Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Михалкин, А. К. Цих, Сингулярные страты каспидального типа для классического дискриминанта, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 2, 119–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8355>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:50:09

УДК 512.761+517.55

Е. Н. Михалкин, А. К. Цих

Сингулярные страты каспидального типа для классического дискриминанта

Рассматривается алгебраическое уравнение с переменными комплексными коэффициентами. Для приведенного дискриминантного множества такого уравнения получены параметризации сингулярных стратов, отвечающих за наличие корней кратности не меньше j . Эти параметризации являются сужениями параметризации Горна–Капранова всего дискриминантного множества на цепочку вложенных линейных подпространств проективного пространства. Доказано, что такие страты мономиальными преобразованиями переводятся в приведенные A -дискриминантные множества.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: общее алгебраическое уравнение, A -дискриминантное множество, параметризация Горна–Капранова, сингулярный страт.

DOI: 10.4213/sm8355

Введение

Общим алгебраическим уравнением мы называем уравнение

$$f(y) := a_0 + a_1 y + \cdots + a_{n-1} y^{n-1} + a_n y^n = 0 \quad (1)$$

с переменными комплексными коэффициентами $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$. Алгебраическая функция $y(a)$, рассматриваемая как многозначная функция корней этого уравнения, обладает свойством биоднородности: во-первых, $y(a)$ инвариантна относительно умножения a на скаляр λ_0 ; во-вторых, деление y на другой скаляр λ_1 компенсируется умножением коэффициентов a_ν на λ_1^ν . Поэтому $y(a)$ фактически зависит от $n - 1$ переменных, и достаточно изучать приведенное уравнение

$$z_0 + z_1 y + \cdots + y^p + \cdots + y^q + \cdots + z_{n-1} y^{n-1} + z_n y^n = 0 \quad (1_{pq})$$

с фиксированной любой парой коэффициентов. При рассмотрении уравнения (1_{pq}) мы всегда подразумеваем, что $p < q$.

Свойство биоднородности для решения $y(a)$ переносится и на дискриминант $D(a)$ уравнения (1); этот дискриминант мы называем *классическим*. Нулевое

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор №14.Y26.31.0006) и Российского фонда фундаментальных исследований (первый автор – грантом №14-01-31265 мол-а, второй – грантом №14-01-00544-а).

множество дискриминанта $D(a)$ обозначим через ∇ и будем его называть *дискриминантным множеством* уравнения (1) или полинома f .

В настоящей работе мы исследуем подмножества $\mathcal{M}^j \subset \nabla$, состоящие из таких $a \in \mathbb{C}^{n+1}$, для которых уравнение (1) имеет корни кратности больше или равные j . Эти подмножества образуют вложенную цепочку

$$\nabla = \mathcal{M}^2 \supset \mathcal{M}^3 \supset \dots \supset \mathcal{M}^n.$$

Каждое $\mathcal{M}^{j+1}$ принадлежит множеству сингулярных точек $\text{sng } \mathcal{M}^j$, при этом страт $S^j = \mathcal{M}^j \setminus \mathcal{M}^{j+1}$ состоит из точек, где $\mathcal{M}^j$ либо неособо, либо оно самопересекается своими гладкими кусками. Поэтому мы называем $\mathcal{M}^j$ *сингулярными стратами каспидального типа*.

Одним из основных результатов является

ТЕОРЕМА 1. *Страты $\mathcal{M}^2, \mathcal{M}^3, \dots, \mathcal{M}^n$ мономиальными преобразованиями сводятся к некоторым A -дискриминантным множествам $\nabla_{A_2}, \nabla_{A_3}, \dots, \nabla_{A_n}$.*

Напомним определение A -дискриминантного множества (см. [1; гл. 9]). Речь идет о распространении уравнения (1) от одной неизвестной величины y на уравнение от k неизвестных $y = (y_1, \dots, y_k)$:

$$f(y_1, \dots, y_k) := \sum_{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A} a_\alpha y_1^{\alpha_1} \dots y_k^{\alpha_k} = 0, \quad (2)$$

где $A \subset \mathbb{Z}^k$ – фиксированное конечное множество показателей, порождающее решетку $\mathbb{Z}^k$ как аддитивную группу, а коэффициенты a_α – переменные. Множество коэффициентов (оно же и множество уравнений (2), и множество полиномов Лорана f с показателями $\alpha \in A$) пробегает пространство $\mathbb{C}^A$, размерность которого равна мощности A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть ∇° – множество всех $(a_\alpha) \in \mathbb{C}^A$, для которых уравнение (2) имеет критические корни $y \in (\mathbb{C} \setminus 0)^k$, т.е. корни, в которых градиент f равен нулю. Замыкание $\bar{\nabla}^\circ$ называется *A -дискриминантным множеством* и обозначается символом ∇_A .

В случае, когда $k = 1$, $A = \{0, 1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{Z}$, множество ∇_A превращается в классическое дискриминантное множество ∇ уравнения (1).

В формулировке теоремы 1 каждое ∇_{A_j} – это A_j -дискриминантное множество уравнения с $j-1$ неизвестными, при этом мощность каждого множества A_j равна $n+1$ и $\nabla_{A_2} = \nabla$. Например, страт $\mathcal{M}^3$ для уравнения 4-й степени мономиальным преобразованием сводится к дискриминантному множеству уравнения

$$a_{00} + a_{10}y_1 + a_{01}y_2 + a_{31}y_1^3y_2 + a_{63}y_1^6y_2^3 = 0.$$

Доказательство теоремы 1 конструктивное. В §5 мы предъявляем явное мономиальное преобразование над коэффициентами уравнения (1_{pq}), которое переводит страт $\mathcal{M}_{pq}^j$ дискриминантного множества ∇_{pq} этого уравнения в приведенное A_j -дискриминантное множество $\tilde{\nabla}_{A_j}$. Конструкция множеств A_j получается из формулы (34). Аналогично случаю уравнения (1) с одним неизвестным приведение уравнения (2) можно осуществлять фиксированием некоторых

$k + 1$ коэффициентов. Дискриминантное множество получаемого уравнения и есть приведенное A -дискриминантное множество $\tilde{\nabla}_A$ (более точные определения см. в [1] или [2], а также в §1). В указанном выше примере приведенное уравнение получается фиксацией $a_{00} = a_{10} = a_{01} = 1$.

Приведем одно следствие теоремы 1, касающееся задачи об алгебраических статистиках в рамках исследований по компьютерной биологии [3], [4]. Пусть $X \subset (\mathbb{C}^*)^m$ – замкнутое неприводимое алгебраическое подмножество (определяющее статистическую модель, в которой роль семейства распределений вероятностей играет вещественный срез $X \cap \mathbb{R}^m$). Ненулевой элемент $s = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}^m$ определяет мономиальную функцию (функцию правдоподобия)

$$z^s = z_1^{s_1} \dots z_m^{s_m} : X \rightarrow \mathbb{C}^*.$$

Обозначим через X_{sm} множество гладких точек X . *Степенью максимального правдоподобия* множества X называют число критических значений мономиальной функции $z^s|_{X_{sm}}$ для достаточно общих $s \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$ (заметим, что, переходя к функции $\log x^s$, мы сохраняем множество критических точек и можем их рассматривать не только для целых s). В [4] Б. Штурмфельс поставил задачу геометрического описания алгебраических подмножеств $X \subset (\mathbb{C}^*)^m$, у которых степень максимального правдоподобия равна единице. Недавно в статье [5] было доказано, что степень максимального правдоподобия X равна единице тогда и только тогда, когда мономиальным преобразованием с конечными слоями X переводится в приведенное A -дискриминантное множество. С учетом результата [5] по теореме 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Если $q = p + 1$, то степень максимального правдоподобия всех приведенных стратов $\mathcal{M}_{pq}^j \cap (\mathbb{C}^*)^{n-1}$, $j = 2, \dots, n$, равна единице.*

План статьи следующий. В §1 определяется понятие приведенного A -дискриминантного множества в несколько более широком смысле, чем в оригинальных работах [1] и [2]. Такие множества параметризуются многозначными обращениями их логарифмических отображений Гаусса. Соответствующие параметризации мы называем отображениями Горна–Капранова. С помощью понятия амобы алгебраического множества мы иллюстрируем каспидальный характер изучаемых стратов $\mathcal{M}_{pq}^j$: контур амобы такого страта является поверхностью (кривой или точкой в малых размерностях) возврата для контура амобы страта $\mathcal{M}_{pq}^{j-1}$.

В §2 описываются критические страты $\mathcal{C}^j$ параметризации Горна–Капранова

$$\Psi_{0n} : \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2} \rightarrow \nabla_{0n} \subset \mathbb{C}^{n-1}$$

для приведенного дискриминантного множества ∇_{0n} (явное выражение для Ψ_{0n} определено формулой (9)). Первый страт $\mathcal{C}^1$ определяется как множество критических значений параметризации Ψ_{0n} . Ранее в [6] было показано, что критические точки отображения Ψ_{0n} составляют некоторую гиперплоскость $L_1 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2}$, следовательно, первый критический страт $\mathcal{C}^1$ параметризуется сужением Ψ_{0n} на L_1 . Таким образом, можно определить страт $\mathcal{C}^2$ критических

значений этого сужения и далее действовать по индукции. Для формулировки итогового результата введем следующие гиперплоскости в $\mathbb{CP}^{n-2}$:

$$L_j = \left\{ s : \sum_{i=j}^{n-1} i(i-1) \cdots (i-(j-1))(n-i)s_i = 0 \right\},$$

где $s = (s_1 : \dots : s_{n-1})$ — однородные координаты.

ТЕОРЕМА 2. *Страты $\mathcal{C}^j$ параметризуются сужениями $\Psi_{0n}|_{L^j}$ на плоскости $L^j = L_1 \cap \dots \cap L_j$.*

Связь критических стратов параметризации Ψ_{0n} с сингулярными стратами $\mathcal{M}_{0n}^j$ дает доказываемая в § 3

ТЕОРЕМА 3. *Сингулярные страты $\mathcal{M}_{0n}^{j+2} \subset \nabla_{0n}$ приведенного уравнения (1_{0n}) совпадают с критическими стратами $\mathcal{C}^j$ параметризации Ψ_{0n} .*

Таким образом, с учетом теоремы 2 страты $\mathcal{M}_{0n}^{j+2}$ параметризуются сужениями $\Psi_{0n}|_{L^j}$.

В § 4 утверждение теоремы 2 переносится с приведенного уравнения (1_{0n}) на приведенное уравнение (1_{pq}) для произвольной пары p, q . Фактически там вычисляются уравнения плоскостей L_{pq}^j , в которые перейдут плоскости L^j при переходах уравнений (1_{0n}) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (1_{pq}). В § 5 доказывается теорема 1.

В заключение отметим следующее. Параметризация Горна–Капранова для классического дискриминантного множества проявляет благосклонность к каспидальным сингулярным стратам $\mathcal{M}_{pq}^j$: ее сужение на пространство параметров для $\mathcal{M}_{pq}^j$ критично на линейном подпространстве. Благодаря именно этому свойству получается доказательство теоремы 1. Сингулярные страты классического дискриминантного множества ∇_{pq} , отвечающие за самопересечения ∇ своими гладкими кусками, уже параметризуются сужениями отображения Горна–Капранова на поверхности степени больше 1. Аналогично, критическое множество параметризации Горна–Капранова для приведенного неклассического A -дискриминантного множества также имеет степень больше 1. Тем не менее, не кажется безнадежной возможность решения задачи об описании капитальных сингулярных стратов (определяемых критическими значениями сужений параметризации Горна–Капранова на подходящий флаг подмногообразий) всех A -дискриминантных множеств.

