Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Дудов, Систематизация задач по шаровым оценкам выпуклого компакта, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 9, 99–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8358>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:46:58

УДК 519.853

С. И. Дудов

Систематизация задач по шаровым оценкам выпуклого компакта

Рассматривается класс конечномерных задач по оценкам выпуклого компакта шаром произвольной нормы в виде экстремальных задач, целевая функция которых выражается через функцию расстояния до наиболее удаленной точки компакта и функцию расстояния до ближайшей точки компакта или до его дополнения. Особое внимание уделяется задаче об оценке (приближении) в метрике Хаусдорфа выпуклого компакта шаром фиксированного радиуса. Доказано, что она играет роль канонической задачи: решения любой задачи из рассматриваемого класса могут быть выражены решениями этой задачи при некоторых значениях радиуса. На основе изучения и использования свойств решения этой канонической задачи получены диапазоны значений радиуса, в которых она выражает решения задач о вписанном и описанном шарах, задачи о равномерной оценке шаром в метрике Хаусдорфа, задачи об асферичности выпуклого тела, задач о шаровых оболочках наименьшей толщины и наименьшего объема для границы выпуклого тела. Это позволило расположить задачи в порядке возрастания соответствующих значений радиуса.

Библиография: 34 названия.

Ключевые слова: шаровые оценки выпуклого компакта, функции расстояния, метрика Хаусдорфа, асферичность, субдифференциал.

DOI: 10.4213/sm8358

§ 1. Введение

Задачи по оценке сложных множеств множествами простой структуры находят обширные приложения в естествознании, в том числе и в самой математике. Среди них наиболее давнюю историю имеют задачи по оценкам выпуклого компакта с помощью шара некоторой нормы (см., например, [1], [2]).

Содержательность постановок некоторых из рассматриваемых задач предполагает наличие непустой внутренней оцениваемого выпуклого компакта. В этом случае мы, естественно, называем его выпуклым телом.

Математическая формализация таких задач обычно дает экстремальные задачи, целевая функция которых может быть выражена через расстояние до самой удаленной точки компакта, а также через расстояние до ближайшей точки компакта или его дополнения. К подобным задачам можно отнести задачи об описанном и вписанном шарах (далее – задачи о внешней и внутренней оценке шаром), задачу о шаровой оболочке минимальной толщины для границы

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 1.1520.2014/К).

выпуклого тела (см. [1], [3]–[9]). В работах [10]–[13] рассматривалась задача о равномерной оценке (наилучшем приближении) выпуклого компакта шаром в метрике Хаусдорфа. Известна также задача об асферичности выпуклого тела (см. [14]–[17]). Перспективной для приложений представляется задача о шаровой оболочке наименьшего объема для границы выпуклого тела.

Все эти задачи имеют самостоятельное значение. В то же время в конкретных случаях может иметь место пересечение или даже совпадение решений некоторых задач. В связи с этим возникает желание иметь системное представление о взаимосвязи данных задач, а также, в целом, задач данного типа. Это и определило направление проведенного исследования.

Роль основного вспомогательного инструмента для нас будет играть задача об оценке (приближении) в метрике Хаусдорфа заданного выпуклого компакта шаром используемой нормы с фиксированным радиусом. Приведем ее математическую формализацию.

Пусть D – заданный выпуклый компакт из конечномерного действительного пространства $\mathbb{R}^p$, а $n(x)$ – некоторая норма на $\mathbb{R}^p$. Наша задача, которой будет отведена роль канонической задачи с параметром r , имеет вид

$$\varphi(x, r) \equiv h(D, Bn(x, r)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}. \quad (1.1)$$

Здесь

$$Bn(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x - y) \leq r\}$$

– шар нормы $n(\cdot)$ радиуса r и с центром в точке x ,

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} n(x - y), \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} n(x - y) \right\} \quad (1.2)$$

– расстояние Хаусдорфа между множествами A и B , индуцируемое нормой $n(\cdot)$.

В работе [18] было показано, что задача (1.1) своими решениями для значений r из определенных диапазонов выражает решения задач о внешней, внутренней и равномерной оценках выпуклого компакта шаром. На этой основе возникла гипотеза о более широком систематизирующем значении задачи (1.1).

Главная цель настоящей работы – показать, что задача (1.1) является канонической для некоторого класса задач по шаровым оценкам выпуклого компакта (и с помощью параметра r) предложить систематизацию задач этого класса. Исследование проводилось в основном средствами негладкого анализа (см. [19]–[33]).

§ 2. Функции расстояния

В постановке задач по шаровым оценкам множеств основную роль играют функции расстояния до самой удаленной и самой близкой точек множеств. Введем эти функции и отметим некоторые их свойства.

2.1. Расстояние от точки x до самой удаленной в норме $n(\cdot)$ точки компакта D выражает функция

$$R(x) = \max_{y \in D} n(x - y).$$

Известно, что это выпуклая конечная на $\mathbb{R}^p$ функция, субдифференциал которой имеет вид (см., например, [20; гл. 4, § 4])

$$\underline{\partial}R(x) = \text{co}\{\underline{\partial}n(x-z) : z \in Q^R(x, D)\}. \quad (2.1)$$

Здесь $\underline{\partial}n(x)$ – субдифференциал нормы $n(\cdot)$ в точке x , $\text{co} A$ – выпуклая оболочка множества A , $Q^R(x, D) = \{y \in D : R(x) = n(x-y)\}$.

2.2. Расстояние от точки x до ближайшей точки компакта D выражает функция

$$\rho_D(x) = \min_{y \in D} n(x-y).$$

Если компакт D является выпуклым, то функция $\rho_D(x)$ является выпуклой и конечной на $\mathbb{R}^p$, а ее субдифференциал можно выразить формулой (см. [28])

$$\underline{\partial}\rho_D(x) = \underline{\partial}n(x-z) \cap \{-K^+(z, D)\}, \quad (2.2)$$

где z – любая точка из $Q^\rho(x, D) = \{y \in D : \rho_D(x) = n(x-y)\}$ – проекции точки x на D , $K(z, D)$ – конус возможных направлений для D в точке z , K^+ – сопряженный конус к конусу K .

2.3. Нам также будет нужна функция расстояния от точки x до ближайшей точки множества $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p} \setminus D$

$$\rho_\Omega(x) = \min_{y \in \Omega} n(x-y).$$

Если D – выпуклое тело, то эта функция является вогнутой (см., например, [29]) на D , а ее супердифференциал в точке $x \in \text{int } D$ выражает формула (см. [28])

$$\bar{\partial}\rho_\Omega(x) = \text{co}\{\underline{\partial}n(x-z) \cap K^+(z, D) : z \in Q^\rho(x, \Omega)\}, \quad (2.3)$$

где $Q^\rho(x, \Omega) = \{y \in \Omega : \rho_\Omega(x) = n(x-y)\}$.

2.4. Более информативно по сравнению с функцией $\rho_D(x)$ или с функцией $\rho_\Omega(x)$ множество D характеризует функция

$$P(x) = \rho_D(x) - \rho_\Omega(x).$$

Она выражает расстояние от точки x до ∂D – границы множества D , причем с отрицательным знаком, если $x \in \text{int } D$. Впервые эта функция была введена в [30], [31]. Ее свойства для случая евклидовой нормы рассматривались также в [32]. Это так называемое симметризованное расстояние. Если D – выпуклое множество, то функция $P(x)$ выпукла на всем пространстве $\mathbb{R}^p$. В [11] получена формула ее субдифференциала

$$\underline{\partial}P(x) = \begin{cases} \underline{\partial}n(x-z) \cap \{-K^+(z, D)\} & \forall z \in Q^\rho(x, D), & \text{если } x \notin D, \\ \text{co}\{\underline{\partial}n(z-x) \cap \{-K^+(z, D)\} : z \in Q^\rho(x, \Omega)\}, & \text{если } x \in \text{int } D, \\ \text{co}\{v \in -K^+(x, D) : n^*(v) = 1\}, & \text{если } x \in \partial D. \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь $n^*(v) = \max_{n(w) \leq 1} \langle v, w \rangle$ – полярная норма.

Эти функции и их свойства являются главными средствами исследования задач по шаровым оценкам множеств. Отметим, что специфика компакта D и специфика используемой нормы (например, строгая или сильная (слабая) выпуклость D (см. [26], [27]) и строгая или сильная выпуклость шара нормы) индуцируют интересные свойства функций расстояния, которые также можно использовать.

