Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Егоров, О задаче Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 4, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8357>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:13:40

УДК 517.957

Ю. В. Егоров

О задаче Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения

Мы доказываем существование бесконечного множества решений краевой задачи Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения второго порядка. Такая задача для нелинейного эллиптического уравнения с оператором Лапласа изучалась ранее М. А. Красносельским, А. Бари, А. Берестичким, П. Л. Лионсом, П. Рабиновичем, М. Струве и др. Мы изучаем спектр этой задачи и доказываем слабую сходимости к 0 последовательности нормированных собственных функций. Кроме того, мы получаем оценки “коэффициентов Фурье” для функций из $W_{p,0}^1(\Omega)$. Это позволяет усилить основные результаты предшествующих работ.

Библиография: 8 названий.

Ключевые слова: нелинейное эллиптическое уравнение, задача Дирихле, собственные функции.

DOI: 10.4213/sm8357

§ 1. Введение

В этой работе мы изучаем задачу Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения второго порядка.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с границей Γ из класса C^1 , $N > p$. Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta_p u = |u|^{q-2}u + f(x) \quad \text{в } \Omega, \quad \Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (1)$$

где

$$2 \leq p < q < p^*, \quad p^* \equiv \frac{Np}{N-p}.$$

Такая задача при $p = 2$ изучалась ранее в работах М. А. Красносельского, А. Бари, А. Берестичкого, П. Л. Лионса, П. Рабиновича, М. Струве и др. (см. [1]–[6] и библиографии в этих работах). Основная цель этих работ состоит в доказательстве существования бесконечного числа решений для любой функции f из пространства $L_2(\Omega)$.

В том случае, когда $f = 0$, существование бесконечного числа решений при $q < pN/(N-p)$ можно вывести из теоремы Люстерника–Шнирельмана, поскольку такая задача сводится к исследованию критических точек четного функционала.

М. А. Красносельский развил теорию возмущений четного функционала (см. [1]), с помощью которой можно изучать более общую задачу (1). Его построения использованы в работе А. Бари и А. Берестичкого [2] для изучения

задачи (1) в случае $p = 2$. Наиболее сильный результат в этом направлении получен в работе А. Бари и П. Лионса [3], где доказано существование бесконечного числа решений при $p = 2$, $1 < q < (2N - 2)/(N - 2)$. В работе [4] А. Бари доказал существование бесконечного числа решений при $p = 2$, $1 < q < 2N/(N - 2)$ для множества функций f , которое является пересечением счетного множества всюду плотных подмножеств в пространстве $H^{-1}(\Omega)$. При этом, однако, неизвестно, содержит ли это множество хоть одну функцию из пространства $L_2(\Omega)$, отличную от нулевой.

Мы доказываем в этой работе слабую сходимую к нулю последовательности нормированных собственных функций данной нелинейной эллиптической краевой задачи. Это позволяет, в частности, доказать существование бесконечного множества решений у соответствующей неоднородной краевой задачи при $q \leq p(N - 1)/(N - p)$ для функций f из пространства $L_2(\Omega)$. Кроме того, мы доказываем существование бесконечного множества решений задачи (1) при $q < pN/(N - p)$ для всех функций f из пространства $W_{p,0}^1(\Omega)$.

Отметим, что в силу известного тождества С. И. Похожаева при $p = 2$, $q \geq 2N/(N - 2)$ решение не существует, если область является звездной относительно некоторой своей точки. То же верно при $p > 2$, $q \geq pN/(N - p)$, что было доказано в работе М. Отани [7].

§ 2. Нелинейные собственные функции

Положим

$$J[u] = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p} |\nabla u|^p - \frac{1}{q} |u|^q \right) dx, \quad I[u] = J[u] - \int_{\Omega} f u dx.$$

Как известно, критические точки функционала I в пространстве $W_{p,0}^1(\Omega)$ являются решениями задачи (1).

ТЕОРЕМА 1. *Если $2 \leq p < q < p^*$, то существует такая последовательность критических точек v_n функционала J в пространстве $W_{p,0}^1(\Omega)$, что $J[v_n] = b_n \rightarrow \infty$. Существуют такие положительные числа C_1, C_2 , что для всех $n \in \mathbb{N}$*

$$C_1 n^{\frac{pq}{(q-p)N}} \leq b_n \leq C_2 n^{\frac{pq}{(q-p)N}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что для каждого $u \in W_{p,0}^1(\Omega)$, не равного 0, мы имеем

$$\sup_{t>0} J(tu) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) F[u], \quad F[u] \equiv \frac{\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{q}{q-p}}}{\left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{p}{q-p}}}.$$

Критические значения функционала J в пространстве $W_{p,0}^1(\Omega)$ взаимно однозначно соответствуют критическим значениям функционала F на единичной сфере в пространстве $W_{p,0}^1(\Omega)$.