§ 1. Приведенные A -дискриминантные множества, их логарифмические отображения Гаусса и амёбы

1.1. Приведенное A -дискриминантное множество и теорема Капранова. Введем обозначение $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus 0$, и всякую его декартову степень будем рассматривать как комплексный алгебраический тор, т.е. как группу с покомпонентным умножением. Элементы $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ тора $(\mathbb{C}^*)^{k+1}$ определяют действие на пространстве полиномов по формуле

$$\lambda: f(y_1, \dots, y_k) \rightarrow \lambda_0 f(\lambda_1 y_1, \dots, \lambda_k y_k).$$

Будем рассматривать это действие на пространстве полиномов с фиксированным набором показателей A , т.е. записываемых в виде (2). Очевидно, действие λ сохраняет A -дискриминантное множество ∇_A . На языке коэффициентов $(a_\alpha)_{\alpha \in A} \in \mathbb{C}^A$ полинома f это действие записывается в виде

$$a_\alpha \rightarrow \lambda_0 \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_k^{\alpha_k} a_\alpha, \quad \alpha \in A,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ – координаты α . В торической части $(\mathbb{C}^*)^A \subset \mathbb{C}^A$ орбиты указанного действия – это классы смежности по $(k+1)$ -параметрической подгруппе, определенной вложением

$$\varphi: (\mathbb{C}^*)^{k+1} \rightarrow (\mathbb{C}^*)^A, \quad \varphi(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)_\alpha = \lambda_0 \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_k^{\alpha_k}, \quad \alpha \in A$$

(инъективность φ следует из условия, что A порождает решетку $\mathbb{Z}^k$). Если перенумеровать множество показателей $\alpha \in A$ в виде $\alpha^1, \dots, \alpha^N$ (N – мощность A), то это вложение можно записать как

$$(a_\alpha) = \lambda^A$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{N1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1k} & \alpha_{2k} & \dots & \alpha_{Nk} \end{pmatrix},$$

полученной присоединением строки из единиц к $(k \times N)$ -матрице, у которой j -й столбец состоит из координат $\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jk}$ элемента $\alpha^j \in A$ (мы оставляем обозначение A для указанной матрицы).

Матрица A действует на $\mathbb{Z}^A$ в качестве двойственного гомоморфизма $\varphi^*: \mathbb{Z}^A \rightarrow \mathbb{Z}^{k+1}$, ядро $\ker A =: L_A$ которого есть решетка соотношений между столбцами матрицы A .

Двойственная точная последовательность к последовательности

$$0 \rightarrow L_A \rightarrow \mathbb{Z}^A \xrightarrow{\varphi^*} \mathbb{Z}^{k+1} \rightarrow 0$$

имеет вид

$$1 \rightarrow (\mathbb{C}^*)^{k+1} \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{C}^*)^A \xrightarrow{p} H(L_A) \rightarrow 1,$$

где $H(L_A) = \text{Hom}(L_A, \mathbb{C}^*)$ – тор на решетке L_A , а p – естественная проекция. Поскольку дискриминантное множество ∇_A инвариантно относительно λ -действия, его торическая часть $\nabla_A \cap (\mathbb{C}^*)^N$ проектируется отображением p в некоторое алгебраическое подмножество $\tilde{\nabla}_A \subset H(L_A)$, которое называется *приведенным A -дискриминантным множеством* (см [1], [2]).

Чтобы координатизовать $H(L_A)$, расширим матрицу A до квадратной унитарной (целочисленной с определителем ± 1) матрицы

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix},$$

приписывая к A матрицу C из $m = N - k - 1$ строк. Отображение

$$(\mathbb{C}^*)^{k+1} \times (\mathbb{C}^*)^m \rightarrow (\mathbb{C}^*)^A, \quad (\lambda, z) \rightarrow \lambda^A z^C = (a_\alpha)$$

является изоморфизмом, при этом $z \in (\mathbb{C}^*)^m$ играет роль координат в $H(L_A)$, а сам тор $H(L_A)$ вкладывается в $(\mathbb{C}^*)^A$ в качестве m -параметрической:

$$H(L_A) \cong \{(a_\alpha) = z^C : z \in (\mathbb{C}^*)^m\}.$$

Сужение пространства коэффициентов уравнения (2) на $\overline{H(L_A)} \subset \mathbb{C}^A$ задает приведенное уравнение для (2).

Наиболее удобные приведения уравнения (2) ассоциируются с матрицами C , у которых $k + 1$ столбцов нулевые, а остальные m столбцов составляют единичную матрицу. Такие матрицы можно использовать для расширения A до унимодулярной, если в A имеется $k + 1$ столбцов с номерами $j_1, \dots, j_{k+1} \in \{1, \dots, N\}$, составляющих унимодулярную матрицу. В этом случае приведение уравнения (2) сводится к фиксации коэффициентов: $a_{\alpha^{j_1}} = \dots = a_{\alpha^{j_{k+1}}} = 1$.

Расширение $\hat{A}$ автоматически определяет базис решетки L_A . А именно, записав обратную матрицу в виде $(\hat{A})^{-1} = (D|B)$, где D и B – блоки с $k + 1$ и m столбцами соответственно, получим

$$A \cdot B = 0, \quad C \cdot B = E_m$$

(E_m – единичная матрица размера $m \times m$). Таким образом, B – правый аннулятор для A ранга m , столбцы которого составляют базис L_A . Запишем этот аннулятор в виде

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & \dots & b_{Nm} \end{pmatrix}.$$

Учитывая соотношение $C \cdot B = E_m$, получаем обращение параметризации $(a_\alpha) = z^C$ для $H(L_A)$:

$$z = (a_\alpha)^B. \quad (3)$$

Матрица B определяет следующее отображение:

$$\Psi_B: \mathbb{CP}^{m-1} \rightarrow (\mathbb{C}^*)^m, \quad s \rightarrow z = (Bs)^B, \quad (4)$$

где $s = (s_1 : \dots : s_m)$ – однородные координаты в $\mathbb{CP}^{m-1}$ (напомним, что $m = N - k - 1$). Покоординатная запись отображения Ψ_B следующая:

$$z_k = \prod_{j=1}^N \langle b_j, s \rangle^{b_{jk}}, \quad k = 1, \dots, m,$$

где $b_j = (b_{j1}, \dots, b_{jm})$ – строки матрицы B . Поскольку первая строка матрицы A ортогональна каждому столбцу матрицы B , получаем выражения от s нулевой степени однородности, т.е. $(Bs)^B$ корректно определено на $\mathbb{CP}^{m-1}$. Отображение $\Psi_B(s)$, определяемое формулой (4), называют *параметризацией Горна–Капранова* для $\hat{V}_A$. Важность этого отображения объясняется теоремой Капранова [2], гласящей:

- 1) отображение Ψ_B параметризует приведенное A -дискриминантное множество $\tilde{\nabla}_A \subset H(L_A) \cong (\mathbb{C}^*)^m$;
- 2) если $\tilde{\nabla}_A$ – гиперповерхность, то Ψ_B – бирациональный изоморфизм, совпадающий с обращением логарифмического обращения Гаусса $\gamma_{\tilde{\nabla}_A}$ для этой гиперповерхности.

Напомним понятие логарифмического отображения Гаусса [2] для поверхности V чистой размерности $m - k$. Это отображение $\gamma_V: V \rightarrow \text{Gr}(m, k)$, которое каждой неособой точке $z \in V$ ставит в соответствие комплексную нормальную плоскость к образу $\log V$ в точке $\log z$ (здесь $\log$ – комплексный логарифм).

Заметим, что, подобно переходу от общего уравнения (1) к приведенному уравнению (1_{pq}), общее уравнение (2) можно “приводить” путем фиксации $k + 1$ коэффициентов с индексами $\alpha^{j_1}, \dots, \alpha^{j_{k+1}}$, если эти индексы не лежат в $(k - 1)$ -мерной плоскости. В этом случае аннулятор B матрицы A с условием $C \cdot B = E_m$ будет состоять из рациональных элементов. При этом необходимо учитывать выборы ветвей радикалов в формуле (3). Это делается с помощью теоремы о факторах (см., например, [7]). В случае уравнения (1) ситуация упрощается, и мы ее рассмотрим в следующем параграфе.

1.2. Параметризации классических приведенных дискриминантных множеств. Обратимся теперь к классическому случаю, т.е. к уравнению (1), для которого матрица A имеет вид

$$A_{\text{cl}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Приведенное уравнение (1_{0n}) соответствует расширению $\hat{A}_{\text{cl}}$ с помощью матрицы $C = C_{0n}$ размера $(n - 1) \times (n + 1)$, у которой столбцы с номерами 0 и n нулевые, а остальные составляют единичную матрицу. Таким образом, коэффициенты $a = (a_\alpha)$, z , x уравнений (1), (1_{pq}), (1_{0n}) связаны соотношениями $a = x^C$, $z = a^{B_{pq}}$, где B_{pq} – правый аннулятор ранга $n - 1$ для матрицы A_{cl} , у которого строки с номерами $k \neq p, q$ составляют единичную матрицу. Отсюда $z = x^{B_{pq}C}$, и мы получаем связь между коэффициентами z и x уравнений (1_{pq}) и (1_{0n}) (см. также [8])

$$z_k = x_k x_p^{\frac{k-q}{q-p}} x_q^{\frac{p-k}{q-p}}, \quad k \neq p, q. \quad (5)$$

Здесь и далее запись $k \neq p, q$ означает, что $k \in \{0, \dots, [p] \dots [q] \dots, n\}$. При этом имеется в виду, что в (5) $x_0 = 1$, $x_n = 1$. Более правильная запись (5) следующая:

$$z_k = \left(\frac{x_k}{x_p} \right) \left(\frac{x_p}{x_q} \right)^{\frac{k-p}{q-p}}.$$

Таким образом, (5) есть $(q - p)$ -значное отображение: все его значения определяются выбором ветвей радикала

$$\left(\frac{x_p}{x_q} \right)^{\frac{1}{q-p}}.$$

В [6] доказано, что дискриминантное множество ∇_{pq} уравнения (1_{pq}) допускает следующую $(q - p)$ -значную параметризацию в терминах параметров $s_0, \dots, [p] \dots [q] \dots, s_n$:

$$z_k = s_k \left(\frac{1}{q-p} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq p, q}}^n (i-q)s_i \right)^{\frac{k-q}{q-p}} \left(\frac{1}{q-p} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq p, q}}^n (p-i)s_i \right)^{\frac{p-k}{q-p}}, \quad k \neq p, q. \quad (6)$$

Отображение $\mathbb{CP}^{n-2} \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$, определенное формулой (6), обозначим через Ψ_{pq} (заметим, что согласно (4) следовало бы писать $\Psi_{B_{pq}}$, но мы сокращаем запись).

При замене $x \rightarrow z$, определенной формулой (5), параметризация дискриминантного множества ∇_{0n} (она явно выписана формулой (9)) перейдет в следующую параметризацию ∇_{pq} :

$$z_k = s_k s_p^{\frac{k-q}{q-p}} s_q^{\frac{p-k}{q-p}}, \quad k \neq p, q, \quad (7)$$

где $s_0 = \frac{\langle \alpha, s \rangle}{n}$, $s_n = \frac{\langle \beta, s \rangle}{n}$. Таким образом, мы можем записывать параметризацию ∇_{pq} по формуле (7) с использованием $n + 1$ переменных $s_0, s_1, \dots, s_n$, связанных соотношениями

$$\sum_{i=0}^n (i-q)s_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n (p-i)s_i = 0. \quad (8)$$

1.3. Амебы классических приведенных дискриминантных множеств и их стратов. Отметим, что в случае $q = p + 1$ отображение (6) бирационально и в соответствии с теоремой Капранова является обращением логарифмического отображения Гаусса для ∇_{pq} . В общем оно есть $(q - p)$ -значное обращение $\gamma_{\nabla_{pq}}^{-1}$.

