_1)\mathbb{P}(M_2) \quad \text{для любых } M_1, M_2 \in F. \quad (3.1)$$

Пополним σ -алгебру $\tilde{\mathbf{F}}$ по вероятностной мере $\mathbb{P}$ (см. начало п. 2.2) и для удобства изложения обозначим пополнение $\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbb{P}} := \tilde{\mathbf{F}} \cup \mathbf{N}_{\mathbb{P}}$ через $\mathbf{F}$. Доопределим $\mathbb{P}$ на множествах из $\mathbf{F}$ по правилу $\mathbb{P}(M_1 \cup M_2) := \mathbb{P}(M_1)$, где $M_1 \in \tilde{\mathbf{F}}$ и $M_2 \in \mathbf{N}_{\mathbb{P}}$ (корректность определения см., например, в [14; гл. I, § 4]). Обозначим семейство множеств $(F_t \otimes F_t) \cup \mathbf{N}_{\mathbb{P}}$ через $\mathbf{F}_t$ при каждом $t \geq 0$. Нетрудно показать, что семейство $\{\mathbf{F}_t\}_{t \geq 0}$ – фильтрация в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbb{P})$, удовлетворяющая обычным условиям (см. п. 2.2). Рассмотрим следующее семейство однородных марковских процессов, обладающих феллеровским свойством.

Определим на пространстве $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbb{P})$ случайный процесс $\mathbf{u}(t, \omega, \vartheta)$, $t \geq 0$, со значениями в $\mathbf{X}$ формулой

$$\mathbf{u}(t, \omega, \vartheta) = (u(t, \omega, \vartheta), u'(t, \omega', \vartheta'))^T, \quad t \geq 0,$$

при любом $\vartheta = (\vartheta, \vartheta')^T \in \mathbf{X}$. Здесь $u(t)$, $t \geq 0$, – случайный процесс семейства, введенного выше, $u'(t)$, $t \geq 0$, – случайный процесс копии этого семейства в пространстве второго множителя в $\mathbf{X}$. По построению $\sigma_X \otimes \sigma_X$ в силу теоремы 1 из [22; гл. III, § 1.1] и того, что случайный процесс $u(t, \omega, \vartheta)$, $t \geq 0$, согласован с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$ при любом $\vartheta \in X$, случайный процесс $\mathbf{u}(t, \omega, \vartheta)$, $t \geq 0$, согласован с фильтрацией $\{\mathbf{F}_t\}_{t \geq 0}$ при любом $\vartheta \in \mathbf{X}$. Обозначим через $\mathbf{P}(t, \vartheta, \Gamma)$, $t \geq 0$, переходную функцию семейства $\{\mathbf{u}(t, \omega, \vartheta)\}_{\vartheta \in \mathbf{X}}$, $t \geq 0$. В силу (3.1) имеет место равенство при $t \geq 0$

$$\mathbf{P}(t, \vartheta, \Gamma \times \Gamma') = P(t, \vartheta, \Gamma)P(t, \vartheta', \Gamma') \quad (3.2)$$

для любых $\vartheta = (\vartheta, \vartheta')^T \in \mathbf{X}$ и $\Gamma, \Gamma' \in \sigma_X$. Очевидно, что выполнены равенства при $t \geq 0$

$$\Pi_*(\mathbf{P}(t, \vartheta, \cdot))(\Gamma) = P(t, \vartheta, \Gamma), \quad \Pi'_*(\mathbf{P}(t, \vartheta, \cdot))(\Gamma') = P(t, \vartheta', \Gamma')$$

для любых $\vartheta = (\vartheta, \vartheta')^T \in \mathbf{X}$ и $\Gamma, \Gamma' \in \sigma_X$.

Для произвольного замкнутого множества $M \subset X$ обозначим через $\mathbf{M}$ прямое произведение $M \times M$ и через $\tau_\vartheta(M)$ – момент первого достижения множества $\mathbf{M}$ случайным процессом $\mathbf{u}(t)$, $t \geq 0$:

$$\tau_\vartheta(\omega, M) = \inf\{t \geq 0: \mathbf{u}(t, \omega, \vartheta) \in \mathbf{M}\}$$

при любом $\vartheta \in \mathbf{X}$. В случае $M = M_n$ при некотором $n \in \mathbb{N}$ будем обозначать $\mathbf{M}$ символом $\mathbf{M}_n$.

В следующей теореме (см. [21; гл. III, § 1.2, теорема 3.1.3]) приводятся достаточные условия для единственности стационарной меры μ семейства марковских процессов $\{u(t, \omega, \vartheta)\}_{\vartheta \in X}$, $t \geq 0$, введенного выше.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть μ – стационарная мера семейства $\{u(t, \omega, \vartheta)\}_{\vartheta \in X}$, $t \geq 0$. Предположим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют замкнутое подмножество $M_n \subset X$ и константа $\delta_n > 0$ такие, что $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и выполнены два свойства:

а) для любого $\vartheta \in \mathbf{X}$ имеет место равенство

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \tau_\vartheta(\omega, M_n) < \infty\} = 1;$$

б) существует константа $T_n \geq 0$ такая, что

$$\sup_{t \geq T_n} \|P(t, \vartheta, \cdot) - P(t, \vartheta', \cdot)\|_{L, X}^* \leq \delta_n \quad \text{для любого } \vartheta = (\vartheta, \vartheta')^T \in \mathbf{M}_n,$$

где $\|\cdot\|_{L, X}^*$ определено в (2.10).

Тогда μ единственна и для любой вероятностной меры $\lambda \in \mathcal{P}(X)$ имеет место сходимость

$$\|P_t^* \lambda - \mu\|_{L, X}^* \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

§ 4. Единственность стационарной меры

Пусть заданы F_0 -измеримые случайные вектор-функции $f(x, \omega)$, где $f \in H^{-1}$ почти наверное, и $u_0(x, \omega)$, где $u_0 \in H^2$ почти наверное. Снабдим систему (1.1), (1.2) начальным условием

$$u(0) = u_0. \quad (4.1)$$

Обозначим через $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ ортонормированный базис пространства H^0 . В качестве случайной вектор-функции η рассмотрим

$$\eta(t, x, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} \zeta(t, x, \omega), \quad \zeta(t, x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i(t, \omega) E_i, \quad (4.2)$$

где $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2^+$, а $\{\beta_i(t, \omega)\}_{i=1}^{\infty}$, $t \geq 0$, – последовательность независимых вещественнозначных броуновских движений относительно фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$ (см. определение 7 в [14; “Дополнения и упражнения” к гл. III]). Тогда ряд в (4.2) принадлежит пространству $C(\mathbb{R}_+; H^0)$ для почти всех $\omega \in \Omega$ (см., например, доказательство теоремы 4.3 в [17; гл. I, § 4.1]).

Поскольку почти все траектории броуновского движения не дифференцируемы ни в одной точке (см., например, [14; гл. III, § 1, теорема 1]) и производная броуновского движения существует почти наверное только в обобщенном смысле (см., например, [24; гл. III, § 1.4]), то необходимо придать смысл системе (1.1), (1.2). Будем считать, что это формальная запись стохастического интегрального уравнения, т.е. введем следующее определение решения задачи Коши (1.1), (1.2), (4.1) из [1; § 3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Случайный процесс $u(t, x, \omega, u_0)$, $t \geq 0$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, со значениями в H^2 будем называть *решением задачи Коши* (1.1), (1.2), (4.1), если он обладает следующими свойствами:

а) случайный процесс $u(t)$, $t \geq 0$, согласован с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$ и почти все его траектории принадлежат пространству $\mathcal{K}$;

б) почти все траектории случайного процесса $u(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяют равенству

$$A_1 u(t) + \int_0^t (\nu A_2 u(s) + A_3 u(s) + B(u(s))) ds = A_1 u_0 + t f + \zeta(t), \quad t > 0, \quad (4.3)$$

которое имеет место в пространстве $C(\mathbb{R}_+; H^{-1})$.

По теореме 2 из [1; § 3] следует, что для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$, $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2^+$, F_0 -измеримых случайных вектор-функций f , где $f \in H^{-1}$ почти наверное, и u_0 , где $u_0 \in H^2$ почти наверное, существует единственное решение задачи Коши (1.1), (1.2), (4.1), и оно непрерывно зависит от начального данного u_0 для почти всех $\omega \in \Omega$. По теореме 1 из [2; § 3] следует, что решение задачи Коши (1.1), (1.2), (4.1) является однородным марковским процессом,

обладающим феллеровским свойством. При этом при любом начальном данном $u_0 \in H^2$ случайный процесс имеет одно и то же семейство переходных операторов. В [2; § 4] было доказано, что если дополнительно $f \in L_2(\Omega; H^{-1})$ и выполнено неравенство на числовые параметры

$$k_0 < \inf_{i=1,2,\dots} \varsigma(i), \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} \varsigma(i) = & \frac{2}{(j(i) - \gamma)^2} \left(3\nu j^3(i) + 2\nu\gamma j^2(i) + \chi(j(i)) \right. \\ & \left. + \sqrt{(3\nu j^3(i) + 2\nu\gamma j^2(i) + \chi(j(i)))^2 + (j(i) - \gamma)^2(\nu^2 j^4(i) + \nu j(i)\chi(j(i)))} \right), \\ & i = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\chi(y) = (k_1 + \nu\gamma)(y^2 + \gamma y) + \rho(\gamma + y), \quad j(y) = y(y + 1), \quad y \geq 0 \quad (4.6)$$

(здесь и везде ниже будем считать, что если $j(p) = \gamma$, p – натуральное число, то $1/(j(p) - \gamma)^2 = +\infty$), тогда существует стационарная мера семейства $\{u(t, x, \omega, \vartheta)\}_{\vartheta \in H^2}$, $t \geq 0$, однородных марковских процессов, обладающих феллеровским свойством, определяемого решениями задачи Коши (1.1), (1.2), $u(0) = \vartheta$, $\vartheta \in H^2$.

На практике удобнее вместо инфимума по бесконечному множеству в (4.4) использовать минимум по конечному множеству. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 4.1. *Имеет место равенство*

$$\inf_{i=1,2,\dots} \varsigma(i) = \min_{i=1,2,\dots,i_*} \varsigma(i), \quad (4.7)$$

где $\varsigma(i)$ определено в (4.5),

$$i_* = \left\lceil \frac{c_*}{2\nu} \left(\sqrt{1 + \frac{c_*}{\nu}} + 1 \right)^{-1} \right\rceil \geq 1, \quad c_* = \begin{cases} \varsigma(1), & \text{если } \gamma \neq 2, \\ \varsigma(2), & \text{если } \gamma = 2. \end{cases} \quad (4.8)$$

Здесь и везде ниже $[r]$ – целая часть вещественного числа r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно доказать, что выполнено неравенство

$$\varsigma(i) \geq 4\nu j(i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4.9)$$

где j определено в (4.6). Поэтому $i_* \geq 1$.

Пусть $\gamma \neq 2$. Тогда, решив квадратное неравенство

$$\varsigma(1) < 4\nu j(i) = 4\nu i(i + 1) \quad (4.10)$$

относительно i , получим, что минимальное натуральное число i , которое ему удовлетворяет, можно оценить сверху вещественным числом $i_* + 1$, где i_* определено в (4.8). В силу (4.9) и того, что j является возрастающей функцией от i , справедливо равенство (4.7).

Аналогично доказывается равенство (4.7) в случае, когда $\gamma = 2$, если вместо неравенства (4.10) рассмотреть неравенство

$$\varsigma(2) < 4\nu j(i).$$

Лемма доказана.

В этом параграфе будут сформулированы условия, при которых указанная выше стационарная мера для семейства $\{u(t, x, \omega, \vartheta)\}_{\vartheta \in H^2, t \geq 0}$, единственна. Для этого мы приведем достаточные условия в двух теоремах 4.1 и 4.2, при которых для семейства $\{u(t, x, \omega, \vartheta)\}_{\vartheta \in H^2, t \geq 0}$, выполнены обеспечивающие единственность стационарной меры свойства а) и б) из теоремы 3.1. Доказательства теорем 4.1 и 4.2 будут приведены в последующих двух параграфах.

Для семейства $\{u(t, x, \omega, \vartheta)\}_{\vartheta \in H^2, t \geq 0}$, мы сохраним все обозначения из § 3, которые вводились для семейства $\{u(t, \omega, \vartheta)\}_{\vartheta \in X, t \geq 0}$. В качестве M_n рассмотрим замкнутый шар в пространстве H^2 с центром в нуле и радиусом $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. В дальнейшем мы будем обозначать математическое ожидание и условное математическое ожидание символом E , если случайная величина определена на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, и жирным символом $\mathbf{E}$, если случайная величина определена на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$.

ТЕОРЕМА 4.1. I. Пусть $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$ такие, что выполнено неравенство (4.4), $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$ и вектор-функция f принадлежит H^{-1} .

II. Будем полагать, что $b_i \neq 0$ и $E_i \in H^1$ при $i = 1, 2, \dots$.

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют константы $C_n > 0$ и $\varrho_n > 0$ такие, что

$$\mathbf{E} \exp(\varrho_n \tau_{\vartheta}(M_n)) \leq C_n (1 + \|\vartheta\|_2^2 + \|\vartheta'\|_2^2) \quad \text{для любого } \vartheta = (\vartheta, \vartheta')^T \in \mathbf{H}^2. \quad (4.11)$$

В частности, $\mathbf{P}\{\tau_{\vartheta}(M_n) < \infty\} = 1$ для любых $\vartheta \in \mathbf{H}^2$ и $n \in \mathbb{N}$.

Пусть N – любое натуральное число. Обозначим через H_N и $H_N^\perp$ линейные оболочки соответственно множеств $\{E_i\}_{i=1}^N$ и $\{E_i\}_{i=N+1}^\infty$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть выполнено условие I теоремы 4.1. Тогда существует $N'(\nu, \gamma, \rho, k_0, k_1, b, \|f\|_{-1}) \in \mathbb{N}$, где b определено в (2.7), такое, что если

$$\{E_m^n\}_{1 \leq m \leq 4n+2}^{1 \leq n \leq N'} \subset H_N \quad (4.12)$$

для некоторого $N \in \mathbb{N}$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существует константа $\delta_n > 0$ такая, что

$$\sup_{t \geq 0} \|P(t, \vartheta, \cdot) - P(t, \vartheta', \cdot)\|_{L, H^2}^* \leq \delta_n \quad \text{для любого } \vartheta = (\vartheta, \vartheta')^T \in \mathbf{M}_n,$$

где $\|\cdot\|_{L, \cdot}^*$ определено в (2.10), причем $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Из этих двух теорем по теореме 3.1 сразу следует результат о единственности стационарной меры.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть выполнены условия I и II теоремы 4.1. Тогда существует $N'(\nu, \gamma, \rho, k_0, k_1, b, \|f\|_{-1}) \in \mathbb{N}$, где b определено в (2.7), такое, что если выполнено (4.12) для некоторого $N \in \mathbb{N}$, то существует единственная стационарная мера μ для семейства $\{u(t, x, \omega, \vartheta)\}_{\vartheta \in H^2}$, $t \geq 0$, и для любой вероятностной меры $\lambda \in \mathcal{P}(H^2)$ имеет место сходимость

$$\|P_t^* \lambda - \mu\|_{L, H^2}^* \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty,$$

где $\|\cdot\|_{L, \cdot}^*$ определено в (2.10).

Для некоторых режимов циркуляции атмосферы выполнено неравенство $k_0 \leq 4k_1$ (см., например, [25]). Тогда неравенство (4.4) можно упростить.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть выполнены условия теоремы 4.3, за исключением неравенства (4.4), и дополнительно

$$k_0 \leq 4k_1.$$

Если при $\gamma \neq 2$ вместо (4.4) имеет место неравенство

$$k_0 < \frac{2}{(2-\gamma)^2} \left(8\nu(3+\gamma) + \chi(2) + \sqrt{(8\nu(3+\gamma) + \chi(2))^2 + 2\nu(2-\gamma)^2(8\nu + \chi(2))} \right),$$

где функция χ определена в (4.6), то справедливо утверждение теоремы 4.3.

Если $\gamma = 2$, то для выполнения утверждения теоремы 4.3 достаточно одного неравенства $k_0 \leq 4k_1$.

Доказательство следует сразу из теоремы 4.3 и доказательства следствия 2 из [2; § 4].

В следующих двух параграфах мы докажем теоремы 4.1 и 4.2. Заметим, что предлагаемая схема доказательства теорем является аналогом схемы доказательства предложений 3.3.6 и 3.3.7 из [21; гл. III, § 3.1], где доказываются аналогичные результаты для решения уравнения Навье–Стокса по переменным x в двумерной ограниченной области или двумерном торе с условием того, что решение и правая часть системы представляют собой бездивергентную вектор-функцию по переменным x .

§ 5. Доказательство теоремы 4.1

5.1. Предварительные сведения. Для доказательства теоремы 4.1 нам будут необходимы несколько обозначений, определений и утверждений.

Напомним определение марковского момента из [26; гл. I, § 5, определение 5.3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Отображение $\tau: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ назовем марковским моментом относительно фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$, если для каждого $t \geq 0$ имеет место включение $\{\omega \in \Omega: \tau(\omega) \leq t\} \in F_t$.

Нетрудно показать, что, если M – произвольное замкнутое множество в некотором метрическом пространстве E , $\xi(t) : \Omega \rightarrow E$, $t \geq 0$, – согласованный с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$ случайный процесс, имеющий почти наверное непрерывные траектории, то случайная величина

$$\inf\{t \geq 0 : \xi(t) \in M\}$$

является марковским моментом относительно фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$ (доказательство см., например, в [16; гл. IV, § 5, предложение 4.5.1]). Пусть выполнено условие I теоремы 4.1. Тогда для любого $R > 0$ можно определить

$$\mathbf{T}_R(\omega, \vartheta) = \inf\{t \geq 0 : \|\mathbf{u}(t, \omega, \vartheta)\|_3 \leq R\}, \quad \vartheta \in \mathbf{H}^2. \quad (5.1)$$

Здесь и везде ниже норма и скалярное произведение в пространствах $\mathbf{H}^p$, $p \in \mathbb{Z}$, обозначены так же, как и в пространствах H^p , $p \in \mathbb{Z}$. Поскольку элементы этих пространств обозначаются разными по жирности буквами, то всегда будет понятно, в каком пространстве рассматриваются норма и скалярное произведение. Если при этом $\vartheta = (\vartheta, \vartheta')^T$, $v = (v, v')^T \in \mathbf{H}^p$, $p \in \mathbb{Z}$, то считаем, что

$$\|\vartheta\|_p^2 = \|\vartheta\|_p^2 + \|\vartheta'\|_p^2, \quad \langle \vartheta, v \rangle = \langle \vartheta, v \rangle + \langle \vartheta', v' \rangle.$$

Поскольку в силу непрерывности вложения $\mathbf{H}^3$ в $\mathbf{H}^2$ замкнутый шар в пространстве $\mathbf{H}^3$ является замкнутым множеством в пространстве $\mathbf{H}^2$ и $u(t), u'(t) \in C(\mathbb{R}_+; H^2)$ почти наверное, то $\mathbf{T}_R$ – марковский момент относительно фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$ для любого $\vartheta \in \mathbf{H}^2$.

