Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Тимошенко, Распределения элементов на нильпотентных многообразиях групп, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 3, 143–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8353>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:18:06

УДК 512.544.33+512.543.5

Е. И. Тимошенко

Распределения элементов на нильпотентных многообразиях групп

Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторое многообразие групп и $F_n(\mathfrak{M})$ – свободная в $\mathfrak{M}$ группа с базисом $\{x_1, \dots, x_n\}$. Два элемента $u(x_1, \dots, x_n)$ и $v(x_1, \dots, x_n)$ из этой группы индуцируют одинаковые распределения на $\mathfrak{M}$, если для любой конечной группы $G \in \mathfrak{M}$ и любого элемента $g \in G$ уравнения $u(x_1, \dots, x_n) = g$ и $v(x_1, \dots, x_n) = g$ имеют одинаковое число решений в G^n .

Доказано, что два элемента из коммутанта свободной группы многообразия нильпотентных групп ступени нильпотентности не выше 2 индуцируют одинаковые распределения на этом многообразии тогда и только тогда, когда эти элементы могут быть переведены друг в друга автоморфизмами, а для элементов, не лежащих в коммутанте, это не верно.

Библиография: 5 названий.

Ключевые слова: многообразие групп, нильпотентные группы, уравнения в группах, распределения элементов.

DOI: 10.4213/sm8353

§ 1. Введение

Понятие элемента свободной группы, сохраняющего меру (measure-preserving word), использовалось в работах [1], [2].

Автор настоящей статьи в [3], [4] расширил это понятие и рассмотрел элементы, сохраняющие меру на некотором многообразии групп.

При этом measure-preserving elements – это те элементы свободной группы, которые сохраняют меру на многообразии всех групп.

Напомним определение элемента, сохраняющего меру на некотором многообразии групп.

В свободной группе $F_n(\mathfrak{M})$ многообразия $\mathfrak{M}$ с базисом $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ выберем элемент $v = v(x_1, \dots, x_n)$. Пусть G – некоторая конечная группа из этого многообразия и G^n – прямое произведение n копий группы G . Элемент v определяет вербальное отображение φ_v группы G^n в группу G :

$$\varphi_v: (g_1, \dots, g_n) \mapsto v(g_1, \dots, g_n),$$

где $(g_1, \dots, g_n)$ – любой элемент из группы G^n .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-01485) и Программы Министерства образования и науки РФ (грант № 14.В37.21.0359).

Предположим, что на группе G^n задано равномерное распределение, т.е. каждый элемент $(g_1, \dots, g_n)$ из группы G^n выбирается с одинаковой вероятностью $|G|^{-n}$.

Элемент v сохраняет меру на группе $G \in \mathfrak{M}$, если каждый элемент $g \in G$ появляется в качестве образа при отображении φ_v точно $|G|^{n-1}$ раз, т.е. с вероятностью $|G|^{-1}$, одинаковой для всех $g \in G$.

Элемент v , сохраняющий меру на любой конечной группе G из многообразия $\mathfrak{M}$, называется *сохраняющим меру на многообразии $\mathfrak{M}$* .

Дадим эквивалентное определение элемента, сохраняющего меру на конечной группе из многообразия, в терминах уравнений.

Пусть $v(x_1, \dots, x_n)$ – элемент из группы $F_n(\mathfrak{M})$ и G – конечная группа из многообразия $\mathfrak{M}$. Рассмотрим для любого $g \in G$ уравнение $v(x_1, \dots, x_n) = g$ от неизвестных $x_1, \dots, x_n$. Элемент $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$ называется решением этого уравнения, если при гомоморфизме

$$\varphi = \{x_i \mapsto g_i \mid i = 1, \dots, n\}$$

группы $F_n(\mathfrak{M})$ в группу G образом элемента v является элемент g .

Значит, элемент $v(x_1, \dots, x_n) \in F_n(\mathfrak{M})$ сохраняет меру на конечной группе $G \in \mathfrak{M}$, если для любого $g \in G$ уравнение $v(x_1, \dots, x_n) = g$ имеет одинаковое количество решений.