Определенную информацию о приведенном дискриминантном множестве и его сингулярных стратах можно получить в логарифмической шкале в терминах понятия амебы алгебраической поверхности. Рассмотрим отображение $\text{Log}: (\mathbb{C}^*)^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, определенное формулой

$$\text{Log}: (z_1, \dots, z_m) \rightarrow (\log |z_1|, \dots, \log |z_m|).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [1]). Амебой алгебраического множества $V \subset \mathbb{C}^m$ называется образ $\text{Log } V$, который обозначается через $\mathcal{A}_V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [9]). Контуром амебы $\mathcal{A}_V$ называется множество критических значений отображения $\text{Log}: V \rightarrow \mathcal{A}_V$.

В случае, когда V – гиперповерхность или кривая, точка $z \in V_{sm}$ критическая для $\text{Log}|_V$ тогда и только тогда, когда логарифмическое отображение Гаусса в ней вещественно (см. [10], [11]).

Таким образом, для $V = \nabla_{pq}$ контур амебы параметризуется сужением отображения $\Psi_{pq}|_{\mathbb{RP}^{n-2}}$ на вещественное проективное подпространство. Аналогично, контур амебы для страта $\mathcal{M}_{pq}^{n-1}$ параметризуется сужением Ψ_{pq} на вещественный срез $L^{n-3} \cap \mathbb{RP}^{n-2}$.

Рассмотрим в качестве примера приведенное дискриминантное множество ∇_{04} для уравнения степени 4. Согласно теоремам 2 и 3 его страт $\mathcal{M}_{04}^3$ параметризуется сужением параметризации

$$\Psi_{04}: \mathbb{CP}^2 \rightarrow \nabla_{04} \subset \mathbb{C}^3$$

на комплексную прямую своих критических точек

$$L^1 = L_1 = \{(s_1 : s_2 : s_3) : 1 \cdot 3 \cdot s_1 + 2 \cdot 2 \cdot s_2 + 3 \cdot 1 \cdot s_3 = 0\}.$$

При выборе s_1 в качестве аффинной координаты на L_1 сужение $\Psi_{04}|_{L_1}$ приобретает вид

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{8s_1}{3s_1 - 1} \left(\frac{3s_1 - 1}{-s_1 + 3} \right)^{\frac{1}{4}}, & x_2 &= 2 \frac{3s_1 + 3}{3s_1 - 1} \left(\frac{3s_1 - 1}{-s_1 + 3} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ x_3 &= -\frac{8}{3s_1 - 1} \left(\frac{3s_1 - 1}{-s_1 + 3} \right)^{\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Рис. 1. Амеба страта $\mathcal{M}_{04}^3$ для уравнения степени 4 (слева) и ее контур в другом ракурсе (справа)

На рис. 1 изображены амеба и ее контур для страта $\mathcal{M}_{04}^3$, допускающего указанную параметризацию. Из параметризации видно, что щупальцы амебы соответствуют набору значений

$$s_1 = -\infty, -1, 0, \frac{1}{3}, 3.$$

Значению $s_1 = 1$ соответствует нульмерный страт $\mathcal{M}_{04}^4$; это критическая точка параметризации. Таким образом, контур амебы нульмерного страта $\mathcal{M}_{04}^4$ является точкой возврата (каспидальной точкой) для контура амебы примыкающего к нему одномерного страта $\mathcal{M}_{04}^3$.

Чтобы проследить характер примыкания контуров амеб стратов $\mathcal{M}_{04}^2 = \nabla_{04}$ и $\mathcal{M}_{04}^3$ требуется определенная деликатность. В аффинных координатах s_1, s_2

пространства $\mathbb{CP}^2$ параметризация Ψ_{04} для $\mathcal{M}_{04}^2 = \nabla_{04}$ следующая:

$$x_1 = \frac{-4s_1}{3s_1 + 2s_2 + 1} \left(\frac{3s_1 + 2s_2 + 1}{s_1 + 2s_2 + 3} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad x_2 = \frac{-4s_2}{3s_1 + 2s_2 + 1} \left(\frac{3s_1 + 2s_2 + 1}{s_1 + 2s_2 + 3} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x_3 = \frac{-4}{3s_1 + 2s_2 + 1} \left(\frac{3s_1 + 2s_2 + 1}{s_1 + 2s_2 + 3} \right)^{\frac{3}{4}}.$$

Для построения контура амобы надо вычислить образ $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{RP}^2$ относительно отображения $\text{Log} \circ \Psi_{04}$. Это отображение имеет полярные особенности на четырех прямых (пятая прямая — $s_3 = 0$ — бесконечно удаленная относительно выбранной аффинной части):

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad 3s_1 + 2s_2 + 1 = 0, \quad s_1 + 2s_2 + 3 = 0.$$

Рис. 2. Особенности параметризации Ψ_{04} : 4 полярные прямые, критическая прямая и гипербола самопересечений

На рис. 2 эти прямые изображены наряду с критической прямой L^1 (жирная прямая, переходящая при отображении $\text{Log} \circ \Psi_{04}$ в контур амобы для $\mathcal{M}_{04}^3$). Кроме того, следует учесть причастность гиперболы

$$(s_1 + 1)(s_1 + 2s_2 + 3) = 2,$$

изображенной пунктиром. Образ комплексной гиперболы относительно Ψ_{04} есть страт $\mathcal{M}_{04}^{2,2}$, отвечающий за наличие двух корней кратности 2. Иными словами, этот страт состоит из всех $x = (x_1, x_2, x_3)$, для которых выполняется равенство полиномов

$$1 + x_1y + x_2y^2 + x_3y^3 + y^4 = (y - a)^2(y - b)^2$$

с параметрами a и b . В обозначении $t := a + b$ этот страт параметризуется в виде

$$x_1 = \mp 2t, \quad x_2 = t^2 \pm 2, \quad x_3 = -2t.$$

Множество $\mathcal{M}_{04}^{2,2}$ составляет страт самопересечения для дискриминантного множества ∇_{04} . Сужение параметризации Ψ_{04} на указанную гиперболу принимает равные значения в точках (s_1, s_2) , (s'_1, s'_2) , для которых $s_1 \cdot s'_1 = 1$.

Рис. 3. Фрагменты примыкания контура амобы для ∇_{04} к контуру амобы для страта $\mathcal{M}_{04}^3$

На рис. 3 приводятся некоторые фрагменты примыканий контура амобы для ∇_{04} к контуру амобы для страта $\mathcal{M}_{04}^3$. Они показывают, что контур амобы для страта $\mathcal{M}_{04}^3$ является кривой возврата контура амобы для ∇_{04} . Вблизи острия контура для амобы $\mathcal{M}_{04}^3$ (соответствующего значению $s_1 = 1$ в параметризации контура) примыкание изображается куском в виде сетки и скрытой за ней двумя возвратными кусками серого цвета. Эти куски пересекаются в общем положении по кривой, которая выходит из острия и представляет часть контура амобы для страта самопересечения $\mathcal{M}_{04}^{2,2}$.

В целом поверхность справа составляет фигуру, известную под названием “ласточкин хвост”. Она получается как часть контура амобы для ∇_{04} , для которой вещественные аффинные параметры s_1, s_2 пробегают подходящим образом выбранную окрестность луча $L^1 \cap \{s_1 > 0\}$.

§ 2. Критические страты параметризации Ψ_{0n} классического приведенного дискриминантного множества ∇_{0n}

Здесь мы докажем теорему 2. Уточним ингредиенты, участвующие в ней. Рассмотрим приведенное уравнение (1_{pq}) при $p = 0$, $q = n$, в котором выберем эксклюзивное обозначение для коэффициентов:

$$1 + x_1 y + \cdots + x_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0. \quad (1_{0n})$$

Согласно формуле (6) (см. также [12]) приведенное дискриминантное множество ∇_{0n} допускает параметризацию $\Psi_{0n}: \mathbb{CP}_s^{n-2} \rightarrow \mathbb{C}_x^{n-1}$ по формуле

$$x_k = \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left(\frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (9)$$

где α, β – целочисленные векторы

$$\alpha = -(n-1, \dots, 2, 1), \quad \beta = -(1, 2, \dots, n-1).$$

Указанная параметризация n -значная, все ее значения определяются выбором n значений радикала $\left(\frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Пусть $\mathcal{C}^1 \subset \nabla_{0n}$ – подмножество критических значений параметризации Ψ_{0n} на ее области определения $\langle \alpha, s \rangle \langle \beta, s \rangle \neq 0$. В [6] было показано, что $\mathcal{C}^1$ параметризуется сужением отображения Ψ_{0n} на гиперплоскость

$$\mathcal{L}^1 = \{s : \langle \alpha \cdot \beta, s \rangle = 0\} \subset \mathbb{CP}^{n-2},$$

где $\alpha \cdot \beta$ – покомпонентное произведение векторов.

Для $j \geq 2$ определим страты $\mathcal{C}^j$ по индукции, считая $\mathcal{C}^j$ множеством критических значений для сужения $\Psi_{0n}|_{\mathcal{L}^{j-1}}$, где $\mathcal{L}^{j-1}$ – множество критических точек отображения $\Psi_{0n}|_{\mathcal{L}^{j-2}}$. Таким образом, мы получаем две цепочки вложений алгебраических множеств

$$\nabla \supset \mathcal{C}^1 \supset \dots \supset \mathcal{C}^{n-2}, \quad \mathbb{CP}^{n-2} \supset \mathcal{L}^1 \supset \dots \supset \mathcal{L}^{n-2}.$$

Определим в $\mathbb{CP}^{n-2}$ гиперплоскости

$$L_j := \left\{ s : \sum_{i=j}^{n-1} i(i-1) \cdots (i-(j-1))(n-i)s_i = 0 \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, n-2,$$

в терминах которых теорема 2 формулируется следующим образом:

Страты $\mathcal{C}^j$ параметризуются сужениями $\Psi_{0n}|_{L_j}$ на плоскость $L^j = L_1 \cap \dots \cap L_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Проведем индукцию по j . Базу индукции (для $j = 1$) составляет упомянутое выше утверждение из статьи [6], что $\mathcal{C}^1$ параметризуется сужением $\Psi_{0n}|_{L_1}$ на гиперплоскость $L_1 = \{s : \langle \alpha \cdot \beta, s \rangle = 0\} = L^1$.

Пусть теперь $2 \leq j \leq n-2$, и предположим, что $\mathcal{L}^j = L_j$, т.е. что $\mathcal{C}^j$ задается сужением $\Psi_{0n}|_{L_j}$. Напомним, что $L^j = L_1 \cap \dots \cap L_j$, и ясно, что плоскость L^j задается трапециодальной системой линейных уравнений. В качестве однородных координат на L^j можно взять переменные $s_{j+1}, s_{j+2}, \dots, s_{n-1}$. С помощью последнего уравнения переменная s_j выражается через них по формуле

$$s_j|_{L^j} = -\frac{1}{(n-j)j!} \sum_{i=j+1}^{n-1} i(i-1) \cdots (i-(j-1))(n-i)s_i. \quad (10)$$

Рекуррентным образом для остальных переменных $s_1, \dots, s_{j-1}$ получаем

$$s_k|_{L^j} = \frac{(-1)^{j+k+1}}{k!(j-k)!(n-k)} \sum_{i=j+1}^{n-1} i(i-1) \cdots [i-k] \cdots (i-j)(n-i)s_i, \quad (11)$$

где квадратная скобка $[i - k]$ обозначает знак пропуска множителя $i - k$. Чтобы получить это выражение, надо записать индуктивно предполагаемое выражение для $s_k|_{L^{j-1}}$ (получаемое из (11) заменой $j + 1$ на j) в виде линейной комбинации переменных $s_j, s_{j+1}, \dots, s_{n-1}$ и вместо s_j подставить выражение (10).