Ключевое значение для нас будет иметь доказанная в [11] (см. также [12]) формула, выражающая расстояние Хаусдорфа (1.2) между выпуклым компактом D и шаром $Bn(x, r)$ через функции $R(x)$ и $P(x)$:

$$\varphi(x, r) \equiv h(D, Bn(x, r)) = \max\{R(x) - r, P(x) + r\}. \quad (2.5)$$

§ 3. Свойства решения канонической задачи

3.1. Из формулы (2.5) следует, что целевая функция $\varphi(x, r)$ задачи (1.1), как и функции $R(x)$ и $P(x)$, является выпуклой по x на всем пространстве $\mathbb{R}^p$. Нетрудно сделать вывод, что множество решений этой задачи

$$C_\varphi(r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^p : \varphi(y, r) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \varphi(x, r) \right\}$$

является выпуклым компактом. При этом, как известно из выпуклого анализа (см., например, [20; гл. 4, § 2]),

$$y \in C_\varphi(r) \iff 0_p \in \partial_x \varphi(y, r). \quad (3.1)$$

Здесь $\partial_x \varphi(y, r)$ – субдифференциал выпуклой по x функции $\varphi(x, r)$ в точке y , $0_p = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$. В соответствии с правилами субдифференциального исчисления (см. [20; гл. 2, § 3]) из (2.5) следует

$$\partial_x \varphi(x, r) = \begin{cases} \partial R(x), & \text{если } R(x) - r > P(x) + r, \\ \partial P(x), & \text{если } R(x) - r < P(x) + r, \\ \text{co}\{\partial R(x), \partial P(x)\}, & \text{если } R(x) - r = P(x) + r. \end{cases} \quad (3.2)$$

В этом пункте мы конкретизируем критерий решения задачи (1.1), выраженный пока в общей форме (3.1), для различных диапазонов значения параметра r с помощью формулы (3.2). При разбиении положительной полуоси на диапазоны будем предполагать, что нам известны решения базовых для нас задач об описанном и вписанном шарах (о внешней и внутренней оценках). Введем для них соответствующие обозначения:

$$\begin{aligned} R^* &= \min_{x \in \mathbb{R}^p} R(x), & C_R &= \{y \in \mathbb{R}^p : R(y) = R^*\}, \\ \rho^* &= \max_{x \in D} \rho_\Omega(x), & C_\rho &= \{y \in D : \rho_\Omega(y) = \rho^*\}. \end{aligned}$$

Используя эти данные, будем также считать известными величины

$$\begin{aligned} R^\pm &= \max_{x \in C_\rho} (\min) R(x), & P^\pm &= \max_{x \in C_R} (\min) P(x), \\ r_R^\pm &= \frac{R^* - P^\mp}{2}, & r_P^\pm &= \frac{R^\pm + \rho^*}{2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Поскольку $R(x) \geq P(x)$ при любом $x \in \mathbb{R}^p$, то из (3.3) следует

$$0 \leq r_R^- \leq r_R^+ \leq r_P^- \leq r_P^+ < \infty. \quad (3.4)$$

Очевидно, в случае единственности решения задачи о внешней оценке имеет место $r_R^- = r_R^+$, а в случае единственности решения задачи о внутренней оценке $r_P^- = r_P^+$. Известно (см. [18]) также, что

$$r_R^+ = r_P^- \iff C_R \cap C_P \neq \emptyset. \quad (3.5)$$

Теперь сформулируем необходимые и достаточные условия решения задачи (1.1), соответствующие разным диапазонам значений r из (3.4).

ТЕОРЕМА 3.1. *Для того чтобы $x^* \in C_\varphi(r)$, необходимо и достаточно, чтобы:*

- 1) $0_p \in \partial R(x^*)$, если $r \in [0, r_R^-]$;
- 2) $0_p \in \partial R(x^*)$ и $R^* - r \geq P(x^*) + r$, если $r \in [r_R^-, r_R^+]$;
- 3) $0_p \in \text{co}\{\partial R(x^*), \partial P(x^*)\}$ и $R(x^*) - r = P(x^*) + r$, если $r \in [r_R^+, r_P^-]$;
- 4) $0_p \in \partial P(x^*)$ и $R(x^*) - r \leq r - \rho^*$, если $r \in [r_P^-, r_P^+]$;
- 5) $0_p \in \partial P(x^*)$, если $r \geq r_P^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Рассмотрим множество

$$C(r) = \{y \in \mathbb{R}^p : 0_p \in \partial R(y), R^* - r \geq P(y) + r\}.$$

Поскольку в соответствии с известным фактом из выпуклого анализа

$$0_p \in \partial R(y) \iff y \in C_R,$$

то для значений $r \in [0, r_R^+]$ с учетом (3.3) множество $C(r)$ не пусто. А из (3.1), (3.2) следует

$$C(r) \subset C_\varphi(r), \quad r \in [0, r_R^+]. \quad (3.6)$$

Поскольку $R(y) = R^*$ для $y \in C(r)$, то, используя (2.5) и (3.6), получаем

$$f(r) \equiv \min_{x \in \mathbb{R}^p} \varphi(x, r) = \max\{R(y) - r, P(y) + r\} = R^* - r \quad \forall r \in [0, r_R^+]. \quad (3.7)$$

Теперь докажем обратное для (3.6) включение. Действительно, противное означало бы, что в $C_\varphi(r)$ найдется точка $x^* \notin C(r)$. Тогда в соответствии с определением множества $C(r)$ возможны следующие варианты.

Предположим, что $R^* - r < P(x^*) + r$. Поскольку $x^* \in C_\varphi(r)$, имеем

$$f(r) = \varphi(x^*, r) = \max\{R(x^*) - r, P(x^*) + r\} \geq P(x^*) + r > R^* - r.$$

Если же $R^* - r \geq P(x^*) + r$, но при этом $0_p \notin \partial R(x^*)$, то последнее означает $R(x^*) > R^*$, а значит,

$$f(r) = \max\{R(x^*) - r, P(x^*) + r\} \geq R(x^*) - r > R^* - r.$$

Таким образом, в любом случае получаем противоречие с (3.7). Итак, мы доказали, что

$$C_\varphi(r) = C(r), \quad r \in [0, r_R^+]. \quad (3.8)$$

Заметим, что в соответствии с (3.3) для $r \in [0, r_R^-]$ любая точка $y \in C_R$ удовлетворяет неравенству $R^* - r \geq P(y) + r$. Поэтому равенство (3.8) означает, что мы доказали теорему для диапазонов $r \in [0, r_R^-]$ и $r \in [r_R^-, r_R^+]$.

Для случаев $r \in [r_P^-, r_P^+]$ и $r \geq r_P^+$ доказательство проводится аналогично.

б) Рассмотрим случай $r \in [r_R^+, r_P^-]$. Положим

$$C(r) = \{y \in \mathbb{R}^p : 0_p \in \text{co}\{\partial R(y), \partial P(y)\}, R(y) - r = P(y) + r\}.$$

Из (3.1), (3.2) вытекает включение $C(r) \subset C_\varphi(r)$.

Предположим, что $C_\varphi(r) \not\subset C(r)$, т.е. существует $x^* \in C_\varphi(r)$, но $x^* \notin C(r)$. Следовательно, поскольку в силу (3.1), (3.2) выполняется

$$0_p \in \text{co}\{\partial R(x^*), \partial P(x^*)\},$$

то $R(x^*) - r \neq P(x^*) + r$. Пусть, например,

$$R(x^*) - r > P(x^*) + r. \quad (3.9)$$

Тогда в силу (3.1), (3.2) имеет место $0_p \in \partial R(x^*)$, а значит, $x^* \in C_R$, $R(x^*) = R^*$. Поэтому из (3.9) получаем

$$r < \frac{R^* - P(x^*)}{2} \leq \frac{R^* - \min_{x \in C_R} P(x)}{2} = r_R^+.$$

Аналогично, допущение неравенства $R(x^*) - r < P(x^*) + r$ приводит к $r > r_R^-$. Таким образом, в любом случае получаем противоречие с исходным предположением $r \in [r_R^+, r_P^-]$.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Выделение диапазонов значений параметра в теореме 3.1, где работают разные критерии решения, будет использовано далее (в §§ 5–9) для расположения решений других задач на положительной полуоси. В работе [18] приведены примеры динамики множества $C_\varphi(r)$ с изменением параметра.