Обозначим через $N(G, v = g)$ количество решений уравнения $v(x_1, \dots, x_n) = g$ в конечной группе G . Тогда

$$P(G, v = g) = N(G, v = g)|G|^{-n}$$

есть вероятность того, что наугад взятая n -ка элементов из группы G удовлетворяет уравнению $v(x_1, \dots, x_n) = g$.

Таким образом, для любого элемента $v \in F_n(\mathfrak{M})$ и любой конечной группы $G \in \mathfrak{M}$ можно получить распределение элемента v на группе G . Случайная величина, определенная элементом v , принимает в качестве значений все элементы g из группы G , а соответствующие им вероятности равны $P(G, v = g)$.

Элементы группы $F_n(\mathfrak{M})$, сохраняющие меру на многообразии $\mathfrak{M}$, это те элементы, которые равномерно распределены на всех конечных группах из многообразия $\mathfrak{M}$.

Очевидно, что распределение элемента v на группе G не зависит от того, в каком базисе записан этот элемент. Другими словами, если два элемента v и w сопряжены в группе $F_n(\mathfrak{M})$ некоторым автоморфизмом $v^\alpha = w$, $\alpha \in \text{Aut}(F_n(\mathfrak{M}))$, то они имеют одинаковые распределения на многообразии групп $\mathfrak{M}$.

Нас интересует, в каком случае верно обратное. Этот вопрос можно детализировать.

ВОПРОС 1. Верно ли, что для данного многообразия $\mathfrak{M}$ два любых элемента v и w свободной группы этого многообразия индуцируют на $\mathfrak{M}$ одинаковые распределения тогда и только тогда, когда они сопряжены некоторым автоморфизмом группы $F_n(\mathfrak{M})$?

ВОПРОС 2. Для каких элементов $v, w \in F_n(\mathfrak{M})$ можно утверждать, что они индуцируют одинаковые распределения на многообразии $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда сопряжены некоторым автоморфизмом группы $F_n(\mathfrak{M})$?

Обозначим через $\mathfrak{A}_l$ многообразие абелевых групп, экспонента которых делит l , $l \geq 0$. Любой элемент v свободной группы этого многообразия можно записать как степень некоторого базисного элемента $v = x_1^m$, причем m делит l . Поэтому ответ на вопрос 1 утвердительный для многообразий $\mathfrak{A}_l$. Это означает, что два элемента свободной абелевой группы $F_n(\mathfrak{A}_l)$ индуцируют на многообразии $\mathfrak{A}_l$ одинаковые распределения тогда и только тогда, когда они сопряжены некоторым автоморфизмом группы $F_n(\mathfrak{A}_l)$.

Однако для других многообразий ситуация может быть иной. Среди них многообразие $\mathfrak{N}_2$ всех нильпотентных групп степени нильпотентности не выше 2, а также многообразие $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$, состоящее из расширений абелевых групп с помощью нильпотентных степени нильпотентности не выше 2. В работе [4] были указаны два элемента v и w , сохраняющие меру на многообразии $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$, один из которых v примитивен, т.е. его можно включить в базис группы $F_2(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2)$, а другой w примитивным не является. Значит, элементы v и w индуцируют одинаковые распределения на многообразии $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$, но не сопряжены никаким автоморфизмом в свободной группе $F_2(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2)$ этого многообразия.

В том случае, когда для рассматриваемого многообразия групп ответ на вопрос 1 отрицательный, можно интересоваться элементами v и w , например, из коммутанта группы или из другого множества, для которых верно следующее: эти элементы индуцируют одинаковые распределения на многообразии тогда и только тогда, когда они автоморфно сопряжены в свободной группе этого многообразия.