Пусть τ – марковский момент относительно фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$. Обозначим через F_τ семейство множеств

$$\{M \in F : M \cap \{\tau \leq t\} \in F_t \text{ для любого } t \geq 0\}.$$

Очевидно, что это семейство образует σ -алгебру.

Введем следующее определение процесса Ито с постоянной диффузией в сепарабельном гильбертовом пространстве из [21; приложение, § 7, определение A.7.1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \geq 0$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, будем называть *процессом Ито в сепарабельном гильбертовом пространстве H с постоянной диффузией*, если он согласован с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$ и может быть представлен в виде

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t h(s) ds + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) v_i, \quad t \geq 0, \quad \text{почти наверное,}$$

где последовательность $\{v_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|v_i\|_H^2 < \infty$$

и $h(t)$, $t \geq 0$, – это H -значный случайный процесс, прогрессивно измеримый по отношению к фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$, такой, что

$$\mathbb{P} \left\{ \int_0^T \|h(t)\|_H^2 dt < \infty \quad \text{для любого } T > 0 \right\} = 1.$$

Для доказательства теоремы 4.1 нам будет необходима формула Ито замены переменной в стохастическом дифференциальном уравнении для гильбертовых пространств. Ниже будет приведена теорема, доказанная в [21; приложение, § 7, теорема А.7.5 и следствие А.7.6].

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть H , V – сепарабельные гильбертовы пространства, H^* и V^* – сопряженные пространства с пространствами соответственно H и V , V плотно непрерывно вложено² в H .

Пусть $\Phi: \mathbb{R}_+ \times H \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция по первой переменной $t \in \mathbb{R}_+$ и дважды непрерывно дифференцируемая по Фреше функция по второй переменной $v \in H$. Будем полагать, что эта функция равномерно непрерывна вместе со своими производными $\Phi_t(t, v)$, $\Phi_v(t, v)$ первого и $\Phi_{vv}(t, v)$ второго порядков на любом ограниченном множестве в $\mathbb{R}_+ \times H$. А также будем полагать, что функция Φ удовлетворяет следующим условиям:

а) для любого $T > 0$ существует положительная непрерывная функция $\tilde{C}_T(r)$, $r \geq 0$, такая, что

$$|\Phi_v(t, v; v)| \leq \tilde{C}_T(\|v\|_H) \|v\|_V \|v\|_{V^*}, \quad t \in [0, T], \quad v \in V, \quad v \in H;$$

б) для любой последовательности $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset V$, сходящейся к $v \in V$ при $k \rightarrow \infty$ в топологии пространства V , и для любых $t \geq 0$ и $v \in V^*$ имеет место сходимость³

$$\Phi_v(t, v_k; v) \rightarrow \Phi_v(t, v; v) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Предположим, что случайный процесс $\xi(t): \Omega \rightarrow H$, $t \geq 0$, удовлетворяет следующим условиям:

с) почти все траектории случайного процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, принадлежат пространству $C(\mathbb{R}_+; H) \cap L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}_+; V)$;

д) $\xi(t)$, $t \geq 0$, – процесс Ито в пространстве V^* с постоянной диффузией такой, что в определении 5.2 последовательность $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ лежит в пространстве H (а не в V^*) и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|v_i\|_H^2 < \infty.$$

²Отождествляя по теореме Ф. Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве (см., например, [6; гл. III, § 6]) сопряженное пространство H^* с пространством H , имеем

$$V \subseteq H \subseteq V^*.$$

³Заметим, что в силу условия а) линейный непрерывный оператор $\Phi_v(t, v)$, определенный на пространстве H , допускает единственное непрерывное расширение на пространство V^* для любого $v \in V$, и неравенство в условии а) будет выполнено для $v \in V^*$.

Будем полагать, что выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} E \int_0^t |\Theta_i(s)|^2 ds < \infty \quad \text{для любого } t \geq 0, \quad (5.2)$$

где

$$\Theta_i(t) = \Phi_v(t, \xi(t); v_i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Тогда почти наверное имеет место формула Ито

$$\Phi(t, \xi(t)) = \Phi(0, \xi(0)) + \int_0^t \Theta_0(s) ds + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \Theta_i(s) d\beta_i(s), \quad t \geq 0,$$

где

$$\Theta_0(t) = \Phi_t(t, \xi(t)) + \Phi_v(t, \xi(t); h(t)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{vv}(t, \xi(t); v_i),$$

и случайный процесс $\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \Theta_i(s) d\beta_i(s)$, $t \geq 0$, имеет почти наверное непрерывные траектории.

Напомним определение условного математического ожидания относительно σ -алгебры (см., например, [14; гл. IV, § 1, второй абзац]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Пусть G – σ -алгебра такая, что $G \subset F$. Условным математическим ожиданием вещественнозначной случайной величины ξ относительно σ -алгебры G называется такая функция $\Omega \rightarrow R$, обозначаемая $E(\xi|G)$, что:

- а) $E(\xi|G)$ является $G|\sigma_{\mathbb{R}}$ -измеримой;
- б) для любого $M \in G$ математические ожидания $E(I_M E(\xi|G))$ и $E(I_M \xi)$ определены и

$$E(I_M E(\xi|G)) = E(I_M \xi),$$

где I_M – индикатор множества M .

В следующей лемме указано достаточное условие существования условного математического ожидания (доказательство см., например, в [14; гл. IV, § 1, третий абзац]).

ЛЕММА 5.1. Пусть G – σ -алгебра такая, что $G \subset F$, а ξ – вещественнозначная случайная величина. Если $E|\xi| < \infty$, то $E(\xi|G)$ существует и определено однозначно с точностью до множества $\mathbb{P}$ -меры нуль.

В дальнейшем нам будут необходимы следующие свойства условного математического ожидания (доказательство см., например, в [15; гл. II, § 7.4]).

ЛЕММА 5.2. Пусть G – σ -алгебра такая, что $G \subset F$, а ξ и ψ – вещественнозначные случайные величины. Будем полагать, что существует $E(\xi|G)$.

- а) Если $\psi \in G|\sigma_{\mathbb{R}}$ -измеримая случайная величина, то

$$E(\xi\psi|G) = \psi E(\xi|G) \quad \text{почти наверное.}$$

б) *Имеет место равенство*

$$EE(\xi|G) = E\xi.$$

Определим отображение, равномерно непрерывное по Липшицу на ограниченных подмножествах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4. Пусть $X_i, i = 1, 2, \dots, j$, и Y – нормированные пространства. Отображение

$$\Phi: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_j \rightarrow Y$$

будем называть *равномерно непрерывным по Липшицу на ограниченных подмножествах*, если для любых $R_1, R_2, \dots, R_j \geq 0$ существует константа $C = C(R_1, \dots, R_j) \geq 0$ такая, что имеет место неравенство

$$\|\Phi(x_1^I, x_2^I, \dots, x_j^I) - \Phi(x_1^{\text{II}}, x_2^{\text{II}}, \dots, x_j^{\text{II}})\|_Y \leq C \sum_{i=1}^j \|x_i^I - x_i^{\text{II}}\|_{X_i}.$$

Здесь $x_i^I, x_i^{\text{II}} \in X_i$, $\|x_i^I\|_{X_i}, \|x_i^{\text{II}}\|_{X_i} \leq R_i, i = 1, 2, \dots, j$, – произвольные элементы соответствующих пространств, константа C не зависит от $(x_1^I, x_2^I, \dots, x_j^I)$ и $(x_1^{\text{II}}, x_2^{\text{II}}, \dots, x_j^{\text{II}})$.

5.2. Вспомогательные леммы. Для доказательства теоремы 4.1 нам необходимо доказать несколько вспомогательных результатов.

Имеет место следующая

ЛЕММА 5.3. Пусть $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 > 0$ – произвольные вещественные числа такие, что

$$\alpha_0 \in \left[0, \left(1 - \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)\nu\right), \quad 2\alpha_1 + \alpha_2 \in (0, 2). \quad (5.3)$$

Тогда для любых $\nu > 0, \gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$ таких, что выполнено неравенство

$$\langle A_1\psi, A_3\psi \rangle \geq -\alpha_0 \|\psi\|_3^2 \quad \text{для любого } \psi \in H^3, \quad (5.4)$$

$\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$, вектор-функции $f \in H^{-1}$ существуют $R > 0$ и константы $\tilde{c}_1(R, \alpha_1), \tilde{c}_2(R, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \geq 0$ такие, что

$$\mathbf{E} \exp(\tilde{c}_1 \mathbf{T}_R(\omega, \vartheta)) \leq 1 + \tilde{c}_2 \|\vartheta\|_2^2 \quad \text{для любого } \vartheta \in \mathbf{H}^2, \quad (5.5)$$

где $\mathbf{T}_R(\omega, \vartheta)$ определено в (5.1). При этом $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ не зависят от ϑ , $\tilde{c}_1 > 0$ при $\alpha_1 > 0$ и $\tilde{c}_1 = 0$ при $\alpha_1 = 0$. В частности, $\mathbb{P}\{\mathbf{T}_R(\omega, \vartheta) < \infty\} = 1$ для любого $\vartheta \in \mathbf{H}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$h(t) = f - (\nu A_2 + A_3)u(t) - B(u(t)), \quad t \geq 0.$$

В следствии 1 из [1; § 3] показано, что случайный процесс $u(t), t \geq 0$, является прогрессивно измеримым по отношению к фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$. Тогда случайный процесс $h(t), t \geq 0$, является H^{-1} -значным прогрессивно измеримым по

отношению к фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$. Поэтому случайный процесс $A_1 u(t)$, $t \geq 0$, представляет собой процесс Ито в H^{-1} с постоянной диффузией, так как в силу (1.1), (1.2), (4.1), (4.2) его можно представить в виде

$$A_1 u(t) = A_1 u_0 + \int_0^t h(t) dt + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i(t) E_i \quad t \geq 0, \quad \text{почти наверное,}$$

причем в силу способа построения решения $u(t)$, $t \geq 0$, и оценок (3.31), (3.32) из [1; § 3] случайный процесс $h(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяет соотношению

$$\mathbb{P} \left\{ \int_0^T \|h(t)\|_{-1}^2 dt < \infty \text{ для любого } T > 0 \right\} = 1.$$

В теореме 5.1 рассмотрим пространства $H = H^0$, $V = H^1$, функционал $\Phi(t, v) = e^{2\beta t} \|v\|_0^2$, где $\beta = 4\alpha_1 \nu / (2 + \gamma)^2$, и в качестве случайного процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, возьмем процессы Ито с постоянной диффузией $A_1 u(t)$, $t \geq 0$, и $A_1 u'(t)$, $t \geq 0$. Нетрудно показать, что в силу леммы 3 из [1; § 3] выполнено равенство

$$\langle B\psi, A_1 \psi \rangle = 0 \quad \text{для любого } \psi \in H^3.$$

Тогда, учитывая равенство (2.1), неравенство (2.2),

$$\Phi_t(t, v) = 2\beta e^{2\beta t} \|v\|_0^2, \quad \Phi_v(t, v; v) = 2e^{2\beta t} \langle v, v \rangle, \quad \Phi_{vv}(t, v; v) = 2e^{2\beta t} \|v\|_0^2, \\ v, v \in H^0,$$

и включение $u(t) \in \mathcal{K}$ почти наверное, где $\mathcal{K}$ – пространство (2.4), с помощью формулы Ито получим почти наверное равенство

$$e^{2\beta t} \|A_1 u(t)\|_0^2 = \|A_1 v\|_0^2 + 2 \int_0^t e^{2\beta s} \left(\beta \|A_1 u(s)\|_0^2 + \langle f, A_1 u(s) \rangle - \langle (\nu A_2 + A_3)u(s), A_1 u(s) \rangle + 0.5b^2 \right) ds + 2 \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int_0^t e^{2\beta s} \langle E_i, A_1 u(s) \rangle d\beta_i(s)$$

при $t \geq 0$, где b определено в (2.7). Аналогичное равенство выполнено для $A_1 u'(t)$. Заметим, что неравенство (5.2) выполнено в силу оценки (4.3) из [2; § 4], неравенства

$$\|\psi\|_p^2 \leq 2^{-(q-p)} \|\psi\|_q^2 \quad \text{для любого } \psi \in h^q, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q > p \quad (5.6)$$

(см. неравенство (16) в [27]), и неравенств

$$\|\psi\|_2^2 \leq \|A_1 \psi\|_0^2 = \langle A_1 \psi, A_1 \psi \rangle = \|\psi\|_2^2 + 2\gamma \|\psi_2\|_1^2 + \gamma^2 \|\psi_2\|_0^2 \leq \frac{(2 + \gamma)^2}{4} \|\psi\|_2^2 \quad (5.7)$$

для любого $\psi \in H^2$, которые имеют место в силу определения оператора A_1 , (2.1) и (5.6). Из оценок (5.4), (5.6), (5.7) и

$$\|\psi\|_3^2 \leq \langle A_2 \psi, A_1 \psi \rangle \quad \text{для любого } \psi \in H^3$$

(см. [1; § 3, неравенство (3.23)]) будем иметь почти наверное

$$\begin{aligned} & 2((1 - \alpha_1)\nu - \alpha_0) \int_0^t e^{2\beta s} \|u(s)\|_3^2 ds \\ & \leq \frac{(2 + \gamma)^2}{4} \|\vartheta\|_2^2 + \int_0^t e^{2\beta s} (2\langle f, A_1 u(s) \rangle + b^2) ds \\ & \quad + 2 \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int_0^t e^{2\beta s} \langle E_i, A_1 u(s) \rangle d\beta_i(s) \end{aligned}$$

при $t \geq 0$. Аналогичная оценка выполнена для u' . Отсюда получим почти наверное неравенство

$$\begin{aligned} & 2((1 - \alpha_1)\nu - \alpha_0) \int_0^t e^{2\beta s} \|u(s, \omega)\|_3^2 ds \\ & \leq \frac{(2 + \gamma)^2}{4} \|\vartheta\|_2^2 + 2 \int_0^t e^{2\beta s} (\langle f, A_1 u(s, \omega) \rangle + \langle f, A_1 u'(s, \omega') \rangle + b^2) ds \\ & \quad + 2 \sum_{i=1}^{\infty} b_i \left(\int_0^t e^{2\beta s} \langle E_i, A_1 u(s, \omega) \rangle d\beta_i(s, \omega) \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t e^{2\beta s} \langle E_i, A_1 u'(s, \omega') \rangle d\beta_i(s, \omega') \right) \end{aligned}$$

при $t \geq 0$. Заменяем в этом неравенстве t на случайную величину $\mathbf{T}_R \wedge N$, где N – любое натуральное число. Здесь

$$a \wedge b = \min\{a, b\}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

В силу [14; “Дополнения и упражнения” к гл. I, упражнения 27 и 28] и включения $u, u' \in \mathcal{H}$ почти наверное будем иметь слева и справа случайные величины. Взяв от обеих частей последнего неравенства с $\mathbf{T}_R \wedge N$ математическое ожидание, будем иметь

$$\begin{aligned} & 2((1 - \alpha_1)\nu - \alpha_0) \mathbf{E} \int_0^{\mathbf{T}_R \wedge N} e^{2\beta s} \|u(s, \omega)\|_3^2 ds \\ & \leq \frac{(2 + \gamma)^2}{4} \|\vartheta\|_2^2 + 2\mathbf{E} \int_0^{\mathbf{T}_R \wedge N} e^{2\beta s} (\langle f, A_1 u(s, \omega) \rangle + \langle f, A_1 u'(s, \omega') \rangle + b^2) ds \\ & \quad + 2\mathbf{E} \sum_{i=1}^{\infty} b_i \left(\int_0^{\mathbf{T}_R \wedge N} e^{2\beta s} \langle E_i, A_1 u(s, \omega) \rangle d\beta_i(s, \omega) \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{\mathbf{T}_R \wedge N} e^{2\beta s} \langle E_i, A_1 u'(s, \omega') \rangle d\beta_i(s, \omega') \right). \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично доказательству (4.5) в [2; § 4] и используя (4.3) из [2; § 4], (5.6), (5.7), замечание 2 в [22; гл. IV, § 5.3] и теорему Фубини–Тонелли

из [6; введение, § 3], нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sum_{i=1}^{\infty} b_i \left(\int_0^{\mathbf{T}_R \wedge N} e^{2\beta s} \langle E_i, A_1 u(s, \omega) \rangle d\beta_i(s, \omega) \right. \\ \left. + \int_0^{\mathbf{T}_R \wedge N} e^{2\beta s} \langle E_i, A_1 u'(s, \omega') \rangle d\beta_i(s, \omega') \right) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 2((1 - \alpha_1)\nu - \alpha_0) \mathbf{E} \int_0^{\mathbf{T}_R \wedge N} e^{2\beta s} \|\mathbf{u}(s)\|_3^2 ds \\ \leq \frac{(2 + \gamma)^2}{4} \|\boldsymbol{\vartheta}\|_2^2 + 2\mathbf{E} \int_0^{\mathbf{T}_R \wedge N} e^{2\beta s} (|\langle f, A_1 u(s) \rangle + \langle f, A_1 u'(s) \rangle| + b^2) ds. \end{aligned} \quad (5.8)$$

В силу неравенств

$$\|A_1 \psi\|_1^2 \leq \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)^2 \|\psi\|_3^2 \quad \text{для любого } \psi \in H^3$$

(доказательство см. в доказательстве теоремы 2 из [2; § 4]), (2.2) при $p = 1$ и

$$2ab \leq a^2 c^2 + b^2 c^{-2}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0, \quad (5.9)$$

выполнена оценка

$$2|\langle f, A_1 u(s) \rangle + \langle f, A_1 u'(s) \rangle| \leq \alpha_2 \nu \|\mathbf{u}(s)\|_3^2 + \frac{(2 + \gamma)^2}{2\alpha_2 \nu} \|f\|_{-1}^2.$$

Тогда из (5.8) имеем

$$\begin{aligned} ((2 - 2\alpha_1 - \alpha_2)\nu - 2\alpha_0) \mathbf{E} \int_0^{\mathbf{T}_R \wedge N} e^{2\beta s} \|\mathbf{u}(s)\|_3^2 ds \\ \leq \frac{(2 + \gamma)^2}{4} \|\boldsymbol{\vartheta}\|_2^2 + \mathbf{E} \int_0^{\mathbf{T}_R \wedge N} e^{2\beta s} \left(\frac{(2 + \gamma)^2}{2\alpha_2 \nu} \|f\|_{-1}^2 + 2b^2 \right) ds. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Заметим, что $\|\mathbf{u}(s)\|_3^2 > R$ при $0 \leq s < \mathbf{T}_R$. Следовательно, если выбрать R такое, что

$$\frac{R^2}{2} ((2 - 2\alpha_1 - \alpha_2)\nu - 2\alpha_0) \geq \left(\frac{(2 + \gamma)^2}{2\alpha_2 \nu} \|f\|_{-1}^2 + 2b^2 \right), \quad (5.11)$$

то из (5.10) получим оценку

$$\frac{R^2}{2} ((2 - 2\alpha_1 - \alpha_2)\nu - 2\alpha_0) \mathbf{E} \int_0^{\mathbf{T}_R \wedge N} e^{2\beta s} ds < \frac{(2 + \gamma)^2}{4} \|\boldsymbol{\vartheta}\|_2^2.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\mathbf{E} \exp(2\beta(\mathbf{T}_R \wedge N)) < 1 + \frac{4\alpha_1 \nu}{R^2 ((2 - 2\alpha_1 - \alpha_2)\nu - 2\alpha_0)} \|\boldsymbol{\vartheta}\|_2^2.$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$ и используя лемму Фату (см., например, [15; гл. II, § 6.4, теорема 2, а)), получим (5.5) с константами $\tilde{c}_1 = 2\beta$ и

$$\tilde{c}_2 = \frac{4\alpha_1\nu}{R^2((2 - 2\alpha_1 - \alpha_2)\nu - 2\alpha_0)},$$

причем R такое, что выполнено (5.11).

