Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Фокичева, Классификация билиардных движений в областях, ограниченных софокусными парабололами, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 8, 139–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 15:23:45

УДК 517.938.5

В. В. Фокичева

Классификация билиардных движений в областях, ограниченных софокусными параболой

В статье рассмотрена динамическая система билиарда в области, ограниченной софокусными параболой. Описаны такие области, в которых можно корректно поставить билиардную задачу. В каждой из таких областей доказана интегрируемость для системы, исследовано возникающее слоение Лиувилля и вычислен инвариант лиувиллевой эквивалентности – так называемая меченая молекула. Оказалось, что билиардные системы в некоторых параболических областях имеют те же замыкания решений (интегральных траекторий) что и системы Горячева–Чаплыгина–Сретенского и Жуковского на подходящих уровнях энергии. Также описано билиардное движение в некомпактных областях, ограниченных софокусными параболой, а именно описана топология слоения Лиувилля в терминах грубых молекул.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: интегрируемая система, билиард, лиувиллева эквивалентность, молекула Фоменко–Цишанга.

DOI: 10.4213/sm8359

§ 1. Введение

Широко известна так называемая задача о билиарде (см., например, работу Дж. Д. Биркгофа [1]). С точки зрения геометрии это вопрос о движении материальной точки по области с кусочно-гладкой границей, с естественным отражением на границе (угол падения равен углу отражения). В простейшем случае область предполагают плоской. В настоящей работе изучается топология и особенности плоских билиардов, которые интегрируемы, т.е. обладают скрытыми симметриями, вследствие чего замыкания траекторий билиарда допускают классификацию.

Классическим случаем интегрируемого билиарда является билиард в области, ограниченной софокусными эллипсами и гиперболами. Интегрируемость при этом эквивалентна малой теореме Понселе (см. [2]), что показано в книге В. В. Козлова и Д. В. Трещева [3]. В работах В. Драгович, М. Раднович [4], [5], В. В. Фокичевой [6], [7] были вычислены инварианты лиувиллевой эквивалентности для таких билиардных систем.

Случай же, когда область ограничена параболой, может быть получен предельным переходом. Однако при этом необходимо показать сохранение таких важных свойств, как боттовость и интегрируемость. В настоящей работе мы

явно показываем интегрируемость динамической системы бильярда в области, ограниченной софокусными параболой, и доказываем боттовость дополнительного интеграла. Также в работе описан класс плоских компактных областей, ограниченных софокусными параболой, в которых можно корректно поставить бильярдную задачу (для этого область должна содержать лишь прямые углы). Для динамической системы в каждой из этих областей вычислен инвариант лиувиллевой эквивалентности – меченая молекула. Разобраны два случая некомпактной области, ограниченной софокусными параболой. Эти области, с одной стороны, получаются предельным переходом из областей, ограниченных параболой, а с другой стороны – предельным переходом от компактных областей, ограниченных эллипсами и гиперболами, к некомпактным устремлением фокуса к бесконечности. При этом показаны перестройки, происходящие с молекулами в обоих случаях.

§ 2. Постановка задачи

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Допустимой бильярдной областью* назовем двумерное, связное, компактное, плоское изометрически вложимое в $\mathbb{R}^2$ многообразие с кусочно-гладким (необязательно выпуклым) краем, состоящим из объединения гладких дуг. Причем в точках излома границы эти дуги пересекаются под углом 90° .

Внутри допустимой бильярдной области Ω рассмотрим динамическую систему, описывающую движение (материальной) точки внутри области с естественным отражением на границе $P = \partial\Omega$ (“угол падения равен углу отражения”). В точках, где граница P негладкая (тогда, как было сказано выше, угол излома обязательно равен 90°), траектории системы можно доопределить по непрерывности: попав в вершину угла границы, точка, не теряя скорости, отразится назад по той же траектории. Таким образом, фазовым пространством системы является многообразие

$$M^4 := \{(x, v) \mid x \in \Omega, v \in T_x\mathbb{R}^2, |v| > 0\} / \sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ задается следующим образом:

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \iff x_1 = x_2 \in P, \quad |v_1| = |v_2|, \quad v_1 - v_2 \perp T_x P.$$

Здесь через $T_x P$ обозначена касательная плоскость к области Ω в точке x , а через $|v|$ – евклидова длина вектора v .

Напомним ряд классических определений (см. [8]–[11]). Рассмотрим симплектическое многообразие (M^4, ω) , где ω – симплектическая форма, т.е. невырожденная замкнутая кососимметрическая форма на касательных векторах к M^4 : $\omega(a, b) := \omega_{ij} a^i b^j$. Если нам известна функция H на данном многообразии, то можно определить векторное поле $\text{sgrad } H$, ей соответствующее, по следующему правилу

$$(\text{sgrad } H)^i = w^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}.$$

Если динамическая система допускает подобное описание, то она называется гамильтоновой, а функция H в этом случае называется гамильтонианом.

Предположим, что на M^4 существует функционально независимая с H функция f такая, что скобка Пуассона

$$\{f, H\} := \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial x^j} = 0.$$

В этом случае говорят, что функции f и H находятся в инволюции. Легко понять, что функция f также является интегралом системы, а динамическую систему называют интегрируемой по Лиувиллю.

Так как f и H функционально независимы, то за исключением некоторого количества особых значений интеграла f градиенты f и H независимы. Если при этом гамильтоновы потоки являются полными, то к совместной поверхности уровня функций f и H можно применить теорему Лиувилля, согласно которой эта совместная поверхность уровня в том случае, когда она компактна и связна, гомеоморфна тору, вблизи которого можно найти координаты, называемые действие-угол, такие, что в этих координатах гамильтоново векторное поле выпрямляется.