Так, в работах [1], [2] рассматривалось распределение элементов на многообразии $\mathfrak{D}$ всех групп. Предполагалось, что два элемента индуцируют одинаковые распределения на $\mathfrak{D}$, причем один из них примитивен в (абсолютно) свободной группе F_n . Оказывается, что и второй элемент w в этом случае также примитивен. Значит, элементы v и w сопряжены некоторым автоморфизмом свободной группы. Поэтому для множества $\mathfrak{P}$ примитивных элементов свободной группы ответ на вопрос 2 утвердительный.

Аналогичные результаты были получены в [3], [4] для многообразия $\mathfrak{A}^2$ метабелевых, метабелевых проконечных и $\mathfrak{N}_c$ нильпотентных групп. Элемент свободной группы этого многообразия равномерно распределен на многообразии $\mathfrak{N}_c$ либо на многообразии $\mathfrak{A}^2$ тогда и только тогда, когда он примитивен. Значит, для многообразий всех групп (метабелевых, метабелевых проконечных групп и нильпотентных групп) справедливо следующее: если элемент v примитивен, а элемент w индуцирует такое же распределение, как v , на многообразии, то элементы v и w сопряжены некоторым автоморфизмом свободной группы этого многообразия.

Оказывается, что для многообразия $\mathfrak{N}_2$ ответ на вопрос 1 отрицательный. В свободной группе этого многообразия можно выбрать два элемента, которые индуцируют одинаковые распределения, но не сопряженные никаким автоморфизмом.

Тем не менее для элементов из коммутанта группы $F_r(\mathfrak{N}_2)$ ответ на вопрос 2 утвердительный. Мы докажем, что два элемента из коммутанта свободной 2-ступенно нильпотентной группы автоморфно сопряжены тогда и только тогда, когда они одинаково распределены на многообразии $\mathfrak{N}_2$.

§ 2. Распределения элементов, не принадлежащих коммутанту

Укажем необходимое условие для того, чтобы два элемента индуцировали одинаковые распределения на некоторых многообразиях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{M}$ – одно из многообразий групп $\mathfrak{N}_c$ или $\mathfrak{AN}_c$, $G = F_r(\mathfrak{M})$ – свободная группа ранга $r \geq 1$ этого многообразия. Если элементы v и w индуцируют одинаковые распределения на многообразии $\mathfrak{M}$, то вербальные подгруппы $V = v(G)$ и $W = w(G)$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $V \neq W$. Тогда $v \notin W$ или $w \notin V$. Пусть, например, $v \notin W$. Обозначим $G_w = G/W$. Заметим, что образ $\bar{v}$ элемента v в группе G_w не равен 1. Выберем в финитно аппроксимируемой группе G_w нормальную подгруппу R так, что G_w/R – конечная группа и $\bar{v} \notin R$. Таким образом, мы нашли в группе G нормальную подгруппу N такую, что $|G/N| < \infty$, $W \leq N$, $v \notin N$. Но тогда уравнение $w(x_1, \dots, x_r) = 1$ имеет в группе G/N в точности $|G/N|^r$ решений. Обозначим через $\{a_1, \dots, a_r\}$ образ базиса группы G в группе G/N . Заметим, что количество решений уравнения $v(x_1, \dots, x_r) = 1$ в группе G/N меньше, чем $|G/N|^r$, так как $v(a_1, \dots, a_n) \neq 1$ в G/N . Противоречие доказывает, что $V = W$.

Следующий пример показывает, что обратное неверно, а именно, в группе $G = F_2(\mathfrak{N}_2)$ с базисом $\{x_1, x_2\}$ мы выберем два элемента, порождающие одинаковые вербальные подгруппы, но индуцирующие разные распределения на многообразии $\mathfrak{N}_2$.

Пусть $v = x_1^2$, а $w = x_1^2[x_1, x_2]$.

Так как коммутатор $[x_1, x_2]$ принадлежит вербальной подгруппе $v(G)$, то $v(G) = w(G)$.