Существование бесконечной последовательности критических точек u_n для F на единичной сфере в $W_{p,0}^1(\Omega)$ может быть доказано с помощью конструкции Люстерника–Шнирельмана. Значения $b_n = F[u_n]$ оцениваются ниже с помощью результатов работы А. Бари и П. Лионса [3] и метода сравнения, как это делается в книге [8] Куранта–Гильберта.

Пусть M_k – это множество всех образов $C = g(S^k)$ на единичной сфере S пространства $W_{p,0}^1(\Omega)$, где g – нечетное непрерывное отображение единичной сферы S^k пространства $\mathbb{R}^{k+1}$ в S такое, что $g(-x) = -g(x)$.

Пусть

$$b_k = \inf_{C \in M_k} \max_{u \in C} F[u].$$

Покажем, что критические значения b_k изолированы. Если $b = b_k$ – одно из этих значений и $u = u_k$ – соответствующая нормированная собственная функция, то

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{q-2} u, \quad \int_{\Omega} |u|^q dx = 1, \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx = \lambda = b^{\frac{q-p}{q}}.$$

Если b не изолировано, то существует последовательность b_n критических значений, сходящаяся к b , и последовательность u_n соответствующих собственных функций такие, что

$$-\Delta_p u_n = \lambda_n |u_n|^{q-2} u_n, \quad \int_{\Omega} |u_n|^q dx = 1, \quad \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx = \lambda_n = b_n^{\frac{q-p}{q}}.$$

Можно показать, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n - u}{\lambda_n - \lambda} = v$$

и $v = 0$ на Γ , причем

$$p \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = 1, \quad \int_{\Omega} |u|^{q-2} uv dx = 0, \\ -(p-1) \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla v) = \lambda(q-1) |u|^{q-2} v + |u|^{q-2} u.$$

Умножая последнее уравнение на u и интегрируя по Ω , мы получаем, что

$$(p-1) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \lambda(q-1) \int_{\Omega} |u|^{q-2} uv dx + \int_{\Omega} |u|^q dx.$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega} |u|^q dx = 1 - \frac{1}{p},$$

что невозможно.

Заметим, что все сказанное выше остается справедливым, если краевое условие $u = 0$ заменить условием Неймана $\partial u / \partial \nu = 0$ на Γ .

Рассмотрим функционал

$$F_{\omega}[u] = \frac{\left(\int_{\omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{q}{q-p}}}{\left(\int_{\omega} |u|^q dx \right)^{\frac{p}{q-p}}}, \quad u \in W_{p,0}^1(\omega),$$

где $\omega \subset \Omega$. Положительные критические значения $b_k(\omega)$ этого функционала достигаются на решениях уравнения

$$-\Delta_p u = \lambda_k |u|^{q-2} u \quad \text{в } \omega, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\omega,$$

для которых

$$\int_{\omega} |\nabla u|^p dx = 1, \quad \int_{\omega} |u|^q dx = \lambda_k^{-1}, \quad \lambda_k = b_k(\omega)^{\frac{q-p}{p}}.$$

Из определения видно, что если $\omega_1 \subset \omega_2$, то

$$b_k(\omega_1) \geq b_k(\omega_2)$$

для всех натуральных k .

Рассмотрим множество кубов Q_h с длиной ребра h , покрывающих $\mathbb{R}^N$, образованных плоскостями $x_j = k_j h$, $j = 1, \dots, N$, $k_j \in \mathbb{Z}$. Пусть Ω' – подмножество Ω , состоящее из точек всех кубов $Q_1, \dots, Q_m$, лежащих целиком в Ω . Пусть Ω'_0 – открытое множество, полученное из Ω' отбрасыванием точек, принадлежащих плоскостям $x_j = k_j h$, $j = 1, \dots, N$, $k_j \in \mathbb{Z}$. Мы имеем $|\Omega| = m h^N + o(1)$ для малых h .