3.2. Приведем ряд других свойств решения задачи (1.1), которые потребуются в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 3.2 (см. [18]). *Если $C_R \cap C_\rho = \emptyset$, то:*

$$C_\varphi(r) \cap C_R = \emptyset \quad \forall r > r_R^+; \quad (3.10)$$

$$C_\varphi(r) \cap C_\rho = \emptyset \quad \forall r \in [0, r_P^-]; \quad (3.11)$$

$$C_\varphi(r_1) \cap C_\varphi(r_2) = \emptyset \quad \forall r_1 \neq r_2, \quad r_i \in [r_R^+, r_P^-], \quad i = 1, 2. \quad (3.12)$$

Если же $C_R \cap C_\rho \neq \emptyset$, то

$$r_R^+ = r_P^- = \frac{R^* + \rho^*}{2}, \quad C_\varphi\left(\frac{R^* + \rho^*}{2}\right) = C_R \cap C_\rho.$$

ТЕОРЕМА 3.3 (см. [18]). *Функция $f(r) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \varphi(x, r)$ является выпуклой и конечной на $\mathbb{R}_+$, причем*

$$f(r) = \begin{cases} R^* - r, & r \in [0, r_R^+], \\ r - \rho^*, & r \geq r_P^-. \end{cases} \quad (3.13)$$

Непосредственно из теоремы 3.1 и формулы (2.5) получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *При любом значении $r \in [r_R^+, r_P^-]$*

$$R(y) = f(r) + r, \quad P(y) = f(r) - r \quad \forall y \in C_\varphi(r). \quad (3.14)$$

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Функция $f_P(r) = f(r) - r$ строго убывает, а функция $f_R(r) = f(r) + r$ строго возрастает на отрезке $[r_R^+, r_P^-]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3.1 имеем

$$P(y) \equiv \min_{x \in \mathbb{R}^p} P(x) = -\rho^* \quad \forall y \in C_\varphi(r_P^-).$$

Отсюда, а также из (3.14) и (3.11) следует

$$f_P(r) > f_P(r_P^-) \quad \forall r \in [r_R^+, r_P^-]. \quad (3.15)$$

Пусть $r_1 < r_2$ и $r_i \in [r_R^+, r_P^-]$, $i = 1, 2$. Тогда существует $\alpha \in [0, 1)$, для которого $r_2 = \alpha r_1 + (1 - \alpha)r_P^-$. Из теоремы 3.3 следует, что функция $f_P(r)$ также выпукла, а поэтому, используя (3.15), получаем

$$f_P(r_2) \leq \alpha f_P(r_1) + (1 - \alpha)f_P(r_P^-) < f_P(r_1).$$

Строгое возрастание функции $f_R(r)$ доказывается аналогично.

Из свойств симметризованного расстояния $P(\cdot)$ для точек из $C_\varphi(r)$, зафиксированных в следствиях 3.1, 3.2, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.3. 1. *Если $C_\varphi(r_0) \subset D$, то $C_\varphi(r) \subset D$ для любого $r \geq r_0$.*

2. *Если $C_R \subset D$, то $C_\varphi(r) \subset D$ для любого $r \geq 0$.*

Следствием факта из [31; гл. 3, п. 1, предложение 21] является

ТЕОРЕМА 3.4. *Многозначное отображение $C_\varphi(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$ полунепрерывно сверху всюду на $\mathbb{R}_+$.*

3.3. Формулы (2.1)–(2.4) дают возможность придавать критерию решения конкретные формы, используя дополнительную информацию о норме и оцениваемом выпуклом компакте.

В этом пункте рассмотрим случай евклидовой нормы. Тогда задача о внешней оценке имеет единственное решение $C_R = \{x_R\} \subset D$, а следовательно, $r_R^- = r_R^+ \equiv r_R$. Обозначим через $\widehat{Q}^\rho(x, \Omega) = 2x - Q^\rho(x, \Omega)$ множество, симметричное к проекции $Q^\rho(x, \Omega)$ относительно точки x . Теперь представим критерий решения задачи (1.1) в более наглядной геометрической форме.

ТЕОРЕМА 3.5. *Если $n(\cdot)$ – евклидова норма, а D – выпуклое тело, то для того, чтобы $x^* \in C_\varphi(r)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось:*

- 1) $x^* \in \text{co } Q^R(x^*, D)$, если $r \in [0, r_R]$;
- 2) $x^* \in \text{co}\{Q^R(x^*, D), \widehat{Q}^\rho(x^*, \Omega)\}$ и $R(x^*) - r = P(x^*) + r$, если $r \in [r_R, r_P^-]$;
- 3) $x^* \in \text{co } Q^\rho(x^*, \Omega)$ и $R(x^*) - r \leq r - \rho^*$, если $r \in [r_P^-, r_P^+]$;
- 4) $x^* \in \text{co } Q^\rho(x, \Omega)$, если $r \geq r_P^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для евклидовой нормы $n(x) = \|x\|$ ее субдифференциал для $x \neq 0_p$ состоит из единственной точки $\partial\|x\| = \{x/\|x\|\}$. Тогда формула (2.1) принимает вид

$$\underline{\partial}R(x) = \text{co}\left\{\frac{x-z}{\|x-z\|} : z \in Q^R(x, D)\right\}. \quad (3.16)$$

А для точек $x \in \text{int } D$ из (2.4) получаем

$$\underline{\partial}P(x) = \text{co}\left\{\frac{z-x}{\|z-x\|} : z \in Q^\rho(x, \Omega)\right\}. \quad (3.17)$$

Поэтому из (3.16) вытекает

$$0_p \in \underline{\partial}R(x) \iff x \in \text{co } Q^R(x, D), \quad (3.18)$$

а из (3.17) –

$$0_p \in \underline{\partial}P(x) \iff x \in \text{co } Q^\rho(x, \Omega). \quad (3.19)$$

Нетрудно также показать, что при условии $x \in \text{int } D$

$$0_p \in \text{co}\{\underline{\partial}R(x), \underline{\partial}P(x)\} \iff x \in \text{co}\{Q^R(x, D), \widehat{Q}^\rho(x, \Omega)\}. \quad (3.20)$$

Теперь, чтобы завершить доказательство, применяя теорему (3.1) и соотношения (3.18)–(3.20), осталось заметить следующее. Поскольку в нашем случае $C_R \subset D$, то $C_\varphi(r) \subset D$ при любом $r \geq 0$ (следствие 3.3). Поэтому если $r_R < r_P^-$, то в силу строгого убывания $f_P(r)$ на $[r_R, r_P^-]$ в соответствии со следствиями 3.1, 3.2 получаем значения $P(x) \equiv f_P(r) < 0$ для всех $x \in C_\varphi(r)$ при $r > r_R$. Таким образом, $C_\varphi(r) \subset \text{int } D$ для $r > r_R$, что используется для рассмотрения случаев 2)–4).

Теорема доказана.

ПРИМЕР 3.1. Пусть $p = 2$, $n(\cdot)$ – евклидова норма, D – разносторонний треугольник. Обозначим через x_R и x_ρ центры описанной и вписанной окружностей, а через x_φ – пересечение перпендикуляра к середине наибольшей стороны и биссектрисы наименьшего угла. Пусть также

$$r_R = \frac{R^* + \rho_\Omega(x_R)}{2}, \quad r_\rho = r_P^\pm = \frac{R(x_\rho) + \rho^*}{2}, \quad r_\varphi = \frac{R(x_\varphi) + \rho_\Omega(x_\varphi)}{2}.$$

Используя теорему 3.5, нетрудно показать, что при любом фиксированном $r \geq 0$ решение задачи (1.1) будет единственным: $C_\varphi(r) = \{x(r)\}$. Вся совокупность решений представляет собой два отрезка с общей точкой x_φ :

$$\bigcup_{r \geq 0} C_\varphi(r) = [x_R, x_\varphi] \cup [x_\varphi, x_\rho].$$

С ростом r точка $x(r)$ перемещается из точки x_R в точку x_φ по отрезку $[x_R, x_\varphi]$, а затем в точку x_ρ по отрезку $[x_\varphi, x_\rho]$. При этом

$$\begin{aligned} x(r) &= \begin{cases} x_R, & \text{если } r \in [0, r_R], \\ x_\rho, & \text{если } r \geq r_\rho, \end{cases} \\ x(r) &\in [x_R, x_\varphi], \quad \text{если } r \in [r_R, r_\varphi], \\ x(r) &\in [x_\varphi, x_\rho], \quad \text{если } r \in [r_\varphi, r_\rho]. \end{aligned}$$

§ 4. Теорема о параметризации задач по шаровым оценкам

Все перечисленные во введении задачи можно записать в следующей общей форме:

$$f_F(x) \equiv F(R(x), P(x)) \rightarrow \min_{x \in S}; \quad (4.1)$$

здесь $F(t_1, t_2)$ – некоторая функция двух вещественных переменных, а $S \in \{\mathbb{R}^p, D\}$, т.е. множество S либо является всем пространством $\mathbb{R}^p$, либо совпадает с оцениваемым компактом D .