Однако эти элементы имеют различные распределения на диэдральной группе D_8 порядка 8, которая в многообразии $\mathfrak{N}_2$ имеет представление

$$D_8 = \langle a, b | a^2 = 1, b^2 = 1 \rangle.$$

Обозначим коммутатор $[a, b]$ через c . Заметим, что $(ab)^2 = c$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$N(D_8, w = 1) = 40, \quad N(D_8, w = c) = 24,$$

$$N(D_8, v = 1) = 48, \quad N(D_8, v = c) = 16.$$

Два элемента $v(x_1, \dots, x_n)$ и $w(x_1, \dots, x_n)$ относительно свободной группы $F_n(\mathfrak{M})$ назовем эквивалентными на конечной группе G многообразия $\mathfrak{M}$, если

$$P(G, v = g) = P(G, w = g)$$

для всякого $g \in G$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $G = F_2(\mathfrak{N}_2)$ и $\{x_1, x_2\}$ – базис G . В группе G существуют два элемента v и w , обладающие следующими свойствами:

- 1) элементы v и w принадлежат разным орбитам действия группы $\text{Aut}(G)$;
- 2) элементы v и w индуцируют одинаковые распределения на многообразии $\mathfrak{N}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть t, q, r – различные простые числа, удовлетворяющие неравенству

$$t > q + r. \quad (1)$$

Рассмотрим элементы

$$v = x_1^t[x_1, x_2]^q, \quad w = x_1^t[x_1, x_2]^r.$$

Докажем, что эти элементы обладают требуемыми свойствами.

Проверим свойство 1). Проверим, что элементы v и w не сопряжены никаким автоморфизмом группы G .

Любой автоморфизм φ группы G является продолжением отображения

$$\varphi = \{x_1 \mapsto x_1^{m_{11}}x_2^{m_{12}}c_1, x_2 \mapsto x_1^{m_{21}}x_2^{m_{22}}c_2\},$$

где c_1, c_2 – элементы из коммутанта G' , $m_{ij} \in \mathbb{Z}$, $m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = \pm 1$.

Так как $v^\varphi = w$, то $m_{11} = 1, m_{12} = 0, m_{22} = \pm 1$. Получаем

$$(x_1c_1)^t[x_1, x_2]^{\pm q} = x_1^t[x_1, x_2]^r. \quad (2)$$

Пусть $c_1 = [x_1, x_2]^s$, $s \in \mathbb{Z}$.

Из (2) получаем, что

$$st \pm q = r. \quad (3)$$

При любом s и любом выборе знаков в (3) это противоречит (1).

Перейдем к проверке свойства 2). Для любого простого p и любого натурального n обозначим через $G_{p,n}$ относительно свободную группу G/G^{p^n} .

Покажем, что для любого $n \geq 1$ и любого простого числа p образы элементов v и w в группе $G_{p,n}$ лежат в одной орбите действия группы автоморфизмов $\text{Aut}(G_{p,n})$.

Рассмотрим три случая.

Случай 1: $p \notin \{t, q, r\}$.

Так как числа t и p^n взаимно просты, то найдутся числа l и l_1 такие, что $lt + l_1p^n = 1$. Значит, $x_1 = (x_1^t)^l$. Поэтому элементы x_1^t и x_2 порождают группу $G_{p,n}$. Значит, эндоморфизм $\{x_1 \rightarrow x_1^t, x_2 \rightarrow x_2\}$ является автоморфизмом и, следовательно, $\{x_1^t, x_2\}$ – базис группы $G_{p,n}$. Обозначим примитивный элемент x_1^t через y_1 . Тогда $v = y_1d_1$, $w = y_1d_2$, $d_1, d_2 \in G'_{p,n}$. Элемент v вместе с элементом x_2 порождает группу $G_{p,n}$ по модулю ее коммутанта. Хорошо известно, что в таком случае эти элементы порождают группу $G_{p,n}$. Как мы только что отметили, два элемента, порождающие группу $G_{p,n}$, порождают ее свободно. Следовательно, v – примитивный элемент группы $G_{p,n}$. Аналогично, w – примитивный элемент. Значит, они сопряжены некоторым автоморфизмом группы $G_{p,n}$.