Лемма 5.3 доказана.

Неявное условие (5.4) из леммы 5.3 можно заменить на следующее явное условие. В [2; § 4, лемма 6] была доказана следующая лемма.

ЛЕММА 5.4. *Условие (5.4) эквивалентно следующему условию на константы $\nu, \gamma, \rho, k_0, k_1$:*

$$k_0 \leq \inf_{i=1,2,\dots} \frac{2}{(j(i) - \gamma)^2} \left(3\alpha_0 j^3(i) + 2\alpha_0 \gamma j^2(i) + \chi(j(i)) \right. \\ \left. + \sqrt{(3\alpha_0 j^3(i) + 2\alpha_0 \gamma j^2(i) + \chi(j(i)))^2 + (j(i) - \gamma)^2 (\alpha_0^2 j^4(i) + \alpha_0 j(i) \chi(j(i)))} \right),$$

где функции χ и j определены в (4.6).

ЛЕММА 5.5. *Если константы $\nu, \gamma, \rho, k_0, k_1$ удовлетворяют условию (4.4), то существуют такие $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$, что выполнено (5.3) и (5.4).*

Доказательство леммы полностью аналогично доказательству леммы 7 из [2; § 4].

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 z + \nu A_2 z + A_3 z = \eta, \quad t > 0, \quad z(0) = 0, \quad (5.12)$$

где $z(t, x, \omega) = (z_1(t, x, \omega), z_2(t, x, \omega))^T$. Решение этой задачи Коши определим аналогично определению решения задачи Коши (1.1), (1.2), (4.1). При этом вместо (4.3) будем иметь

$$A_1 z(t) + \int_0^t (\nu A_2 z(s) + A_3 z(s)) ds = \zeta(t), \quad t > 0.$$

В силу предложения 1 из [1; § 3] следует, что для любых $\nu > 0, \gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0, \{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$ существует единственное решение задачи Коши (5.12).

Для доказательства теоремы 4.1 нам будет необходима следующая

ЛЕММА 5.6. *Пусть $E_i \in H^1, i = 1, 2, \dots$. Для любой вектор-функции $\hat{z} \in \mathfrak{H}_1$, где пространство $\mathfrak{H}_1$ определено в (2.5), и любых $\varepsilon > 0, \nu > 0, \gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0, \{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+, b_i \neq 0, i = 1, 2, \dots$, выполнено неравенство*

$$\mathbb{P}\{\|z - \hat{z}\|_{\mathfrak{H}_1} < \varepsilon\} > 0. \quad (5.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что вектор-функции из пространства $\mathfrak{H}_1$ можно приблизить в норме пространства $\mathfrak{H}_1$ вектор-функциями из пространства $C^1(0, 1; H^4)$ с нулевым значением в нуле. Этот факт нетрудно получить,

используя плотность пространства H^4 в пространствах H^2 , H^3 и, например, средние функции (см., например, [11; гл. II, § 2, теоремы 2.2.1, 2.2.3]). Поэтому достаточно доказать (5.13) для вектор-функции $\widehat{z} \in C^1(0, 1; H^4)$, $\widehat{z}(0) = 0$. В дальнейшем мы полагаем, что

$$\widehat{z} \in C^1(0, 1; H^4), \quad \widehat{z}(0) = 0.$$

Пусть N – любое натуральное число. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 z_N + \nu A_2 z_N + A_3 z_N = \frac{\partial}{\partial t} \zeta_N, \quad t > 0, \quad z_N(0) = 0, \quad (5.14)$$

где

$$\zeta_N = \sum_{i=1}^N b_i \beta_i E_i, \quad z_N(t, x, \omega) = (z_{N,1}(t, x, \omega), z_{N,2}(t, x, \omega))^T.$$

Определим решение задачи Коши (5.14) таким же образом, как решение задачи Коши (5.12). В силу предложения 1 из [1; § 3] следует, что для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$, неотрицательных вещественных чисел $\{b_i\}_{i=1}^N$ существует единственное решение задачи Коши (5.14).

Заметим, что в [1; § 3, формула (3.24)] была доказана оценка

$$\langle A_1 \psi, A_3 \psi \rangle \geq -C \|\psi\|_2^2 \quad \text{для любого } \psi \in H^2, \quad (5.15)$$

где $C > 0$ – константа, не зависящая от ψ . Рассмотрим еще одну вспомогательную задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 w + \nu A_2 w + A_3 w + C A_1 w = e^{-Ct} \eta, \quad t > 0, \quad w(0) = 0, \quad (5.16)$$

где $w(t, x, \omega) = (w_1(t, x, \omega), w_2(t, x, \omega))^T$. Решение этой задачи Коши определим аналогично определению решения задачи Коши (1.1), (1.2), (4.1). При этом вместо (4.3) будем иметь

$$\begin{aligned} A_1 w(t) + \int_0^t (\nu A_2 w(s) + A_3 w(s) + C A_1 w(s)) ds \\ = e^{-Ct} \zeta(t) + C \int_0^t e^{-Cs} \zeta(s) ds, \quad t > 0. \end{aligned}$$

В силу доказательства предложения 1 из [1; § 3] сразу следует, что для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$, $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$ существует единственное решение задачи Коши (5.16), и для него имеет место следующая оценка:

$$E \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\|w(t)\|\|_2^2 + E \int_0^1 \|\|w(s)\|\|_3^2 ds \leq \frac{b^2}{2C} \left(1 + \frac{1}{2\nu} + \frac{\sqrt{2C}}{\sqrt{\nu}} (2 + \gamma) \right). \quad (5.17)$$

Заметим, что оценка (5.17) вытекает из априорной оценки из шага 1 доказательства предложения 1 в [1; § 3], поскольку в силу (5.6) и (5.7) можно рассмотреть в качестве констант C_2 и C_4 в этой априорной оценке следующие величины:

$$C_2 = \frac{b^2}{2C}, \quad C_4 = \frac{(2 + \gamma)b^2}{2\sqrt{2\nu C}},$$

где b определено в (2.7). В силу доказательства предложения 1 в [1; § 3] также следует, что вектор-функция $\exp(-Ct)(z - z_N)$ удовлетворяет задаче Коши (5.16) с белым шумом η , у которого $b_i = 0$ при $i = 1, 2, \dots, N$. Тогда в силу (5.17) для разности $z - z_N$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} E \sup_{0 \leq t \leq 1} \|z(t) - z_N(t)\|_2^2 + E \int_0^1 \|z(s) - z_N(s)\|_3^2 ds \\ \leq \frac{\exp(2C)}{2C} \left(1 + \frac{1}{2\nu} + \frac{\sqrt{2C}}{\sqrt{\nu}}(2 + \gamma) \right) \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} b_i^2 \right). \end{aligned}$$

Поскольку $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2^+$, то имеет место сходимость

$$E \|z - z_N\|_{\mathfrak{H}_1}^2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow +\infty. \quad (5.18)$$

В силу неравенства Чебышёва (доказательство см. в [15; гл. II, § 6.7])

$$\mathbb{P}\{\xi \geq c\} \leq \frac{E\xi}{c} \quad \text{для любого} \quad c > 0 \quad (5.19)$$

и неравенства Коши–Буняковского

$$E\xi \leq \sqrt{E\xi^2}$$

для вещественнозначной случайной величины $\xi \geq 0$ получим, что для любых $N \geq 1$ и $c > 0$ выполнено неравенство

$$1 - \frac{1}{c} \sqrt{E \|z - z_N\|_{\mathfrak{H}_1}^2} \leq \mathbb{P}\{\|z - z_N\|_{\mathfrak{H}_1} < c\}.$$

Поэтому из (5.18) следует, что существует натуральное число $N_1(\varepsilon)$ такое, что для любого $N \geq N_1$ выполнено неравенство

$$0 < \mathbb{P}\left\{\|z - z_N\|_{\mathfrak{H}_1} < \frac{\varepsilon}{3}\right\}. \quad (5.20)$$

Рассмотрим детерминированную задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 \hat{z}_N + \nu A_2 \hat{z}_N + A_3 \hat{z}_N = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\zeta}_N, \quad 0 < t \leq 1, \quad \hat{z}_N(0) = 0, \quad (5.21)$$

где $\hat{z}_N(t, x) = (\hat{z}_{N,1}(t, x), \hat{z}_{N,2}(t, x))^T$,

$$\hat{\zeta}_N = \sum_{i=1}^N \langle \hat{\zeta}, E_i \rangle E_i, \quad \hat{\zeta}(t) = A_1 \hat{z}(t) + \int_0^t (\nu A_2 \hat{z}(s) + A_3 \hat{z}(s)) ds.$$

Вектор-функцию $\hat{z}_N$ будем называть *решением задачи Коши* (5.21) на $[0, 1] \times S$, если $\hat{z}_N \in \Xi_1$, где Ξ_1 определено в (2.6), $\hat{z}_N(0) = 0$ и уравнение в (5.21) имеет место в $L_2(0, 1; H^{-1})$. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 1 из [1; § 3], нетрудно показать, что для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$ существует единственное решение задачи Коши (5.21) на $[0, 1] \times S$.

Напомним, что пространство Ξ_1 непрерывно вложено в пространство $\mathfrak{X}_1$. Оценим $\|\hat{z} - \hat{z}_N\|_{\mathfrak{X}_1}$. В силу (5.21) разность $\hat{z} - \hat{z}_N$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1(\hat{z} - \hat{z}_N) + \nu A_2(\hat{z} - \hat{z}_N) + A_3(\hat{z} - \hat{z}_N) = h_N, \quad 0 < t \leq 1,$$

где

$$h_N = \frac{\partial}{\partial t}(\hat{\zeta} - \hat{\zeta}_N), \quad 0 < t \leq 1.$$

Поэтому, действуя аналогично получению оценки (3.29) из [1; § 3] и учитывая $\hat{z}(0) - \hat{z}_N(0) = 0$, нетрудно показать, что

$$\|\hat{z} - \hat{z}_N\|_{\mathfrak{X}_1} \leq \hat{C} \|h_N\|_{L_2(0,1;H^{-1})},$$

где $\hat{C} > 0$ – константа, не зависящая от $\hat{\zeta}$, $\hat{\zeta}_N$, $\frac{\partial}{\partial t}\hat{\zeta}$, $\frac{\partial}{\partial t}\hat{\zeta}_N$ и N . Поскольку $\hat{z} \in C^1(0,1;H^4)$, то $\frac{\partial}{\partial t}\hat{\zeta}$, $h_N \in C(0,1;H^0)$. В силу (5.6) будем иметь

$$\|\hat{z} - \hat{z}_N\|_{\mathfrak{X}_1} \leq \frac{\hat{C}}{\sqrt{2}} \|h_N\|_{L_2(0,1;H^0)}. \quad (5.22)$$

Разложим $h_N \in H^0$ по ортонормированному базису $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ пространства H^0 :

$$h_N = \sum_{i=N+1}^{\infty} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\hat{\zeta}, E_i \right\rangle E_i, \quad 0 < t \leq 1.$$

Поскольку остаточный член сходящегося ряда стремится к нулю, то имеет место сходимость

$$\|h_N(t)\|_0^2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow +\infty$$

для любого $t \in [0,1]$. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости в силу

$$\|h_N\|_0^2 \leq \left\| \frac{\partial}{\partial t}\hat{\zeta} \right\|_0^2, \quad 0 < t \leq 1,$$

и $\frac{\partial}{\partial t}\hat{\zeta} \in C(0,1;H^0)$ следует сходимость

$$\|h_N\|_{L_2(0,1;H^0)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow +\infty.$$

Отсюда и из (5.22) получим, что

$$\|\hat{z} - \hat{z}_N\|_{\mathfrak{X}_1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow +\infty.$$

Поэтому существует натуральное число $N_2(\varepsilon)$ такое, что для любого $N \geq N_2$ выполнено неравенство

$$\|\hat{z} - \hat{z}_N\|_{\mathfrak{X}_1} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5.23)$$

Оценим по вероятности $\|w_N\|_{\mathfrak{K}_1}$, где $w_N = z_N - \widehat{z}_N$. В силу доказательства теоремы 2 в [1] w_N является единственным решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 w_N + \nu A_2 w_N + A_3 w_N = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N (b_i \beta_i - \langle \widehat{\zeta}, E_i \rangle) E_i, \quad 0 < t \leq 1, \quad w_N(0) = 0, \quad (5.24)$$

для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$, неотрицательных вещественных чисел $\{b_i\}_{i=1}^N$. При этом считаем, что решение этой задачи Коши определено аналогично определению решения задачи Коши (1.1), (1.2), (4.1), и вместо (4.3) имеем

$$A_1 w_N(t) + \int_0^t (\nu A_2 w_N(s) + A_3 w_N(s)) ds = \sum_{i=1}^N (b_i \beta_i - \langle \widehat{\zeta}, E_i \rangle) E_i, \quad 0 < t \leq 1.$$

Заметим, что из доказательства теоремы A.7.5 и следствия A.7.6 в [21; приложение, § 7] следует, что в теореме 5.1 можно ограничить t и T сверху некоторым вещественным числом. В нашем случае будем считать, что $t, T \in [0, 1]$. Рассмотрим в теореме 5.1 пространства $H = H^0$, $V = H^1$, функционал

$$\Phi(t, v) = e^{-2Ct} \|v\|_0^2, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

и в качестве случайного процесса $\xi(t)$, $0 \leq t \leq 1$, возьмем процесс Ито с постоянной диффузией $A_1 w_N(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Тогда, учитывая равенство (2.1), неравенство (2.2),

$$\begin{aligned} \Phi_t(t, v) &= -2C e^{-2Ct} \|v\|_0^2, & \Phi_v(t, v; v) &= 2e^{-2Ct} \langle v, v \rangle, \\ \Phi_{vv}(t, v; v) &= 2e^{-2Ct} \|v\|_0^2, \\ v, v &\in H^0, & 0 &\leq t \leq 1, \end{aligned}$$

и включение $w_N(t) \in \mathfrak{K}_1$ почти наверное, с помощью формулы Ито получим почти наверное равенство

$$\begin{aligned} e^{-2Ct} \|A_1 w_N(t)\|_0^2 &= 2 \int_0^t e^{-2Cs} \left(-C \|A_1 w_N(s)\|_0^2 \right. \\ &\quad \left. - \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \widehat{\zeta}_N, A_1 w_N(s) \right\rangle - \langle (\nu A_2 + A_3) w_N(s), A_1 w_N(s) \rangle + 0.5 \sum_{i=1}^N b_i^2 \right) ds \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^N b_i \int_0^t e^{-2Cs} \langle E_i, A_1 w_N(s) \rangle d\beta_i(s) \end{aligned}$$

при $0 \leq t \leq 1$. Неравенство (5.2) при $t \in [0, 1]$ выполнено в силу оценок (5.6), (5.7), $\widehat{z}_N \in \mathfrak{K}_1$ и того, что ввиду доказательства предложения 1 в [1; § 3] следует, что $z_N \in L_2(\Omega; \mathfrak{K}_1)$. Из последнего равенства и оценки (5.15) имеем почти наверное

$$\begin{aligned} e^{-2Ct} \|A_1 w_N(t)\|_0^2 &+ 2\nu \int_0^t e^{-2Cs} \|w_N\|_3^2 ds \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^N \int_0^t e^{-2Cs} \langle E_i, A_1 w_N(s) \rangle d(b_i \beta_i - \langle \widehat{\zeta}, E_i \rangle) + \frac{1 - e^{-2Ct}}{2C} \sum_{i=1}^N b_i^2 \end{aligned}$$

при $0 \leq t \leq 1$. Используя формулу Ито интегрирования по частям (см., например, [28; гл. IV D, формула (5)]), получим почти наверное

$$\begin{aligned} e^{-2Ct} \|A_1 w_N(t)\|_0^2 + 2\nu \int_0^t e^{-2Cs} \|w_N\|_3^2 ds \\ \leq 2 \sum_{i=1}^N (b_i \beta_i(t) - \langle \widehat{\zeta}(t), E_i \rangle) \langle E_i, A_1 w_N(t) \rangle e^{-2Ct} \\ - 2 \sum_{i=1}^N \int_0^t (b_i \beta_i - \langle \widehat{\zeta}, E_i \rangle) \frac{\partial}{\partial s} (\langle E_i, A_1 w_N(s) \rangle e^{-2Cs}) ds - \frac{1 - e^{-2Ct}}{2C} \sum_{i=1}^N b_i^2 \end{aligned}$$

при $0 \leq t \leq 1$. Обозначим через $\widehat{\delta}_N$

$$\max_{i=1,2,\dots,N} \left\| \beta_i - \frac{1}{b_i} \langle \widehat{\zeta}, E_i \rangle \right\|_{C(0,1;\mathbb{R})}.$$

Из неравенства Коши–Буняковского для пространства $\mathbb{R}^N$, неравенства Бесселя и (5.24) будем иметь почти наверное

$$\begin{aligned} e^{-2Ct} \|A_1 w_N(t)\|_0^2 + 2\nu \int_0^t e^{-2Cs} \|w_N\|_3^2 ds \leq 2\widehat{\delta}_N b e^{-2Ct} \|A_1 w_N(t)\|_0 \\ + 2 \int_0^t \sum_{i=1}^N b_i \left(\beta_i - \frac{1}{b_i} \langle \widehat{\zeta}, E_i \rangle \right) \langle E_i, (\nu A_2 + A_3 + 2CA_1) w_N(s) \rangle e^{-2Cs} ds \\ - 2 \int_0^t e^{-2Cs} \sum_{i=1}^N b_i \left(\beta_i - \frac{1}{b_i} \langle \widehat{\zeta}, E_i \rangle \right) d \left(b_i \left(\beta_i - \frac{1}{b_i} \langle \widehat{\zeta}, E_i \rangle \right) \right) - \frac{1 - e^{-2Ct}}{2C} \sum_{i=1}^N b_i^2 \end{aligned}$$