Считая, что решение конкретной задачи вида (4.1) существует, обозначим

$$C_F = \{y \in S : f_F(y) = \min_{x \in S} f_F(x)\}.$$

ТЕОРЕМА 4.1 (о параметризации). Пусть $S \in \{\mathbb{R}^p, D\}$, а функция $F(t_1, t_2)$ не убывает по t_1 на $\mathbb{R}_+$, по t_2 – на $\mathbb{R}$ или хотя бы на $\mathbb{R}_-$, если $S = D$, и при этом возрастает хотя бы по одной из переменных. Тогда если $x^* \in C_F$, то $x^* \in C_\varphi(r)$ для значения $r = (R(x^*) - P(x^*))/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $x^* \in C_F$, но при этом $x^* \notin C_\varphi(r)$ для $r = (R(x^*) - P(x^*))/2$. Тогда из (3.1), (3.2) следует

$$0_p \notin \text{co}\{\underline{\partial}R(x^*), \underline{\partial}P(x^*)\}. \quad (4.2)$$

Из (4.2) по теореме отделимости (см. [20; гл. 1, § 2]) вытекает существование $g_0 \neq 0_p$ и $a > 0$ таких, что

$$\langle v, g_0 \rangle \leq -a \quad \forall v \in \text{co}\{\underline{\partial}R(x^*), \underline{\partial}P(x^*)\}. \quad (4.3)$$

Выпуклые конечные функции $R(x)$ и $P(x)$ дифференцируемы по любому направлению $g \in \mathbb{R}^p$ в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$ (см. [21; гл. 1, § 4]), причем для производных по направлениям справедливы формулы

$$\frac{\partial R(x)}{\partial g} = \max_{v \in \underline{\partial}R(x)} \langle v, g \rangle, \quad \frac{\partial P(x)}{\partial g} = \max_{v \in \underline{\partial}P(x)} \langle v, g \rangle.$$

Поэтому из (4.3) получаем

$$\frac{\partial R(x^*)}{\partial g_0} \leq -a, \quad \frac{\partial P(x^*)}{\partial g_0} \leq -a.$$

Следовательно, найдется такое $\alpha_0 > 0$, что

$$R(x^* + \alpha g_0) < R(x^*), \quad P(x^* + \alpha g_0) < P(x^*) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0). \quad (4.4)$$

Рассмотрим случай $S = D$. Поскольку $D = \{x \in \mathbb{R}^p : P(x) \leq 0\}$, а $x^* \in D$, то из (4.4) вытекает

$$x^* + \alpha g_0 \in S \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0). \quad (4.5)$$

Кроме того, используя условия теоремы и неравенства (4.4), имеем

$$\begin{aligned} f_F(x^* + \alpha g_0) &= F(R(x^* + \alpha g_0), P(x^* + \alpha g_0)) \\ &< F(R(x^*), P(x^*)) = f_F(x^*), \quad \alpha \in (0, \alpha_0). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Соотношения (4.5) и (4.6) противоречат тому, что $x^* \in C_F$.

Случай $S = \mathbb{R}^p$ в силу уже приведенных рассуждений является более простым.

Теорема доказана.

Из теоремы 4.1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Если функция $F(t_1, t_2)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.1, то

$$C_F \subset \bigcup_{r \geq 0} C_\varphi(r). \quad (4.7)$$

ТЕОРЕМА 4.2. Если функция $F(t_1, t_2)$ возрастает по t_1 на $\mathbb{R}_+$, а по t_2 — на $\mathbb{R}$ или, в случае $S = D$, хотя бы на $\mathbb{R}_-$, то

$$C_F \subset \bigcup_{r \in [r_R^+, r_P^-]} C_\varphi(r). \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x^* \in C_F$, то по теореме 4.1 $x^* \in C_\varphi(r)$ для $r = (R(x^*) - P(x^*))/2$. Покажем, что $r \in [r_R^+, r_P^-]$.

Предположим, что $r < r_R^+$. Тогда, с одной стороны, по теореме 3.1 имеем $R(x^*) = R^*$, а значит,

$$P(x^*) = R^* - 2r. \quad (4.9)$$

А с другой стороны, для точки $y^* \in C_\varphi(r_R^+)$ также по теореме 3.1 выполняется $R(y^*) = R^*$ и

$$P(y^*) = R^* - 2r_R^+. \quad (4.10)$$

Из (4.9), (4.10) в силу предположения $r < r_R^+$ следует $P(y^*) < P(x^*)$. В частности, это означает, что $y^* \in S$. А поскольку $R(x^*) = R(y^*)$, то в соответствии с условиями теоремы $f_F(y^*) < f_F(x^*)$. Это противоречит тому, что $x^* \in C_F$.

Аналогично рассматривается ситуация с предположением $r > r_P^-$.

Теорема доказана.

Используя теорему 3.2, получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Если помимо условий теоремы 4.2 выполняется условие $C_R \cap C_\rho \neq \emptyset$, то $C_F = C_R \cap C_\rho$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если $S = D$, $\text{int } D = \emptyset$, а $F(t_1, t_2)$ возрастает по t_1 , то задача (4.1) сводится в задаче

$$R(x) \rightarrow \min_{x \in D}. \quad (4.11)$$

Таким образом, при $S = D$ задачи вида (4.1) могут иметь отличное от задачи (4.11) значение, только когда D является выпуклым телом.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Общая форма записи (4.1) и условия теоремы 4.1 задают конкретный класс задач по шаровым оценкам выпуклых компактов. В соответствии с теоремой 4.1 каждой задаче данного класса можно сопоставить значения радиуса r , при которых каноническая задача (1.1) своими решениями выражает решения этой задачи. А значит, появляется возможность для систематизации задач данного класса через их ранжирование по значениям параметра r .

Далее мы займемся вложением конкретных задач в параметрическую шкалу – укажем последовательность расположения диапазонов значений r , в которых задача (1.1) выражает их решения.

§ 5. Задачи о внешней и внутренней оценке

5.1. В (4.1) положим $F(t_1, t_2) = t_1$, $S = \mathbb{R}^p$. Тогда имеем задачу

$$R(x) \equiv \max_{y \in D} n(x - y) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}. \quad (5.1)$$

Это задача о внешней оценке компакта D шаром нормы $n(\cdot)$, или задача об описанном шаре, которую также называют задачей о чебышёвском центре множества. Как показывают примеры, даже если D – выпуклый компакт, возможны случаи: $C_R \subset D$; $C_R \cap D = \emptyset$; $C_R \cap D \neq \emptyset$ и при этом $C_R \not\subset D$.

Из теоремы 3.1 в силу

$$x^* \in C_R \iff 0_p \in \partial R(x^*),$$

а также теоремы 3.2 (см. (3.10)) вытекает, что решения задачи (1.1) выражают решения задачи (5.1) в случае $C_R \cap C_\rho = \emptyset$ только при $r \in [0, r_R^+]$. При этом справедлива

ТЕОРЕМА 5.1. *Связь решений задачи (5.1) и задачи (1.1) отражается следующими фактами:*

$$\begin{aligned} C_\varphi(r) &\equiv C_R \quad \forall r \in [0, r_R^-]; \\ C_\varphi(r) &= C_R \cap \{x \in \mathbb{R}^p : R^* - r \geq P(x) + r\} \quad \forall r \in [r_R^-, r_R^+]; \\ C_\varphi(r) \cap C_R &= C_R \cap C_\rho \quad \forall r > r_R^+. \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.2. Если в (4.1) взять $F(t_1, t_2) = t_2$, $S = \mathbb{R}^p$, то получим задачу

$$P(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}.$$

Она, очевидно, эквивалентна задаче

$$\rho_\Omega(x) \equiv \min_{y \in \Omega} n(x - y) \rightarrow \max_{x \in D}. \quad (5.3)$$

Это задача о внутренней оценке выпуклого тела D , или задача о вписанном шаре.