Случай 2: $p = t$.

Имеем

$$v = x_1^t[x_1, x_2]^q, \quad w = x_1^t[x_1, x_2]^r.$$

Элементы x_2^q и x_2^r являются примитивными в группе $G_{p,n}$, и каждый из них вместе с элементом x_1 порождает группу $G_{p,n}$. Значит,

$$v = x_1^t[x_1, y_1], \quad w = x_1^t[x_1, z_1],$$

где $\{x_1, y_1\}$ и $\{x_1, z_1\}$ – два базиса группы $G_{p,n}$. Поэтому элементы v и w автоморфно сопряжены.

Случай 3: $p = q$ или $p = r$.

Так как в этом случае $t \neq p$, то элемент x_1^t можно дополнить до базиса группы $G_{p,n}$. Поэтому элементы v и w являются примитивными в группе $G_{p,n}$. Следовательно, они автоморфно сопряжены.

Завершим теперь доказательство теоремы. Пусть N – произвольная конечная группа из многообразия $\mathfrak{N}_2$. Покажем, что элементы v и w индуцируют на N одинаковые распределения.

Пусть H_1, H_2 – две конечные группы, $H_1 \times H_2$ – их прямое произведение. Очевидно, что для любого элемента v из свободной группы и любого элемента (h_1, h_2) из $H_1 \times H_2$ имеет место равенство

$$P(H_1 \times H_2, v = (h_1, h_2)) = P(H_1, v = h_1)P(H_2, v = h_2).$$

Группа N разлагается в прямое произведение конечных p -групп. Значит, элементы v и w индуцируют на N одинаковые распределения тогда и только тогда, когда они одинаково распределены на каждом прямом сомножителе. Поэтому можно считать, что N – конечная p -группа степени нильпотентности не выше 2 и порядка p^n . Рассмотрим группу $G_{p,n}$. Группа N является ее гомоморфным образом. Элемент v эквивалентен на группе N образу $\bar{v}$ элемента v в группе $G_{p,n}$. То же самое можно сказать об элементе w . Он также эквивалентен на группе N своему образу $\bar{w}$ в $G_{p,n}$. Но элементы $\bar{v}$ и $\bar{w}$ автоморфно сопряжены в $G_{p,n}$. Поэтому они индуцируют на N одинаковые распределения. Значит, одинаково распределены на N элементы v и w .

§ 3. Распределение элементов из коммутанта

ЛЕММА 1. Пусть v – элемент из коммутанта группы $F_n(\mathfrak{N}_2)$, $n \geq 2$. Тогда для любой конечной неабелевой 2-ступенно нильпотентной группы G и любого неединичного элемента $g \in G$ имеет место неравенство

$$P(G, v = 1) > P(G, v = g).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см. [5]), что в группе $F_n(\mathfrak{N}_2)$ можно выбрать базис X так, что элемент v имеет запись

$$v = [y_1, z_1]^{l_1} \dots [y_r, z_r]^{l_r}, \quad (4)$$

где $\{y_1, z_1, \dots, y_r, z_r\}$ – некоторая часть базиса, возможно, совпадающая с X , а l_i – целые ненулевые числа.

Уравнение $v(y_1, z_1, \dots, y_r, z_r) = g$ при $g \neq 1$ назовем неоднородным, а уравнение $v(y_1, z_1, \dots, y_r, z_r) = 1$ – соответствующим ему однородным. Сравним количество решений неоднородного и соответствующего ему однородного уравнения в группе G . Для этого зафиксируем значения $a_1, \dots, a_r$ неизвестных $y_1, \dots, y_r$ и сравним количество решений уравнений $v(a_1, z_1, \dots, a_r, z_r) = g$ и $v(a_1, z_1, \dots, a_r, z_r) = 1$.