Для каждого куба Q_i минимальное критическое значение функционала F в $W_{p,0}^1(Q_i)$ равно

$$c_h = c h^{N - \frac{pq}{q-p}},$$

где c – соответствующее минимальное критическое значение в единичном кубе Q_0 . Поэтому, если $u = 0$ в r кубах Q_i , $r > 0$, а в каждом из остальных такова, что на ней достигается минимальное критическое значение b_h в пространстве $W_{p,0}^1(Q_i)$ для этого куба, то

$$F[u] = \frac{\left(r \int_{Q_1} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{q}{q-p}}}{\left(r \int_{Q_1} |u|^q dx \right)^{\frac{p}{q-p}}} = r c_h.$$

Из определения легко выводятся следующие неравенства:

$$b_m(\Omega'_0) \geq b_m(\Omega') \geq b_m(\Omega).$$

Поэтому

$$b_m(\Omega) \leq m c h^{N - \frac{pq}{q-p}} \leq C m^{\frac{pq}{N(q-p)}}.$$

Так как m может быть произвольным вместе с h , оценка сверху доказана.

Для доказательства оценки *снизу* рассмотрим функционал

$$F_2[u] \equiv \frac{\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{q}{q-2}}}{\left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{2}{q-2}}}.$$

Пусть c_n – критические значения функционала F_2 . А. Бари и П. Лионс доказали в статье [3] оценку

$$c_n \geq C_1 n^{\frac{2q}{(q-2)N}}.$$

По неравенству Гёльдера

$$F[u] \geq F_2[u]^{\frac{q-2}{2} \frac{p}{q-p}}.$$

Поэтому для всех n

$$b_n \geq c_n^{\frac{q-2}{2} \frac{p}{q-p}} \geq C_2 n^{\frac{pq}{(q-p)N}}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p < q$, $2 \leq q < p^*$. Существует такая бесконечная последовательность $\{v_n\}$ критических точек функционала F , что

$$F[v_n] = b_n \rightarrow \infty, \quad \|v_n\|_{L_2(\Omega)} = 1, \quad G[v_n] \leq C b_n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}},$$

где

$$G[v] \equiv \frac{\|v\|_{W_{p,0}^{-1}(\Omega)}}{\|v\|_{L_q(\Omega)}},$$

и

$$\|v\|_{W_{p,0}^{-1}(\Omega)} \equiv \sup_{g \in W_{p,0}^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} v g \, dx}{\|g\|_{W_{p,0}^1(\Omega)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b_n(\omega)$ положительные критические значения функционала

$$F_{\omega}[u] = \frac{\left(\int_{\omega} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{q}{q-p}}}{\left(\int_{\omega} |u|^q \, dx \right)^{\frac{p}{q-p}}}, \quad u \in W_{p,0}^1(\omega),$$

где $\omega \subset \Omega$.

Рассмотрим множество кубов Q_h с длиной ребра h , покрывающих $\mathbb{R}^N$ и образованных плоскостями $x_j = k_j h$, $j = 1, \dots, N$, $k_j \in \mathbb{Z}$. Пусть Ω' – подмножество Ω , состоящее из точек всех кубов $Q_1, \dots, Q_m$, лежащих целиком в Ω . Пусть Ω'_0 – открытое множество, полученное из Ω' отбрасыванием точек, принадлежащих плоскостям $x_j = k_j h$, $j = 1, \dots, N$, $k_j \in \mathbb{Z}$. Мы имеем $|\Omega| = m h^N + o(1)$ для малых h .

Для каждого куба Q_i минимальное критическое значение функционала F в $W_{p,0}^1(Q_i)$ равно

$$b_h = b h^{N - \frac{pq}{q-p}},$$

где b – соответствующее минимальное критическое значение в единичном кубе Q_0 . При этом соответствующее значение функционала F равно

$$d_h = d h^{1+N(1-\frac{1}{q}-\frac{1}{p})},$$

где d – соответствующее значение в единичном кубе Q_0 .

Пусть $B(\lambda, \omega)$, $\omega \subset \Omega$, – это число критических значений b_k функционала F_ω в пространстве $W_{p,0}^1(\omega)$, не превосходящих λ и таких, что для функции u , на которой это значение достигается, выполнено неравенство

$$G[u] \leq CF[u]^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}.$$

Если ω_1 и ω_2 – это подобласти ω_0 , которые не пересекаются, то

$$B(\lambda, \omega_1) + B(\lambda, \omega_2) \leq B(\lambda, \omega_0), \quad (2)$$

где $B(\lambda, \omega_j)$ – это число критических значений b_k функционала F в пространстве $W_{p,0}^1(\omega_j)$, меньших λ , $j = 0, 1, 2$, и таких, что для функций u_j , на которых эти значения достигаются, выполнены неравенства

$$G[u_j] \leq CF[u_j]^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}.$$

В самом деле, неравенство (2) выполняется, поскольку в левой части участвуют собственные функции, равные нулю на границах множеств ω_1 и ω_2 , а в правой части присутствуют собственные функции, равные нулю только на границе множества ω_0 .