Полученное расслоение Q^3 (а значит, и M^4) называется слоением Лиувилля. Почти все торы при этом являются замыканием решений системы. Таким образом, мы изучаем топологию решений данной интегрируемой гамильтоновой системы. Остальные поверхности уровня функций f и H (т.е. те, где $\text{grad } f$ и $\text{grad } H$ зависимы) называются особыми. Для них также существует эффективный метод описания. Ограничим нашу систему с многообразия M^4 на изоэнергетическую поверхность Q_H^3 . Далее покажем, как можно описать расслоение Q_H^3 на торы и особые слои.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть M^4 – симплектическое многообразие гамильтоновой системы, а f, H – два интеграла в инволюции. *Отображением момента* $F(x)$ гамильтоновой системы называется отображение $F: x \mapsto (f(x), H(x))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Точка x из M^4 называется *критической* (или *особой*) точкой отображения момента, если ранг $dF(x)$ меньше 2.

Пусть в точке $\xi \in M^4$ ранг отображения момента равен 1: $\nu_1 f + \nu_2 H = 0$. Орбита этой точки одномерна и диффеоморфна либо прямой, либо окружности. Положим что $dH \neq 0$. Рассмотрим двумерную трансверсаль к одномерной орбите в $Q^3 = H = \text{const}$ и гессиан функции f , ограниченный на эту трансверсаль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Точка $x \in M^4$, имеющая ранг 1 отображения момента, называется *невыврожденной*, если ранг матрицы гессиана функции f , ограниченный на двумерную трансверсаль к одномерной орбите в $Q^3 = H = \text{const}$, равен 2 (см. [8]).

Функция f задает отображение $f: Q_H^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $f = c$ – особое значение интеграла f . Тогда прообраз окрестности $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ в Q_H^3 – трехмерное многообразие с краем, называемое 3-атомом. Примерами атомов являются атомы A (минимаксный атом), B , A^* (см. подробнее [8], [12]–[15]).

Пусть $(M_1^4, \omega_1, f_1, g_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, f_2, g_2)$ – две интегрируемые по Лиувиллю системы на симплектических многообразиях M_1^4 и M_2^4 , обладающих соответственно интегралами f_1, g_1 и f_2, g_2 . Рассмотрим изогэнергетические поверхности $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$. Интегрируемые гамильтоновы системы называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм $Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$, который, кроме того, сохраняет ориентацию 3-многообразий Q_1^3 и Q_2^3 и ориентацию всех критических окружностей.

Напомним, что в силу теоремы Лиувилля многообразие Q^3 расслоено на торы и особые слои (фактически оно представляет собой склейку регулярных окрестностей особых слоев друг с другом по граничным торам). Рассмотрим базу возникающего слоения Лиувилля на Q^3 . Эта база является одномерным графом W , называемым инвариантом (молекулой) Фоменко. В вершинах W расположены “атомы”, описывающие соответствующие бифуркации торов Лиувилля (например, описанные выше). Однако этот граф W не описывает полностью топологию слоения Лиувилля, так как он не содержит всей информации о склейках регулярных окрестностей особых слоев. Оказывается, для описания топологии слоения необходимо выбрать пары так называемых допустимых базисов на граничных торах (по некоторым правилам, см. подробнее [8]) и указать матрицы перехода от одного базиса к другому. Из полученных матриц перехода – матриц склейки – вычисляются числовые метки r, ε и n , которые, будучи расставленными на грубой молекуле W , полностью определяют слоение Лиувилля с точностью до послойной эквивалентности и уже не зависят от выбора допустимых базисов на граничных торах. Получающийся граф с метками называется меченой молекулой W^* , т.е. инвариантом Фоменко–Цишанга.

ТЕОРЕМА 1 (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг). *Две интегрируемые гамильтоновы системы на изогэнергетических поверхностях $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$ лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченные молекулы совпадают.*

Система билиарда не является гладкой, так как склейка в точках границы не позволяет ввести гладкую структуру в декартовых координатах. Необходимо видоизменить определения выше с учетом граничных точек. Описываемый ниже подход и определения предложены А. Т. Фоменко.

Фазовое многообразие M^4 является кусочно-гладким и распадется на гладкие куски (объединение которых мы обозначим $\widetilde{M}^4$), склеенные по точкам, проектирующимся (в случае билиардной системы) в одни и те же точки границы области, где определен билиард. На многообразии введем симплектическую структуру только в $\widetilde{M}^4$. Будем предполагать, что гладкие симплектические структуры в соседних гладких областях непрерывно согласованы на границе раздела, т.е. их пределы “справа и слева” совпадают. Будем говорить, что кусочно-гладкая система на M^4 интегрируема (в кусочно-гладком смысле, но в дальнейшем будем говорить, для краткости, просто об интегрируемости), если существуют непрерывные на M^4 и гладкие на $\widetilde{M}^4$ функционально независимые функции f и H , которые находятся в инволюции на M^4 . Подобное

определение имеет смысл не только для билиардных систем, но в данной работе мы будем рассматривать только плоские билиарды.

Рассмотрим кусочно-гладкое изоэнергетическое многообразие Q^3 и связную компоненту совместного уровня функций f и H . Пусть гамильтоновы потоки $\text{sgrad } f$ и $\text{sgrad } H$ полны. Если можно показать, что связная компактная компонента совместного уровня функций f и H гомеоморфна либо кусочно-гладкому тору, либо кусочно-гладкому трехмерному атому (для конечного числа значений f), то будем говорить, что выполнена кусочно-гладкая теорема Лиувилля. В этом случае мы можем построить грубую молекулу W и определить метки. В случае билиарда в компактной области полнота гамильтоновых потоков очевидна. В случае билиарда в некомпактной области связные поверхности уровня интегралов уже могут быть некомпактными. Однако если можно показать, что некомпактные связные компоненты совместного уровня функций являются двумерными цилиндрами или двумерными плоскостями, и если можно предъявить перестройки этих цилиндров и плоскостей (эти перестройки мы будем называть некомпактными атомами), то тогда можно по аналогии с компактным случаем определить (и построить) грубую молекулу. В общем случае интегрируемых систем на некомпактных многообразиях могут возникать некомпактные поверхности уровня интегралов, гомеоморфные плоскостям. Однако в случае плоских билиардов появляющиеся некомпактные поверхности уровня гомеоморфны цилиндрам, т.е. тут двумерных плоскостей не возникает.