Заметим, что коммутатор $[x, y]$ является билинейной формой на группе $F_n(\mathfrak{N}_2)$, т.е. для любых $f, g, h \in F_n(\mathfrak{N}_2)$ имеют место равенства

$$[fg, h] = [f, h][g, h], \quad [f, gh] = [f, g][f, h].$$

Поэтому для любого набора $(a_1, \dots, a_r)$ уравнение $v(a_1, z_1, \dots, a_r, z_r) = g$ имеет не больше решений, чем уравнение $v(a_1, z_1, \dots, a_r, z_r) = 1$. При этом для всех наборов из коммутанта *не больше* превращается в *строго меньше*. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть G – конечная неабелева 2-ступенно нильпотентная группа, v и u – два слова из коммутанта свободной группы от непересекающегося множества переменных. Предположим, что u не тождество на G . Тогда на группе G имеет место неравенство

$$P(G, v = 1) > P(G, vu = 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1, c_2, \dots, c_m$ – все элементы из коммутанта G' . По условию $m \geq 2$. Слова v и u принимают на группе G значения лишь из коммутанта. Учитывая, что переменные в словах v и u не пересекаются, получим

$$\begin{aligned} P(G, v = 1) - P(G, vu = 1) \\ &= P(G, v = 1) - P(G, v = 1, u = 1) - \sum_{i=2}^m P(G, v = c_i)P(G, u = c_i^{-1}) \\ &= P(G, v = 1)(1 - P(u = 1)) - \sum_{i=2}^m P(G, v = c_i)P(G, u = c_i^{-1}). \end{aligned}$$

Но $1 - P(G, u = 1)$ – вероятность того, что $u \neq 1$ на группе G . Значит,

$$1 - P(G, u = 1) = \sum_{i=2}^m P(G, u = c_i^{-1}).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} P(G, v = 1) - P(G, vu = 1) \\ &= \sum_{i=2}^m (P(G, v = 1)P(G, u = c_i^{-1}) - P(G, v = c_i)P(G, u = c_i^{-1})) \\ &= \sum_{i=2}^m (P(G, v = 1) - P(G, v = c_i))P(G, u = c_i^{-1}). \end{aligned}$$

Поскольку u не тождество на группе G , то для некоторого i вероятность $P(u = c_i^{-1})$ не равна нулю. По лемме 1

$$P(G, v = 1) - P(G, v = c_i) > 0$$

для этого элемента c_i . Отсюда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 3. Пусть $F_n(\mathfrak{N}_2)$ – свободная 2-ступенно нильпотентная группа с базисом $\{x_1, y_1, \dots, x_r, y_r\}$,

$$v = [x_1, y_1]^{p^{l_1}} \dots [x_r, y_r]^{p^{l_r}}, \quad w = [x_1, y_1]^{p^{m_1}} \dots [x_r, y_r]^{p^{m_r}},$$

где p простое, $l_1 \leq \dots \leq l_r$, $m_1 \leq \dots \leq m_r$ – целые неотрицательные числа. Если элементы v и w одинаково распределены на многообразии $\mathfrak{N}_2$, то $l_1 = m_1, \dots, l_r = m_r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l_1 = m_1, \dots, l_{i-1} = m_{i-1}$, но $l_i < m_i$. Обозначим $m = l_i + 1$ и рассмотрим группу G_{p^m} , заданную в многообразии $\mathfrak{N}_2$ представлением

$$G_{p^m} = \langle a, b, c \mid c = [a, b], a^{p^m} = b^{p^m} = 1 \rangle.$$

На этой группе элемент v эквивалентен элементу

$$v' = [x_1, y_1]^{p^{l_1}} \dots [x_i, y_i]^{p^{l_i}} [x_{i+1}, y_{i+1}]^{p^{l_i}} \dots [x_j, y_j]^{p^{l_i}},$$