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^m B(\lambda, Q_i) \leq B(\lambda, \Omega).$$

Если $u = 0$ в $m - r$ кубах Q_i , $0 < r \leq m$, а в каждом из остальных таково, что на ней достигается минимальное критическое значение b_h в пространстве $W_{p,0}^1(Q_i)$ для этого куба, то

$$F[u] = \frac{\left(r \int_{Q_1} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{q}{q-p}}}{\left(r \int_{Q_1} |u|^q dx \right)^{\frac{p}{q-p}}} = b_r = r b_h, \quad G[u] = d_r = r^{1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} d_h.$$

Проверим, что для этих значений выполнены неравенства

$$G[u] \leq CF[u]^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}.$$

Имеем

$$b_r = r b_0 h^{N - \frac{pq}{q-p}}, \quad d_r = d_0 r^{1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} h^{1 + N(1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{p})}.$$

Надо проверить, что

$$d_r \leq C_1 b_r^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \quad \text{для } 1 \leq r \leq m = Ch^{-N}$$

или

$$r^{1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} h^{1 + N(1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \leq C_2 r^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} h^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})(\frac{pq}{q-p} - N)}.$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$r^{1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \leq C_3 h^{-N(1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})},$$

которое выполнено, поскольку $r \leq Ch^{-N}$, $q > 2$.

Если $\lambda \leq b h^{N - \frac{pq}{q-p}}$, то для каждого куба Q_i может существовать только одно положительное критическое значение, меньшее или равное λ , так что

$$B(\lambda, \Omega) \geq m \geq c_1 |\Omega| h^{-N}$$

для малых h , и $c_1 > 0$. Более того, $|\Omega| = m h^N + o(1)$ при $h \rightarrow 0$. Следовательно,

$$b_m \leq C h^{N - \frac{pq}{q-p}} \leq C_1 m^{\frac{pq}{(q-p)N} - 1}.$$

Таким образом, мы имеем $B(\lambda, \Omega) \geq m$, а так как m выбрано произвольно, теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < p < q$, $2 \leq q < p^*$. Существует такая бесконечная последовательность решений $\{v_n\}$ краевой задачи

$$-\Delta_p v_n = \lambda_n |v_n|^{q-2} v_n \quad \text{в } \Omega, \quad v_n = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

что $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ и

$$\|v_n\|_{L_2(\Omega)} \leq C,$$

причем $\lambda_n \rightarrow \infty$ и $\{v_n\}$ слабо сходится к 0 в $L_2(\Omega)$, когда $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результат сразу следует из теоремы 2 и следующего критерия слабой сходимости в гильбертовом пространстве.

ЛЕММА 1. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство и $\{u_n\}$ – некоторая бесконечная последовательность элементов пространства H таких, что $\|u_n\| \leq C$. Последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится к 0, т.е. $(f, u_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $f \in H$, тогда и только тогда, когда $(u_n, u_k) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого натурального k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия следует из определения слабой сходимости.

Для доказательства достаточности рассмотрим подпространство H' пространства H , порожденное элементами $\{u_n\}$. В этом пространстве линейные комбинации элементов $\{u_n\}$ образуют всюду плотное подмножество. Для каждого элемента v этого подмножества имеем $(v, u_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $\{u_n\}$ слабо сходится к 0 в H' , а потому и в H .

§ 3. Неоднородная краевая задача

ТЕОРЕМА 4. Пусть $2 \leq p < N$, $p < q \leq \frac{p(N-1)}{N-p}$ и $f \in L_2(\Omega)$. Тогда краевая задача (1) имеет бесконечное множество решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решения краевой задачи (1) – это критические точки функционала I . Функционал J имеет бесконечное множество таких критических точек u_n , что $b_n \equiv J[u_n] \rightarrow \infty$. По теореме 1 имеем

$$b_n \geq C_1 n^{\frac{pq}{(q-p)N}}.$$

Поэтому существует такая постоянная $C > 0$, что для бесконечного множества значений n справедливо неравенство

$$|b_{n+1} - b_n| > C b_n^{1 - \frac{N(q-p)}{pq}}$$

(см., например, [2; лемма 5.3]). Поскольку

$$\left| \int_{\Omega} f u_n dx \right| < c_1 b_n^{\frac{1}{q}},$$

где c_1 не зависит от n , тогда если выполнено неравенство

$$\frac{1}{q} < 1 - \frac{N(q-p)}{pq},$$

или, эквивалентно, $q(N-p) < p(N-1)$, то существует критическое значение функционала I в (b_n, b_{n+1}) .