Из теорем 3.1 и 3.2 и соотношения

$$x^* \in C_\rho \iff 0_p \in \partial P(x^*)$$

вытекает

ТЕОРЕМА 5.2. *Связь решений задачи (5.3) и задачи (1.1) отражается следующими фактами:*

$$\begin{aligned} C_\varphi(r) &\equiv C_\rho \quad \forall r \geq r_P^+; \\ C_\varphi(r) &= C_\rho \cap \{x \in \mathbb{R}^p : R(x) - r \leq r - \rho^*\} \quad \forall r \in [r_P^-, r_P^+]; \\ C_\varphi(r) \cap C_\rho &= C_R \cap C_\rho \quad \forall r \in [0, r_P^-]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. 1. Нетрудно убедиться, что неравенство $R^* - r \geq P(x) + r$ выполняется для любого $x \in C_R$, если $r \in [0, r_R^-]$. Поэтому (5.2) справедливо при любом $r \in [0, r_R^-]$. Аналогично, (5.4) справедливо при любом $r \geq r_P^-$.

2. Нетрудно показать, что в соответствии с (5.2) и (5.4) множество $C_\varphi(r)$ на отрезке $[r_R^-, r_R^+]$ непрерывно по Хаусдорфу убывает (по включению) от значения C_R до $\{x \in C_R : R^* - r_R^+ \geq P(x^*) + r_R^+\}$, а на отрезке $[r_P^-, r_P^+]$ непрерывно возрастает со значения $\{x \in C_\rho : R(x) - r_P^- \leq r_P^- + \rho^*\}$ до значения C_ρ .

В [18] приведен простой пример динамики множества $C_\varphi(r)$ на этих отрезках.

§ 6. Задачи о равномерной оценке и шаровой оболочке минимальной толщины

6.1. Если в (4.1) положить $F(t_1, t_2) = t_1 + t_2$, $S = \mathbb{R}^p$, то получим задачу

$$R(x) + P(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}. \quad (6.1)$$

Из (2.5), учитывая очевидное неравенство $R(x) \geq P(x)$ при любом $x \in \mathbb{R}^p$, получаем, что функция $\varphi(x, r)$ при фиксированном значении x принимает свое минимальное по r значение при $r = (R(x) - P(x))/2$, а именно

$$\min_{r \geq 0} \varphi(x, r) = \frac{R(x) + P(x)}{2}.$$

Поэтому задача (6.1) эквивалентна задаче

$$\varphi(x, r) \equiv h(D, Bn(x, r)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p, r \geq 0}. \quad (6.2)$$

Таким образом, по сравнению с задачей (1.1) здесь добавляется минимизация по $r \geq 0$. Это задача о равномерной оценке (наилучшем приближении) выпуклого компакта D шаром нормы $n(\cdot)$ в метрике Хаусдорфа, порожденной этой нормой. Она впервые рассматривалась в [10] для случая евклидовой нормы, а в [11]–[13] – для произвольной.

Обозначим через

$$C_\varphi = \left\{ y \in \mathbb{R}^p : \exists r(y), \varphi(y, r(y)) = \min_{x \in \mathbb{R}^p, r \geq 0} \varphi(x, r) \right\}$$

множество центров шаров наилучшего приближения в задаче (6.2) (множество решений задачи (6.1)).

Из теоремы 4.2 и ее следствия 4.2 с очевидностью вытекает, что в случае $C_R \cap C_\rho \neq \emptyset$ имеем

$$C_\varphi = C_R \cap C_\rho = C_\varphi \left(\frac{R^* + \rho^*}{2} \right).$$

Из теоремы 3.3 следует, что множество точек минимума выпуклой конечной функции $f(r) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \varphi(x, r)$, линейно убывающей на $[0, r_R^+]$ и возрастающей при $r \geq r_P^-$, представляет собой отрезок (точку), содержащийся в отрезке $[r_R^+, r_P^-]$.

Используя теорему 3.2, а также теоремы 5.1 и 5.2, приходим к выводу, что справедлива

ТЕОРЕМА 6.1. *Имеют место следующие факты:*

$$[r_\varphi^-, r_\varphi^+] \equiv \text{Arg} \min_{r \geq 0} f(r) \subset [r_R^+, r_P^-];$$

$$C_\varphi = \bigcup_{r \in [r_\varphi^-, r_\varphi^+]} C_\varphi(r); \quad (6.3)$$

$$\text{если } r_\varphi^- > r_R^+, \text{ то } C_\varphi \cap C_\varphi(r) = \emptyset \quad \forall r \in [0, r_\varphi^-];$$

$$\text{если } r_\varphi^+ < r_P^-, \text{ то } C_\varphi \cap C_\varphi(r) = \emptyset \quad \forall r > r_\varphi^+;$$

$$\text{если } r_\varphi^- = r_R^+, \text{ то } C_\varphi \cap C_\varphi(r) = C_\varphi(r_R^+) \quad \forall r \in [0, r_\varphi^+];$$

$$\text{если } r_\varphi^+ = r_P^-, \text{ то } C_\varphi \cap C_\varphi(r) = C_\varphi(r_P^-) \quad \forall r \geq r_P^-.$$

6.2. Если в (4.1) положить $F(t_1, t_2) = t_1 + t_2$, $S = D$, то получим задачу

$$\Phi(x) \equiv R(x) - \rho_\Omega(x) \rightarrow \min_{x \in D}. \quad (6.4)$$

Функция $\Phi(x)$ своим значением выражает наименьшую толщину шаровой оболочки границы тела D с центром в точке x . Задача (6.4) известна давно (см., например, [3]–[8] для случая евклидовой нормы, [9] – для произвольной нормы). Обозначим

$$C_\Phi = \left\{ y \in D : \Phi(y) = \min_{x \in D} \Phi(x) \right\}.$$

В [11] доказано, что $C_\varphi \cap D \neq \emptyset$. А поскольку целевые функции задач (6.1) и (6.4) на D совпадают, то получаем

$$C_\Phi = C_\varphi \cap D. \quad (6.5)$$

Функция $P(x)$ принимает постоянное значение для $x \in C_\varphi(r)$, и это значение убывает с ростом r на $[r_R^+, r_P^-]$ в соответствии со следствиями 3.1 и 3.2. Поэтому если обозначить

$$r_\Phi = \min \{ r \geq r_\varphi^- : C_\varphi(r) \subset D \},$$

то из теоремы 6.1 и (6.5) следует справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 6.2. *Имеет место представление*

$$C_{\Phi} = \bigcup_{r \in [r_{\Phi}, r_{\Phi}^+]} C_{\varphi}(r). \quad (6.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. В [12] доказано, что $C_{\varphi} \subset D$, а значит, и $C_{\Phi} = C_{\varphi}$, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) $n(\cdot)$ – строго квазивыпуклая норма, т.е. ее шар является строго выпуклым;
- 2) $n(x)$ непрерывно дифференцируема всюду, за исключением точки $x = 0_p$;
- 3) выпуклый компакт D обладает центральной симметрией;
- 4) $p = 2$.

Приведем пример, когда $C_{\varphi} \neq C_{\Phi}$.

ПРИМЕР 6.1. Пусть

$$p = 3, \quad n(x) = \max_{i=1,2,3} |x^{(i)}|, \quad D = \text{co}\{x_i, i = 1, \dots, 4\},$$

где $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 1, -1)$, $x_3 = (1, -1, 1)$, $x_4 = (-1, 1, 1)$. Используя формулы (2.1) и (2.4), можно показать, что только точки отрезка $[(0, 0, 0), (2/3, 2/3, 2/3)]$ удовлетворяют условию $0_3 \in \partial R(x) + \partial P(x)$ и, таким образом, образуют множество решений задачи (6.1), а значит, и множество C_{φ} . В то же время

$$C_{\Phi} = C_{\varphi} \cap D = \left[\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right] \neq C_{\varphi}.$$

§ 7. Задача об асферичности

Пусть теперь $F(t_1, t_2) = t_1/|t_2|$, $S = D$ – выпуклое тело. В этом случае получаем

$$\psi(x) \equiv \frac{R(x)}{\rho_{\Omega}(x)} \rightarrow \min_{x \in D} \quad (7.1)$$

– задачу об оценке тела D на асферичность, требующую минимизации отношения радиуса описанного шара к радиусу вписанного шара за счет выбора единого центра этих шаров. Показатель асферичности $\psi^* = \min_{x \in D} \psi(x)$ нередко используется (обычно для случая, когда $n(x)$ – евклидова норма) при описании свойств выпуклого тела (см., например, [14]) и разработке методов его приближения (например, при его полиэдральной аппроксимации; см. [34]). В работах [15], [17] получены необходимые и достаточные условия решения задачи (7.1), условия единственности решения, предложен метод приближенного решения.