при $0 \leq t \leq 1$. Применяя еще раз неравенство Коши–Буняковского для пространства $\mathbb{R}^N$, неравенство Бесселя, формулы Ито интегрирования по частям и замены переменной в стохастическом дифференциальном уравнении (см., например, [28; гл. IV D, формулы (5) и (2)]), имеем почти наверное

$$\begin{aligned} e^{-2Ct} \|A_1 w_N(t)\|_0^2 + 2\nu \int_0^t e^{-2Cs} \|w_N\|_3^2 ds \leq 2\widehat{\delta}_N b e^{-2Ct} \|A_1 w_N(t)\|_0 \\ + 2\widehat{\delta}_N b \nu \int_0^t e^{-2Cs} \left(\sum_{i=1}^N \langle A_0^{1/2} E_i, A_0^{3/2} w_N(s) \rangle^2 \right)^{1/2} ds \\ + 2\widehat{\delta}_N b \int_0^t e^{-2Cs} \| (A_3 + 2CA_1) w_N(s) \|_0 ds \end{aligned}$$

при $0 \leq t \leq 1$. Нетрудно показать, что в силу (2.2) и (5.6) выполнена оценка

$$\| (A_3 + 2CA_1) \psi \|_0 \leq \widetilde{C} \| \psi \|_3 \quad \text{для любого } \psi \in H^3,$$

где $\widetilde{C} = 2(3k_0 + k_1 + \nu\gamma + 2C) + \rho + 2C\gamma$. Тогда ввиду неравенства Коши–Буняковского и неравенства (5.9) получим почти наверное

$$\frac{1}{2} e^{-2Ct} \|A_1 w_N(t)\|_0^2 + \nu \int_0^t e^{-2Cs} \|w_N\|_3^2 ds \leq 2\widehat{\delta}_N^2 b^2 \left(1 + \nu \sum_{i=1}^N \|E_i\|_1^2 + \frac{\widetilde{C}^2}{\nu} \right)$$

при $0 \leq t \leq 1$. Отсюда в силу (5.7) и $w_N = z_N - \widehat{z}_N$ будем иметь оценку

$$\|z_N - \widehat{z}_N\|_{\kappa_1} \leq \widehat{\delta}_N \widehat{C}_N \quad \text{почти наверное,}$$

где

$$\widehat{C}_N = b \exp(C) \sqrt{4 + \frac{2}{\nu}} \left(1 + \nu \sum_{i=1}^N \|E_i\|_1^2 + \frac{\widetilde{C}^2}{\nu} \right)^{1/2}.$$

Поэтому в силу того, что вещественнозначные броуновские движения $\beta_i(t, \omega)$, $t \geq 0$, $i = 1, 2, \dots$, независимы, выполнена следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \|z_N - \widehat{z}_N\|_{\kappa_1} < \frac{\varepsilon}{3} \right\} &\geq \mathbb{P} \left\{ \widehat{\delta}_N < \frac{\varepsilon}{3\widehat{C}_N} \right\} \\ &= \prod_{i=1}^N \mathbb{P} \left\{ \left\| \beta_i - \frac{1}{b_i} \langle \widehat{\zeta}, E_i \rangle \right\|_{C(0,1;\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{3\widehat{C}_N} \right\}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Заметим, что для произвольного вещественнозначного броуновского движения $\{\beta(t), 0 \leq t \leq 1\}$ относительно фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$ имеет место неравенство (см., например, [29; упражнение 1.8 к гл. I и его решение на с. 363])

$$\mathbb{P} \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} |\beta - \varphi| < c \right\} > 0 \quad (5.26)$$

для любых $c > 0$ и $\varphi \in C(0, 1; \mathbb{R})$, $\varphi(0) = 0$. Тогда из (5.25) и (5.26) получим, что для любого натурального N выполнена оценка

$$\mathbb{P} \left\{ \|z_N - \widehat{z}_N\|_{\kappa_1} < \frac{\varepsilon}{3} \right\} > 0. \quad (5.27)$$

Пусть $N \geq \max\{N_1, N_2\}$. Тогда из (5.20), (5.23) и (5.27) в силу независимости случайных процессов $z - z_N$ и $z_N - \widehat{z}_N$ сразу следует оценка (5.13).

Лемма 5.6 доказана.

Следующая лемма вытекает из леммы 5.6.

ЛЕММА 5.7. Пусть $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$, $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$, вектор-функция f принадлежит H^{-1} и выполнено условие II теоремы 4.1. Тогда для любого $R > 0$ и любого замкнутого шара $B \subset H^2$ с ненулевым радиусом существует $\rho > 0$ такое, что

$$\mathbf{P}(1, \vartheta, B \times B) \geq \rho, \quad \vartheta = (\vartheta, \vartheta')^T \quad \text{для любых } \vartheta, \vartheta' \in B_{H^3}(R), \quad (5.28)$$

где $\mathbf{P}(t, \vartheta, \cdot)$ – переходная функция семейства $\{\mathbf{u}(t, x, \omega, \vartheta)\}_{\vartheta \in H^2, t \geq 0}$ (см. § 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что из (3.2) следует, что для доказательства леммы 5.7 достаточно доказать неравенство

$$\inf_{\vartheta \in B_{H^3}(R)} P(1, \vartheta, B) > 0.$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$\inf_{\vartheta \in B_{H^3}(R)} \mathbb{P} \{ \|u(1, \vartheta) - \widehat{u}\|_2 \leq \varepsilon \} > 0 \quad \text{для любых } \widehat{u} \in H^2, \quad \varepsilon > 0. \quad (5.29)$$

Докажем (5.29). Доказательство проведем в три шага.

Шаг 1. Представим решение задачи Коши (1.1), (1.2), $u(0) = \vartheta$ в виде суммы (см. [1; § 3])

$$u(t) = z(t) + v(t), \quad t \geq 0, \quad \text{почти наверное,} \quad (5.30)$$

где $z(t)$ – решение задачи Коши (5.12), $v(t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 v + \nu A_2 v + A_3 v + B(v + z) = f, \quad t > 0, \quad v(0) = \vartheta. \quad (5.31)$$

При этом решение последней задачи Коши определяется следующим образом в случае, если $z(t, x)$ – произвольная детерминированная вектор-функция такая, что $z \in \mathfrak{X}_1$. Вектор-функцию $v(t, x, \vartheta, z)$ будем называть *решением задачи Коши (5.31) на $[0, 1] \times S$* , если $v \in \Xi_1$, где Ξ_1 определено в (2.6), $v(0) = \vartheta \in H^2$ и уравнение в (5.31) имеет место в $L_2(0, 1; H^{-1})$. В теореме 1 из [1; § 3] доказано, что для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$, $f \in H^{-1}$, $z \in \mathfrak{X}_1$ и $\vartheta \in H^2$ существует единственное решение задачи Коши (5.31) на $[0, 1] \times S$.

Доказательство (5.29) будет основано на двух вспомогательных результатах.

а) Для любого $\hat{u} \in H^3$ существует непрерывный оператор $Z_{\hat{u}}: H^2 \rightarrow \mathfrak{X}_1$, где $\mathfrak{X}_1$ определено в (2.5), который является отображением $\vartheta \mapsto Z_{\hat{u}}(t, \vartheta)$, равномерно непрерывным по Липшицу на ограниченных подмножествах (см. определение 5.4), и такой, что выполнено равенство

$$v(1, \vartheta, Z_{\hat{u}}(\vartheta)) + Z_{\hat{u}}(1, \vartheta) = \hat{u}. \quad (5.32)$$

б) Пусть $O \subset \mathfrak{X}_1$ – произвольная окрестность нуля и $K \subset \mathfrak{X}_1$ – произвольное компактное множество. Тогда

$$\inf_{\hat{z} \in K} \mathbb{P}\{z - \hat{z} \in O\} > 0. \quad (5.33)$$

Эти утверждения будут доказаны чуть позже. Докажем неравенство (5.29), предполагая, что а) и б) выполнены. Поскольку вектор-функции из пространства H^2 могут быть приближены в норме пространства H^2 вектор-функциями из пространства H^3 в силу плотности пространства H^3 в пространстве H^2 , то можно в дальнейшем считать без ограничения общности, что $\hat{u} \in H^3$. В силу того, что любое ограниченное множество из H^3 компактно в H^2 (доказательство см., например, [7; гл. I, § 3, лемма 1.6]), следует, что $B_{H^3}(R)$ – компактное множество в H^2 . Тогда в силу того, что $Z_{\hat{u}}$ – непрерывный оператор и образ компактного множества при непрерывном отображении является компактным множеством (см., например, [19; гл. II, § 6.2, теорема 6]), существует константа $r > 0$ такая, что образ компактного множества $B_{H^3}(R)$ при отображении $Z_{\hat{u}}$ содержится в замкнутом шаре $B_{\mathfrak{X}_1}(r)$. Поскольку отображение $(\vartheta, z) \mapsto v(t, \vartheta, z) \in \mathfrak{X}_1$, где $(\vartheta, z) \in H^2 \times \mathfrak{X}_1$, равномерно непрерывно по Липшицу на ограниченных подмножествах (см. теорема 1 из [1; § 3]), то имеет место неравенство

$$\|v(1, \vartheta, z_1) - v(1, \vartheta, z_2)\|_2 \leq C \|z_1 - z_2\|_{\mathfrak{X}_1}$$

для любых $\vartheta \in B_{H^3}(R)$, $z_1, z_2 \in B_{\mathfrak{X}_1}(r + \varepsilon/2)$. Здесь в силу очевидных включений $B_{H^3}(R) \subset B_{H^2}(R)$ (см. (5.6)) и $B_{\mathfrak{X}_1}(r + \varepsilon/2) \subset B_{\mathfrak{X}_1}(r + \varepsilon/2)$ константа $C \geq 1$

не зависит от ϑ , z_1 , z_2 и зависит от R и $r + \varepsilon/2$. Возьмем $z_2 = Z_{\widehat{u}}(\vartheta)$. Тогда

$$\|v(1, \vartheta, z_1) - v(1, \vartheta, Z_{\widehat{u}}(\vartheta))\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (5.34)$$

если

$$\|z_1 - Z_{\widehat{u}}(\vartheta)\|_{\varkappa_1} \leq \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Из (5.30) и а) следует неравенство

$$\begin{aligned} \|u(1, \vartheta) - \widehat{u}\|_2 &\leq \|z(1) - Z_{\widehat{u}}(1, \vartheta)\|_2 \\ &+ \|v(1, \vartheta, z) - v(1, \vartheta, Z_{\widehat{u}}(\vartheta))\|_2 \quad \text{почти наверное.} \end{aligned}$$

Отсюда и из (5.34) получим оценку

$$\mathbb{P}\{\|u(1, \vartheta) - \widehat{u}\|_2 \leq \varepsilon\} \geq \mathbb{P}\left\{\|z - Z_{\widehat{u}}(\vartheta)\|_{\varkappa_1} \leq \frac{\varepsilon}{2C}\right\} \quad \text{для любого } \vartheta \in B_{H^3}(R). \quad (5.35)$$

Возьмем в б) $K = Z_{\widehat{u}}(B_{H^3}(R))$ и $O \subset \varkappa_1$ – открытый шар с центром в нуле радиуса $\varepsilon/(2C)$. Тогда из б) и (5.35) сразу следует (5.29).

Докажем а) и б).

Шаг 2 (доказательство а)). Для построения оператора $Z_{\widehat{u}}$ рассмотрим детерминированную задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 \widehat{w} + \nu A_2 \widehat{w} + A_3 \widehat{w} = 0, \quad 0 < t \leq 1, \quad \widehat{w}(0) = \vartheta,$$

где $\widehat{w}(t, x) = (\widehat{w}_1(t, x), \widehat{w}_2(t, x))^T$. Решение этой задачи Коши определим аналогично определению решения задачи Коши (5.21), при этом считаем, что $\vartheta \in H^2$. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 1 из [1; § 3], нетрудно показать, что для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$ и $\vartheta \in H^2$ существует единственное решение рассмотренной задачи Коши на $[0, 1] \times S$ и отображение $\vartheta \mapsto \widehat{w}(t, \vartheta) \in \Xi_1$ равномерно непрерывно по Липшицу на ограниченных подмножествах по $\vartheta \in H^2$. Для любого $\vartheta \in H^2$ определим вектор-функцию $w \in \Xi_1$:

$$w(t) = \chi(t)\widehat{w}(t) + t\widehat{u},$$

где $\chi(t) \in C^\infty[0, 1]$ – произвольная функция такая, что $\chi(0) = 1$ и $\chi(1) = 0$. Тогда $w(0) = \vartheta$, $w(1) = \widehat{u}$ и

$$\widehat{\eta} := \frac{\partial}{\partial t} A_1 w + \nu A_2 w + A_3 w + B(w) - f \in L_2(0, 1; H^{-1}).$$

При этом нетрудно показать, рассуждая аналогично доказательству теоремы 1 из [1; § 3], что отображение $\vartheta \mapsto \widehat{\eta}(t, \vartheta) \in L_2(0, 1; H^{-1})$ равномерно непрерывно по Липшицу на ограниченных подмножествах по $\vartheta \in H^2$ в силу аналогичного свойства для $\widehat{w}$ и с учетом свойств $\chi(t)$.

Рассмотрим еще одну детерминированную задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 Z + \nu A_2 Z + A_3 Z = \widehat{\eta}(t), \quad 0 < t \leq 1, \quad Z(0) = 0. \quad (5.36)$$

Решение этой задачи Коши определим аналогично определению решения задачи Коши (5.21). Рассуждая аналогично доказательству теоремы 1 из [1; § 3], нетрудно показать, что для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$ и $\hat{\eta} \in L_2(0, 1; H^{-1})$ существует единственное решение задачи Коши (5.36) на $[0, 1] \times S$ и отображение $\hat{\eta} \mapsto Z(t, \hat{\eta}) \in \mathfrak{X}_1$ равномерно непрерывно по Липшицу на ограниченных подмножествах по $\hat{\eta} \in L_2(0, 1; H^{-1})$. Определим $Z_{\hat{u}}(\vartheta) \in \mathfrak{X}_1$ как единственное решение задачи Коши (5.36). Тогда

$$w(t) = Z_{\hat{u}}(t, \vartheta) + v(1, \vartheta, Z_{\hat{u}}(\vartheta)).$$

Отсюда и из $w(1) = \hat{u}$ сразу получаем (5.32). Отображение $\vartheta \mapsto Z_{\hat{u}}(t, \vartheta)$ равномерно непрерывно по Липшицу на ограниченных подмножествах по $\vartheta \in H^2$ в силу аналогичного свойства для $\hat{\eta}$.

Шаг 3 (доказательство б)). Поскольку существует открытый шар, содержащийся в произвольной фиксированной окрестности нуля метрического пространства, то в силу леммы 5.6 для любой окрестности нуля $O \in \mathfrak{X}_1$

$$p(\hat{z}) = \mathbb{P}\{z - \hat{z} \in O\} > 0 \quad \text{для любого} \quad \hat{z} \in \mathfrak{X}_1. \quad (5.37)$$

Очевидно, что распределение случайной вектор-функции $z - \hat{z}$ непрерывно по $\hat{z}$ в *-слабой топологии множества вероятностных мер $\mathcal{P}(\mathfrak{X}_1) \subset C_b^*(\mathfrak{X}_1)$ (определение *-слабой топологии и *-слабой сходимости см., например, в [19; гл. IV, § 3.3] и [6; гл. V, § 1]). Тогда в силу пп. а) и б) теоремы 11.1.1 о свойствах *-слабой сходимости вероятностных мер из [20; гл. XI, § 1] и эквивалентности определения нижнего предела функции по Гейне и Коши функция p полунепрерывна снизу. Поскольку полунепрерывная снизу конечная функция на компактном множестве в метрическом пространстве достигает своей нижней грани (см., например, [19; гл. II, § 6.3, теорема 8 б, и гл. II, § 5.6]), то из (5.37) сразу следует (5.33).

Лемма 5.7 доказана.