Из (11) несложно получить представления для $\langle \alpha, s \rangle|_{L^j}$ и $\langle \beta, s \rangle|_{L^j}$:

$$\langle \alpha, s \rangle|_{L^j} = \frac{(-1)^{j+1}}{j!} \sum_{i=j+1}^{n-1} (i-1)(i-2) \cdots (i-j)(n-i)s_i, \quad (12)$$

$$\langle \beta, s \rangle|_{L^j} = -\frac{(n-j-1)!}{(n-1)!} \sum_{i=j+1}^{n-1} i(i-1) \cdots (i-j)s_i. \quad (13)$$

Итак, по предположению индукции $\mathcal{C}^j$ параметризуется в виде сужения $\Psi_{0n}|_{L^j}$, т.е. по формуле (9), в которой $s_1, \dots, s_j$ выражаются через $s_{j+1}, \dots, s_{n-1}$ в соответствии с (10) и (11). Найдём критические точки для $\Psi_{0n}|_{L^j}$. Поскольку функция $\log x_k$ локально биголоморфно зависит от x_k , достаточно найти критические точки для отображения $(\log x_1, \dots, \log x_{n-1})|_{L^j}$. Так как размерность плоскости L^j равна $n - 2 - j =: d$, эти критические точки характеризуются условием тривиальности дифференциальных d -форм:

$$\omega_K := \bigwedge_{i=1}^d d \log x_{k_i}|_{L^j} \equiv 0$$

для всех d -наборов $K = (k_1, \dots, k_d) \subset \{1, \dots, n-1\}$. Форма ω_K имеет вид

$$\omega_K = \bigwedge_{i=1}^d \left(\frac{ds_{k_i}}{s_{k_i}} - \frac{n-k_i}{n} \frac{d\langle \alpha, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} - \frac{k_i}{n} \frac{d\langle \beta, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right) \Big|_{L^j} = \sum_{|I|=d} C_{KI}(s) ds_I, \quad (14)$$

где $|I|$ – мощность подмножества $I \subset \{j+1, \dots, n-1\} =: J$, а ds_I – внешнее произведение ds_i по всем $i \in I$. Так как $|I| = d$, то каждое I получается из J удалением одного элемента: $I = J \setminus \{l\}$. Поэтому теорема 2 равносильна следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Все коэффициенты $C_{K, J \setminus \{l\}}(s)$ дифференциальных форм (14) одновременно обращаются в нуль тогда и только тогда, когда $s \in L^{j+1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства предложения 1 рассмотрим вначале случай, когда $l \in K$. В этом случае произведение всех d дифференциалов $\frac{ds_{k_i}}{s_{k_i}}$ в левой части (14) не даёт вклада в коэффициент $C_{K, J \setminus \{l\}}$, поскольку $ds_K \neq ds_{J \setminus \{l\}}$. В то же время, произведения этих дифференциалов в количестве менее $d - 2$ штук также не дают вклада, так как произведение более чем двух агрегатов

$$\varphi_{k_i} := -\frac{n-k_i}{n} \frac{d\langle \alpha, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} - \frac{k_i}{n} \frac{d\langle \beta, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle}$$

равно нулю. Поэтому с точностью до делящегося на ds_l слагаемого произведение $\bigwedge_{i=1}^d$ в левой части (14) представляется в виде

$$\frac{ds_{k_1}}{s_{k_1}} \wedge \dots \wedge \frac{l}{\varphi_l} \wedge \dots \wedge \frac{ds_{k_d}}{s_{k_d}} + \sum_{\substack{i=1 \\ k_i \neq l}}^d \frac{l - k_i}{n} \frac{ds_{k_i}}{s_{k_i}} \wedge \dots \wedge \frac{\overbrace{d\langle \alpha, s \rangle}^{k_i}}{\langle \alpha, s \rangle} \wedge \dots \wedge \frac{\overbrace{d\langle \beta, s \rangle}^l}{\langle \beta, s \rangle} \wedge \dots \wedge \frac{ds_{k_d}}{s_{k_d}}. \quad (15)$$

Для обоснования такого представления надо учесть, что

$$\varphi_{k_i} \wedge \varphi_l = \frac{l - k_i}{n} \frac{d\langle \alpha, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} \wedge \frac{d\langle \beta, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle}.$$

При этом выбор знака $+1$ в каждом слагаемом в (15) объясняется тем, что если $k_i < l$, мы вначале φ_{k_i} ставим непосредственно перед φ_l , производим их умножение, и $\frac{d\langle \alpha, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle}$ возвращаем на место k_i ; если же $k_i > l$, то φ_{k_i} ставим непосредственно за φ_l , производим умножение, дающее результат

$$\frac{l - k_i}{n} \frac{d\langle \beta, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \wedge \frac{d\langle \alpha, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle},$$

и $d\langle \alpha, s \rangle$ возвращаем на место k_i .

Пусть k_{q+1} – наименьший номер в K среди вошедших в J , так что $k_1, \dots, k_q$ – это элементы из K , не лежащие в J . Следовательно, множество $J \cap K$ состоит из $d - q$ элементов $k_{q+1}, \dots, k_d$, а в $J \setminus K =: J_q$ остается $q + 1$ элементов; обозначим их как $j_1, \dots, j_{q+1}$.

Поскольку выражение (15) мы рассматриваем на L^j , где координатами выступают $s_{j+1}, \dots, s_{n-1}$, нам необходимо использовать функциональную зависимость функций $s_{k_1}, \dots, s_{k_q}, \langle \alpha, s \rangle, \langle \beta, s \rangle$ от этих координат. С этой целью введем обозначения для якобианов:

$$\frac{\partial(s_{k_1}, \dots, s_{k_q}, \langle \beta, s \rangle)}{\partial(s_{j_1}, \dots, s_{j_{q+1}})} =: \delta_\alpha, \quad \frac{\partial(s_{k_1}, \dots, s_{k_q}, \langle \alpha, s \rangle)}{\partial(s_{j_1}, \dots, s_{j_{q+1}})} =: \delta_\beta.$$

Через $\delta_{s_{k_i}}$ обозначим определитель, полученный из δ_α заменой s_{k_i} на $\langle \alpha, s \rangle$. Рассмотрим также следующие определители, которые получаются из δ_α присоединением строки и столбца:

$$\frac{\partial(\langle \alpha, s \rangle, s_{k_1}, \dots, s_{k_q}, \langle \beta, s \rangle)}{\partial(s_i, s_{j_1}, \dots, s_{j_{q+1}})} =: \Delta_i, \quad i = j + 1, \dots, n - 1.$$

В этих обозначениях выражение (15) показывает, что коэффициент $C_{KI} = C_{K, J \setminus \{l\}}$ дифференциальной формы (14) с точностью до знака запишется следующим образом:

$$\frac{\sum_{i=1}^q (l - k_i) \delta_{s_{k_i}} s_{k_i} + \sum_{i=q+1}^d (l - k_i) \Delta_{k_i} s_{k_i} - (n - l) \delta_\beta \langle \beta, s \rangle - l \delta_\alpha \langle \alpha, s \rangle}{ns_{k_1} \dots [l] \dots s_{k_d} \langle \alpha, s \rangle \langle \beta, s \rangle}. \quad (16)$$

Обозначим через $\tilde{C}_{K, J \setminus \{l\}}$ числитель последнего выражения, который является линейной функцией от $s_{j+1}, \dots, s_{n-1}$. Вычислим эту функцию.

ЛЕММА 1. Числитель рациональной функции (16) равен

$$\tilde{C}_{K, J \setminus \{l\}} = \left(c_{s_{k_1}} \delta_{s_{k_1}} + \dots + c_{s_{k_q}} \delta_{s_{k_q}} - c_\beta \delta_\beta - c_\alpha \delta_\alpha \right) \sum_{i=j+1}^{n-1} i(i-1) \dots (i-j)(n-i) s_i, \quad (17)$$

где c_{s_k} , c_α , c_β – числовые множители, стоящие перед знаками сигма в выражениях (10)–(13) для сужений функций s_k , $\langle \alpha, s \rangle$, $\langle \beta, s \rangle$ на L^j . Таким образом, $C_{K, J \setminus \{l\}}(s) = 0$ на L^{j+1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим определители Δ_{k_i} , участвующие в числителе выражения (16), по первому столбцу:

$$\Delta_{k_i} = \frac{\partial \langle \alpha, s \rangle}{\partial s_{k_i}} \delta_\alpha - \frac{\partial s_{k_1}}{\partial s_{k_i}} \delta_{s_{k_1}} - \frac{\partial s_{k_2}}{\partial s_{k_i}} \delta_{s_{k_2}} - \dots - \frac{\partial s_{k_q}}{\partial s_{k_i}} \delta_{s_{k_q}} - \frac{\partial \langle \beta, s \rangle}{\partial s_{k_i}} \delta_\beta.$$

Здесь выбор знаков в слагаемых объясняется тем, что в Δ_{k_i} алгебраические дополнения элементов $\frac{\partial s_{k_\nu}}{\partial s_{k_i}}$ отличаются знаками $(-1)^{\nu-1}$ от определителей $\delta_{s_{k_\nu}}$, $\nu = 1, \dots, q$. В аналогичных соотношениях находятся алгебраические дополнения элементов $\frac{\partial \langle \alpha, s \rangle}{\partial s_{k_i}}$ и $\frac{\partial \langle \beta, s \rangle}{\partial s_{k_i}}$ с определителями δ_α и δ_β .