Опишем, в каком смысле мы будем понимать понятие точек ранга 1, невырожденности и боттовости. В точках гладкости $\widetilde{M}^4$ будем пользоваться определениями, данными выше. В точках границы поступим следующим образом. Предположим, что в окрестности точки x_0 нельзя ввести гладкий атлас, но можно задать в ней условия склейки (например те, что указаны выше). Обозначим координаты в окрестности точки x_0 через x_i . Предположим, что точка x_0 является предельной точкой для точек x , в которых ранг отображения момента равен 1, а именно выполнено соотношение $\nu_1(x)f_1 + \nu_2(x)f_2 = 0$, и лежит на критической траектории. Потребуем также, чтобы $\lim_{x \rightarrow x_0} \nu_1(x)^2 + \nu_2(x)^2 \neq 0$. Рассмотрим пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \nu_1(x) \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \nu_2(x) \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \nu_1(x) \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \nu_2(x) \frac{\partial f_2}{\partial x_i}.$$

Если для любого i выполнено

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \nu_1(x) \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \nu_2(x) \frac{\partial f_2}{\partial x_i} = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \nu_1(x) \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \nu_2(x) \frac{\partial f_2}{\partial x_i} = 0,$$

то будем говорить, что в точке x_0 ранг отображения момента равен 1. Если же ранги матриц гесса функции f_2 , ограниченной на двумерную трансверсаль к одномерной орбите в $Q^3 = f_1 = \text{const}$, взятых как левый и правый пределы в точке x_0 , равны 2, то назовем такую точку невырожденной. Если все точки на критической траектории являются невырожденными, то дополнительный интеграл f_2 является функцией Ботта.

Фактически кусочно-гладкое слоение Лиувилля в случае билиардной системы отличается от слоения Лиувилля классической интегрируемой гамильтоновой системы тем, что каждая совместная поверхность уровня представляет собой либо кусочно-гладкий атом, либо кусочно-гладкий тор. Однако в дальнейшем мы будем пользоваться теми же обозначениями для атомов и молекул, что и в классическом случае.

§ 3. Интегрируемость билиардной задачи в допустимой области, ограниченной софокусными параболой

Зафиксируем систему координат на плоскости OXY . Уравнение

$$y^2 + 4px - 4p^2 = 0 \quad (3.1)$$

описывает семейство софокусных парабол (p – параметр параболы). Фокус парабол находится в начале координат, а директрисами являются вертикальные прямые, проходящие через точки вида $(2p, 0)$. Включим в это семейство прямую $y = 0$, соответствующую параметру $p = 0$. Будем называть эту прямую *вырожденной параболой*.

ЛЕММА 1. *Параболы, задаваемые уравнением (3.1) при различных значениях параметров, пересекаются под прямыми углами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть l_p и l_q – две параболы, удовлетворяющие уравнению (3.1) с параметрами p и q соответственно. Тогда координаты точки их пересечения имеют следующий вид: $(p + q, \pm 2\sqrt{-pq})$.

Очевидно, что софокусные параболы пересекаются тогда и только тогда, когда их параметры имеют разные знаки. Таким образом, выражение $\sqrt{-pq}$ корректно определено.

Продифференцируем уравнение (3.1) по x и по y . Получим вектор нормали к параболе (3.1). Подставим в результат координаты точки пересечения $(p + q, 2\sqrt{-pq})$. Для парабол l_p и l_q координаты векторов нормали N_{l_p} и N_{l_q} в точке их пересечения примут следующий вид:

$$N_{l_p} = (4p, 4\sqrt{-pq}) \quad N_{l_q} = (4q, 4\sqrt{-pq}).$$

Легко видеть, что такие вектора ортогональны. Лемма доказана.

Рассмотрим допустимую билиардную область Ω с кусочно-гладкой границей, состоящей из дуг софокусных парабол семейства (3.1). Согласно лемме 1 это можно сделать, так как софокусные параболы пересекаются под прямыми углами.

ЛЕММА 2. *Пусть отрезок билиардной траектории в области Ω , ограниченной софокусными параболой семейства (3.1), лежит на прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) в направлении вектора (v_1, v_2) . Тогда для этой траектории существует параметр*

$$p = \frac{v_2^2 x_0 - v_1 v_2 y_0}{v_1^2 + v_2^2}$$

такой, что любой другой отрезок этой траектории или его продолжение касается параболы семейства (3.1) с этим параметром p .

Рис. 1. Биллиардное движение в области Ω , ограниченной двумя параболой (выделены жирным). Пунктиром выделена парабола, которой касается траектория или ее продолжение. Жирным выделены точки касания

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в момент удара о границу области Ω координаты материальной точки принимают вид (x_0, y_0) , где (x_0, y_0) удовлетворяет уравнению $y^2 + 4Px - 4P^2 = 0$ (парабола из семейства (3.1)), а вектор скорости $v = (v_1, v_2)$. Заметим, что координата

$$x_0 := \frac{4P^2 - y_0^2}{4P},$$

так как точка лежит на параболе с параметром P . Касательный вектор $\tan$ к параболе $y^2 + 4Px - 4P^2 = 0$ в точке (x_0, y_0) имеет координаты $\tan = (-y_0, 2P)$, а вектор нормали $n = (2P, y_0)$. Для того чтобы вектора скоростей v и w в точке (x_0, y_0) удовлетворяли закону отражения на границе, они должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$(v + w, n) = 0, \quad (v - w, \tan) = 0,$$