Примеры показывают, что функция $\psi(x)$ может быть и не выпуклой, и не вогнутой даже локально всюду на D .

Однако при этом, используя выпуклость функции $R(x)$ и вогнутость функции $\rho_{\Omega}(x)$ на D , нетрудно доказать, что справедлива

ЛЕММА 7.1. *Функция $\psi(x)$ квазивыпукла на D , т.е.*

$$\psi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{\psi(x), \psi(y)\} \quad \forall x, y \in D.$$

Легко также показать, что задача (7.1) имеет решение, а множество ее решений

$$C_\psi = \left\{ y \in D : \psi(y) = \min_{x \in D} \psi(x) \right\},$$

как следует из леммы 7.1, является выпуклым компактом, причем $C_\psi \in \text{int } D$.

Очевидно, если $C_R \cap C_\rho \neq \emptyset$, то

$$C_\psi = C_R \cap C_\rho = C_\varphi \left(\frac{R^* + \rho^*}{2} \right).$$

Нижеследующая теорема содержит факты, характеризующие расположение множества C_ψ на параметрической шкале.

ТЕОРЕМА 7.1. *Существуют $r_\psi^- \leq r_\psi^+$ такие, что:*

$$C_\psi = \bigcup_{r \in [r_\psi^-, r_\psi^+]} C_\varphi(r); \quad (7.2)$$

$$[r_\psi^-, r_\psi^+] \subset [r_\varphi^+, r_P^-]; \quad (7.3)$$

если $r_\psi^- > r_R^+$, то $C_\psi \cap C_\varphi(r) = \emptyset \quad \forall r \in [0, r_\psi^-]$;

если $r_\psi^+ < r_P^-$, то $C_\psi \cap C_\varphi(r) = \emptyset \quad \forall r > r_\psi^+$;

если $r_\psi^- = r_R^+$, то $C_\psi \cap C_\varphi(r) = C_\varphi(r_R^+) \quad \forall r \in [0, r_R^+]$;

если $r_\psi^+ = r_P^-$, то $C_\psi \cap C_\varphi(r) = C_\varphi(r_P^-) \quad \forall r \geq r_P^-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4.2 имеем

$$C_\psi \subset \bigcup_{r \in [r_R^+, r_P^-]} C_\varphi(r). \quad (7.4)$$

Определим формально значения r_ψ^- и r_ψ^+ :

$$r_\psi^- \equiv \inf \{ r \geq r_R^+ : C_\psi \cap C_\varphi(r) \neq \emptyset \}, \quad (7.5)$$

$$r_\psi^+ \equiv \sup \{ r \leq r_P^- : C_\psi \cap C_\varphi(r) \neq \emptyset \}. \quad (7.6)$$

1. Покажем, что

$$C_\varphi(r_\psi^-) \subset C_\psi, \quad C_\varphi(r_\psi^+) \subset C_\psi. \quad (7.7)$$

Действительно, в соответствии с (7.5) существует последовательность $r_k \downarrow r_\psi^-$ при $k \rightarrow \infty$ такая, что $C_\psi \cap C_\varphi(r_k) \neq \emptyset$.

Пусть

$$x_k \in C_\psi \cap C_\varphi(r_k).$$

Ввиду ограниченности последовательности $\{x_k\}_{k=1,2,\dots}$ без потери общности будем считать ее сходящейся: $x_k \rightarrow x^*$, $k \rightarrow \infty$.

Поскольку функции $R(x)$ и $\rho_\Omega(x)$ являются непрерывными, то, переходя к пределу в равенстве $\psi^* = \psi(x_k) = R(x_k)/\rho_\Omega(x_k)$, получаем $\psi^* = \psi(x^*)$, т.е. $x^* \in C_\psi$. А, с другой стороны, из теоремы 3.4 следует $x^* \in C_\varphi(r_\psi^-)$. Таким образом, имеем $x^* \in C_\psi \cap C_\varphi(r_\psi^-)$. Осталось заметить, что в силу следствия 3.1

$$\rho_\Omega(x) \equiv \rho_\Omega(x^*), \quad R(x) \equiv R(x^*),$$

а значит, $\psi(x) \equiv \psi^*$ для любой точки $x \in C_\varphi(r_\psi^-)$. Тем самым, первое из включений (7.7) доказано. Второе доказывается аналогично.

Отметим, из (7.4)–(7.6) вытекает

$$C_\psi \subset \bigcup_{r \in [r_\psi^-, r_\psi^+]} C_\varphi(r). \quad (7.8)$$

2. Докажем, что

$$r_\varphi^+ \leq r_\psi^-. \quad (7.9)$$

Предположим противное, т.е. с учетом (7.4)

$$r_R^+ \leq r_\psi^- < r_\varphi^+. \quad (7.10)$$

Используя следствия 3.1 и 3.2, а также (7.7) и $C_\psi \subset \text{int } D$, получаем

$$C_\varphi(r) \in \text{int } D, \quad \psi(x) \equiv \frac{f(r) + r}{r - f(r)} \quad \forall x \in C_\varphi(r), \quad r \in [r_\psi^-, r_P^-]. \quad (7.11)$$

Поскольку $[r_\varphi^-, r_\varphi^+] = \text{Arg min}_{r \geq 0} f(r)$, то выпуклая функция $f(r)$ на отрезке $[0, r_\varphi^-]$ строго убывает. Поэтому, исходя из предположения (7.10), нетрудно убедиться в строгом убывании функции $F_\psi(r) \equiv (f(r) + r)/(r - f(r))$ на $[r_\psi^-, r_\varphi^+]$. Таким образом (см. (7.11)), значения $\psi(x) \equiv F_\psi(r)$ для любого $x \in C_\varphi(r)$ строго убывают с ростом r от r_ψ^- до r_φ^+ . Это противоречит первому из включений (7.7), в соответствии с которым $\psi(x) \equiv \psi^*$ для любого $x \in C_\varphi(r_\psi^-)$. Вместе с (7.9) мы доказали и (7.3).

3. В силу (7.7), а также следствия 3.1 имеем

$$\psi^* = \psi(x) = \frac{f(r_\psi^\pm) + r_\psi^\pm}{r_\psi^\pm - f(r_\psi^\pm)} = F_\psi(r_\psi^\pm) \quad \forall x \in C_\varphi(r_\psi^\pm), \quad (7.12)$$

и при этом по следствию 3.2 $\rho_\Omega(x) \equiv r - f(r) > 0$ для любого $x \in C_\varphi(r)$, $r \in [r_\psi^-, r_\psi^+]$. Из выпуклости функции $f(r)$ следует, что все нижние лебеговы множества функции $F_\psi(r)$ при любом $\lambda \geq 0$

$$\{r \in [r_\psi^-, r_P^-] : F_\psi(r) \leq \lambda\} = \{r \in [r_\psi^-, r_P^-] : f(r)(1 + \lambda) + (1 - \lambda)r \leq 0\}$$

являются выпуклыми или пустыми. Следовательно (см. [21; гл. 1, § 6]), функция $F_\psi(r)$ является квазивыпуклой на $[r_\psi^-, r_P^-]$. Поэтому из (7.12) получаем

$$F_\psi(r) \leq \psi^* \quad \forall r \in [r_\psi^-, r_\psi^+]. \quad (7.13)$$

Если в (7.13) допустить знак строгого неравенства для некоторого $r \in (r_\psi^-, r_\psi^+)$, то (см. следствие 3.1) приходим к противоречию:

$$\psi(x) \equiv \frac{f(r) + r}{r - f(r)} = F_\psi(r) < \psi^* \quad \forall x \in C_\varphi(r).$$

Таким образом, мы получили

$$\psi(x) \equiv F_\psi(r) \equiv \psi^* \quad \forall x \in C_\varphi(r), \quad r \in [r_\psi^-, r_\psi^+].$$

Тем самым, мы доказали включение

$$\bigcup_{r \in [r_{\psi}^-, r_{\psi}^+]} C_{\varphi}(r) \subset C_{\psi},$$

которое вместе с (7.8) дает (7.2).