Напомним, что через J_q мы обозначили $J \setminus \{k_{q+1}, \dots, k_d\}$. Учитывая указанное равенство для Δ_{k_i} , приходим к следующему выражению для числителя (16):

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{K, J \setminus \{l\}} = & \sum_{\nu=1}^q \left((l - k_\nu) s_{k_\nu} - \left(\sum_{i=j+1}^{n-1} - \sum_{i \in J_q} \right) \frac{\partial s_{k_\nu}}{\partial s_i} (l - i) s_i \right) \delta_{s_{k_\nu}} \\ & - \left((n - l) \langle \beta, s \rangle + \left(\sum_{i=j+1}^{n-1} - \sum_{i \in J_q} \right) \frac{\partial \langle \beta, s \rangle}{\partial s_i} (l - i) s_i \right) \delta_\beta \\ & + \left(-l \langle \alpha, s \rangle + \left(\sum_{i=j+1}^{n-1} - \sum_{i \in J_q} \right) \frac{\partial \langle \alpha, s \rangle}{\partial s_i} (l - i) s_i \right) \delta_\alpha. \end{aligned}$$

Ввиду линейной зависимости от $s_{j+1}, \dots, s_{n-1}$ функции s_{k_ν} представляются в виде

$$\sum_{i=j+1}^{n-1} \frac{\partial s_{k_\nu}}{\partial s_i} s_i,$$

поэтому с учетом формул (10) и (11) выражение в скобках при $\delta_{s_{k_\nu}}$ преобразуется к следующему:

$$\begin{aligned} & (l - k_\nu) s_{k_\nu} - \left(\sum_{i=j+1}^{n-1} - \sum_{i \in J_q} \right) \frac{\partial s_{k_\nu}}{\partial s_i} (l - i) s_i \\ & = \sum_{i=j+1}^{n-1} (i - k_\nu) \frac{\partial s_{k_\nu}}{\partial s_i} s_i + \sum_{i \in J_q} \frac{\partial s_{k_\nu}}{\partial s_i} (l - i) s_i \\ & = c_{s_{k_\nu}} \sum_{i=j+1}^{n-1} i(i-1) \dots (i-j)(n-i) s_i + \sum_{i \in J_q} \frac{\partial s_{k_\nu}}{\partial s_i} (l - i) s_i. \end{aligned}$$

Аналогичным образом преобразуются выражения, стоящие в скобках при δ_α и δ_β :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=q+1}^d \frac{\partial \langle \alpha, s \rangle}{\partial s_{k_i}} (l - k_i) s_{k_i} - l \langle \alpha, s \rangle \\
 &= -c_\alpha \sum_{i=j+1}^{n-1} i(i-1) \cdots (i-j)(n-i) s_i - \sum_{i \in J_q} \frac{\partial \langle \alpha, s \rangle}{\partial s_i} (l-i) s_i, \\
 & (n-l) \langle \beta, s \rangle + \sum_{i=q+1}^d \frac{\partial \langle \beta, s \rangle}{\partial s_{k_i}} (l - k_i) s_{k_i} \\
 &= c_\beta \sum_{i=j+1}^{n-1} i(i-1) \cdots (i-j)(n-i) s_i - \sum_{i \in J_q} \frac{\partial \langle \beta, s \rangle}{\partial s_i} (l-i) s_i.
 \end{aligned}$$

В результате указанных преобразований $\tilde{C}_{K, J \setminus \{l\}}$ записывается в следующем виде:

$$\left(\sum_{\nu=1}^q c_{s_{k_\nu}} \delta_{s_{k_\nu}} - c_\beta \delta_\beta - c_\alpha \delta_\alpha \right) \sum_{i=j+1}^{n-1} i(i-1) \cdots (i-j)(n-i) s_i + \sum_{i \in J_q} \Delta_i (i-l) s_i.$$

Так как $k_{q+1}, \dots, k_d \notin J_q$, то при $i \in J_q$ детерминант Δ_i имеет два равных столбца, следовательно, обращается в нуль. В итоге мы получаем искомую формулу (17) для $\tilde{C}_{K, J \setminus \{l\}}$, и лемма 1 доказана.

Пусть теперь $l \notin K$. Коэффициент $C_{KI} = C_{K, J \setminus \{l\}}$ в (14) равен сужению определителя $\det \frac{\partial \log x_K}{\partial s_{J \setminus \{l\}}}$ на L^j . Присоединим к этому определителю l -е строку и столбец, дополнив последний до определителя $\det \frac{\partial \log x_{K,l}}{\partial s_J}$ размера $(d+1) \times (d+1)$. В силу того, что мы работаем в однородных координатах $s_{j+1}, \dots, s_{n-1}$ плоскости L^j , дополненный определитель равен нулю на L^j . По лемме 1 в его разложении по l -му столбцу алгебраические дополнения всех недиагональных элементов обращаются в нуль на L^{j+1} (эти дополнения имеют вид $\det \frac{\partial \log x_{K'}}{\partial s_{J \setminus \{i\}}}$, где $K' = (K \cup \{l\}) \setminus \{i\}$, и потому $i \notin K'$). Следовательно, для доказательства равенства $\det \frac{\partial \log x_K}{\partial s_{J \setminus \{l\}}} = 0$ на L^{j+1} в случае $l \notin K$ требуется показать что хотя бы в одной точке s гиперплоскости L^{j+1} диагональный элемент $\frac{\partial \log x_l(s)}{\partial s_l} \neq 0$. В силу однородности функций $x_k(s)$ достаточно рассмотреть случай $l = n-1$. Итак, выберем на L^{j+1} следующие значения для $s_{j+1}, s_{j+2}, \dots, s_{n-1}$:

$$-\frac{(j+2)(n-j-2)}{n-j-1} s_{j+2} - \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-j)}{(j+1)!}, \quad s_{j+2}, \quad 0, \quad \dots, \quad 0, \quad 1.$$

Вычисление показывает, что для таких значений производная $\frac{\partial \log x_{n-1}}{\partial s_{n-1}}$ равна рациональной функции от s_{j+2}

$$\frac{1}{n(n-j-2)} \frac{(j+1) \prod_{i=2}^{j+1} (n-i)}{s_{j+2}(j+1)! + \prod_{i=2}^{j+1} (n-i)} - \frac{(n-1)(n-j-1) \prod_{i=1}^{j+1} (n-i)}{ns_{j+2}(j+2)! + n \prod_{i=1}^{j+2} (n-i)} + 1,$$

у которой числитель – многочлен второй степени с коэффициентом $(j+1)!(j+2)!$ при s_{j+2}^2 . Следовательно, $\frac{\partial \log x_{n-1}}{\partial s_{n-1}}$ не обращается тождественно в нуль на L^{j+1} , а потому $C_{K, J \setminus \{l\}} \equiv 0$ на L^{j+1} .

Для завершения доказательства предложения 1 укажем такой набор $K = (k_1, \dots, k_d)$, при котором множитель $c_{s_{k_1}} \delta_{s_{k_1}} + \dots + c_{s_{k_q}} \delta_{s_{k_q}} - c_\beta \delta_\beta - c_\alpha \delta_\alpha$ в выражении (17) для $\tilde{C}_{KI}$ не обращается в нуль. Например, пусть $K = J \setminus \{j+1\}$, т.е.

$$(k_1, \dots, k_d) = (j+2, j+3, \dots, n-1).$$

В этом случае $q = 0$, поэтому рассматриваемый множитель состоит лишь из двух слагаемых, причем с ненулевой суммой:

$$-\left(c_\beta \frac{\partial \langle \alpha, s \rangle}{\partial s_{j+1}} + c_\alpha \frac{\partial \langle \beta, s \rangle}{\partial s_{j+1}}\right) = \frac{(-1)^{j+1} n(n-j-1)!}{(n-1)!}.$$

Итак, коэффициенты $C_{KI}(s)$ формы (14) одновременно обращаются в нуль тогда и только тогда, когда $s \in L^{j+1}$. Тем самым, предложение 1 вместе с теоремой 2 доказаны.

§ 3. Равенство стратов $\mathcal{M}_{0n}^{j+2}$ и $\mathcal{C}^j$

В этом параграфе мы докажем теорему 3, которая гласит, что сингулярные страты $\mathcal{M}_{0n}^{j+2} \subset \nabla_{0n}$ приведенного уравнения (1_{0n}) совпадают с критическими стратами $\mathcal{C}^j$ параметризации Ψ_{0n} .

Доказательство теоремы 3 будет основано на трех леммах. Пусть t – корень уравнения (1_{0n}) кратности $\geq \mu$, т.е.

$$f(y) = (y-t)^\mu f_{n-\mu}(y), \quad (18)$$

где

$$f(y) = 1 + x_1 y + \dots + x_{n-1} y^{n-1} + y^n$$

– многочлен, определяющий уравнение (1_{0n}), а

$$f_{n-\mu}(y) := \sum_{k=0}^{n-\mu} x_k^{(n-\mu)} y^k$$

– многочлен степени $n-\mu$. В этих обозначениях $x_k^{(n)} = x_k$ для $k = 1, \dots, n-1$; мы также полагаем $x_n^{(n)} = 1 =: x_n$, $x_0^{(n)} = 1 =: x_0$.

ЛЕММА 2. Для $\mu = 1, \dots, n$ коэффициенты многочлена $f_{n-\mu}$ в соотношении (18) выражаются через коэффициенты x_i многочлена f по формуле

$$x_\nu^{(n-\mu)} = \frac{1}{(\mu-1)!} \sum_{i=\nu+\mu}^n (i-\nu-\mu+1)_{\mu-1} x_i t^{i-\nu-\mu}, \quad (19)$$

где $(a)_b = a(a+1) \cdots (a+b-1)$ – символ Похгаммера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $p < \mu$ многочлен f_{n-p} делится на $y - t$. Результат деления есть многочлен

$$f_{n-p-1}(y) = \sum_{k=0}^{n-p-1} y^k \sum_{\nu=k+1}^{n-p} x_{\nu}^{(n-p)} t^{\nu-k-1},$$

таким образом, коэффициенты $x_k^{(n-p-1)}$ и $x_{\nu}^{(n-p)}$ связаны соотношением

$$x_k^{(n-p-1)} = \sum_{\nu=k+1}^{n-p} x_{\nu}^{(n-p)} t^{\nu-k-1}. \quad (20)$$

В частности, многочлен $f_{n-1}(y)$ равен

$$f_{n-1}(y) = \sum_{k=0}^{n-1} y^k \sum_{\nu=k+1}^n x_{\nu} t^{\nu-k-1},$$

тем самым формула (19) верна для $\mu = 1$. Проведем индукцию по μ . Воспользовавшись соотношением (20) и индуктивным предположением, получаем

$$x_k^{n-(\mu+1)} = \sum_{\nu=k+1}^{n-\mu} x_{\nu}^{(n-\mu)} t^{\nu-k-1} = \frac{1}{(\mu-1)!} \sum_{\nu=k+1}^{n-\mu} \sum_{i=\nu+\mu}^n (i-\nu-\mu+1)_{\mu-1} x_i t^{i-k-\mu-1}.$$

Здесь двойное суммирование ведется по точкам (ν, i) из треугольника, задаваемого неравенствами $i - \nu - \mu \geq 0$, $k + \mu + 1 \leq i \leq n$. Каждая точка этого треугольника однозначно определяется значениями пары линейных функций i , $i - \nu$, поэтому, обозначая величину $i - \nu - \mu + 1$ новой переменной через j , мы можем написать

$$x_k^{n-(\mu+1)} = \frac{1}{(\mu-1)!} \sum_{i=k+\mu+1}^n x_i t^{i-k-\mu-1} \sum_{j=1}^{i-k-\mu} (j)_{\mu-1}.$$

(Здесь при расстановке пределов для индексов суммирования мы учли, что в координатах (j, i) указанный выше треугольник переходит в треугольник $j - i + k + \mu \leq 0$, $k + \mu + 1 \leq i \leq n$.) В последнем равенстве вторая сумма равна

$$\sum_{j=1}^{i-k-\mu} (j)_{\mu-1} = \frac{1}{\mu} (i - k - \mu)_{\mu}. \quad (21)$$

Это равенство легко обосновывается индукцией по $i - k - \mu$. Таким образом,

$$x_k^{n-(\mu+1)} = \frac{1}{\mu!} \sum_{i=k+\mu+1}^n (i - k - \mu)_{\mu} x_i t^{i-k-\mu-1}.$$

Лемма 2 доказана.