Если

$$q = \frac{p(N-1)}{N-p},$$

то мы используем слабую сходимость. Именно, положим

$$v_n = \left[\frac{q-p}{pq b_n} \right]^{1/q} u_n,$$

так что $\|v_n\|_{L_q(\Omega)} = 1$ и

$$-\Delta_p v_n = \lambda_n |v_n|^{q-2} v_n \quad \text{в } \Omega, \quad v_n = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad \lambda_n = \left[\frac{pq b_n}{q-p} \right]^{\frac{q-p}{q}}.$$

По теореме 3 последовательность v_n слабо сходится к 0 в $L_2(\Omega)$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\left| \int_{\Omega} f(x) v_n(x) dx \right| < \varepsilon,$$

если $n > n_0$ и n_0 достаточно велико. Поэтому

$$\left| \int_{\Omega} f(x) u_n(x) dx \right| < c \varepsilon b_n^{1/q},$$

если $n > n_0$, с постоянной c , не зависящей от n . Как показано в работе [2], из теоремы 1 следует, что для бесконечного множества значений n мы имеем

$$|J[u_n] - J[u_{n+1}]| > C b_n^{1/q}$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от n , и поэтому существует критическое значение функционала I между b_n и b_{n+1} . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. А. Бари и П. Л. Лионс доказали в [3], что теорема 4 верна при

$$p = 2, \quad 1 < q < \frac{2N-2}{N-2}.$$

В этом случае мы добавляем только значение

$$q = \frac{2N-2}{N-2}.$$

Из теоремы 1 видно, что этим методом нельзя продвинуться дальше (хотя возможно, что теорема 4 верна при $q < p^*$).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $2 \leq p < N$, $p < q < \frac{Np}{N-p}$ и $f \in W_{p,0}^1(\Omega)$. Тогда краевая задача (1) имеет бесконечное множество решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решения краевой задачи (1) – это критические точки функционала I . Функционал J имеет бесконечное множество таких критических точек u_n , что $b_n \equiv J[u_n] \rightarrow \infty$. Поскольку по теореме 2

$$\left| \int_{\Omega} f(x) u_n(x) dx \right| \leq \|f\|_{W_{p,0}^1(\Omega)} \|u_n\|_{W_{p,0}^{-1}(\Omega)} \leq C b_n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$$

для бесконечного множества значений n , и для бесконечного множества значений n справедливо неравенство

$$|b_{n+1} - b_n| > C b_n^{1 - \frac{N(q-p)}{pq}},$$

а

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} < 0 < 1 - \frac{N(q-p)}{pq},$$

тогда для бесконечного множества значений n существует критическое значение функционала I в (b_n, b_{n+1}) . Теорема доказана.

Список литературы

- [1] М. А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, Гостехиздат, М., 1956, 392 с.; англ. пер.: М. А. Krasnosel'skii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, A Pergamon Press Book The Macmillan Co., New York, 1964, xi+395 pp.
- [2] A. Bahri, H. Berestycki, "A perturbation method in critical point theory and applications", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **267**:1 (1981), 1–32.
- [3] A. Bahri, P. L. Lions, "Morse index of some min-max critical points. I. Application to multiplicity results", *Comm. Pure Appl. Math.*, **41**:8 (1988), 1027–1037.
- [4] A. Bahri, "Topological results on a certain class of functionals and applications", *J. Funct. Anal.*, **41**:3 (1981), 397–427.
- [5] M. Struwe, "Infinitely many critical points for functionals which are not even and applications to superlinear boundary value problems", *Manuscripta Math.*, **32**:3–4 (1980), 335–364.

- [6] P. H. Rabinowitz, “Multiple critical points of perturbed symmetric functionals”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **272**:2 (1982), 753–769.
- [7] M. Ôtani, “A remark on certain nonlinear elliptic equations”, *Proc. Fac. Sci. Tokai Univ.*, **19** (1984), 23–28.
- [8] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, т. 1, ГТТИ, М.–Л., 1933, 528 с.; пер. с нем.: R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, v. I, Grundlehren Math. Wiss., **12**, J. Springer, Berlin, 1931, xiv+469 pp.

Юрий Владимирович Егоров

(Yuriy V. Egorov)

Institute de Mathématique de Toulouse, France

E-mail: egorov@cegetel.net

Поступила в редакцию

10.03.2014 и 12.09.2014