где через $(\cdot, \cdot)$ обозначено стандартное скалярное произведение. Из этих соотношений можно выразить координаты вектора $w = (w_1, w_2)$ через координаты вектора v и точки x :

$$w_1 = \frac{-4P^2v_1 - 4Pv_2y_0 + v_1y_0^2}{4P^2 + y_0^2}, \quad w_2 = \frac{4P^2v_2 - 4Pv_1y_0 - v_2y_0^2}{4P^2 + y_0^2}.$$

Вычислим параметр p параболы семейства (3.1), которой касается прямая, проходящая через точку (x_0, y_0) с направляющим вектором $v = (v_1, v_2)$. Запишем уравнение этой прямой и уравнение прямой, касательной к параболе

$y^2 + 4px - 4p^2 = 0$ в точке (x_1, y_1) . Получим уравнения

$$y = \frac{v_2(x - x_0)}{v_1} + y_0 = \frac{v_2x}{v_1} + \left(y_0 - \frac{v_2x_0}{v_1}\right), \quad y = \frac{-2px}{y_1} + \left(\frac{2px_1}{y_1} + y_1\right).$$

Заметим, что эти прямые тождественно совпадают, следовательно, равны коэффициенты при x и свободные члены этих прямых. Также точка (x_1, y_1) принадлежит параболу $y^2 + 4px - 4p^2 = 0$. Таким образом, получаем следующую систему из трех уравнений с тремя неизвестными x_1, y_1 и p :

$$\begin{cases} \frac{v_2}{v_1} = \frac{-2p}{y_1}, \\ y_0 - \frac{v_2x_0}{v_1} = \frac{2px_1}{y_1} + y_1, \\ y_1^2 + 4px_1 = 4p^2. \end{cases}$$

Из первого уравнения легко найти

$$y_1 = -\frac{2pv_1}{v_2}.$$

Подставив выражение для y_1 в последнее уравнение, получаем выражение для

$$x_1 = \frac{4p^2 - y_1^2}{4p} = \frac{4p^2 - (2pv_1/v_2)^2}{4p} = \frac{4p^2 - 4p^2v_1^2/v_2^2}{4p} = p\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{v_2^2}\right).$$

Подставив во второе уравнение полученные выражения для x_1, y_1 , получаем

$$\begin{aligned} y_0 - \frac{v_2x_0}{v_1} &= \frac{2pp(v_2^2 - v_1^2)/v_2^2}{-2pv_1/v_2} - \frac{2pv_1}{v_2}, & \frac{y_0v_1 - v_2x_0}{v_1} &= -\frac{p(v_2^2 - v_1^2)}{v_1v_2} - \frac{2pv_1}{v_2}, \\ \frac{v_2x_0 - y_0v_1}{v_1} &= \frac{pv_2^2 - pv_1^2 + 2pv_1^2}{v_1v_2}, & \frac{v_2x_0 - y_0v_1}{v_1} &= \frac{pv_2^2 + pv_1^2}{v_1v_2}, \\ p &= \frac{v_2^2x_0 - v_1v_2y_0}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_2(4P^2v_2 - 4Pv_1y_0 - v_2y_0^2)}{4P(v_1^2 + v_2^2)}. \end{aligned}$$

Если значение выражения для p после подстановки вместо w_1 и w_2 их выражений через y_0, v_1, v_2 не изменится, то лемма будет доказана. Заметим, что в знаменатель выражения для p входит квадрат модуля вектора скорости. Но, как мы знаем из закона отражения, для v и w он одинаков. Таким образом, достаточно проверить, изменится ли числитель при подстановке вместо w_1 и w_2 их выражений через y_0, v_1, v_2 . Получаем

$$\begin{aligned} w_2(4P^2w_2 - 4Pw_1y_0 - w_2y_0^2) &= \frac{1}{4P^2 + y_0^2}(4P^2v_2 - 4Pv_1y_0 - v_2y_0^2) \\ &\times \left(-\frac{4Py_0(-4P^2v_1 - 4Pv_2y_0 + v_1y_0^2)}{4P^2 + y_0^2} + \frac{4P^2(4P^2v_2 - 4Pv_1y_0 - v_2y_0^2)}{4P^2 + y_0^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{y_0^2(4P^2v_2 - 4Pv_1y_0 - v_2y_0^2)}{4P^2 + y_0^2} \right) \\ &= \frac{1}{4P^2 + y_0^2}(4P^2v_2 - 4Pv_1y_0 - v_2y_0^2) \frac{16P^4v_2 + 8P^2v_2y_0^2 + v_2y_0^4}{4P^2 + y_0^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4P^2 + y_0^2} (4P^2 v_2 - 4P v_1 y_0 - v_2 y_0^2) v_2 (4P^2 + y_0^2) \\
 &= v_2 (4P^2 v_2 - 4P v_1 y_0 - v_2 y_0^2).
 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Динамическая система, описывающая бильiardное движение внутри допустимой области Ω , является интегрируемой, так как имеет два независимых интеграла: модуль вектора скорости (этот интеграл играет роль энергии системы) и параметр параболы p семейства (3.1).*

§ 4. Классификация допустимых бильiardных областей, ограниченных софокусными параболой

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Допустимая бильiardная область Ω , ограниченная софокусными параболой семейства (3.1), называется *эквивалентной* области Ω' , если она может быть продеформирована в Ω' с помощью композиции двух преобразований:

- 1) непрерывное изменение границы в классе парабол семейства (3.1) такое, что значение параметра сегмента изменяемой границы не меняет знак;
- 2) преобразование симметрии относительно осей Ox или Oy .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Допустимая бильiardная область Ω , ограниченная софокусными параболой семейства (3.1), называется *особой*, если одна из парабол, формирующих ее границу, является вырожденной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует ровно три класса эквивалентности допустимых неособых областей Ω , ограниченных софокусными параболой: область Ω_1 , ограниченная двумя параболой, параметры которых имеют разные знаки, область Ω_2 , ограниченная тремя параболой, и область Ω_3 , ограниченная четырьмя параболой с различными значениями параметров, а именно двумя положительными и двумя отрицательными, не имеющая общих точек с горизонтальной осью Ox (см. рис. 2).*

Существует ровно два класса эквивалентности допустимых особых областей: область ω_1 , ограниченная двумя невырожденными и одной вырожденной параболой, и область ω_2 , ограниченная тремя невырожденными и одной вырожденной параболой (см. рис. 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ω – допустимая бильiardная область, ограниченная софокусными параболой. Выделим из всего семейства две параболы: с максимальным и минимальным значениями параметра. Обозначим параметры этих парабол P и Q , где $P > 0$, $Q < 0$. Обозначим область, которую ограничивают эти параболы, через M . Область Ω целиком лежит в области M , причем граница Ω включает в себя хотя бы одну точку пересечения парабол с параметрами P и Q . Разрежем область M по горизонтальному отрезку, один конец которого находится в фокусе семейства парабол, а другой конец лежит на параболы с параметром P . В области M с разрезом софокусные параболы задают прямоугольную систему координат. Отобразим область M в прямоугольник (см. рис. 3, а).

Рис. 2. Допустимые биллиардные области, ограниченные семейством софокусных парабол. Жирным выделены параболы, ограничивающие каждую область. На рисунке области закрашены

Очевидно, что образ $f(\Omega)$ в этом прямоугольнике также является прямоугольником. Один из углов $f(\Omega)$ совпадает с $f(M)$. Без ограничения общности можно считать, что это левый верхний угол прямоугольника, изображенного на

Рис. 3. На рис. а изображен образ области M при отображении в прямоугольник. Жирным выделен образ фокуса. Правая граница – линия разреза. Верхняя и нижняя границы – образ параболы с параметром P . Левая граница – образ параболы с параметром P . На рис. б закрашены возможные области при отображении M в прямоугольник. Легко понять, что средняя область в верхнем ряду эквивалентна левой области в нижнем ряду. Пунктиром выделен образ горизонтального отрезка

рис. 3, а. Рассматривая различные прямоугольники, удовлетворяющие этому условию (см. рис. 3, б), получаем пять различных типов областей.

§ 5. Особые уровни интегралов

Напомним, что точка ξ из M^4 в нашем случае задается в виде пары (x, v) , где $x \in \Omega$. В дальнейшем для удобства иногда будем называть точку $x \in \Omega$ “первой координатой точки ξ ”.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Точками ранга 1 в M^4 , первые координаты которых лежат строго внутри области Ω , являются точки, лежащие на уровне интеграла $p = 0$ и имеющие координаты $(x, 0, v_1, 0)$ (они проектируются на отрезок оси Ox). Эти точки заполняют два интервала и являются невырожденными в классическом смысле. Склеив эти два интервала с двумя точками, которые проектируются на границу области и лежат на том же уровне интеграла $p = 0$, получаем окружность. Эта окружность в M^4 является невырожденной критической окружностью седловой особенности, а интеграл P является функцией Ботта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что в лемме 2 была доказана явная формула для интеграла P – параметра параболы. Запишем явные формулы для интегралов билиардной системы

$$H = v_1^2 + v_2^2, \quad P = \frac{v_2^2 x - v_1 v_2 y}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Тогда

$$dH = \{0, 0, 2v_1, 2v_2\},$$

$$dP = \left\{ \frac{v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}, -\frac{v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2}, \frac{v_2(-2v_1 v_2 x + v_1^2 y - v_2^2 y)}{(v_1^2 + v_2^2)^2}, \frac{v_1(2v_1 v_2 x - v_1^2 y + v_2^2 y)}{(v_1^2 + v_2^2)^2} \right\}.$$

Очевидно, что эти векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда $y = 0$, $v_2 = 0$. Эти точки находятся на поверхности уровня $P = 0$. Заметим, что в них $dP = 0$. Рассмотрим билинейную форму $d^2 P$.

$$d^2 P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K & L \\ 0 & 0 & M & N \\ K & M & A & B \\ L & N & B & C \end{pmatrix},$$

где через A, B, C, K, L, M и N обозначены

$$A = \frac{4v_1 v_2 y}{(v_1^2 + v_2^2)^2} + \frac{8v_1^2(v_2^2 x - v_1 v_2 y)}{(v_1^2 + v_2^2)^3} - \frac{2(v_2^2 x - v_1 v_2 y)}{(v_1^2 + v_2^2)^2},$$

$$B = \frac{2v_2^2 y}{(v_1^2 + v_2^2)^2} - \frac{y}{v_1^2 + v_2^2} - \frac{2v_1(2v_2 x - v_1 y)}{(v_1^2 + v_2^2)^2} + \frac{8v_1 v_2(v_2^2 x - v_1 v_2 y)}{(v_1^2 + v_2^2)^3},$$

$$C = \frac{2x}{v_1^2 + v_2^2} - \frac{4v_2(2v_2 x - v_1 y)}{(v_1^2 + v_2^2)^2} + \frac{8v_2^2(v_2^2 x - v_1 v_2 y)}{(v_1^2 + v_2^2)^3} - \frac{2(v_2^2 x - v_1 v_2 y)}{(v_1^2 + v_2^2)^2},$$

$$K = -\frac{2v_1v_2^2}{(v_1^2 + v_2^2)^2}, \quad L = -\frac{2v_2^3}{(v_1^2 + v_2^2)^2} + \frac{2v_2}{v_1^2 + v_2^2},$$

$$M = \frac{2v_1^2v_2}{(v_1^2 + v_2^2)^2} - \frac{v_2}{v_1^2 + v_2^2}, \quad N = \frac{2v_1v_2^2}{(v_1^2 + v_2^2)^2} - \frac{v_1}{v_1^2 + v_2^2}.$$