Далее для $s = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$, участвующего в параметризации (9), рассмотрим величину

$$\left(\frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} \right)^{\frac{1}{n}} =: t(s).$$

Значение $y = t(s)$ является корнем уравнения (10n) при $x = \Psi_{0n}(s)$, причем кратности не ниже двух. Действительно,

$$f(t(s)) = \frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} + \frac{ns_{n-1}}{\langle \alpha, s \rangle} + \dots + \frac{ns_1}{\langle \alpha, s \rangle} + 1 \equiv 0,$$

поскольку $\langle \alpha, s \rangle + \langle \beta, s \rangle = -n(1, \dots, 1)$. В свою очередь, согласно лемме 2, результат деления $f(y)$ на $y - t(s)$, вычисленный при $x = \Psi_{0n}(s)$, $y = t(s)$, равен (для краткости письма вместо $t(s)$ пишем t)

$$\begin{aligned} f_{n-1}(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} t^k \sum_{\nu=k+1}^n x_\nu t^{\nu-k-1} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=k+1}^n x_\nu t^\nu = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{\nu=k+1}^{n-1} x_\nu t^\nu + t^n \right) \\ &= \frac{1}{t \langle \alpha, s \rangle} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\langle \beta, s \rangle + n \sum_{\nu=k+1}^{n-1} s_\nu \right) = \frac{1}{t \langle \alpha, s \rangle} \left(n \langle \beta, s \rangle - n \langle \beta, s \rangle \right) \equiv 0. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Если $f_{n-\mu}(y)$ удовлетворяет соотношению (18) при $t = t(s)$, то для $s \in L^{\mu-2}$

$$f_{n-\mu}(t(s)) = -\frac{n}{\mu! t^\mu(s) \langle \alpha, s \rangle} \sum_{i=\mu-1}^{n-1} i(i-1) \cdots (i-\mu+2)(n-i)s_i. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (19) имеем

$$f_{n-\mu}(y) = \frac{1}{(\mu-1)! t^\mu} \sum_{\nu=0}^{n-\mu} \left(\frac{y}{t} \right)^\nu \sum_{i=k+\mu}^n (i-\nu-\mu+1)_{\mu-1} x_i t^i.$$

Для краткости письма введем обозначение

$$A(s) := \frac{1}{(\mu-1)! t^\mu \langle \alpha, s \rangle}.$$

Тогда

$$f_{n-\mu}(t(s)) = A(s) \sum_{\nu=0}^{n-\mu} \left((n-\nu-\mu+1)_{\mu-1} \langle \beta, s \rangle + n \sum_{i=k+\mu}^{n-1} (i-\nu-\mu+1)_{\mu-1} s_i \right).$$

Согласно (13)

$$\langle \beta, s \rangle|_{L^{\mu-2}} = -\frac{(n-\mu+1)!}{(n-1)!} \sum_{i=\mu-1}^{n-1} i(i-1) \cdots (i-\mu+2)s_i,$$

поэтому при $s \in L^{\mu-2}$ выражение для $f_{n-\mu}(t(s))$ переписется с точностью до множителя $(-A(s))$ так:

$$\sum_{\nu=0}^{n-\mu} \left(\frac{(n-\mu+1)!}{(n-1)!} (n-\nu-\mu+1)_{\mu-1} \sum_{i=\mu-1}^{n-1} i(i-1) \cdots (i-\mu+2) s_i \right. \\ \left. - n \sum_{i=\nu+\mu}^{n-1} (i-\nu-\mu+1)_{\mu-1} s_i \right).$$

В полученном выражении найдем коэффициент при s_i , $i \geq \mu-1$. Он представляется выражением

$$(i-\mu+2)_{\mu-1} \frac{(n-\mu+1)!}{(n-1)!} \sum_{\nu=0}^{n-\mu} (n-\nu-\mu+1)_{\mu-1} - n \sum_{\nu=0}^{i-\mu} (i-\nu-\mu+1)_{\mu-1}$$

(при $i = \mu-1$ последнее выражение равно нулю). Далее воспользуемся вытекающей из (21) формулой

$$\sum_{\nu=0}^{\xi-\mu} (\xi-\nu-\mu+1)_{\mu-1} = \frac{(\xi-\mu+1)_{\mu}}{\mu}, \quad (23)$$

с помощью которой выражение для рассматриваемого коэффициента при s_i приводится к виду

$$\frac{ni(i-1) \cdots (i-\mu+2)(n-i)}{\mu},$$

что после умножения на $(-A(s))$ соответствует доказываемой формуле (22). Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Уравнение (10_n) при $x = \Psi_{0n}(s)$ имеет в точке

$$y = \left(\frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} \right)^{\frac{1}{n}}$$

корень кратности $\geq \mu+2$ тогда и только тогда, когда $s \in L^{\mu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейная функция от s , задаваемая суммой в (22), является определяющей функцией гиперплоскости $L_{\mu-1}$. Из рассуждений, сделанных перед леммой 3, мы знаем, что при $x = \Psi_{0n}(s)$ выполняется равенство $f(y) = (y-t(s))^2 f_{n-2}(y)$. При этом согласно (22)

$$f_{n-2}(t(s)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad s \in L^1.$$

Последнее означает, что $t(s)$ – корень кратности ≥ 3 тогда и только тогда, когда $s \in L^1$. Далее по индукции с помощью леммы 3 получаем, что в соотношении $f(y) = (y-t)^{\mu+1} f_{n-\mu-1}(y)$ многочлен $f_{n-\mu-1}(y)$ удовлетворяет следующему условию: $f_{n-\mu-1}(t(s)) = 0$ тогда и только тогда, когда $s \in L^{\mu}$. Лемма 4 доказана.

Теперь доказательство теоремы 3 мы можем закончить следующим образом. Пусть $f(y)$ – многочлен, представляющий левую часть (1_{0n}). Предположим, что $x \in \mathcal{C}^j$, т.е. $x = \Psi_{0n}(s)$, где $s \in L^j$. По лемме 4 значение

$$y = \left(\frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} \right)^{\frac{1}{n}}$$

является корнем многочлена $f(y)$ кратности не меньше $j+2$. Это означает, что $x \in \mathcal{M}_{0n}^{j+2}$.

Обратно, пусть $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathcal{M}_{0n}^{j+2}$, т.е. $f(y)$ имеет корень a кратности $\mu \geq j+2$. Рассмотрим следующую систему n уравнений от неизвестного $s = (s_1 : \dots : s_{n-1}) \in \mathbb{CP}^{n-2}$:

$$\left(\frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} \right)^{\frac{1}{n}} = a, \quad \Psi_{0n}(s) = x.$$

Для определенности будем считать, что $x_{n-1} \neq 0$ (уравнение (1_{0n}) не имеет кратных корней при $x = 0$, поэтому хотя бы одна координата выбранного вектора отлична от нуля). В таком случае в аффинной части $s_{n-1} \neq 0$ система однозначно разрешима и ее решение s^* следующее:

$$\frac{s_k^*}{s_{n-1}^*} = \frac{x_k}{x_{n-1} a^{n-k-1}}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

По лемме 4 имеем $s^* \in L^\mu$, а потому $x = \Psi_{0n}(s^*) \in \mathcal{C}^j$. Теорема 3 доказана.

§ 4. Параметризации стратов $\mathcal{M}_{pq}^j$

В предыдущих двух параграфах мы описали параметризации стратов $\mathcal{M}_{0n}^{j+2}$ дискриминантного множества ∇_{0n} уравнения (1_{0n}). Согласно теоремам 2 и 3 страт $\mathcal{M}_{0n}^{j+2}$ дискриминантного множества ∇_{0n} параметризуется сужением Ψ_{0n} на плоскость $L^j = L_1 \cap \dots \cap L_j$, где Ψ_{0n} определено формулой (9).

С использованием символа Похгаммера запишем определяющую функцию l_j гиперплоскости L_j в виде

$$l_j(s) = \sum_{i=0}^n (i-j+1)_j (n-i) s_i, \quad j = 1, \dots, n-2.$$

Здесь коэффициенты при s_0 и s_n нулевые, поэтому l_j не зависят от s_0 и s_n .

Нам удобно перезадавать L^j другим пересечением гиперплоскостей. Именно, введем для $j = 3, 4, \dots, n-2$ гиперповерхности

$$L'_j = \left\{ s : \sum_{i=0}^n (i-p)(i-q)(i-j+3)_{j-2} (n-i) s_i = 0 \right\}.$$

ЛЕММА 5. *Имеет место равенство*

$$L_1 \cap \dots \cap L_j = L_1 \cap L_2 \cap L'_3 \dots \cap L'_j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейная комбинация

$$(j-2-q)(j-2-p)l_{j-2} + (2j-3-p-q)l_{j-1} + l_j$$

есть линейная форма

$$l'_j := \sum_{i=0}^n (i-p)(i-q)(i-j+3)_{j-2} (n-i) s_i,$$

определяющая L'_j . Таким образом, уравнение для L'_j есть следствие уравнений для $L_1, \dots, L_j$, а уравнение для L_j – следствие уравнений для $L_1, L_2, L'_3, \dots, L'_j$. Лемма 5 доказана.

Обозначим через l_j^{pq} линейную функцию от $s_0, \dots, [p] \dots [q] \dots, s_n$, полученную подстановкой в l_j следующих выражений для s_p и s_q :

$$s_p = \frac{1}{q-p} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq p, q}}^n (i-q) s_i, \quad s_q = \frac{1}{q-p} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq p, q}}^n (p-i) s_i, \quad (24)$$

равносильных соотношениям (8).

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{CP}^{n-2}$ с однородными координатами $s = (s_j)$, $j \neq p, q$ систему уравнений

$$l_1^{pq}(s) = l_2^{pq}(s) = l_3^{pq}(s) = \dots = l_j^{pq}(s) = 0 \quad (25)$$

и определяемую ею плоскость обозначим через L_{pq}^j . Согласно лемме 5 плоскость L_{pq}^j есть образ плоскости $L^j = L_1 \cap \dots \cap L_j$ при замене s_p и s_q на линейные функции (24). Введем обозначение $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$.

ЛЕММА 6. Для любого набора $I = \{i_0, i_1, \dots, i_{j-1}\} \subset [n] \setminus \{p, q\}$ решение системы (25) параметризуется через переменные $s' = (s_i)$, $i \in ([n] \setminus \{p, q\}) \setminus I$ по формуле

$$s_{i_\nu} = - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_\nu}}^n \frac{(i-p)(i-q)}{(i_\nu-p)(i_\nu-q)} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq \nu}}^{j-1} \frac{i-i_m}{i_\nu-i_m} s_i, \quad \nu = 0, 1, \dots, j-1. \quad (26)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Формально в (26) не делается ограничений на индексы суммирования $([n] \setminus \{p, q\}) \setminus I$, однако ввиду наличия множителей $i-p$, $i-q$ и $i-i_m$ у коэффициента при s_i правая часть в (26) зависит лишь от s' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Покажем, что указанные в (26) выражения для s_{i_ν} являются решением первого уравнения системы, т.е. уравнения

$$\sum_i (i-p)(i-q) s_i = 0.$$

Для рассматриваемых s_{i_ν} левая часть уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} & - \sum_{i \neq i_0} (i-p)(i-q) \prod_{m=1}^{j-1} \frac{i-i_m}{i_0-i_m} s_i - \sum_{i \neq i_1} (i-p)(i-q) \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq 1}}^{j-1} \frac{i-i_m}{i_1-i_m} s_i \\ & - \dots - \sum_{i \neq i_{j-1}} (i-p)(i-q) \prod_{m=0}^{j-2} \frac{i-i_m}{i_{j-1}-i_m} s_i + \sum_{i \neq i_0, \dots, i_{j-1}} (i-p)(i-q) s_i. \end{aligned}$$

Здесь коэффициент при s_i ($i \neq i_0, \dots, i_{j-1}$) есть многочлен степени $\leq j+1$ относительно i :

$$g_1(i) := (i-p)(i-q) \left(1 - \sum_{\sigma=0}^{j-1} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq \sigma}}^{j-1} \frac{i-i_m}{i_\sigma-i_m} \right).$$

Этот многочлен равен нулю для $j+2$ различных значений $i = p, q, i_0, \dots, i_{j-1}$, поэтому он равен нулю тождественно, т.е. (26) удовлетворяет первому уравнению системы (25).