5.3. Доказательство. Ниже приводится доказательство теоремы 4.1. Для удобства изложения оно разбито на три шага.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Возьмем R из утверждения леммы 5.3. Определим возрастающее семейство марковских моментов по следующему правилу:

$$\sigma'_0 = \mathbf{T}_R, \quad \sigma'_m = \inf\{t \geq \sigma'_{m-1} + 1 : \|\mathbf{u}(t, \omega, \vartheta)\|_3 \leq R\}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $\mathbf{T}_R$ определено в (5.1). Положим $\sigma_m = \sigma'_m + 1$, $m = 1, 2, \dots$. Для того чтобы оценить $\tau_{\vartheta}(M_n)$, получим вначале оценку на первое целое число m такое, что $\|\mathbf{u}(\sigma_m, \omega, \vartheta)\|_2 \leq 1/n$. В силу определения математического ожидания вероятность события $\{m(n) > k\}$ равна

$$p(n, k, \vartheta) = \mathbb{P}\left\{\bigcap_{l=1}^k \left\{\|\mathbf{u}(\sigma_l, \omega, \vartheta)\|_2 > \frac{1}{n}\right\}\right\} = \mathbf{E}\left(\prod_{l=1}^k \mathbf{I}_{\{\|\mathbf{u}(\sigma_l, \omega, \vartheta)\|_2 > 1/n\}}\right),$$

где $\mathbf{I}$ – индикатор подмножества $\cdot$ множества Ω . Из строго марковского свойства (см., например, [30; гл. VIII, § 5.2, формула (4)] и [15; гл. II, § 7.2, определение 2]), которое имеет место для любого однородного марковского процесса с почти наверное непрерывными траекториями, обладающего феллеровским свойством (см., например, [30; гл. IX, § 2]), имеем почти наверное

$$\mathbf{E}(\mathbf{I}_{\{\|\mathbf{u}(\sigma_k, \omega, \vartheta)\|_2 > 1/n\}} | \mathbf{F}_{\sigma'_k}) = \mathbb{P}\left\{\|\mathbf{u}(1, \omega, \mathbf{v})\|_2 > \frac{1}{n}\right\} \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{u}(\sigma'_k)}$$

на множестве $\{\sigma_k < \infty\}$. На множестве $\{\sigma_k < \infty\} = \{\sigma'_k < \infty\}$ получим почти наверное

$$\mathbb{P}\left\{\|\mathbf{u}(1, \omega, \mathbf{v})\|_2 > \frac{1}{n}\right\} \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{u}(\sigma'_k)} \leq 1 - p_n,$$

учитывая $\|\mathbf{u}(\sigma'_k, \omega, \vartheta)\|_3 \leq R$ почти наверное, где $p_n > 0$ – константа из (5.28), если в лемме 5.7 положить $B = M_n$. Применяя равенство (5) из [15; гл. II, § 7.2] и учитывая предложение 4.5.4 из [16; гл. IV, § 5] при $X_t = \mathbf{u}(t)$, $\mathcal{A}_t = \mathbf{F}_t$, $t \geq 0$, $T = \sigma_l$, $l = 1, 2, \dots, k-1$, упражнение 1.3.9 из [21; гл. I, § 3.1] (см. также пункт “Solutions to some exercises” в [21]), [15; гл. II, § 7.2, определение 2] и $\mathbf{F}_{\sigma_{k-1}} \subset \mathbf{F}_{\sigma'_k}$, будем иметь

$$p(n, k, \vartheta) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}(\mathbf{I}_{\{\|\mathbf{u}(\sigma_k, \omega, \vartheta)\|_2 > 1/n\}} | \mathbf{F}_{\sigma'_k}) \mathbf{I}_{\{\sigma'_k < \infty\}} \prod_{l=1}^{k-1} \mathbf{I}_{\{\|\mathbf{u}(\sigma_l, \omega, \vartheta)\|_2 > 1/n\}}\right).$$

Следовательно,

$$p(n, k, \vartheta) \leq (1 - p_n)p(n, k-1, \vartheta).$$

Отсюда получим оценку

$$p(n, k, \vartheta) \leq (1 - p_n)^k \quad \text{для любого } \vartheta \in \mathbf{H}^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.38)$$

Шаг 2. Докажем, что выполнена оценка

$$\mathbf{E} \exp(\tilde{c}_1 \sigma_k) \leq \tilde{C}_1^k (1 + \|\vartheta\|^2) \quad \text{для любого } \vartheta \in \mathbf{H}^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.39)$$

где $\tilde{c}_1(R, \alpha_1)$ – константа из леммы 5.3, причем α_1 возьмем из леммы 5.5, $\tilde{C}_1$ – константа, не зависящая от ϑ и зависящая от R . В силу леммы 5.3, оценки (4.3) на решение задачи Коши (1.1), (1.2), (4.1) из [2; § 4] и (5.7) получим, что если $\vartheta \in \mathbf{H}^2$ такое, что $\|\vartheta\|_2 \leq R$, то

$$\mathbf{E}((\mathbf{E} \exp(\tilde{c}_1 \mathbf{T}_R(\mathbf{v})))|_{\mathbf{v}=\mathbf{u}(1, \vartheta)}) \leq \mathbf{E}(1 + \tilde{c}_2 \|\mathbf{u}(1, \vartheta)\|_2^2) \leq \tilde{C}_2, \quad (5.40)$$

где $\tilde{c}_2(R, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ – константа из леммы 5.3, α_0, α_2 взяты из леммы 5.5 так же, как и α_1 , $\tilde{C}_2$ – константа, не зависящая от ϑ и зависящая от R . Определим случайную величину

$$\mathbf{T}'_R(\omega, \vartheta) = \inf\{t \geq 1 : \|\mathbf{u}(t, \omega, \vartheta)\|_3 \leq R\}.$$

Из (5.40), упражнения 1.3.12 при $\tau = 1$ в [21; гл. I, § 3.1] (см. также пункт “Solutions to some exercises” в [21]) и того, что решение задачи Коши (1.1), (1.2), (4.1) является однородным марковским случайным процессом, следует, что

$$\mathbf{E}\mathbf{E}(\exp(\tilde{c}_1 \mathbf{T}'_R) | \mathbf{F}_1) = \exp(\tilde{c}_1) \mathbf{E}((\mathbf{E} \exp(\tilde{c}_1 \mathbf{T}'_R(\mathbf{v}))) |_{\mathbf{v}=\mathbf{u}(1, \boldsymbol{\vartheta})}) \leq \exp(\tilde{c}_1) \tilde{C}_2,$$

если $\|\boldsymbol{\vartheta}\|_2 \leq R$. По лемме 5.2, б) имеем

$$\mathbf{E} \exp(\tilde{c}_1 \mathbf{T}'_R) = \mathbf{E}\mathbf{E}(\exp(\tilde{c}_1 \mathbf{T}'_R) | \mathbf{F}_1).$$

Поэтому получим

$$\mathbf{E} \exp(\tilde{c}_1 \mathbf{T}'_R) \leq \exp(\tilde{c}_1) \tilde{C}_2,$$

если $\|\boldsymbol{\vartheta}\|_2 \leq R$. Отсюда, используя строго марковское свойство (см., например, [21; гл. I, § 3.1, упражнение 1.3.12 при $\tau = \sigma'_{k-1}$ и пункт “Solutions to some exercises”]), упражнение 1.3.9 из [21; гл. I, § 3.1] (см. также пункт “Solutions to some exercises” в [21]), лемму 5.2, а), б) и то, что $\|\mathbf{u}(\sigma'_k, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\vartheta})\|_2 \leq R$, $k = 1, 2, \dots$, почти наверное, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp(\tilde{c}_1 \sigma'_k) &= \mathbf{E}\mathbf{E}(\exp(\tilde{c}_1 \sigma'_k) | \mathbf{F}_{\sigma'_{k-1}}) \\ &= \mathbf{E}(\exp(\tilde{c}_1 \sigma'_{k-1}) (\mathbf{E} \exp(\tilde{c}_1 \mathbf{T}'_R(\mathbf{v}))) |_{\mathbf{v}=\mathbf{u}(\sigma'_{k-1}, \boldsymbol{\vartheta})}) \\ &\leq \exp(\tilde{c}_1) \tilde{C}_2 \mathbf{E} \exp(\tilde{c}_1 \sigma'_{k-1}) \quad \text{для любого } \boldsymbol{\vartheta} \in \mathbf{H}^2, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Последние выкладки справедливы в случае, если марковский момент σ'_{k-1} конечен почти наверное. Это свойство выполнено в силу леммы 5.3 для σ'_0 , и, следовательно, по индукции из последнего неравенства получим, что оно выполнено для всех $k - 1 = 1, 2, \dots$. Следовательно, выполнена оценка

$$\mathbf{E} \exp(\tilde{c}_1 \sigma'_k) \leq (\exp(\tilde{c}_1) \tilde{C}_2)^k \mathbf{E} \exp(\tilde{c}_1 \sigma'_0) \quad \text{для любого } \boldsymbol{\vartheta} \in \mathbf{H}^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

В силу леммы 5.3 и $\sigma_k = \sigma'_k + 1$, $k = 1, 2, \dots$, справедливо (5.39).

Шаг 3. Докажем оценку (4.11). Для любых $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbf{H}^2$, $\tilde{C} > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\tau_{\boldsymbol{\vartheta}}(M_n) \geq \tilde{C}\} &= \mathbb{P}\{\{\tau_{\boldsymbol{\vartheta}}(M_n) \geq \tilde{C}\} \cap \{\sigma_k < \tilde{C}\}\} \\ &\quad + \mathbb{P}\{\{\tau_{\boldsymbol{\vartheta}}(M_n) \geq \tilde{C}\} \cap \{\sigma_k \geq \tilde{C}\}\} \\ &\leq \mathbb{P}\{\tau_{\boldsymbol{\vartheta}}(M_n) > \sigma_k\} + \mathbb{P}\{\sigma_k \geq \tilde{C}\}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

В силу (5.38) и по определению m и σ_k

$$\mathbb{P}\{\tau_{\boldsymbol{\vartheta}}(M_n) > \sigma_k\} = \mathbb{P}\{\sigma_m \geq \tau_{\boldsymbol{\vartheta}}(M_n) > \sigma_k\} \leq \mathbb{P}\{m > k\} \leq (1 - p_n)^k. \quad (5.42)$$

Из неравенства Чебышёва (5.19) и оценки (5.39) получаем

$$\mathbb{P}\{\sigma_k \geq \tilde{C}\} \leq \exp(-\tilde{c}_1 \tilde{C}) \mathbf{E} \exp(\tilde{c}_1 \sigma_k) \leq \tilde{C}_1^k \exp(-\tilde{c}_1 \tilde{C}) (1 + \|\boldsymbol{\vartheta}\|^2). \quad (5.43)$$

Тогда из (5.41), (5.42), (5.43) имеем неравенство

$$\mathbb{P}\{\tau_{\vartheta}(M_n) \geq \tilde{C}\} \leq ((1 - p_n)^k + \tilde{C}_1^k \exp(-\tilde{c}_1 \tilde{C}))(1 + \|\vartheta\|^2).$$

Отсюда, взяв $k = [\varepsilon \tilde{C}] + 1$ и рассмотрев достаточно малое $\varepsilon > 0$, нетрудно получить оценку

$$\mathbb{P}\{\tau_{\vartheta}(M_n) \geq \tilde{C}\} \leq \hat{C}_n \exp(-\hat{c}_n \tilde{C})(1 + \|\vartheta\|^2) \quad \text{для любого } \vartheta \in \mathbf{H}^2, \quad (5.44)$$

где $\hat{C}_n, \hat{c}_n > 0$ – константы, не зависящие от ϑ и зависящие от n , причем $\hat{c}_n < \tilde{c}_1$. Возьмем в качестве ϱ_n любое положительное вещественное число, меньшее $\hat{c}_n$. Докажем, что тогда выполнено (4.11). Поскольку математическое ожидание может быть выражено через распределение случайной величины (см., например, [17; гл. I, § 1.1, формула (1.8)]), то в силу (5.44) и (2.9) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp(\varrho_n \tau_{\vartheta}(M_n)) &= \int_{[0, \infty)} \exp(\varrho_n s) \mathbb{P}_{\tau_{\vartheta}(M_n)}(ds) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{[i, i+1)} \exp(\varrho_n s) \mathbb{P}_{\tau_{\vartheta}(M_n)}(ds) \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \exp(\varrho_n(i+1)) \mathbb{P}\{\tau_{\vartheta}(M_n) \geq i\} \leq \frac{\hat{C}_n \exp(\varrho_n)}{1 - \exp(\varrho_n - \hat{c}_n)} (1 + \|\vartheta\|^2) \end{aligned}$$

для любого $\vartheta \in \mathbf{H}^2$. Отсюда сразу получим (4.11).

Теорема 4.1 доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 4.2

6.1. Предварительные сведения. Для доказательства теоремы 4.2 нам будут необходимы несколько обозначений, определений и утверждений.

Вначале приведем несколько определений и свойств из теории мартингалов.

Введем определение мартингала и его квадратической вариации (см., например, [21; приложение, § 11]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Вещественнозначный случайный процесс $\xi(t)$, $t \geq 0$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, имеющий почти наверное непрерывные траектории, называется *мартингалом относительно фильтрации* $\{F_t\}_{t \geq 0}$, если он согласован с этой фильтрацией, $\xi(t)$ интегрируема по ω при всех $t \geq 0$ и для любых $t \geq s \geq 0$ выполнено $E(\xi(t)|F_s) = \xi(s)$ с вероятностью 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$, – мартингал относительно фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$ такой, что $E\xi(t)^2 < \infty$ для любого $t \geq 0$. *Квадратической вариацией* мартингала $\xi(t)$, $t \geq 0$, называется согласованный с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$ вещественнозначный случайный процесс $\langle \xi \rangle(t)$, $t \geq 0$, такой, что $\langle \xi \rangle(0) = 0$ почти наверное, почти все траектории $\langle \xi \rangle(t)$, $t \geq 0$, не убывают и случайный процесс $(\xi(t))^2 - \langle \xi \rangle(t)$, $t \geq 0$, является мартингалом.

Для мартингалов имеет место следующая оценка (см., например, [21; приложение, § 11]).

ЛЕММА 6.1. Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$, – мартингал относительно фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$ такой, что $\xi(0) = 0$ почти наверное и $E\xi(t)^2 < \infty$ для любого $t \geq 0$. Тогда имеет место неравенство

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t \geq 0}\left(\xi(t) - \frac{c}{2}\langle \xi \rangle(t)\right) \geq r\right\} \leq \exp(-cr) \quad \text{для любых } r, c > 0.$$

Доказательство сразу следует из теоремы 5.2, формулы (5.4) из [26; гл. III, § 5] (см. также [26; гл. II, § 2, определение 2.1 и гл. III, § 1, определение $\mathcal{M}$ и определение 1.1]) и неравенства (1.15) из [31; гл. II, § 1], которое легко доказать, следуя доказательству неравенства (1.1) при условии (2) из [32; гл. VI, § 1, теорема 1] и полагая в нем $X_t \geq 0$ при $t \in [r, s]$.

В [21; приложение, § 7, следствие А.7.6] было доказано одно следствие к теореме 5.1.

ЛЕММА 6.2. Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Тогда случайный процесс $\mathcal{M}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \Theta_i(s) d\beta_i(s)$, $t \geq 0$, является мартингалом относительно фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$ и $E(\mathcal{M}(t))^2 < \infty$ для любого $t \geq 0$.

Для дальнейших рассуждений нам будут необходимы два свойства оператора Якоби, доказанные в [1; § 3, лемма 1, II и лемма 3].

ЛЕММА 6.3. Пусть $\xi, \chi \in h^1$, $\theta \in h^2$. Имеет место оценка

$$|(J(\theta, \xi), \chi)| \leq C(\|\theta\|_2 \|\theta\|_1 \|\chi\|_1 \|\chi\|_0)^{1/2} \|\xi\|_1,$$

где константа $C > 0$ не зависит от θ , ξ и χ .

ЛЕММА 6.4. Пусть выполнено одно из следующих условий:

$$\begin{array}{lll} \theta, \xi \in h^2, & \chi \in h^0; & \chi, \theta \in h^2, \quad \xi \in h^0; \quad \xi, \chi \in h^2, \quad \theta \in h^0; \\ \theta, \xi \in h^1, & \chi \in h^2; & \chi, \theta \in h^1, \quad \xi \in h^2; \quad \xi, \chi \in h^1, \quad \theta \in h^2. \end{array}$$

Тогда якобиан J обладает следующими свойствами:

$$(J(\theta, \xi), \chi) = -(J(\xi, \theta), \chi), \quad (J(\theta, \xi), \chi) = (J(\chi, \theta), \xi) = (J(\xi, \chi), \theta). \quad (6.1)$$

Если $\theta \in h^2$, $\xi \in h^0$ или $\theta \in h^1$, $\xi \in h^2$, то

$$(J(\theta, \xi), \theta) = 0.$$

Если $\theta \in h^2$, то

$$(J(\theta, \mu), \Delta\theta) = 0.$$

Приведем одну оценку из [21; гл. I, § 2.3, упражнение 1.2.13, формулы (1.13) и (1.14)] (см. также пункт “Solutions to some exercises” в [21]).

ЛЕММА 6.5. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, ξ_1 и ξ_2 – H -значные случайные величины, определенные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, такие, что $\xi_1(\omega) = \xi_2(\Phi(\omega))$ почти наверное, где $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega$ – измеримое отображение. Тогда имеет место неравенство

$$\|\mathbb{P}_{\xi_1} - \mathbb{P}_{\xi_2}\|_{L, H}^* \leq 2\|\mathbb{P} - \Phi_*(\mathbb{P})\|_{\text{var}, \Omega},$$

где $\cdot_*(\mathbb{P})$ и $\mathbb{P}$ определены соответственно в (2.8) и (2.9), расстояния $\|\cdot\|_{L, \cdot}^*$ и $\|\cdot\|_{\text{var}, \cdot}$ определены соответственно в (2.10) и (2.12).

Следующий результат сразу вытекает из теоремы А.10.1 в [21; приложение, § 10].

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $(\Omega, F, \mathbb{P})$ – полное вероятностное пространство, $\{F_t\}_{t \geq 0}$ – фильтрация в этом пространстве, удовлетворяющая обычным условиям, E_N – полное вещественное евклидово пространство размерности N , $\{v_i\}_{i=1}^N$ – его ортонормированный базис. Рассмотрим случайный процесс, определенный на $(\Omega, F, \mathbb{P})$,

$$y(t) = \sum_{i=1}^N b_i \beta_i(t) v_i, \quad t \geq 0,$$

где $\{\beta_i(t, \omega)\}_{i=1}^N$, $t \geq 0$, – независимые вещественнозначные броуновские движения относительно фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$, $b_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, – любые константы. Рассмотрим еще один случайный процесс, определенный на $(\Omega, F, \mathbb{P})$,

$$\tilde{y}(t) = y(t) + \int_0^t a(s) ds, \quad t \geq 0,$$

где $a(t) \in E_N$, $t \geq 0$, – прогрессивно измеримый случайный процесс по отношению к фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$ такой, что

$$E \exp \left(c \int_0^\infty \|a(t)\|_{E_N}^2 dt \right) < \infty \quad \text{для любого } c > 0. \quad (6.2)$$

Тогда распределения случайных процессов $y(t)$, $t \geq 0$, и $\tilde{y}(t)$, $t \geq 0$, рассматриваемых как случайные величины в измеримом пространстве⁴ $(\dot{C}(\mathbb{R}_+; E_N), \sigma_{\dot{C}(\mathbb{R}_+; E_N)})$, удовлетворяют неравенству

$$\|\mathbb{P}_y - \mathbb{P}_{\tilde{y}}\|_{\text{var}, \dot{C}(\mathbb{R}_+; E_N)} \leq \frac{1}{2} \left(\left(E \exp \left\{ 6 \int_0^\infty \sum_{i=1}^N b_i^{-2} (a(t), v_i)^2 dt \right\} \right)^{1/2} - 1 \right)^{1/2},$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в пространстве E_N , $\mathbb{P}$ определено в (2.9), $\|\cdot\|_{\text{var}, \cdot}$ определено в (2.12).

⁴Очевидно, что $y, \tilde{y} \in \dot{C}(\mathbb{R}_+; E_N)$ почти наверное. Поэтому $y, \tilde{y} | \sigma_{\dot{C}(\mathbb{R}_+; E_N)}$ -измеримы (доказательство следует из теоремы 1 в [22; гл. III, § 1.1] и доказательств предложения 12.2.2 в [20; гл. XII, § 2] и теоремы 7 в [14; гл. I, § 18]).

6.2. Вспомогательные леммы. Для доказательства теоремы 4.2 нам необходимо доказать несколько вспомогательных результатов.