При подстановке $y = 0$, $v_2 = 0$ получаем следующий вид d^2P :

$$d^2P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{v_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{v_1} & 0 & \frac{2x}{v_1} \end{pmatrix}.$$

В $Q^3 = \{x \in M^4 \mid H = 1\}$ при ограничении билинейной формы d^2P на двумерную трансверсаль надо выбрать следующий минор:

$$d^2\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{v_1} \\ -\frac{1}{v_1} & \frac{2x}{v_1} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ранг данной матрицы всегда равен 2 (так как $v_1 \neq 0$). Следовательно, точки ранга 1 являются невырожденными. Заметим, что в точках, которые лежат на границе области, данная матрица будет той же, т.е. при переходе к пределу необходимо просто подставить значения в точке границы. Таким образом, точки, лежащие на границе, являются невырожденными в смысле данного выше определения.

Характеристический многочлен для d^2P принимает вид

$$\frac{t^2(-1 + t^2v_1^2 - 2tx)}{v_1^2}.$$

Очевидно, что произведение ненулевых корней характеристического многочлена равно $-1/v_1^2$, а значит, особенность при данном значении интеграла ($P = 0$) седловая. Предложение доказано.

§ 6. Описание топологии слоения Лиувилля.

Теорема классификации

ТЕОРЕМА 2. *Топология слоения Лиувилля изоэнергетического многообразия Q^3 бильярдного движения в областях Ω_1 и Ω_2 описывается молекулами, изображенными на рис. 4,а и 4,б соответственно. Топология слоения Лиувилля изоэнергетического многообразия Q^3 бильярдного движения в области Ω_3 и особых областях ω_1 и ω_2 описывается молекулой, изображенной на рис. 4,с.*

Рис. 4. Меченые молекулы в допустимых билиардных областях, ограниченных семейством парабол: на рис. а для области Ω_1 , на рис. б для области Ω_2 , на рис. с для областей Ω_3 , ω_1 и ω_2

СЛЕДСТВИЕ 2. Динамические системы, описывающие билиардное движение в областях Ω_3 , ω_1 и ω_2 , лиувиллево эквивалентны, т.е. имеют одинаковые замыкания интегральных траекторий.

СЛЕДСТВИЕ 3. Динамические системы, описывающие билиардное движение в областях Ω_1 и Ω_2 , лиувиллево эквивалентны интегрируемым динамическим системам случая Горячева–Чаплыгина–Сретенского (движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой и специальными условиями симметрии) и Жуковского (движение гиростата в поле силы тяжести) соответственно при подходящих значениях интеграла энергии (указанные систе-

Рис. 5. Интегрируемая система случая Горячева–Чаплыгина–Сретенского при значениях параметров, соответствующих изображенной на рис. а закрашенной области под номером 2, моделируется билиардом в области Ω_1 . Интегрируемая система случая Жуковского при значениях параметров интегралов, соответствующих изображенной на рис. б закрашенной области под номером 4, моделируется билиардом в области Ω_2

мы подробно изучены в [8]). Эти конкретные зоны энергии изображены на рис. 5. Интегрируемая система случая Горячева–Чаплыгина–Сретенского при значениях параметров, соответствующих изображенной на рис. 5, а области под номером 2, моделируется билиардом в области Ω_1 . Интегрируемая система случая Жуковского при значениях параметров интегралов, соответствующих изображенной на рис. 5, б области под номером 4, моделируется билиардом в области Ω_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Без ограничения общности будем считать что $H = 1$. Заметим, что у интеграла P (см. лемму 2) есть три критических значения – два минимаксных и одно седловое, $P = 0$. Согласно предложению 2 точки, лежащие на седловом уровне интеграла, являются невырожденными.

ЛЕММА 3. Рассмотрим отображение $P: Q^3 \rightarrow \mathbb{R}$ и прообраз достаточно малого интервала $(-\varepsilon, +\varepsilon)$. Для билиардных систем в областях $\Omega_3, \omega_1, \omega_2$ этот прообраз послойно гомеоморфен прямому произведению тора на отрезок, для билиардной системы в области Ω_2 – трехмерному атому B , для билиардной системы в области Ω_1 – трехмерному атому A^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что формула для интеграла P (см. лемму 2) имеет следующий вид:

$$P = \frac{v_2^2 x - v_1 v_2 y}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Таким образом, точки, лежащие на уровне интеграла $P = 0$, описываются следующим уравнением:

$$\frac{v_2^2 x - v_1 v_2 y}{v_1^2 + v_2^2} = 0.$$

Так как знаменатель дроби не обращается в нуль, то это уравнение равносильно следующему:

$$v_2(v_2 x - v_1 y) = 0.$$

Получаем два случая: либо $v_2 = 0$, либо $v_2 x - v_1 y = 0$. В первом случае это точки, оснащенные векторами скорости, направленными горизонтально, во втором случае это точки, оснащенные векторами скорости, направленными к фокусу (или от фокуса).

Для начала докажем лемму для билиардных систем в областях Ω_2 и ω_2 . Возьмем точку с координатами $(x, 0, v_1, 0)$. Рассмотрим проекцию этой точки на билиардную область. Через эту точку проходит единственная парабола l , софокусная с семейством границы (3.1). Возьмем дугу $\check{l}$ параболы l , целиком лежащую в данной билиардной области. Проекцию точки $(x, 0, v_1, 0)$ можно оснастить вектором скорости $v = (v_1, 0)$. Оснастим теперь дугу $\check{l}$ векторами $v' = (v'_1, v'_2)$ скорости так, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) точки (x', y', v'_1, v'_2) , где точка с координатами (x', y') принадлежит дуге $\check{l}$, лежат на уровне интеграла $P = 0$;
- 2) в точке $(x, 0)$ вектор скорости совпадает с v ;
- 3) при переходе к пределу $x' \rightarrow x$ вектор v' переходит в вектор v .