Аналогичными рассуждениями доказывается, что указанные в (26) выражения для s_{i_ν} являются корнями уравнения $l_2^{pq}(s) = 0$.

Покажем, что эти выражения суть корни каждого из уравнений $l_\tau^{pq} = 0$, $3 \leq \tau \leq j$ системы (25). Подстановка выражений (26) в многочлен $l_\tau^{pq}(s)$ дает

$$\begin{aligned} & -(i_0-j+3)_{j-2}(n-i_0) \sum_{i \neq i_0} (i-p)(i-q) \prod_{m=1}^{j-1} \frac{i-i_m}{i_0-i_m} s_i \\ & - (i_1-j+3)_{j-2}(n-i_1) \sum_{i \neq i_1} (i-p)(i-q) \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq 1}}^{j-1} \frac{i-i_m}{i_1-i_m} s_i \\ & - \dots - (i_{j-1}-j+3)_{j-2}(n-i_{j-1}) \sum_{i \neq i_{j-1}} (i-p)(i-q) \prod_{m=0}^{j-2} \frac{i-i_m}{i_{j-1}-i_m} s_i \\ & + \sum_{i \neq i_0, \dots, i_{j-1}} (i-p)(i-q)(i-j+3)_{j-2}(n-i) s_i. \end{aligned}$$

Коэффициент при s_i ($i \neq i_0, \dots, i_{j-1}$) есть многочлен степени не больше $j+1$ относительно i :

$$\begin{aligned} g_\tau(i) & := -(i_0-j+3)_{j-2}(n-i_0)(i-p)(i-q) \prod_{m=1}^{j-1} \frac{i-i_m}{i_0-i_m} \\ & - (i_1-j+3)_{j-2}(n-i_1)(i-p)(i-q) \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq 1}}^{j-1} \frac{i-i_m}{i_1-i_m} \\ & - \dots - (i_{j-1}-j+3)_{j-2}(n-i_{j-1})(i-p)(i-q) \prod_{m=0}^{j-2} \frac{i-i_m}{i_{j-1}-i_m} \\ & + (i-p)(i-q)(i-j+3)_{j-2}(n-i). \end{aligned}$$

Опять $g_\tau(i) = 0$ для $j+2$ различных значений $i = p, q, i_0, \dots, i_{j-1}$, т.е. $g_\tau(i) \equiv 0$. Лемма 6 доказана.

Напомним, что параметризация дискриминантного множества ∇_{pq} определяется отображением (7), в котором знаки s_p и s_q представляются линейными функциями (24). Вычислим значения этих функций на плоскости L_{pq}^j .

ЛЕММА 7. На плоскости L_{pq}^j , определяемой системой (25), справедливы следующие представления для s_p и s_q :

$$s_p = \frac{1}{q-p} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq p, q}}^n (i-q) \prod_{m=0}^{j-1} \frac{i_m - i}{i_m - p} s_i, \quad (27)$$

$$s_q = \frac{1}{q-p} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq p, q}}^n (p-i) \prod_{m=0}^{j-1} \frac{i_m - i}{i_m - q} s_i. \quad (28)$$

Итак, приведенный страт $\mathcal{M}_{pq}^{j+2}$ параметризуется отображением (7), в котором $s_{i_0}, \dots, s_{i_{j-1}}, s_p, s_q$ выражаются через $s' = (s_i)$, $i \neq i_0, \dots, i_{j-1}, p, q$, по формулам (26)–(28).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом (26) имеем

$$\begin{aligned} (q-p)s_p &= \sum_{i \neq p, i_0, \dots, i_{j-1}} (i-q)s_i - \sum_{i \neq i_0} \frac{(i-p)(i-q)}{i_0-p} \prod_{m=1}^{j-1} \frac{i-i_m}{i_0-i_m} s_i \\ &\quad - \sum_{i \neq i_1} \frac{(i-p)(i-q)}{i_1-p} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq 1}}^{j-1} \frac{i-i_m}{i_1-i_m} s_i \\ &\quad - \dots - \sum_{i \neq i_{j-1}} \frac{(i-p)(i-q)}{i_{j-1}-p} \prod_{m=0}^{j-2} \frac{i-i_m}{i_{j-1}-i_m} s_i. \end{aligned}$$

Здесь в правой части равенства коэффициент при s_i является многочленом степени $j+1$ относительно i с корнями $q, i_0, \dots, i_{j-1}$, т.е. он имеет те же корни, что и коэффициент при s_i в правой части выражения (27) (это тоже многочлен степени $j+1$). Для определения коэффициента пропорциональности удобно взять $i = p$, что и приводит к обоснованию представления (27). Представление (28) доказывается аналогично. Лемма 7 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 1

Здесь мы докажем теорему 1 о том, что каждый страт $\mathcal{M}^j$ бимономальным преобразованием сводится к A_j -дискриминантному множеству ∇_{A_j} . Доказательство этой теоремы составляют две леммы.

Вначале проиллюстрируем идею доказательства на примере страта $\mathcal{M}^3$ для уравнения степени 4. Учитывая бимономальную зависимость (3) между коэффициентами исходного и приведенного уравнений, утверждение теоремы 1

достаточно доказать для приведенных стратов. Итак, рассмотрим приведенный страт $\mathcal{M}_{01}^3$, т.е. страт дискриминантного множества ∇_{01} , отвечающий за наличие корней кратности ≥ 3 у приведенного уравнения

$$1 + y + z_2 y^2 + z_3 y^3 + z_4 y^4 = 0.$$

В соответствии с формулой (6) параметризация $\Psi_{01}(s)$ дискриминантного множества ∇_{01} этого уравнения следующая:

$$\begin{aligned} z_2 &= s_2(s_2 + 2s_3 + 3s_4)^1(-2s_2 - 3s_3 - 4s_4)^{-2}, \\ z_3 &= s_3(s_2 + 2s_3 + 3s_4)^2(-2s_2 - 3s_3 - 4s_4)^{-3}, \\ z_4 &= s_4(s_2 + 2s_3 + 3s_4)^3(-2s_2 - 3s_3 - 4s_4)^{-4}. \end{aligned}$$

Прямая $L_{01}^1 \subset \mathbb{CP}^2$ ее критических точек задается уравнением $s_2 + 3s_3 + 6s_4 = 0$. Поэтому страт $\mathcal{M}_{01}^3$, определяемый сужением $\Psi_{01}|_{L_{01}^1}$, задается в однородных координатах $s' = (s_3 : s_4)$ указанной прямой параметризацией

$$\begin{aligned} z_2 &= (-3s_3 - 6s_4)(-s_3 - 3s_4)^1(3s_3 + 8s_4)^{-2}, \\ z_3 &= s_3(-s_3 - 3s_4)^2(3s_3 + 8s_4)^{-3}, \\ z_4 &= s_4(-s_3 - 3s_4)^3(3s_3 + 8s_4)^{-4}. \end{aligned}$$

Фигурирующие здесь пять линейных функций определяют своими коэффициентами матрицу

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 8 \\ -3 & -6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мономиальное отображение $M: (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (w_3, w_4)$, действующее по формуле

$$w_3 = z_3 z_2^{-3}, \quad w_4 = z_4 z_2^{-6},$$

преобразует параметризацию $\mathcal{M}_{01}^3$ в отображение

$$\begin{aligned} w_3 &= s_3^1 s_4^0 (-3s_3 - 6s_4)^{-3} (-s_3 - 3s_4)^{-1} (3s_3 + 8s_4)^3, \\ w_4 &= s_3^0 s_4^1 (-3s_3 - 6s_4)^{-6} (-s_3 - 3s_4)^{-3} (3s_3 + 8s_4)^8, \end{aligned}$$

имеющее вид $w = (Bs')^B$. Такое отображение параметризует приведенное A -дискриминантное множество. Чтобы определить A , достаточно указать левый целочисленный аннулятор матрицы B размера 3×5 , у которого первая строка состоит из единиц, а вектор-столбцы порождают решетку $\mathbb{Z}^3$. В качестве такого аннулятора можно взять

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, по теореме Капранова (см. п. 1.1) $w = (Bs')^B$ параметризует приведенное A -дискриминантное множество уравнения

$$a_{10}y_1 + a_{01}y_2 + a_{00} + a_{31}y_1^3y_2 + a_{63}y_1^6y_2^3 = 0.$$

Соответствующее приведение этого уравнения получается фиксацией $a_{10} = a_{01} = a_{00} = 1$ и обозначениями $a_{31} =: w_3$, $a_{63} =: w_4$.

Отметим, что здесь аннулятор A матрицы B выбирался с условием неотрицательности его элементов. В общей схеме, которой мы будем следовать, аннулятор матрицы B для данного примера представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -8 \end{pmatrix},$$

отличающейся от A умножением на унимодулярную (3×3) -матрицу.

Следующая лемма обобщает приведенное наблюдение. В ней $p, q, i_0, \dots, i_{j-1}$ — любая последовательность попарно различных чисел из $\{0, 1, \dots, n\}$, причем $1 \leq j \leq n - 2$.

ЛЕММА 8. *Рассмотрим два набора переменных*

$$z = (z_i), \quad i \neq p, q, \quad w = (w_k), \quad k \neq p, q, i_0, \dots, i_{j-1}.$$

Отображение $M: (\mathbb{C}^)_z^{n-1} \rightarrow (\mathbb{C}^*)_w^{n-1-j}$, определенное формулой*

$$w_k = z_k \prod_{\nu=0}^{j-1} z_{i_\nu}^{-\frac{(k-p)(k-q)}{(i_\nu-p)(i_\nu-q)}} \prod_{m \neq \nu} \frac{k-i_m}{i_\nu-i_m}, \quad k \neq p, q, i_0, \dots, i_{j-1}, \quad (29)$$

преобразует параметризацию страта $\mathcal{M}_{pq}^{j+2}$ к виду $w = (Bs')^B$, где B — рациональная $(n+1) \times (n-1-j)$ -матрица ранга $(n-1-j)$, у которой сумма строк нулевая, а $s' = (s_k)$, $k \neq p, q, i_0, \dots, i_{j-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Страт $\mathcal{M}_{pq}^{j+2}$ параметризуется сужением отображения Ψ_{pq} на L_{pq}^j . Согласно лемме 7 композиция $M \circ \Psi_{pq}|_{L_{pq}^j}$ преобразования (29) с параметризацией страта $\mathcal{M}_{pq}^{j+2}$ следующая:

$$w_k = s_k \prod_{\nu=0}^{j-1} s_{i_\nu}^{-\frac{(k-p)(k-q)}{(i_\nu-p)(i_\nu-q)}} \prod_{m \neq \nu} \frac{k-i_m}{i_\nu-i_m} \times s_p^{\frac{k-q}{q-p} - \sum_{\nu=0}^{j-1} \frac{(k-p)(k-q)}{(q-p)(i_\nu-p)}} \prod_{m \neq \nu} \frac{k-i_m}{i_\nu-i_m} \frac{p-k}{q-p} + \sum_{\nu=0}^{j-1} \frac{(k-p)(k-q)}{(q-p)(i_\nu-q)} \prod_{m \neq \nu} \frac{k-i_m}{i_\nu-i_m}, \quad (30)$$

где s_{i_ν} , s_p и s_q выражаются через s' по формулам (26), (27) и (28).