В следующей лемме будет указана оценка на скорость роста решения задачи Коши (1.1), (1.2), (4.1) при $t \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 6.6. Пусть $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 > 0$ – произвольные вещественные числа такие, что

$$\alpha_0 \in \left[0, \left(1 - \frac{\alpha_1}{2}\right)\nu\right), \quad \alpha_1 \in (0, 2). \quad (6.3)$$

Тогда для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$ таких, что выполнено неравенство

$$\langle A_1 \psi, A_3 \psi \rangle \geq -\alpha_0 \|\psi\|_3^2 \quad \text{для любого } \psi \in H^3, \quad (6.4)$$

$\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$, F_0 -измеримых случайных вектор-функций f , где $f \in H^{-1}$ почти наверное, и u_0 , где $u_0 \in H^2$ почти наверное, и любого $r > 0$ решение $u(t)$, $t \geq 0$, задачи Коши (1.1), (1.2), (4.1), (4.2) удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq 0} \left(\mathcal{E}_{\alpha_0, \alpha_1}(t) - t \left(b^2 + \frac{(2 + \gamma)^2}{2\alpha_1 \nu} \|f\|_{-1}^2 \right) \right) \geq \frac{(2 + \gamma)^2}{4} \|u_0\|_2^2 + r \right\} \\ \leq \exp(-\alpha_1 \varsigma \nu r), \end{aligned} \quad (6.5)$$

где b определено в (2.7), $\varsigma = 2(b(2 + \gamma))^{-2}$,

$$\mathcal{E}_{\alpha_0, \alpha_1}(t) = \|u(t)\|_2^2 + ((2 - \alpha_1)\nu - 2\alpha_0) \int_0^t \|u(s)\|_3^2 ds, \quad t \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в теореме 5.1 пространства $H = H^0$ и $V = H^1$, функционал $\Phi(\vartheta) = \|\vartheta\|_0^2$ и в качестве случайного процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, – процесс Ито с постоянной диффузией $A_1 u(t)$, $t \geq 0$ (см. доказательство леммы 5.3). Заметим, что по теореме 2 из [2; § 4] конечно математическое ожидание

$$E \int_0^t \|u(s)\|_3^2 ds < \infty, \quad t \geq 0.$$

Тогда в силу (5.6) и (5.7)

$$E \int_0^t \|A_1 u(s)\|_0^2 ds < \infty, \quad t \geq 0. \quad (6.6)$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^\infty b_i^2 E \int_0^t |\langle E_i, A_1 u(s) \rangle|^2 ds < \infty, \quad t \geq 0. \quad (6.7)$$

Отсюда и из равенства

$$\Phi_\vartheta(\vartheta; v) = 2\langle \vartheta, v \rangle, \quad \vartheta, v \in H^0,$$

следует, что имеет место неравенство (5.2). Введем обозначение

$$\mathcal{M}(t) = 2 \sum_{i=1}^\infty b_i \int_0^t \langle E_i, A_1 u(s) \rangle d\beta_i(s), \quad t \geq 0.$$

Поскольку все условия теоремы 5.1 выполнены, то по лемме 6.2 получим, что $\mathcal{M}(t)$, $t \geq 0$, – мартингал относительно фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$ и $E(\mathcal{M}(t))^2 < \infty$ для любого $t \geq 0$. Из (6.6) имеем

$$E \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \int_0^t \langle E_i, A_1 u(s) \rangle^2 ds \leq b^2 E \int_0^t \|A_1 u(s)\|_0^2 ds < \infty, \quad t \geq 0.$$

Отсюда нетрудно показать, что случайный процесс

$$\langle \mathcal{M} \rangle(t) = 4 \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \int_0^t \langle E_i, A_1 u(s) \rangle^2 ds, \quad t \geq 0, \quad (6.8)$$

в силу определения 6.2, свойств условных математических ожиданий (см., например, [15; гл. II, § 7.4]), леммы 6 в [14; гл. I, § 5] и доказательства следствия 3.2.6 в [33; гл. III, § 2] является квадратической вариацией мартингала $\mathcal{M}(t)$, $t \geq 0$.

Рассуждая аналогично доказательству леммы 5.3 (учитывая (6.7) и рассмотрев в теореме 5.1 пространства $H = H^0$ и $V = H^1$, функционал $\Phi(\vartheta) = \|\vartheta\|_0^2$ и в качестве случайного процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, – процесс Ито с постоянной диффузией $A_1 u(t)$, $t \geq 0$), нетрудно показать, что имеет место почти наверное оценка

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_2^2 + 2(\nu - \alpha_0) \int_0^t \|u(s)\|_3^2 ds &\leq \frac{(2 + \gamma)^2}{4} \|u_0\|_2^2 \\ &+ 2 \int_0^t \langle f, A_1 u(s) \rangle ds + tb^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int_0^t \langle E_i, A_1 u(s) \rangle d\beta_i(s) \end{aligned}$$

при $t \geq 0$. Тогда почти наверное

$$\mathcal{E}_{\alpha_0, \alpha_1}(t) - tb^2 \leq \frac{(2 + \gamma)^2}{4} \|u_0\|_2^2 + \left(\mathcal{M}(t) - \frac{1}{2} \alpha_1 \varsigma \nu \langle \mathcal{M} \rangle(t) \right) + K_t \quad (6.9)$$

при $t \geq 0$, где

$$K_t = 2 \int_0^t \langle f, A_1 u(s) \rangle ds + \frac{1}{2} \alpha_1 \varsigma \nu \langle \mathcal{M} \rangle(t) - \alpha_1 \nu \int_0^t \|u(s)\|_3^2 ds, \quad t \geq 0.$$

В силу (5.7) и неравенства

$$2|\langle f, A_1 u(s) \rangle| \leq \frac{2\alpha_1 \nu}{(2 + \gamma)^2} \|A_1 u(s)\|_1^2 + \frac{(2 + \gamma)^2}{2\alpha_1 \nu} \|f\|_{-1}^2, \quad s \geq 0, \quad \text{почти наверное,}$$

которое имеет место в силу (2.2), $p = 1$, и неравенства (5.9), справедливо почти наверное

$$2 \int_0^t \langle f, A_1 u(s) \rangle ds \leq \frac{\alpha_1 \nu}{2} \int_0^t \|u(s)\|_3^2 ds + t \frac{(2 + \gamma)^2}{2\alpha_1 \nu} \|f\|_{-1}^2$$

при $t \geq 0$. Поскольку в силу (5.6), (5.7) и (6.8) имеем почти наверное

$$\langle \mathcal{M} \rangle(t) \leq 4b^2 \int_0^t \|A_1 u(s)\|_0^2 ds \leq \frac{1}{\varsigma} \int_0^t \|u(s)\|_3^2 ds$$

при $t \geq 0$, то почти наверное

$$K_t \leq t \frac{(2 + \gamma)^2}{2\alpha_1\nu} \|f\|_{-1}^2$$

при $t \geq 0$. Поэтому в силу (6.9) почти наверное

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\alpha_0, \alpha_1}(t) - t \left(b^2 + \frac{(2 + \gamma)^2}{2\alpha_1\nu} \|f\|_{-1}^2 \right) \\ \leq \frac{(2 + \gamma)^2}{4} \|u_0\|_2^2 + \left(\mathcal{M}(t) - \frac{1}{2} \alpha_1 \varsigma \nu \langle \mathcal{M} \rangle(t) \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

при $t \geq 0$. Тогда по лемме 6.1

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq 0} \left(\mathcal{M}(t) - \frac{1}{2} \alpha_1 \varsigma \nu \langle \mathcal{M} \rangle(t) \right) \geq r \right\} \leq \exp(-\alpha_1 \varsigma \nu r) \quad \text{для любого } r > 0.$$

Отсюда и из (6.10) сразу следует (6.5).

Лемма 6.6 доказана.

В [2; § 4, лемма 6 и лемма 7] были доказаны следующие две леммы.

ЛЕММА 6.7. *Условие (6.4) эквивалентно условию на константы ν , γ , ρ , k_0 , k_1 из леммы 5.4.*

ЛЕММА 6.8. *Если константы ν , γ , ρ , k_0 , k_1 удовлетворяют условию (4.4), то существуют такие $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 > 0$, что выполнено (6.3) и (6.4).*

Обозначим через $P_N: H^0 \rightarrow H_N$ ортогональный проектор на множество H_N (определение и свойства ортогонального проектора см., например, в [34; § 6] и [35; гл. VII, § 2]). Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 v + \nu A_2 v + A_3 v + B(v) + \lambda P_N A_1(v - u) = g, \quad t > 0, \quad v(0) = 0, \quad (6.11)$$

где g – вектор-функция из (1.1), имеющая вид (1.2), $u(t)$, $t \geq 0$, – решение задачи Коши (1.1), (1.2), (4.1), $\lambda > 0$ – большой параметр. Решение задачи Коши (6.11) определим аналогично определению решения задачи Коши (1.1), (1.2), (4.1). При этом вместо (4.3) будем иметь

$$\begin{aligned} A_1 v(t) + \int_0^t (\nu A_2 v(s) + A_3 v(s) + B(v(s)) \\ + \lambda P_N A_1(v(s) - u(s))) ds = t f + \zeta(t), \quad t > 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что в силу доказательства теоремы 2 из [1; § 3] для любых $N \in \mathbb{N}$, $\nu, \lambda > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$, $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$, F_0 -измеримых случайных вектор-функций f , где $f \in H^{-1}$ почти наверное, и u_0 , где $u_0 \in H^2$ почти наверное, существует единственное решение задачи Коши (6.11). Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 6.9. Пусть $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$ такие, что выполнено неравенство (4.4), $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$, F_0 -измеримые случайные вектор-функции f принадлежит H^{-1} почти наверное и u_0 принадлежит H^2 почти наверное, и Ω' – некоторое подмножество Ω , на котором $u(t, \omega)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_0^t \|u(s, \omega)\|_3^2 ds \leq c_1 t + c_2 \|u_0(\omega)\|_2^2 + c_3, \quad t \geq 0, \quad \omega \in \Omega', \quad (6.12)$$

где $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ – константы, не зависящие от u , u_0 , t и ω . Тогда существуют $\lambda(c_1) > 0$ и $N'(c_1) \in \mathbb{N}$ такие, что если выполнено (4.12) для некоторого $N \in \mathbb{N}$, то выполнено неравенство

$$\|v(t, \omega) - u(t, \omega)\|_2 \leq c_4 \exp(c_5(c_2 \|u_0(\omega)\|_2^2 + c_3) - t) \|u_0(\omega)\|_2, \quad t \geq 0, \quad (6.13)$$

для почти всех $\omega \in \Omega'$, где $c_4, c_5 > 0$ – константы, не зависящие от u , u_0 , v , t , ω , N , N' , λ , c_1 , c_2 и c_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $N \in \mathbb{N}$ и $\lambda > 0$ произвольные. Разность $w = v - u$ удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 w + \nu A_2 w + A_3 w + B(v) - B(u) + \lambda P_N A_1 w = 0, \quad t > 0, \quad w(0) = -u_0. \quad (6.14)$$

Отсюда и из определения v , u и доказательства оценки (3.31) в [1; § 3] следует, что существует $\frac{\partial}{\partial t} A_1 w \in L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-1})$ почти наверное. В силу леммы 1.2 из [36; гл. III, § 1.4] и равенства (2.1) имеем

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} A_1 w, A_1 w \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|A_1 w\|_0^2, \quad t > 0, \quad \text{почти наверное.}$$

Тогда, умножая скалярно уравнение в (6.14) на $A_1 w$, получаем с учетом (2.1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|A_1 w\|_0^2 + \nu \langle A_2 w, A_1 w \rangle + \langle A_3 w, A_1 w \rangle \\ + \langle B(v) - B(u), A_1 w \rangle + \lambda \langle P_N A_1 w, A_1 w \rangle = 0, \quad t > 0, \quad \text{почти наверное.} \end{aligned}$$

Поскольку по условию леммы выполнено неравенство (4.4), то по лемме 6.8 существуют такие α_0 и α_1 , что выполнено (6.3) и (6.4). Поэтому в силу неравенства (доказательство см. в [1; § 3, неравенства (3.23) и (3.26)])

$$\tilde{c}_1 \|A_1 \psi\|_1^2 \leq \|\psi\|_3^2 \leq \min\{\langle A_2 \psi, A_1 \psi \rangle, \|A_1 \psi\|_1^2\} \quad \text{для любого } \psi \in H^3, \quad (6.15)$$

где $\tilde{c}_1 > 0$ – константа, не зависящая от ψ , и свойств ортогонального проектора $P_N^2 = P_N$ и $P_N^* = P_N$ (см., например, [35; гл. VII, § 2]) будем иметь почти наверное

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|A_1 w\|_0^2 + \tilde{c}_1 (\nu - \alpha_0) \|A_1 w\|_1^2 + \lambda \|P_N A_1 w\|_0^2 \leq -\langle B(v) - B(u), A_1 w \rangle \quad (6.16)$$

при $t > 0$.

Оценим сверху $|\langle B(v) - B(u), A_1 w \rangle|$. По определению $B(u)$ почти наверное

$$\begin{aligned} & |\langle B(v) - B(u), A_1 w \rangle| \\ &= \left| \left\langle \begin{pmatrix} J(\Delta v_1 + 2\mu, w_1) + J(\Delta v_2, w_2) \\ J((\Delta - \gamma I)v_2, w_1) + J(\Delta v_1 + 2\mu, w_2) \end{pmatrix} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \begin{pmatrix} J(\Delta w_1, u_1) + J(\Delta w_2, u_2) \\ J((\Delta - \gamma I)w_2, u_1) + J(\Delta w_1, u_2) \end{pmatrix}, A_1 w \right\rangle \right| \\ &= |(J(\Delta v_1 + 2\mu, w_1), \Delta w_1) + (J(\Delta v_2, w_2), \Delta w_1) \\ &\quad + (J((\Delta - \gamma I)v_2, w_1), (\Delta - \gamma I)w_2) + (J(\Delta v_1 + 2\mu, w_2), (\Delta - \gamma I)w_2) \\ &\quad + (J(\Delta w_1, u_1), \Delta w_1) + (J(\Delta w_2, u_2), \Delta w_1) \\ &\quad + (J((\Delta - \gamma I)w_2, u_1), (\Delta - \gamma I)w_2) + (J(\Delta w_1, u_2), (\Delta - \gamma I)w_2)| \end{aligned}$$

при $t > 0$. В силу леммы 6.4 и того, что $\mu \in C^\infty(S)$ и $v = w + u$,

$$\begin{aligned} & |\langle B(v) - B(u), A_1 w \rangle| \\ &= |(J(\Delta v_1, w_1), \Delta w_1) + (J(\Delta v_2, w_2), \Delta w_1) + (J((\Delta - \gamma I)v_2, w_1), (\Delta - \gamma I)w_2) \\ &\quad + (J(\Delta v_1, w_2), (\Delta - \gamma I)w_2) + (J(\Delta w_2, u_2), \Delta w_1) \\ &\quad + (J(\Delta w_1, u_2), (\Delta - \gamma I)w_2)| \\ &= |(J(\Delta u_1, w_1), \Delta w_1) + (J(\Delta u_2, w_2), \Delta w_1) + (J((\Delta - \gamma I)u_2, w_1), (\Delta - \gamma I)w_2) \\ &\quad + (J(\Delta u_1, w_2), (\Delta - \gamma I)w_2) \\ &\quad - \gamma(J(\Delta w_1, u_2), w_2)|, \quad t > 0, \quad \text{почти наверное.} \end{aligned}$$

Тогда в силу леммы 6.3, равенства (6.1) и непрерывности вложения h^3 в h^1 получим

$$|\langle B(v) - B(u), A_1 w \rangle| \leq \tilde{c}_2(\|w\|_3 \|w\|_2^2 \|w\|_1)^{1/2} \|u\|_3, \quad t > 0, \quad \text{почти наверное,}$$

где константа $\tilde{c}_2 > 0$ не зависит от v, u и w . Отсюда, используя неравенства (5.9) и (5.6), выводим оценку

$$|\langle B(v) - B(u), A_1 w \rangle| \leq \frac{\tilde{c}_1}{2}(\nu - \alpha_0) \|w\|_3^2 + \tilde{c}_3 \|u\|_3^2 \|w\|_2^2, \quad t > 0, \quad \text{почти наверное,} \quad (6.17)$$

где $\tilde{c}_3 = \tilde{c}_2^2 / (4(\nu - \alpha_0)\tilde{c}_1)$.

Из неравенств (6.15)–(6.17) и (5.7) получим почти наверное оценку

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|A_1 w\|_0^2 + \frac{\tilde{c}_1}{2}(\nu - \alpha_0) \|A_1 w\|_1^2 + \lambda \|P_N A_1 w\|_0^2 \leq \tilde{c}_3 \|u\|_3^2 \|A_1 w\|_0^2 \quad (6.18)$$

при $t > 0$.

Пусть вначале $N' \in \mathbb{N}$ произвольное. Докажем одно вспомогательное неравенство:

$$\|\psi\|_1^2 \geq (N' + 1)(N' + 2) \|\psi - P'_{N'} \psi\|_0^2 \quad \text{для любого } \psi \in H^1, \quad (6.19)$$

где $P'_{N'}: H^0 \rightarrow H'_{N'}$ – ортогональный проектор на линейную оболочку $H'_{N'}$ множества $\{E_m^n\}_{1 \leq m \leq 4n+2}^{1 \leq n \leq N'}$. Для этого разложим вектор-функцию $\psi \in H^1$ по ортонормированному базису $\{E_m^n\}_{1 \leq m \leq 4n+2}^{1 \leq n \leq N'}$ пространства $H^0 \supset H^1$:

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{4n+2} c_{nm} E_m^n, & \psi - P'_{N'} \psi &= \sum_{n=N'+1}^{\infty} \sum_{m=1}^{4n+2} c_{nm} E_m^n, \\ \|\psi\|_1^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{4n+2} c_{nm}^2 n(n+1) < \infty. \end{aligned}$$

Тогда

$$\|\psi\|_1^2 \geq \sum_{n=N'+1}^{\infty} \sum_{m=1}^{4n+2} c_{nm}^2 n(n+1) \geq (N'+1)(N'+2) \|\psi - P'_{N'} \psi\|_0^2.$$

Неравенство (6.19) доказано.

Пусть выполнено (4.12) для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Тогда $H'_{N'} \subset H_N$. Поэтому в силу свойств ортогонального проектора (см., например, [35; гл. VII, § 2])

$$\begin{aligned} \|P_N \psi\|_0^2 &= \|P'_{N'} P_N \psi\|_0^2 + \|(I - P'_{N'}) P_N \psi\|_0^2 \geq \|P'_{N'} P_N \psi\|_0^2 \\ &= \|P'_{N'} P_N \psi + P'_{N'} (I - P_N) \psi\|_0^2 = \|P'_{N'} \psi\|_0^2 \quad \text{для любого } \psi \in H^0. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенств (6.18) и (6.19) получим оценку

$$\frac{\partial}{\partial t} \|A_1 w\|_0^2 + (\tilde{c}_4 - 2\tilde{c}_3 \|u\|_3^2) \|A_1 w\|_0^2 \leq 0, \quad t > 0, \quad \text{почти наверное,} \quad (6.20)$$

где $\tilde{c}_4 = \min\{\tilde{c}_1(\nu - \alpha_0)(N'+1)(N'+2), 2\lambda\}$. Интегрируя (6.20) по t , в силу неравенства Гронуолла (см., например, [37; гл. III, § 1, теорема 1.1]) будем иметь почти наверное

$$\|A_1 w(t)\|_0^2 \leq \|A_1 u_0\|_0^2 \exp\left(-\int_0^t (\tilde{c}_4 - 2\tilde{c}_3 \|u(s)\|_3^2) ds\right)$$

при $t \geq 0$. Отсюда и из (6.12) имеем

$$\begin{aligned} \|A_1 w(t, \omega)\|_0^2 &\leq \|A_1 u_0(\omega)\|_0^2 \exp\left(-(\tilde{c}_4 - 2c_1 \tilde{c}_3)t\right. \\ &\quad \left.+ 2(c_2 \|u_0(\omega)\|_2^2 + c_3) \tilde{c}_3\right), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (6.21)$$

для почти всех $\omega \in \Omega'$. Поэтому, выбирая $N' \in \mathbb{N}$ и $\lambda > 0$ такими, что $\tilde{c}_4 \geq 2c_1 \tilde{c}_3 + 2$, из неравенств (6.21) и (5.7) получим неравенство (6.13).