где $[x_i, y_i], [x_{i+1}, y_{i+1}], \dots, [x_j, y_j]$ – все коммутаторы, показатели степени при которых равны p^{l_i} . Можно утверждать, что элемент w эквивалентен на группе G_{p^m} элементу

$$w' = [x_1, y_1]^{p^{l_1}} \dots [x_{i-1}, y_{i-1}]^{p^{l_{i-1}}}.$$

По лемме 2 элементы v' и w' имеют на группе G_{p^m} разные распределения, так как элемент $[x_i, y_i]^{p^{l_i}}$ не является тождеством на группе G_{p^m} . Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $F(\mathfrak{N}_2)$ – свободная 2-ступенно нильпотентная группа конечного ранга и $\{x_1, y_1, x_2, y_2\}$ – часть ее базиса. Если наибольший общий делитель элементов n и m равен 1, то элементы

$$v = [x_1, y_1]^n [x_2, y_2]^m, \quad w = [x_1, y_1] [x_2, y_2]^{nm}$$

сопряжены некоторым автоморфизмом в группе G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем целые l_1 и l_2 так, что $l_1 n + l_2 m = 1$. Рассмотрим гомоморфизм φ группы $F(\mathfrak{N}_2)$, заданный на первых четырех элементах базиса отображением

$$\varphi = \{x_1 \mapsto x_1^{l_1} x_2^{1-nl_1}, y_1 \mapsto y_1 y_2^m, x_2 \mapsto x_1 x_2^{-n}, y_2 \mapsto y_1^{l_2} y_2^{-l_1 n}\}$$

и оставляющий неподвижными остальные элементы базиса. Легко подсчитать, что определитель гомоморфизма φ равен -1 , т.е. φ – автоморфизм группы $F(\mathfrak{N}_2)$. Непосредственно проверяем, что $v^\varphi = w$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $F_n(\mathfrak{N}_2)$ – свободная 2-ступенно нильпотентная группа и $\{x_1, y_1, \dots, x_r, y_r\}$ – часть ее базиса,

$$v = [x_1, y_1]^{l_1} \dots [x_r, y_r]^{l_r},$$

все $l_i, i = 1, \dots, r$, – ненулевые целые числа. Тогда элемент v сопряжен некоторым автоморфизмом группы $F_n(\mathfrak{N}_2)$ с элементом

$$w = [x_1, y_1]^{m_1} \dots [x_r, y_r]^{m_r},$$

где для $i = 1, \dots, r-1$ число m_{i+1} делится на m_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d_{12} = \text{н.о.д.}(l_1, l_2)$. Из леммы 4 следует, что элементы

$$[x_1, y_1]^{l_1} [x_2, y_2]^{l_2}, \quad [x_1, y_1] [x_2, y_2]^{l_2 l_2 / d_{12}}$$

автоморфно сопряжены в группе $F_n(\mathfrak{N}_2)$.

Рассмотрим элемент

$$[x_1, y_1]^{d_{12}} [x_3, y_3]^{l_3}.$$

Он сопряжен автоморфизмом с элементом

$$[x_1, y_1]^{d_{123}} [x_3, y_3]^{d_{12} l_3 / d_{123}},$$

где $d_{123} = \text{н.о.д.}(d_{12}, l_3)$. Продолжая этот процесс, придем к элементу вида

$$[x_1, y_1]^d [x_2, y_2]^{l'_2} \dots [x_r, y_r]^{l'_r},$$

который автоморфно сопряжен с v , причем $d = \text{н.о.д.}(l_1, \dots, l_r)$ и d делит все показатели степеней $l'_2, \dots, l'_r$. Обозначим

$$w' = [x_2, y_2]^{l'_2} \dots [x_r, y_r]^{l'_r}.$$

По индукционному предположению можно считать, что элемент w' автоморфно сопряжен с элементом w'' вида

$$w'' = [x_2, y_2]^{m_2} \dots [x_r, y_r]^{m_r},$$

где $m_2, \dots, m_r$ делятся на d и m_{j+1} делится на m_j при $j = 2, \dots, r-1$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G = F_n(\mathfrak{N}_2)$ – свободная 2-ступенно нильпотентная группа ранга n . Два произвольных элемента v и w из коммутанта группы G индуцируют одинаковые распределения на многообразии $\mathfrak{N}_2$ тогда и только тогда, когда они сопряжены некоторым автоморфизмом группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5 следует, что в группе G можно выбрать базис X так, что $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \in X$ и

$$v = [x_1, y_1]^{l_1} \dots [x_r, y_r]^{l_r}, \quad w = [x_1, y_1]^{m_1} \dots [x_q, y_q]^{m_q},$$

где $l_i, m_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и l_{i+1} делится на l_i , а m_{j+1} делится на m_j .