Согласно замечанию выше, каждая точка с координатами (x', y') , принадлежащая дуге $\check{l}$, будет оснащена двумя векторами скорости – либо $(v_1, 0)$ (горизонтальным), либо вектором скорости, направленным к фокусу (либо от фокуса, в зависимости от знака v_1). Точки дуги, лежащие на границе билиардной области, будут, однако, оснащены лишь одним вектором скорости за счет склейки на границе. Таким образом, прообраз дуги $\check{l}$ в случае области ω_2 представляет собой окружность, а в случае области Ω_2 – восьмерку. Таким образом, для этих областей лемма доказана. В случае области Ω_3 построение полностью аналогично.

Рассмотрим теперь билиардное движение в области ω_1 . Вырежем из этой области отрезок $[0, x_{\max}]$, где $x_{\max}$ – абсцисса самой правой точки области ω_1 . В полученной области с разрезом проведем описанное выше построение. Рассмотрим точку $(0, 0, v_1, v_2)$ (ранее мы вырезали ее проекцию). Прообраз этой точки – отрезок, граничные точки которого, а именно где $v_2 = 0$, являются точками ранга 1 отображения момента. Прообраз полуинтервала $(0, x_{\max}]$ – это интервал, состоящий из критических точек, так как прообраз каждой точки x полуинтервала, кроме точки $(0, x_{\max})$, – это две точки $(x, 0, \pm 1, 0)$. Совместная поверхность уровня интегралов $H = 1$, $P = 0$ для билиардного движения в области ω_1 изображена на рис. 6.

Рис. 6. Тор, являющийся совместной поверхностью уровня интегралов $H = 1$, $P = 0$, для билиардного движения в области ω_1 . Точки A и B – это точки с координатами $(0, 0, \pm 1, 0)$. Жирным выделены точки, соответствующие периодической траектории, проходящей вдоль оси Ox

Для описания особого слоя для билиардного движения в области Ω_1 воспользуемся конструкцией для области ω_1 . Прообразом каждой дуги $\check{l}$ будет восьмерка, а прообразом точки $(0, 0)$ – окружность. Легко понять, что особый слой при этом будет описываться атомом A^* . Лемма доказана.

Так как изоэнергетическое многообразие гомеоморфно сфере S^3 (см., например, [7], [16]), то молекула для билиардных систем во всех областях, кроме областей Ω_1 и Ω_2 , – это простейшая молекула $A - A$, с метками, указанными на рис. 5. Для вычисления инвариантов билиардных систем в областях Ω_1 и Ω_2 нам понадобятся следующие леммы (вычисление меток r и ε).

ЛЕММА 4 (А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко; см. [8]). *Рассмотрим произвольное ребро какой-либо молекулы W , и пусть (λ_+, μ_+) и (λ_-, μ_-) – допустимые*

системы координат, отвечающие двум атомам, соединенным этим ребром. Будем считать, что все эти циклы лежат на одном и том же торе Лиувилля, в середине ребра. Рассмотрим следующие три случая:

- 1) если циклы λ_+ и λ_- не пересекаются, т.е. гомологичны на торе, то $r = \infty$;
- 2) если циклы λ_+ и λ_- пересекаются ровно в одной точке, то $r = 0$;
- 3) если циклы λ_+ и λ_- имеют индекс пересечения 2, то $r = 1/2$.

Во всех этих трех случаях метка r не зависит от выбора ориентации на многообразии Q^3 , на ребрах молекулы и критических окружностях.

Воспользуемся леммой 4 и явно построим необходимые циклы λ . Циклы представим в виде дуг, прообразы которых на торе Лиувилля и дадут соответствующие циклы λ .

Рис. 7. Проекция циклов λ на торах Лиувилля вблизи седловых атомов: на рис. а для ребра молекулы, описывающей слоение Лиувилля билиардной системы в области Ω_1 , на рис. б для нижнего ребра молекулы, описывающей слоение Лиувилля билиардной системы в области Ω_2 , на рис. с для верхнего ребра молекулы, описывающей слоение Лиувилля билиардной системы в области Ω_2

Цикл, проекция которого изображена на рис. 7, б, является исчезающим, т.е. совпадает с циклом λ , выбранным вблизи атома А. Как видно, с циклом, изображенным на рис. 7, а, данный цикл пересекается лишь в одной точке, поэтому все метки r на ребрах молекулы, описывающей слоение Лиувилля билиардной системы в области Ω_1 , равны нулю. Из той же леммы 4 следует вывод, что метка на нижнем ребре молекулы, описывающей слоение Лиувилля билиардной системы в области Ω_2 , равна ∞ . На верхнем же ребре метка $r = 0$, так как исчезающий цикл пересекается с циклом, проекция которого изображена на рис. 7, с лишь в одной точке.

ЛЕММА 5 (вычисление меток ε). Рассмотрим ребро молекулы, соединяющее два атома, один из которых – минимаксный атом А. Ориентируем ребро по направлению к атому А. Тогда если цикл μ^+ можно выбрать так, что он совпадет с циклом λ^- , то метка $\varepsilon = 1$ на этом ребре.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма напрямую вытекает из определения меток. В этом случае матрица склейки – матрица перехода от базиса (λ^-, μ^-) к базису

(λ^+, μ^+) – имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По построению матрицы склейки ее определить равен единице. Это значит, что в этом случае $\beta = 1$. Таким образом, по определению $\varepsilon = 1$. Лемма доказана.