Лемма 6.9 доказана.

6.3. Доказательство теоремы 4.2. Для удобства изложения положим $\vartheta = 0$. Доказательство теоремы 4.2 в общем случае можно получить из рассматриваемого случая при помощи неравенства треугольника. Доказательство проведем в три шага.

Шаг 1. Пусть α_0, α_1 – константы из леммы 6.8, N' взято из леммы 6.9 при

$$c_1 = ((2 - \alpha_1)\nu - 2\alpha_0)^{-1} \left(b^2 + \frac{(2 + \gamma)^2}{2\alpha_1\nu} \|f\|_{-1}^2 \right).$$

Вначале докажем, что если выполнено (4.12) для некоторого $N \in \mathbb{N}$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существует константа $\delta_n^{(1)} > 0$ такая, что для любого $\vartheta' \in M_n$ выполнено неравенство

$$\sup_{t \geq 0} \|\mathbb{P}_{v(t)} - P(t, \vartheta', \cdot)\|_{L, H^2}^* \leq \delta_n^{(1)}, \quad (6.22)$$

причем $\delta_n^{(1)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Здесь $\mathbb{P}$ и $\|\cdot\|_{L, \cdot}^*$ определены соответственно в (2.9) и (2.10), $v(t)$ – решение задачи Коши (6.11), где λ взято из леммы 6.9 при

$$c_1 = ((2 - \alpha_1)\nu - 2\alpha_0)^{-1} \left(b^2 + \frac{(2 + \gamma)^2}{2\alpha_1\nu} \|f\|_{-1}^2 \right)$$

и вместо $u(t)$, $t \geq 0$, взято $u'(t)$, $t \geq 0$, – решение задачи Коши (1.1), (1.2), $u'(0) = \vartheta'$. Пусть $r > 0$ любое. По лемме 6.6 для любого $\vartheta' \in M_1$ выполнена оценка

$$\mathbb{P}\{\Omega'\} \geq 1 - \exp(-\alpha_1\varsigma\nu r), \quad (6.23)$$

где

$$\Omega' = \left\{ \omega \in \Omega : \int_0^t \|u'(s)\|_3^2 ds < c_1 t + ((2 - \alpha_1)\nu - 2\alpha_0)^{-1} \left(r + \frac{(2 + \gamma)^2}{4} \|\vartheta'\|_2^2 \right) \text{ для любого } t \geq 0 \right\}.$$

Пусть выполнено (4.12) для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Тогда для любых $t \geq 0$, $\vartheta' \in M_1$ и $\psi \in C_b(H^2)$, $\|\psi\|_{L, H^2} \leq 1$ ($\|\cdot\|_{L, \cdot}$ определено в (2.11)), в силу леммы 6.9 имеет место оценка

$$\begin{aligned} |E(\psi(v(t)) - \psi(u'(t)))| &\leq |EI_{\Omega \setminus \Omega'}(\psi(v(t)) - \psi(u'(t)))| + |EI_{\Omega'}(\psi(v(t)) - \psi(u'(t)))| \\ &\leq 2\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega') + EI_{\Omega'}\|v(t) - u'(t)\|_2 \\ &\leq 2\exp(-\alpha_1\varsigma\nu r) + c_2 \exp\left(c_3((2 - \alpha_1)\nu - 2\alpha_0)^{-1} \left(r + \frac{(2 + \gamma)^2}{4} \right)\right) \|\vartheta'\|_2, \end{aligned}$$

где $c_2, c_3 > 0$ – константы, не зависящие от v , u' , ϑ' , t , N , N' , λ и ψ . Отсюда в силу того, что ψ произвольная такая, что $\psi \in C_b(H^2)$, $\|\psi\|_{L, H^2} \leq 1$, получим

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|\mathbb{P}_{v(t)} - P(t, \vartheta', \cdot)\|_{L, H^2}^* &\leq 2\exp(-\alpha_1\varsigma\nu r) \\ &\quad + c_2 \exp\left(c_3((2 - \alpha_1)\nu - 2\alpha_0)^{-1} \left(r + \frac{(2 + \gamma)^2}{4} \right)\right) \|\vartheta'\|_2 \end{aligned} \quad (6.24)$$

для любого $\vartheta' \in M_1$. Поскольку нетрудно показать, что можно выбрать $r(n) > 0$ такое, что имеет место сходимость

$$2\exp(-\alpha_1\varsigma\nu r) + c_2 \exp\left(c_3((2 - \alpha_1)\nu - 2\alpha_0)^{-1} \left(r + \frac{(2 + \gamma)^2}{4} \right)\right) \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, то из (6.24) сразу следует (6.22).

Шаг 2. Докажем, что если выполнено (4.12) для N' из шага 1 и некоторого $N \in \mathbb{N}$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существует константа $\delta_n^{(2)} > 0$ такая, что для любого $\vartheta' \in M_n$ выполнено неравенство

$$\sup_{t \geq 0} \|\mathbb{P}_{v(t)} - P(t, 0, \cdot)\|_{L, H^2}^* \leq \delta_n^{(2)}, \quad (6.25)$$

причем $\delta_n^{(2)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и v – из шага 1. Из неравенств (6.22) и (6.25) сразу следует справедливость теоремы 4.2. Поскольку неравенство (6.25) использует лишь распределения решений задач Коши (6.11) и (1.1), (1.2), $u(0) = 0$, а не сами решения, то можно выбрать вероятностное пространство $(\Omega, F, \mathbb{P})$ удобным для нас образом. При этом подберем вероятностное пространство и ζ (см. (4.2)) таким образом, что распределение ζ в выбранном пространстве будет совпадать с распределением ζ в (4.2). Тогда распределения задач Коши (6.11) и (1.1), (1.2), $u(0) = 0$ также не изменятся. Поэтому будет достаточно доказать (6.25) для выбранного вероятностного пространства. Заметим, что ζ из (4.2) $F|_{\sigma_{\dot{C}(\mathbb{R}_+; H^0)}}$ -измерим (доказательство следует из теоремы 1 в [22; гл. III, § 1.1], доказательств предложения 12.2.2 в [20; гл. XII, § 2] и теоремы 7 в [14; гл. I, § 18]). Рассмотрим в качестве Ω пространство $\dot{C}(\mathbb{R}_+; H^0)$, в качестве $\mathbb{P}$ – распределение ζ из (4.2) и в качестве F – пополнение $\tilde{F} := \sigma_{\dot{C}(\mathbb{R}_+; H^0)}$ по вероятностной мере $\mathbb{P}$, при этом доопределим $\mathbb{P}$ на пополненной $\tilde{F}$ по правилу $\mathbb{P}(M_1 \cup M_2) := \mathbb{P}(M_1)$, где $M_1 \in \tilde{F}$ и $M_2 \in N_{\mathbb{P}}$ (корректность определения см., например, в [14; гл. I, § 4]). В качестве нового ζ рассмотрим случайный процесс $\tilde{\zeta}(t) = \omega(t)$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$ (см., например, [16; гл. IV, § 3]). Заметим, что распределение случайной величины ζ из (4.2), определенной на произвольном полном вероятностном пространстве со значениями в $\dot{C}(\mathbb{R}_+; H^0)$ почти наверное, и распределение случайной величины $\tilde{\zeta}$, определенной на выбранном вероятностном пространстве со значениями в $\dot{C}(\mathbb{R}_+; H^0)$, совпадают, т.е. определяют одну и ту же вероятностную меру на измеримом пространстве $(\dot{C}(\mathbb{R}_+; H^0), \tilde{F})$.

Определим отображение $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega$ следующим образом:

$$\Phi(\omega)(t) = \omega(t) - \lambda \int_0^t P_N A_1(v(s) - u'(s)) ds, \quad t \geq 0, \quad (6.26)$$

где $v(s)$, $u'(s)$ – соответственно решения задач Коши (6.11) и (1.1), (1.2), $u'(0) = \vartheta'$ со случайной вектор-функцией $\eta = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\zeta}(t)$. Докажем равенство

$$\mathbb{P}\{u(t, \Phi(\omega)) = v(t, \omega) \text{ для любого } t \geq 0\} = 1, \quad (6.27)$$

где $u(s)$ – решение задачи Коши (1.1), (1.2), $u(0) = 0$ со случайной вектор-функцией $\eta = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\zeta}(t)$. Обозначим через $\tilde{v}(t, \omega)$ случайную вектор-функцию $u(t, \Phi(\omega))$ при $t \geq 0$. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\omega) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\zeta} - \lambda P_N A_1(v(t) - u'(t)), \quad t \geq 0,$$

то случайная вектор-функция $\tilde{v}(t, \omega)$, $t \geq 0$, является решением задачи Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 \tilde{v} + \nu A_2 \tilde{v} + A_3 \tilde{v} + B(\tilde{v}) = f - \lambda P_N A_1(v - u') + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\zeta}, \quad t > 0, \quad \tilde{v}(0) = 0. \quad (6.28)$$

В силу единственности решения задачи Коши (1.1), (1.2), (4.1) со случайной вектор-функцией $\eta = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\zeta}(t)$ (которая имеет место в силу единственности решения задачи Коши (1.1), (1.2), (4.1), (4.2)), определения $\tilde{v}(t, \omega)$ и того, что v также удовлетворяет задаче Коши (6.28), получим (6.27).

В силу (6.27) введенное отображение в (6.26) удовлетворяет условию леммы 6.5 при $H = H^2$, $\xi_1 = v(t)$, $\xi_2 = u(t)$ при любом $t \geq 0$. Поэтому для доказательства (6.25) достаточно доказать, что если выполнено (4.12) для N' из шага 1 и некоторого $N \in \mathbb{N}$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существует константа $\delta_n^{(2)} > 0$ такая, что для любого $\vartheta' \in M_n$ выполнено неравенство

$$\|\mathbb{P} - \Phi_*(\mathbb{P})\|_{\text{var}, \Omega} \leq \delta_n^{(2)}, \quad (6.29)$$

причем $\delta_n^{(2)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что несколько позже будет показано, что $\Phi|_{\tilde{F}}$ -измеримо.

Шаг 3. Докажем (6.29). Для доказательства нам будет необходим один результат из [21]. В [21; гл. III, § 3.3, лемма 3.3.13] доказана следующая

ЛЕММА 6.10. Пусть $\Omega_N = \dot{C}(\mathbb{R}_+; H_N)$, $\Omega_N^\perp = \dot{C}(\mathbb{R}_+; H_N^\perp)$, $F_N = \sigma_{\dot{C}(\mathbb{R}_+; H_N)}$, $F_N^\perp = \sigma_{\dot{C}(\mathbb{R}_+; H_N^\perp)}$, $\mathbb{P}_N = (\mathcal{P}_N)_*(\mathbb{P})$, $\mathbb{P}_N^\perp = (\mathcal{Q}_N)_*(\mathbb{P})$, где $\mathcal{P}_N$ и $\mathcal{Q}_N$ – естественные проекции⁵,

$$\mathcal{P}_N: (\Omega, \tilde{F}) \rightarrow (\Omega_N, F_N), \quad \mathcal{Q}_N: (\Omega, \tilde{F}) \rightarrow (\Omega_N^\perp, F_N^\perp).$$

Рассмотрим отображение $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega$ такое, что

$$\begin{aligned} \Phi(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}) &= (\Psi(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}), \omega^{(2)}), \\ \omega &= (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}) \in \Omega, \quad \omega^{(1)} \in \Omega_N, \quad \omega^{(2)} \in \Omega_N^\perp, \end{aligned}$$

где $\Psi: \Omega \rightarrow \Omega_N - \tilde{F}|_{F_N}$ -измеримое отображение⁶. Тогда

$$\|\mathbb{P} - \Phi_*(\mathbb{P})\|_{\text{var}, \Omega} \leq \int_{\Omega_N^\perp} \|\mathbb{P}_N - (\Psi(\cdot, \omega^{(2)}))_*(\mathbb{P}_N)\|_{\text{var}, \Omega_N} \mathbb{P}_N^\perp(d\omega^{(2)}), \quad (6.30)$$

где $\|\cdot\|_{\text{var}, \cdot}$ определено в (2.12).

⁵Очевидно, что $\Omega = \Omega_N \times \Omega_N^\perp$, $\tilde{F} = F_N \otimes F_N^\perp$ (см., например, упражнение 2 к § 1.3 и гл. II, § 4 в [22] и доказательство сепарабельности пространств $\dot{C}(\mathbb{R}_+; H_N)$ и $\dot{C}(\mathbb{R}_+; H_N^\perp)$ в [38; гл. III, § 4]). При этом в силу независимости вещественнозначных броуновских движений $\{\beta_i(t, \omega)\}_{i=1}^\infty$ из (4.2) и теоремы Андерсена–Иессена о произведении вероятностей (см., например, [23; гл. I, § 4.2]) $\mathbb{P}$ – это единственная вероятностная мера, для которой

$$\mathbb{P}(M_1 \times M_2) = \mathbb{P}_N(M_1) \mathbb{P}_N^\perp(M_2) \quad \text{для любых } M_1 \in F_N, \quad M_2 \in F_N^\perp.$$

⁶Заметим, что в силу $\tilde{F} = F_N \otimes F_N^\perp$ и теоремы 1 из [22; гл. III, § 1.1] отображение $\Phi|_{\tilde{F}}$ -измеримо и в силу свойства измеримости сечений измеримых множеств (см., например, [23; гл. I, § 1.7, а), б)]) для любого $\omega^{(2)} \in \Omega_N^\perp$ отображение $\Psi(\cdot, \omega^{(2)}): \Omega_N \rightarrow \Omega_N - F_N|_{F_N}$ -измеримо.

В лемме 6.10 в качестве отображения Φ рассмотрим отображение (6.26), которое можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\Phi(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}) &= (\Psi(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}), \omega^{(2)}), \\ \omega &= (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}) \in \Omega, \quad \omega^{(1)} \in \Omega_N, \quad \omega^{(2)} \in \Omega_N^\perp,\end{aligned}$$

где отображение $\Psi: \Omega \rightarrow \Omega_N$ определено соотношением

$$\begin{aligned}\Psi(\omega^{(1)}, \omega^{(2)})(t) &= \omega^{(1)}(t) + \int_0^t a(s, \omega^{(1)}, \omega^{(2)}) ds, \quad t \geq 0, \\ a(s) &= -\lambda P_N A_1(v(s) - u'(s)), \quad 0 \leq s \leq t.\end{aligned}\tag{6.31}$$

Заметим, что отображение $\Psi|_{\tilde{F}}: \tilde{F}|F_N$ -измеримо в силу того, что $\tilde{\zeta}|_{\tilde{F}}: \tilde{F}$ -измеримо, и в силу способа построения решения задач Коши (6.11) и (1.1), (1.2), $u'(0) = \vartheta'$ со случайной вектор-функцией $\eta = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\zeta}(t)$ (см. [1; § 3, доказательство теоремы 2]), свойств измеримых отображений из [19; гл. V, § 4], лемм 6 и 7 из [14; гл. I, § 5], упражнения 3, а) и в) к § 1 гл. II в [18], леммы из [19; гл. III, § 4.7], упражнения 4 к § 1.1 гл. III в [22] и § 1 из [30; гл. III]. Тогда в силу $\tilde{F} = F_N \otimes F_N^\perp$ и теоремы 1 из [22; гл. III, § 1.1] отображение $\Phi|_{\tilde{F}}: \tilde{F}$ -измеримо. По лемме 6.10 для того, чтобы доказать (6.29), достаточно получить оценку правой части (6.30). Для этого можно было бы попробовать применить теорему 6.1 к случайным процессам $y(t) = \omega^{(1)}(t)$, $t \geq 0$, и $\tilde{y}(t) = \Psi(\omega^{(1)}(t), \omega^{(2)}(t))$, $t \geq 0$. Однако случайная вектор-функция $a(t)$ может не удовлетворять условию (6.2). Поэтому для того, чтобы обойти эту трудность, рассмотрим вспомогательную случайную вектор-функцию (см. шаг 1)

$$\begin{aligned}\tilde{a}(t) &= I_{[0,1]} \left(\left(c_2 \exp \left(c_3 ((2 - \alpha_1)\nu - 2\alpha_0)^{-1} \left(r + \frac{(2 + \gamma)^2}{4} \right) \right) |||\vartheta' |||_2 \right)^{-1} \right. \\ &\quad \times \left. \sup_{0 \leq s \leq t} \exp(s) |||v(s) - u'(s)|||_2 \right) a(t),\end{aligned}$$

где $I_{[0,1]}$ – индикатор отрезка $[0, 1]$, $r > 0$ любое, причем будем в дальнейшем считать, что $\vartheta' \neq 0$, $\vartheta' \in M_1$. Если $\vartheta' = 0$, то в силу $\vartheta = 0$ очевидно, что неравенство в теореме 4.2 выполнено. Из определения $\tilde{a}$ сразу следует, что при почти всех фиксированных ω $\tilde{a}(t, \omega)$ совпадает с $a(t, \omega)$, если для всех $s \in [0, t]$ выполнено неравенство

$$|||v(s, \omega) - u'(s, \omega)|||_2 \leq c_2 \exp \left(c_3 ((2 - \alpha_1)\nu - 2\alpha_0)^{-1} \left(r + \frac{(2 + \gamma)^2}{4} \right) - s \right) |||\vartheta' |||_2,\tag{6.32}$$

и $\tilde{a}(t, \omega)$ равна нулю, начиная с такого t , при котором впервые нарушается неравенство (6.32), если в нем заменить s на t . При этом из (6.23) по лемме 6.9 имеем

$$\mathbb{P}\{\tilde{a}(t) = a(t) \text{ для любого } t \geq 0\} \geq 1 - \exp(-\alpha_1 \varsigma \nu r).\tag{6.33}$$

Определим $\tilde{F}|\tilde{F}$ -измеримое отображение $\tilde{\Phi}: \Omega \rightarrow \Omega$ соотношением

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}) &= (\tilde{\Psi}(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}), \omega^{(2)}), \\ \omega &= (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}) \in \Omega, \quad \omega^{(1)} \in \Omega_N, \quad \omega^{(2)} \in \Omega_N^\perp,\end{aligned}\tag{6.34}$$