Теперь, учитывая (7.2), (7.3), третье и четвертое заключения теоремы легко получим из (7.5), (7.6) и теоремы 3.2, а пятое и шестое – из теорем 3.2, 5.1 и 5.2.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. В примере 3.1, как нетрудно показать, имеет место

$$r_{\psi}^- = r_{\varphi}^{\pm}, \quad r_{\psi}^+ = r_P^{\pm}, \quad C_{\varphi}(r_{\psi}^-) = \{x_{\varphi}\}, \quad C_{\varphi}(r_{\psi}^+) = x_{\rho}, \quad C_{\psi} = [x_{\varphi}, x_{\rho}].$$

Таким образом, даже при наличии пересечения решений с задачами (6.2) и (6.4) задача (7.1) может иметь свои самостоятельные решения.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Примеры показывают, что возможно выполнение $r_{\psi}^+ < r_P^-$, означающее отсутствие общих решений у задачи (7.1) и задачи (5.3). Возможно также $r_{\varphi}^+ < r_{\psi}^-$, а значит, у задачи (7.1) может не быть общих решений с задачами (6.2) и (6.4). В [17] доказано, что в двумерном случае с евклидовой нормой решение задач (6.2) и (6.4), будучи для них общим и единственным, является одним из решений задачи (7.1). Следовательно, в силу (7.3) в этой ситуации всегда $r_{\varphi}^{\pm} = r_{\psi}^-$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. В формулах (6.3), (6.6) и (7.2) нет избыточности в том смысле, что из объединения нельзя выкинуть ни одного множества $C_{\varphi}(r)$ хотя бы для одного значения r из соответствующего отрезка. Это вытекает из теоремы 3.2 (см. (3.12)).

§ 8. Задача о шаровой оболочке наименьшего объема

Рассмотрим случай $F(t_1, t_2) = t_1^p - |t_2|^p$, $S = D$ – выпуклое тело. Соответствующая ему задача (4.1) принимает вид

$$\kappa(x) \equiv R^p(x) - \rho_{\Omega}^p(x) \rightarrow \min_{x \in D}. \quad (8.1)$$

Величина γr^p , где $\gamma > 0$ – множитель, соответствующий используемой норме, выражает объем шара радиуса r . Таким образом, мы получили задачу о шаровой оболочке наименьшего объема для границы выпуклого тела D . Автору не известно, рассматривалась ли эта задача ранее.

Целевая функция $\kappa(x)$ является суммой выпуклой и квазивыпуклой функций на D . Как показывают примеры, сама функция $\kappa(x)$ может быть и не выпуклой, и не вогнутой на D . Решение задачи, которое, очевидно, существует, обозначим

$$C_{\kappa} = \left\{ y \in D : \kappa(y) = \min_{x \in D} \kappa(x) \right\}.$$

Пусть, далее,

$$r^* = \inf \{ r \geq r_R^+ : C_{\varphi}(r) \subset D \}. \quad (8.2)$$

Тогда из теоремы 4.2 вытекает

$$C_{\varkappa} \subset \bigcup_{r \in [r^*, r_{\varphi}^-]} C_{\varphi}(r). \quad (8.3)$$

Уточним эту оценку.

ТЕОРЕМА 8.1. Если $r_{\varphi}^- > r^*$, то

$$C_{\varkappa} \subset \bigcup_{r \in [r^*, r_{\varphi}^-]} C_{\varphi}(r), \quad (8.4)$$

а если $r_{\varphi}^- \leq r^*$, то $r^* = r_{\Phi} \equiv \min\{r \geq r_{\varphi}^- : C_{\varphi}(r) \subset D\}$ и

$$C_{\varkappa} = C_{\varphi}(r^*). \quad (8.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для значений $r \in [r^*, r_{\varphi}^-]$ в соответствии со следствием 3.1 выполняется (3.14), а значит,

$$\varkappa(x) = (r + f(r))^p - (r - f(r))^p \equiv F_{\varkappa}(r) \quad \forall x \in C_{\varphi}(r). \quad (8.6)$$

Таким образом, имеем

$$F_{\varkappa}(r) = 2 \sum_{k=1}^m \frac{p! r^{p-2k+1} (f(r))^{2k-1}}{(2k-1)! (p-2k+1)!},$$

$$m = \begin{cases} \frac{p}{2}, & \text{если } p \text{ четное,} \\ \frac{p+1}{2}, & \text{если } p \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Отсюда и из теоремы 3.3, учитывая $f(r) > 0$, получаем строгое возрастание функции $F_{\varkappa}(r)$ при $r \geq \max\{r^*, r_{\varphi}^-\}$. Поэтому из (8.3) и (8.6) получаем (8.4) для случая $r_{\varphi}^- > r^*$ и (8.5) при $r_{\varphi}^- \leq r^*$.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Учитывая (8.2), из теоремы 8.1 получаем, что в любом случае справедливо включение

$$C_{\varkappa} \subset \bigcup_{r \in [r_R^+, r_{\varphi}^-]} C_{\varphi}(r).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. Неравенство $r^* \leq r_{\varphi}^-$ имеет место, в частности, если $C_R \subset D$ (см. следствие 3.3) или хотя бы если $C_{\varphi} \subset D$, что обеспечивается выполнением одного из условий, приведенных в замечании 6.1.

Нетрудно показать, что в примере 3.1 имеем $r^* = r_R = r_R^{\pm}$, а

$$C_{\varkappa} = \bigcup_{r \in [r^*, r_{\varphi}]} C_{\varphi}(r) = [x_R, x_{\varphi}].$$

Для примера 6.1 имеет место случай $r_{\varphi}^- < r^* < r_{\varphi}^+$, где $C_{\varkappa} = C_{\varphi}(r^*) = \{(1/3, 1/3, 1/3)\}$.

Таким образом, для примера 3.1 выполняется $C_{\varphi} \subset C_{\varkappa}$, а для примера 6.1 выполняется $C_{\varkappa} \subset C_{\varphi}$ и при этом $C_{\varphi} \neq C_{\varkappa}$.

Примеры показывают, что возможна также ситуация $C_{\varkappa} \cap C_{\varphi} \neq \emptyset$.

§ 9. Параметрическая шкала решений

Результаты, изложенные в §§ 5–8, позволяют расположить рассмотренные задачи в порядке возрастания радиуса r , при значениях которого каноническая задача (1.1) выражает их решения.

Шкала значений радиуса r разбивается следующими точками:

$$0 \leq r_R^- \leq r_R^+ \leq r_\varphi^- \leq r_\varphi^+ \leq r_\psi^- \leq r_\psi^+ \leq r_P^- \leq r_P^+ < \infty. \quad (9.1)$$

Соответствующее расположение задач и их связь с канонической задачей можно отразить следующей таблицей:

Задача: $F(R(x), P(x)) \rightarrow \min_{x \in S}$	C_F	Ось значений r	Связь с канонической задачей
Внутренняя оценка: $F(t_1, t_2) = t_2, \quad S = D$	C_ρ		$C_\varphi(r) \equiv C_\rho \quad \forall r \geq r_P^+$ $C_\varphi(r) = C_\rho \cap \{x \in \mathbb{R}^p : R(x) - r \leq P(x) + r\}$ $\forall r \in [r_P^-, r_P^+]$
Оценка на асферичность: $F(t_1, t_2) = t_1/ t_2 ,$ $S = D$	C_ψ		$C_\psi = \bigcup_{r \in [r_\psi^-, r_\psi^+]} C_\varphi(r)$
Шаровая оболочка наименьшей толщины: $F(t_1, t_2) = t_1 + t_2,$ $S = D$	C_Φ		$C_\Phi = \bigcup_{r \in [r_\Phi, r_\varphi^+]} C_\varphi(r)$
Равномерная оценка: $F(t_1, t_2) = t_1 + t_2,$ $S = \mathbb{R}^p$	C_φ		$C_\varphi = \bigcup_{r \in [r_\varphi^-, r_\varphi^+]} C_\varphi(r)$
Шаровая оболочка наименьшего объема: $F(t_1, t_2) = t_1^p - t_2 ^p,$ $S = D$	$C_\varkappa$		$C_\varkappa \subset \bigcup_{r \in [r_R^+, r_\varphi^-]} C_\varphi(r)$
Внешняя оценка: $F(t_1, t_2) = t_1,$ $S = \mathbb{R}^p$	C_R		$C_\varphi(r) = C_R \cap \{x \in \mathbb{R}^p : R(x) - r \geq P(x) + r\}$ $\forall r \in [r_R^-, r_R^+]$ $C_\varphi(r) \equiv C_R \quad \forall r \in [0, r_R^-]$

Конечно, в приведенных утверждениях доказывається лишь существование диапазонов параметра, в которых каноническая задача выражает решения рассматриваемых задач. Какая-либо конкретизация этих диапазонов – это отдельный открытый вопрос. Здесь в будущем возможны содержательные результаты

по каждой задаче, связанные с конкретными дополнительными условиями на используемую норму и оцениваемый выпуклый компакт.