Так как каждая конечная группа из $\mathfrak{N}_2$ разлагается в прямое произведение p -групп, то будем предполагать, что на каждой конечной 2-ступенно нильпотентной p -группе N_p элементы v и w одинаково распределены. Очевидно, что на группе N_p элементы v и w эквивалентны соответственно элементам

$$v' = [x_1, y_1]^{p^{l'_1}} \dots [x_r, y_r]^{p^{l'_r}}, \quad w' = [x_1, y_1]^{p^{m'_1}} \dots [x_r, y_r]^{p^{m'_q}},$$

причем $l'_1 \leq \dots \leq l'_r$, $m'_1 \leq \dots \leq m'_q$, $p^{l'_i}$ – наибольшая степень p , делящая l_i , а $p^{m'_j}$ – наибольшая степень p , делящая m_j . Но по лемме 3 тогда $q = r$ и $l'_i = m'_i$ для всех $i = 1, \dots, r$. Так как это справедливо для любого простого числа p , то $l_i = m_i$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 и леммы 5 получаем классификацию элементов из коммутанта группы $F_n(\mathfrak{N}_2)$ с точностью до автоморфизмов.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $G = F_n(\mathfrak{N}_2)$ – свободная 2-ступенно нильпотентная группа конечного ранга n с базисом $\{x_1, y_1, \dots, x_r, y_r\}$, если $n = 2r$, и $\{x_1, y_1, \dots, x_r, y_r, z\}$, если $n = 2r + 1$. Каждый элемент из коммутанта G' группы G автоморфно сопряжен с одним из элементов вида

$$[x_1, y_1]^{l_1} \dots [x_q, y_q]^{l_q},$$

где все показатели l_i ненулевые целые, причем l_{i+1} делится на l_i при $i = 1, \dots, q - 1$. Никакие два разных элемента указанного вида не сопряжены никаким автоморфизмом группы G .

Список литературы

- [1] D. Puder, “Primitive words, free factors and measure preservation”, *Israel J. Math.*, **201**:1 (2014), 25–73; arXiv: 1104.3991v1.
- [2] D. Puder, O. Parzanchevski, “Measure preserving words are primitive”, *J. Amer. Math. Soc.*, **28**:1 (2015), 63–97; arXiv: 1202.3269v1.
- [3] Е. И. Тимошенко, “Примитивные и сохраняющие меру системы элементов на многообразиях метабелевых и метабелевых проконечных групп”, *Сиб. матем. журн.*, **54**:1 (2013), 199–207; англ. пер.: Е. I. Timoshenko, “Primitive and measure-preserving systems of elements on the varieties of metabelian and metabelian profinite groups”, *Siberian Math. J.*, **54**:1 (2013), 152–158.
- [4] Е. И. Тимошенко, “Системы элементов, сохраняющие меру на многообразиях групп”, *Матем. сб.*, **204**:12 (2013), 119–126; англ. пер.: Е. I. Timoshenko, “Systems of elements preserving measure on varieties of groups”, *Sb. Math.*, **204**:12 (2013), 1811–1818.
- [5] К. С. Алламбергенов, В. А. Романьков, “Произведение коммутаторов в группах”, *Докл. АН УзССР*, **54**:4 (1984), 14–15.

Евгений Иосифович Тимошенко
(Evgeniy I. Timoshenko)

Новосибирский государственный технический
университет
E-mail: eitim45@gmail.com

Поступила в редакцию
04.03.2014 и 26.09.2014