где $\tilde{F}|F_N$ -измеримое отображение $\tilde{\Psi}: \Omega \rightarrow \Omega_N$ задается соотношением (6.31) с a , замененной на $\tilde{a}$. Измеримость отображений $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Psi}$ следует из тех же аргументов, которые были приведены для доказательства измеримости отображений Φ и Ψ . В силу (6.33)

$$\mathbb{P}\{\tilde{\Phi} = \Phi\} \geq 1 - \exp(-\alpha_1 \varsigma \nu r).$$

Тогда, учитывая (2.8), (2.12) и очевидное неравенство

$$|a - b| \leq \max\{a, b\}, \quad a, b \geq 0,$$

получим для любого $0 \neq \vartheta' \in M_1$

$$\begin{aligned}\|\tilde{\Phi}_*(\mathbb{P}) - \Phi_*(\mathbb{P})\|_{\text{var}, \Omega} &= \sup_{M \in \tilde{F}} |\tilde{\Phi}_*(\mathbb{P})(M) - \Phi_*(\mathbb{P})(M)| \\ &= \sup_{M \in \tilde{F}} |\mathbb{P}\{\{\tilde{\Phi} = \Phi\} \cap \{\tilde{\Phi} \in M\}\} + \mathbb{P}\{\{\tilde{\Phi} \neq \Phi\} \cap \{\tilde{\Phi} \in M\}\} \\ &\quad - \mathbb{P}\{\{\tilde{\Phi} = \Phi\} \cap \{\Phi \in M\}\} - \mathbb{P}\{\{\tilde{\Phi} \neq \Phi\} \cap \{\Phi \in M\}\}| \\ &\leq \sup_{M \in \tilde{F}} \max\{\mathbb{P}\{\{\tilde{\Phi} \neq \Phi\} \cap \{\tilde{\Phi} \in M\}\}, \mathbb{P}\{\{\tilde{\Phi} \neq \Phi\} \cap \{\Phi \in M\}\}\} \\ &\leq \mathbb{P}\{\tilde{\Phi} \neq \Phi\} \leq \exp(-\alpha_1 \varsigma \nu r).\end{aligned}\tag{6.35}$$

Оценим $\|\mathbb{P} - \tilde{\Phi}_*(\mathbb{P})\|_{\text{var}, \Omega}$. Для этого достаточно оценить

$$\|\mathbb{P}_N - (\tilde{\Psi}(\cdot, \omega^{(2)}))_*(\mathbb{P}_N)\|_{\text{var}, \Omega_N}$$

в силу леммы 6.10, где в качестве отображения Φ используется отображение $\tilde{\Phi}$ из (6.34). Из определения $\tilde{a}$ и (5.7) следует, что почти наверное

$$\|\tilde{a}\|_0 \leq \frac{\lambda}{2} c_2 (2 + \gamma) \exp\left(c_3 ((2 - \alpha_1)\nu - 2\alpha_0)^{-1} \left(r + \frac{(2 + \gamma)^2}{4}\right) - t\right) \|\vartheta'\|_2 \tag{6.36}$$

при $t \geq 0$. Следовательно, условие (6.2) в теореме 6.1, где в качестве a рассмотрено $\tilde{a}$, выполнено. Рассмотрим в теореме 6.1 в качестве случайных процессов

$$y(t) = \omega^{(1)}(t), \quad \tilde{y}(t) = \omega^{(1)}(t) + \int_0^t \tilde{a}(s, \omega^{(1)}(s), \omega^{(2)}(s)) ds, \quad t \geq 0.$$

Заметим, что $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}_y$ и $(\tilde{\Psi}(\cdot, \omega^{(2)}))_*(\mathbb{P}_N) = \mathbb{P}_{\tilde{y}}$. Тогда по теореме 6.1, учитывая, что $b_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$, получим в силу неравенства Бесселя оценку

$$\|\mathbb{P}_N - (\tilde{\Psi}(\cdot, \omega^{(2)}))_*(\mathbb{P}_N)\|_{\text{var}, \Omega_N} \leq \frac{1}{2} (\sqrt{\tilde{c}_{1,N}} - 1)^{1/2}, \tag{6.37}$$

где

$$\tilde{c}_{1,N} = E \exp\left(6(\tilde{b}_N)^{-2} \int_0^\infty \|\tilde{a}\|_0^2 dt\right), \quad \tilde{b}_N = \min_{1 \leq i \leq N} b_i.$$

Из (6.36) имеем

$$\tilde{c}_{1,N} \leq \exp(\tilde{c}_{2,N} \|\vartheta'\|_2^2),$$

где

$$\tilde{c}_{2,N} = 0.75\lambda^2 c_2^2 (2 + \gamma)^2 (\tilde{b}_N)^{-2} \exp\left(2c_3((2 - \alpha_1)\nu - 2\alpha_0)^{-1} \left(r + \frac{(2 + \gamma)^2}{4}\right)\right).$$

Нетрудно показать, что для любого $\vartheta' \in M_1$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{\exp(\tilde{c}_{2,N} \|\vartheta'\|_2^2)} - 1 \right)^{1/2} \leq \tilde{c}_{3,N} \|\vartheta'\|_2,$$

где

$$\tilde{c}_{3,N} = \frac{\sqrt{\tilde{c}_{2,N}}}{2} \exp(0.25\tilde{c}_{2,N}).$$

Поэтому в силу (6.37) и леммы 6.10 выполнено неравенство

$$\|\mathbb{P} - \tilde{\Phi}_*(\mathbb{P})\|_{\text{var}, \Omega} \leq \tilde{c}_{3,N} \|\vartheta'\|_2 \quad (6.38)$$

для любого $0 \neq \vartheta' \in M_1$.

Из (6.35) и (6.38) получим оценку

$$\|\mathbb{P} - \Phi_*(\mathbb{P})\|_{\text{var}, \Omega} \leq \exp(-\alpha_1 \varsigma \nu r) + \tilde{c}_{3,N} \|\vartheta'\|_2 \quad (6.39)$$

для любого $0 \neq \vartheta' \in M_1$. Поскольку нетрудно показать, что можно выбрать $r(n) > 0$ такое, что имеет место сходимость

$$\exp(-\alpha_1 \varsigma \nu r) + \tilde{c}_{3,N} \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

то из (6.39) сразу получим (6.29).

Теорема 4.2 доказана.

§ 7. Единственность стационарной меры для некоторых других моделей атмосферы

Заметим, что в [39; гл. VI, § 1] и [40] рассматривалась немного другая двух-слойная модель бароклинической атмосферы на единичной двумерной сфере S с центром в нуле. Система уравнений этой модели после обезразмеривания отличается от системы (1.1) только оператором A_3 . А именно, в [39; гл. VI, § 1] и [40] оператор A_3 имел следующий вид:

$$\hat{A}_3 = \begin{pmatrix} -k_0 \Delta & k_0 \Delta \\ k_0 \Delta & -(k_0 + k_1) \Delta + \rho I \end{pmatrix}.$$

Для системы (1.1), (1.2), где оператор A_3 заменен на оператор $\hat{A}_3$, в теореме 4 из [2; § 4] был доказан результат о существовании стационарной меры. Полностью аналогично доказательству теоремы 4.3 с учетом теоремы 4 из [2; § 4] и замечания 3 из [1; § 3] доказывается следующий результат о единственности стационарной меры для системы (1.1), (1.2), где оператор A_3 заменен на оператор $\hat{A}_3$.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$ такие, что выполнено неравенство

$$k_0 < \frac{2}{\gamma^2} (\hat{\chi} + 4\nu(2 + \gamma) + \sqrt{(\hat{\chi} + 4\nu(2 + \gamma))^2 + 2\nu\gamma^2\hat{\chi}}),$$

$$\hat{\chi} = 2k_1(2 + \gamma) + \rho(2 + \gamma) + 8\nu,$$

$\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$, вектор-функция f принадлежит H^{-1} и выполнено условие II теоремы 4.1. Тогда существует $N'(\nu, \gamma, \rho, k_0, k_1, b, \|f\|_{-1}) \in \mathbb{N}$, где b определено в (2.7), такое, что если выполнено (4.12) для некоторого $N \in \mathbb{N}$, то справедливо утверждение теоремы 4.3 для семейства решений задач Коши для системы (1.1), (1.2), где оператор A_3 заменен на оператор $\hat{A}_3$.

В [39; гл. III] рассматривалось следующее уравнение баротропной атмосферы, заданное на двумерной единичной сфере S с центром в нуле:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \Delta u + \nu \Delta^2 u - k_0 \Delta u + J(\Delta u + 2\mu, u) = g, \quad t > 0, \quad (7.1)$$

где $u(t, x)$ – неизвестная функция и $g(t, x)$ – детерминированная внешняя сила. Рассмотрим в качестве правой части (7.1) случайную функцию

$$g = f + \eta, \quad (7.2)$$

где внешняя сила $f(x)$ принадлежит пространству h^{-1} , белый шум по t имеет вид

$$\eta(t, x, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} \zeta(t, x, \omega), \quad \zeta(t, x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i(t, \omega) e_i,$$

$\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – ортонормированный базис пространства h^0 , $\{b_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{\beta_i(t, \omega)\}_{i=1}^\infty$, $t \geq 0$, – последовательности из (4.2). Рассуждая аналогично доказательству теоремы 4.3, учитывая теорему 5 из [2; § 4] о существовании стационарной меры для уравнения (7.1), (7.2) и замечание 4 из [1; § 3] (англ. пер.), получим, что для уравнения (7.1), (7.2) справедлив следующий результат о единственности стационарной меры.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть $\nu > 0$, $k_0 \geq 0$, $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$, $b_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots$, функция f принадлежит h^{-1} и e_i принадлежит h^1 , $i = 1, 2, \dots$. Тогда существует $N'(\nu, k_0, b, \|f\|_{-1}) \in \mathbb{N}$, где b определено в (2.7), такое, что если выполнено

$$\{e_m^n\}_{|m| \leq n}^{1 \leq n \leq N'} \subset H_N$$

для некоторого $N \in \mathbb{N}$, то справедливо утверждение теоремы 4.3 с заменой пространства H^2 на пространство h^2 для семейства решений задач Коши для уравнения (7.1), (7.2).

Список литературы

- [1] Ю. Ю. Клевцова, “О корректности задачи Коши для стохастической системы модели Лоренца бароклининой атмосферы”, *Матем. сб.*, **203**:10 (2012), 117–144; англ. пер.: Yu. Yu. Klevtsova, “Well-posedness of the Cauchy problem for the stochastic system for the Lorenz model for a baroclinic atmosphere”, *Sb. Math.*, **203**:10 (2012), 1490–1517.
- [2] Ю. Ю. Клевцова, “О существовании стационарной меры для стохастической системы модели Лоренца бароклининой атмосферы”, *Матем. сб.*, **204**:9 (2013), 73–98; англ. пер.: Yu. Yu. Klevtsova, “On the existence of a stationary measure for the stochastic system of the Lorenz model describing a baroclinic atmosphere”, *Sb. Math.*, **204**:9 (2013), 1307–1331.
- [3] Б. В. Пальцев, *Сферические функции*, Учебно-методическое пособие, МФТИ, М., 2000, 54 с.
- [4] В. П. Дымников, *Устойчивость и предсказуемость крупномасштабных атмосферных процессов*, ИВМ РАН, М., 2007, 283 с.
- [5] М. С. Агранович, “Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы”, *УМН*, **20**:5(125) (1965), 3–120; англ. пер.: M. S. Agranovich, “Elliptic singular integro-differential operators”, *Russian Math. Surveys*, **20**:5 (1965), 1–121.
- [6] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967, 624 с.; пер. с англ.: K. Yosida, *Functional analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **123**, Springer-Verlag, Berlin; Academic Press, Inc., New York, 1965, xi+458 pp.
- [7] Ю. Н. Скиба, *Математические вопросы динамики вязкой баротропной жидкости на вращающейся сфере*, ОВМ АН СССР, М., 1989, 178 с.
- [8] С. Г. Михлин, *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*, Физматгиз, М., 1962, 254 с.; англ. пер.: S. G. Mikhlin, *Multidimensional singular integrals and integral equations*, Pergamon Press, Oxford–New York–Paris, 1965, xi+255 pp.
- [9] С. Г. Михлин, *Проблема минимума квадратичного функционала*, Гостехиздат, М.–Л., 1952, 216 с.; англ. пер.: S. G. Mikhlin, *The problem of the minimum of a quadratic functional*, Holden-Day Series in Mathematical Physics, Holden-Day, Inc., San Francisco, Calif.–London–Amsterdam, 1965, ix+155 pp.
- [10] С. Г. Михлин, “Дифференцирование рядов по сферическим функциям”, *Докл. АН СССР*, **126**:2 (1959), 278–279.
- [11] С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных*, Высшая школа, М., 1977, 431 с.
- [12] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971, 371 с.; пер. с фр.: J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, v. 1, Travaux et Recherches Mathématiques, **17**, Dunod, Paris, 1968, xx+372 pp.
- [13] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972, 587 с.; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris; Gauthier-Villars, Paris, 1969, xx+554 pp.
- [14] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005, 408 с.
- [15] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, т. 1: *Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы*, 3-е изд., перераб. и доп., МЦНМО, М., 2004, 520 с.; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Shiryaev, *Probability*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., **95**, Springer-Verlag, New York, 1996, xvi+623 pp.
- [16] O. Knill, *Probability theory and stochastic processes with applications*, Overseas Press, New Delhi, 2009, 373 pp.

- [17] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions*, Encyclopedia Math. Appl., **44**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, xviii+454 pp.
- [18] Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*, Наука, М., 1985, 368 с.; англ. пер.: N. N. Vakhania, V. I. Tarieladze, S. A. Chobanyan, *Probability distributions on Banach spaces*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **14**, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987, xxvi+482 pp.
- [19] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 7-е изд., Физматлит, М., 2004, 572 с.; англ. пер. 1-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, v. 1, 2, Graylock Press, Albany, N.Y., 1957, 1961, ix+129 pp., ix+128 pp.
- [20] R. M. Dudley, *Real analysis and probability*, 2nd ed., Cambridge Stud. Adv. Math., **74**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002, x+555 pp.
- [21] S. Kuksin, A. Shirikyan, *Mathematics of two-dimensional turbulence*, Cambridge Tracts in Math., **194**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012, xvi+320 pp.
- [22] В. М. Кадец, *Курс функционального анализа*, Учебное пособие для студентов механико-математического факультета, ХНУ им. В. Н. Каразина, Харьков, 2006, 607 с.
- [23] М. Лoeв, *Теория вероятностей*, ИЛ, М., 1962, 720 с.; пер. с англ.: M. Loève, *Probability theory*, 2nd ed., The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J.–Toronto–New York–London, 1960, xvi+685 pp.
- [24] И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, Обобщенные функции*, **4**, ГИФМЛ, М., 1961, 472 с.; англ. пер.: I. M. Gel'fand, N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions*, v. 4: *Applications of harmonic analysis*, Academic Press, New York–London, 1964, xiv+384 pp.
- [25] В. Н. Крупчатников, Г. П. Курбаткин, *Моделирование крупномасштабной динамики атмосферы. Методы диагноза общей циркуляции*, ВЦ, Сиб. отделение АН СССР, Новосибирск, 1991, 114 с.
- [26] Н. Икеда, С. Ватанабэ, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, Наука, М., 1986, 448 с.; пер. с англ.: N. Ikeda, Sh. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland Math. Library, **24**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York; Kodansha, Ltd., Tokyo, 1981, xiv+464 pp.
- [27] Yu. N. Skiba, "Spectral approximation in the numerical stability study of nondivergent viscous flows on a sphere", *Numer. Methods Partial Differential Equations*, **14**:2 (1998), 143–157.
- [28] L. C. Evans, *An introduction to stochastic differential equations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, viii+151 pp.; Lecture notes, Univ. of California, Berkeley, USA, 2006, 139 pp., <https://math.berkeley.edu/~evans/SDE.course.pdf>.
- [29] P. Mörters, Y. Peres, *Brownian motion*, Camb. Ser. Stat. Probab. Math., **30**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, xii+403 pp.
- [30] А. Д. Вентцель, *Курс теории случайных процессов*, 2-е изд., Наука, М., 1996, 400 с.; англ. пер. 1-го изд.: A. D. Wentzell, *A course in the theory of stochastic processes*, McGraw-Hill International Book Co., New York, 1981, x+304 pp.
- [31] D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian motion*, 3rd ed., Grundlehren Math. Wiss., **293**, Springer-Verlag, Berlin, 1999, xiv+602 pp.
- [32] П.-А. Мейер, *Вероятность и потенциалы*, Мир, М., 1973, 328 с.; пер. с фр.: P.-A. Meyer, *Probabilités et potentiel*, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, **XIV**, Actualités Sci. Indust., no. 1318, Hermann, Paris, 1966, 320 pp.
- [33] Б. Оксендаль, *Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения*, Мир, М., 2003, 408 с.; пер. с англ.: B. Øksendal, *Stochastic*

- differential equations. An introduction with applications*, 5th ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1998, xx+324 pp.
- [34] Ю. Н. Скиба, *Об однозначной разрешимости уравнения баротропного вихря вязкой жидкости в классах обобщенных функций на сфере*, Препринт № 194, ОВМ АН СССР, М., 1988, 56 с.
- [35] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Элементы функционального анализа*, 2-е изд., Наука, М., 1965, 520 с.; англ. пер.: L. A. Lusternik, V. I. Sobolev, *Elements of functional analysis*, Hindustan Publishing Corp., Delhi; John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974, xvi+360 pp.
- [36] Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ*, Мир, М., 1981, 408 с.; пер. с англ.: R. Temam, *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, Stud. Math. Appl., **2**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1979, x+519 pp.
- [37] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970, 720 с.; пер. с англ.: Ph. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1964, xiv+612 pp.
- [38] D. W. Stroock, *Probability theory, an analytic view*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, xvi+512 pp.
- [39] В. П. Дымников, А. Н. Филатов, *Основы математической теории климата*, ВИНТИ, М., 1994, 252 с.; англ. пер.: V. P. Dymnikov, A. N. Filatov, *Mathematics of climate modeling*, Model. Simul. Sci. Eng. Technol., Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997, xvi+264 pp.
- [40] А. С. Горелов, “Размерность аттрактора двуслойной бароклинической модели”, *Докл. РАН*, **342**:1 (1995), 101–104; англ. пер.: A. S. Gorelov, “Dimension of the attractor for a two-layer baroclinic model”, *Dokl. Earth Sci.*, **345A**:9 (1996), 1–7.

Юлия Юрьевна Клевцова
(Iuliia Yu. Klevtsova)

Поступила в редакцию
03.03.2014 и 19.08.2014

Сибирский региональный научно-исследовательский
гидрометеорологический институт, г. Новосибирск;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: yy_klevtsova@ngs.ru