В заключение заметим, что из класса задач, определенного условиями теоремы 4.1, в таблице приведены всего шесть задач, в которых функция $F(t_1, t_2)$ имеет очень простой вид. Существует очевидная возможность постановки и исследования других задач из данного класса, которые могут найти приложения. Кроме того, имеются варианты выбора другой канонической задачи, а значит, возможно, существуют более удачные способы систематизации.

Автор выражает искреннюю признательность М. С. Никольскому, Е. С. Половинкину и А. В. Дмитруку за полезное обсуждение результатов, а рецензентам за ценные замечания и рекомендации.

Список литературы

- [1] Т. Боннезен, В. Фенхель, *Теория выпуклых тел*, Фазис, М., 2002, 210 с.; пер. с нем.: Т. Bonnesen, W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **3**, no. 1, Springer, Berlin, 1934, vii+164 pp.
- [2] Л. Ф. Тот, *Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве*, Физматгиз, М., 1958, 363 с.; пер. с нем.: L. Fejes Tóth, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, *Grundlehren Math. Wiss.*, **LXV**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1953, x+197 pp.
- [3] M. D'Ocagne, “Sur certaines figures minima”, *Bull. Soc. Math. France*, **12** (1884), 168–177.
- [4] H. Lebesgue, “Sur quelques questions de minimum, relatives aux courbes orbiformes, et sur leurs rapports avec le calcul des variations”, *J. Math. Pures Appl.*, **4**:8 (1921), 67–96.
- [5] N. Kritikos, “Über konvexe Flächen und einschließende Kugeln”, *Math. Ann.*, **96** (1927), 583–586.
- [6] St. Vincze, “Über den Minimalkreisring einer Eilinie”, *Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math.*, **11**:3 (1947), 133–138.
- [7] I. Vincze, “Über Kreisringe, die eine Eilinie einschließen”, *Stud. Sci. Math. Hungar.*, **9** (1974), 155–159.
- [8] I. Bárány, “On the minimal ring containing the boundary of a convex body”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **52**:1-2 (1988), 93–100.
- [9] С. И. Дудов, “Об оценке границы выпуклого компакта шаровым слоем”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **1**:2 (2001), 64–75.
- [10] М. С. Никольский, Д. Б. Силин, “О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала”, *Оптимальное управление и дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К семидесятилетию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН, **211**, Наука, Физматлит, М., 1995, 338–354; англ. пер.: M. S. Nikol'skii, D. B. Silin, “On the best approximation of a convex compact set by elements of addial”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **211** (1995), 306–321.
- [11] С. И. Дудов, И. В. Златорунская, “Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы”, *Матем. сб.*, **191**:10 (2000), 13–38; англ. пер.: S. I. Dudov, I. V. Zlatorunskaya, “Uniform estimate of a compact convex set by a ball in an arbitrary norm”, *Sb. Math.*, **191**:10 (2000), 1433–1458.
- [12] S. I. Dudov, I. V. Zlatorunskaya, “Best approximation of a compact set by a ball in an arbitrary norm”, *Advances in mathematics research*, v. 2, *Adv. Math. Res.*, **2**, Nova Sci. Publ., Hauppauge, NY, 2003, 81–114.

- [13] С. И. Дудов, И. В. Златорунская, “О приближенной равномерной оценке выпуклого компакта шаром произвольной нормы”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **45**:3 (2005), 416–428; англ. пер.: S. I. Dudov, I. V. Zlatorunskaya, “On an approximate uniform estimate for a compact convex set by a ball of arbitrary norm”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **45**:3 (2005), 399–411.
- [14] Ю. Е. Несретов, *Методы выпуклой оптимизации*, МЦНМО, М., 2010, 262 с.
- [15] С. И. Дудов, Е. А. Мещерякова, “О методе приближенного решения задачи об асферичности выпуклого тела”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53**:10 (2013), 1668–1678; англ. пер.: S. I. Dudov, E. A. Meshcheryakova, “Method for finding an approximate solution of the asphericity problem for a convex body”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:10 (2013), 1483–1493.
- [16] С. И. Дудов, Е. А. Мещерякова, “Характеризация устойчивости решения задачи об асферичности выпуклого компакта”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **11**:2 (2011), 20–26.
- [17] С. И. Дудов, Е. А. Мещерякова, “Об асферичности выпуклого тела”, *Изв. вузов. Матем.*, 2015, № 2, 45–58; англ. пер.: S. I. Dudov, E. A. Meshcheryakova, “On asphericity of convex body”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **59**:2 (2015), 36–47.
- [18] С. И. Дудов, “Взаимосвязь некоторых задач по оценке выпуклого компакта шаром”, *Матем. сб.*, **198**:1 (2007), 43–58; англ. пер.: S. I. Dudov, “Relations between several problems of estimating convex compacta by balls”, *Sb. Math.*, **198**:1 (2007), 39–53.
- [19] Р. Т. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973, 472 с.; пер. с англ.: R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Math. Ser., **28**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970, xviii+451 pp.
- [20] Б. Н. Пшеничный, *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*, Наука, М., 1980, 320 с.
- [21] В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев, “Недифференцируемая оптимизация”, 1981, 384 с.; англ. пер.: V. F. Dem’yanov, L. V. Vasil’ev, *Nondifferentiable optimization*, Transl. Ser. Math. Engrg., Optimization Software, Inc., Publications Division, New York, 1985, xvii+452 pp.
- [22] В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов, *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление*, Оптимизация и исследование операций, **23**, Наука, М., 1990, 432 с.
- [23] Ф. Кларк, *Оптимизация и негладкий анализ*, Наука, М., 1988, 280 с.; пер. с англ.: F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Canad. Math. Soc. Ser. Monogr. Adv. Texts, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983, xiii+308 pp.
- [24] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, Эдиториал УРСС, М., 2000, 174 с.; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, viii+183 pp.
- [25] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации*, т. 1, 2, МЦНМО, М., 2011, 620 с., 434 с.
- [26] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, Физматлит, М., 2004, 416 с.
- [27] Г. Е. Иванов, *Слабо выпуклые множества и функции*, Физматлит, М., 2006, 351 с.
- [28] С. И. Дудов, “Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния”, *Матем. заметки*, **61**:4 (1997), 530–542; англ. пер.: S. I. Dudov, “Subdifferentiability and superdifferentiability of distance functions”, *Math. Notes*, **61**:4 (1997), 440–450.
- [29] J. M. Borwein, S. P. Fitzpatrick, “Existence of nearest points in Banach spaces”, *Canad. J. Math.*, **41**:4 (1989), 702–720.
- [30] J. B. Hiriart-Urruty, “Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces”, *Math. Oper. Res.*, **4**:1 (1979), 79–97.

- [31] J. B. Hiriart-Urruty, “New concepts in nondifferentiable programming”, *Bull. Soc. Math. France Mém.*, **60** (1979), 57–85.
- [32] В. В. Гороховик, *Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации*, Наука и техника, Минск, 1990, 240 с.
- [33] Ж.-П. Обен, И. Экланд, *Прикладной нелинейный анализ*, Мир, М., 1988, 512 с.; пер. с англ.: J.-P. Aubin, I. Ekeland, *Applied nonlinear analysis*, Pure Appl. Math. (N. Y.), A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984, xi+518 pp.
- [34] Г. Г. Каменев, “Скорость сходимости адаптивных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел на начальном этапе”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:5 (2008), 763–778; англ. пер.: G. K. Kamenev, “The initial convergence rate of adaptive methods for polyhedral approximation of convex bodies”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **48**:5 (2008), 724–738.

Сергей Иванович Дудов
(Sergey I. Dudov)

Саратовский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: dudovsi@info.sgu.ru

Поступила в редакцию
11.03.2014 и 26.12.2014