Покажем, что параметризация (30) имеет вид $(Bs')^B$, т.е. что в выражении (30) для w_k степень каждой из линейных функций s_{i_ν} , s_p , s_q равна коэффициенту функции при s_k . Для s_{i_ν} это сразу видно из формулы (26). Что касается коэффициента функции s_p , то в силу (27) следует убедиться в равенстве двух многочленов от k :

$$\frac{k-q}{q-p} \prod_{m=0}^{j-1} \frac{i_m-k}{i_m-p} = \frac{k-q}{q-p} - \sum_{\nu=0}^{j-1} \frac{(k-p)(k-q)}{(q-p)(i_\nu-p)} \prod_{m \neq \nu} \frac{k-i_m}{i_\nu-i_m}. \quad (31)$$

Левый многочлен имеет степень $j + 1$, а правый – не выше $j + 1$. При этом каждый из $j + 1$ различных корней $k = q, i_0, \dots, i_{j-1}$ левого многочлена является корнем правого многочлена. Действительно, при $k = i_\sigma$ правый многочлен равен нулю:

$$\frac{i_\sigma - q}{q - p} - \sum_{\nu=0}^{j-1} \frac{(i_\sigma - p)(i_\sigma - q)}{(q - p)(i_\sigma - p)} \prod_{m \neq \nu} \frac{i_\sigma - i_m}{i_\nu - i_m} = 0$$

(здесь слагаемое с номером $\nu = \sigma$ равно $\frac{(i_\sigma - q)}{(q - p)}$, а все остальные – нулевые).

Сравнивая значения этих многочленов при $k = p$, делаем вывод, что они совпадают. Также доказывается аналогичное равенство для s_q .

Наличие множителя s_k в (30) говорит о том, что матрица $B = (b_{jk})$, где $j \in [n]$, $k \in [n] \setminus \{p, q, i_0, \dots, i_{j-1}\}$, имеет единичную подматрицу размера $n - 1 - j$, состоящую из строк $b_j = (b_{jk})$ с номерами $j \in [n] \setminus \{p, q, i_0, \dots, i_{j-1}\}$. Поэтому $\text{rang } B = n - j - 1$.

Наконец, докажем, что сумма строк матрицы B нулевая. Для этого вспомним, что $\Psi_{pq}(s) = (B_{pq}s)^{B_{pq}}$, где B_{pq} – матрица размера $(n+1) \times (n-1)$ с нулевой суммой строк. Последнее означает, что $\mathbf{1} \cdot B_{pq} = 0$, где $\mathbf{1}$ – вектор из $n + 1$ единиц. Из равенства $M \circ \Psi_{pq}|_{L_{pq}^j} = (Bs')^B$ следует, что $B = B_{pq} \cdot C$, где C есть $(n - 1) \times (n - j - 1)$ -матрица из показателей отображения (29). Отсюда получаем, что $\mathbf{1} \cdot B = (\mathbf{1} \cdot B_{pq}) \cdot C = 0$, т.е. что сумма строк матрицы B также нулевая. Лемма 8 доказана.

ЛЕММА 9. Если набор $p, q, i_0, \dots, i_{j-1}$ можно упорядочить в последовательность, у которой начиная со второго каждое число отличается на единицу от предыдущего, то отображение (29) мономиальное и оно переводит $\mathcal{M}_{pq}^{j+2}$ в приведенное A_{j+2} -дискриминантное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем мономиальность (29); это означает, что в условиях леммы показатели в выражении (30) при s_{i_ν}, s_p, s_q являются целыми. Для рассмотрения случая функции s_p расположим числа $i_0, \dots, i_{j-1}, q$ в порядке возрастания, обозначив их $b_0 < b_1 < \dots < b_j$. В этих обозначениях ввиду равенства (31) в (30) степень s_p лишь знаком отличается от произведения $\prod_{m=0}^j \frac{b_m - k}{b_m - p}$. По условию леммы найдется такой номер τ , что в последовательности $b_0 < b_1 < \dots < b_{\tau-1} < p < b_\tau < \dots < b_j$ каждое число больше предыдущего на единицу. Следовательно, произведение $\prod_{m=0}^j \frac{b_m - k}{b_m - p}$ представляется в виде произведения дробей:

$$\frac{(b_0 - k) \cdots (b_{\tau-1} - k)}{(-1)^\tau \tau!} \frac{(b_\tau - k) \cdots (b_j - k)}{(j + 1 - \tau)!} \quad (32)$$

(при $p = 0$ вместо двух дробей будет одна). Поскольку в последнем выражении либо $k < b_0$, либо $k > b_j$, такое произведение дробей с точностью до знака равно произведению чисел сочетаний $C_{|b_{\tau-1}-k|}^\tau \cdot C_{|b_j-k|}^{j+1-\tau}$, т.е. является целым числом. Для степени s_q рассуждения аналогичные.

Теперь докажем, что в условиях доказываемой леммы степень s_{i_ν} , т.е. выражение

$$-\frac{(k-p)(k-q)}{(i_\nu-p)(i_\nu-q)} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq \nu}}^{j-1} \frac{k-i_m}{i_\nu-i_m}, \quad (33)$$

является целым числом. По такой же схеме для каждого ν составим из чисел $i_0, \dots, [i_\nu], \dots, i_{j-1}, p, q$ возрастающую последовательность $b_0 < b_1 < \dots < b_j$ и запишем (33) в виде произведения $-\prod_{m=0}^j \frac{k-b_m}{i_\nu-b_m}$. Снова образуем возрастающую последовательность $b_0 < \dots < b_{\tau-1} < i_\nu < b_\tau < \dots < b_j$, в которой каждое число на единицу больше предыдущего. В результате выражение (33) с точностью до знака приобретет вид (32), поэтому оно принимает целые значения.

Таким образом, по теореме Капранова получаем, что (30) параметризует приведенное A_{j+2} -дискриминантное множество уравнения (2), где набор показателей составляет целочисленную матрицу $A_{j+2} = \{\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^n\} \subset \mathbb{Z}^{j+1}$, являющуюся левым аннулятором ранга $j+1$ матрицы B . Осталось заметить, что в наших условиях отображение (29) мономиальное, так как его показатели совпадают с (33), и потому – целые. Лемма 9 доказана.

Для доказательства теоремы 1 достаточно заметить, что удовлетворяющие условию леммы 9 наборы $p, q, i_0, \dots, i_{j-1}$ существуют. Например, такими являются наборы $0, 1, 2, \dots, j+1$. В этом случае формулы (26)–(28) можно записать так:

$$s_m = - \sum_{i=j+2}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{j+1} \frac{i-k}{m-k} s_i, \quad m = 0, \dots, j+1.$$

Здесь произведение можно переписать в терминах биномиальных коэффициентов в следующем виде:

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{j+1} \frac{i-k}{m-k} &= (-1)^{j-m} \frac{i(i-1) \cdots (i-m+1)}{m!} \frac{(i-m-1)(i-m-2) \cdots (i-j-1)}{(j+1-m)!} \\ &= (-1)^{j-m} C_i^m C_{i-m-1}^{i-j-2}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к следующему выражению для матрицы B :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{C_{j+1}^0 C_{j+2}^0}{(-1)^j} & \frac{C_{j+2}^1 C_{j+3}^0}{(-1)^j} & \cdots & \frac{C_{n-1}^{n-j-2} C_n^0}{(-1)^j} \\ \frac{C_j^0 C_{j+2}^1}{(-1)^{j+1}} & \frac{C_{j+1}^1 C_{j+3}^1}{(-1)^{j+1}} & \cdots & \frac{C_{n-2}^{n-j-2} C_n^1}{(-1)^{j+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1^0 C_{j+2}^j & C_2^1 C_{j+3}^j & \cdots & C_{n-j-1}^{n-j-2} C_n^j \\ -C_{j+2}^{j+1} & -C_{j+3}^{j+1} & \cdots & -C_n^{j+1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве ее левого аннулятора служит матрица

$$A_{j+2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{C_{j+1}^0 C_{j+2}^0}{(-1)^{j+1}} & \frac{C_{j+2}^1 C_{j+3}^0}{(-1)^{j+1}} & \dots & \frac{C_{n-1}^{n-j-2} C_n^0}{(-1)^{j+1}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \frac{C_j^0 C_{j+2}^1}{(-1)^j} & \frac{C_{j+1}^1 C_{j+3}^1}{(-1)^j} & \dots & \frac{C_{n-2}^{n-j-2} C_n^1}{(-1)^j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -C_1^0 C_{j+2}^j & -C_2^1 C_{j+3}^j & \dots & -C_{n-j-1}^{n-j-2} C_n^j \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что скалярное произведение каждой строки матрицы A_{j+2} с любым столбцом матрицы B состоит лишь из двух слагаемых, равных по абсолютной величине и имеющих противоположные знаки.

Список литературы

- [1] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Math. Theory Appl., Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994, x+523 pp.
- [2] M. M. Kapranov, “A characterization of A -discriminantal hypersurfaces in terms of the logarithmic Gauss map”, *Math. Ann.*, **290**:1 (1991), 277–285.
- [3] *Algebraic statistics for computational biology*, eds. L. Pachter, B. Sturmfels, Cambridge Univ. Press, New York, 2005, xii+420 pp.
- [4] B. Sturmfels, “Open problems in algebraic statistics”, *Emerging applications of algebraic geometry*, IMA Vol. Math. Appl., **149**, Springer, New York, 2009, 351–363.
- [5] J. Huh, *Discriminants, Horn uniformization, and varieties with maximum likelihood degree one*, arXiv:1301.2732v2.
- [6] M. Passare, A. Tsikh, “Algebraic equations and hypergeometric series”, *The legacy of Niels Henrik Abel*, Springer, Berlin, 2004, 653–672.
- [7] И. А. Антипова, А. К. Цих, “Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n переменных”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:5 (2012), 29–56; англ. пер.: I. A. Antipova, A. K. Tsikh, “The discriminant locus of a system of n Laurent polynomials in n variables”, *Izv. Math.*, **76**:5 (2012), 881–906.
- [8] И. А. Антипова, Е. Н. Михалкин, “Аналитические продолжения общей алгебраической функции с помощью рядов Пуизо”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **279**, МАИК, М., 2012, 9–19; англ. пер.: I. A. Antipova, E. N. Mikhalkin, “Analytic continuations of a general algebraic function by means of Puiseux series”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **279**:1 (2012), 3–13.
- [9] M. Passare, A. Tsikh, “Amoebas: their spines and their contours”, *Idempotent mathematics and mathematical physics*, Contemp. Math., **377**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 275–288.
- [10] G. Mikhalkin, “Real algebraic curves, the moment map and amoebas”, *Ann. of Math.* (2), **151**:1 (2000), 309–326.
- [11] Н. А. Бушуева, А. К. Цих, “Об амебах алгебраических множеств высших размерностей”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **279**, МАИК, М., 2012, 59–71; англ. пер.: N. A. Bushueva, A. K. Tsikh, “On amoebas of algebraic sets of higher codimension”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **279**:1 (2012), 52–63.

- [12] И. А. Антипова, “Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений”, *Матем. сб.*, **198**:4 (2007), 3–20; англ. пер.: I. A. Antipova, “Inversion of many-dimensional Mellin transforms and solutions of algebraic equations”, *Sb. Math.*, **198**:4 (2007), 447–463.

Евгений Николаевич Михалкин

(**Evgenii N. Mikhalkin**)

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

E-mail: mikhalkin@bk.ru

Поступила в редакцию

05.03.2014 и 30.09.2014

Август Карлович Цих

(**Avghust K. Tsikh**)

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

E-mail: atsikh@sfu-kras.ru