Ориентируем ребра, несущие на себе конечную метку r , по направлению к атомам A .

На рис. 7, а изображен цикл λ^- для ребра молекулы, описывающей слоение Лиувилля билиардной системы в области Ω_1 . По определению цикл μ^+ выбирается так, чтобы он дополнял исчезающий цикл λ^+ до базиса. Очевидно, что цикл, изображенный на рис. 7, а, удовлетворяет этому условию. Таким образом, метка $\varepsilon = 1$ на этом ребре.

Аналогично доказывается, что метка $\varepsilon = 1$ для конечных ребер молекулы, описывающей слоение Лиувилля билиардной системы в области Ω_1 .

Как упоминалось ранее, изоэнергетическое многообразие Q^3 для билиардных системы в допустимых областях, ограниченных софокусными параболой, гомеоморфно S^3 . Грубая молекула с метками $r = 0$ и $\varepsilon = 1$, описывающая слоение Лиувилля изоэнергетического многообразия, гомеоморфного трехмерной сфере, была описана ранее. Вычисление метки n с помощью формулы Топалова можно посмотреть, например, в книге [8].

§ 7. Некомпактный случай

Опустим условие компактности в определении допустимых областей. Рассмотрим две некомпактные области – область, ограниченную одной параболой (обозначим ее Ω'_1), и область, ограниченную двумя параболой (обозначим ее Ω'_2), знаки параметров которых совпадают. В этом случае при определении динамической системы мы получаем некомпактные слои. Несмотря на то, что аппарат для исследования лиувиллевой эквивалентности некомпактных систем еще не построен, мы, тем не менее, можем построить так называемую грубую молекулу, описывающую топологию слоения. Регулярные слои в этом случае будут гомеоморфны цилиндрам. Опишем топологию изоэнергетической поверхности Q^3 более подробно.

Для начала проверим полноту векторных потоков, а именно, проверим, что естественный параметр на траекториях системы определен на всей числовой прямой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Естественный параметр на траекториях билиардной системы в некомпактных областях Ω'_1 и Ω'_2 определен на всей числовой прямой, т.е. векторные потоки $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } P$ полны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая билиардная траектория s в указанных областях является ломаной. Достаточно показать, что s разбивается либо в сумму

$$s = \sum_{i=1}^n a_i$$

конечных звеньев a_i ломаной s , либо в последовательную сумму бесконечного интервала $b_1 = (-\infty, t_1)$, отрезка $a = [t_1, t_2]$ и бесконечного интервала $b_2 = (t_2, \infty)$.

Для начала рассмотрим траектории, лежащие в области Ω_2 . Каждое звено ломаной s лежит на некоторой прямой l , касательной к некоторой параболе семейства (3.1). Любая такая прямая пересекает границу области Ω_2 в двух точках. Поэтому любое звено ломаной s является конечным отрезком. Напомним, что одна траектория в этой области гомеоморфна окружности, а именно траектория на уровне интеграла $p = 0$, лежащая на оси Ox . Таким образом, любая бесконечная траектория в области Ω_2 распадается в бесконечную сумму конечных отрезков.

Рассмотрим траектории в области Ω_1 . Возьмем траекторию, лежащую на уровне интеграла $p \neq 0$. В этом случае касательный вектор в любой точке с координатами (x, y) параболы семейства (3.1) с параметром p будет пропорционален вектору $(-y, 2p)$. Так как $p \neq 0$, то этот вектор не параллелен оси Ox , а значит, любая касательная к параболе с параметром p будет пересекать параболу границы в двух точках. Напомним, что любая траектория, лежащая на уровне интеграла p , распадется в отрезки прямых, касательных к параболе семейства (3.1) с параметром p . Но, как было показано выше, такие отрезки конечны, если $p \neq 0$. Таким образом, любая траектория представляется в виде последовательной бесконечной суммы конечных отрезков.

Рассмотрим траекторию, лежащую на уровне интеграла $p = 0$. В этом случае прямые, на которых лежит эта траектория, либо проходят через фокус, либо параллельны оси Ox . Более точно, любая неособая траектория, лежащая на уровне интеграла $p = 0$, распадется в два полуинтервала и один отрезок между ними. Особая траектория, лежащая на этом уровне интеграла, это траектория, которая проходит через фокус вдоль оси Ox . Отрезок $a = [t_1, t_2]$ для этой траектории вырождается в точку.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для билиардного движения в некомпактной области Ω'_1 , ограниченной параболой, изоэнергетическая поверхность Q^3 расслоена на

Рис. 8. Схематичное изображение слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 для билиардного движения в области Ω'_1 (а) и области Ω'_2 (б). Атомы A и B гомеоморфны прямым произведениям соответствующих плоских атомов на прямую $\mathbb{R}$. “Атом” B' описан ниже

цилиндры и особые слои, два из которых гомеоморфны прямой $\mathbb{R}$, а третий гомеоморфен прямому произведению критического уровня двумерного атома B на $\mathbb{R}$ (см. рис. 8, а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что область Ω'_1 ограничена параболой из софокусного семейства (3.1) с параметром $p < 0$. Тогда значению интеграла $P = p$ соответствуют два движения по граничной параболе. На уровне интеграла $P = 0$ лежат траектории, проходящие через фокус (они состоят из двух горизонтальных лучей и одного отрезка). Критическая траектория при этом – движение точки вдоль оси Ox . При стремлении параметра P к бесконечности получаем траектории, бесконечно далеко удаленные от фокуса, и проекция совместной поверхности уровня (цилиндра) становится все меньше. Опишем уровень интеграла, соответствующий параметру $P = 0$. Рассмотрим софокусные параболы P_q с параметром $q > 0$. Эти параболы заполняют всю область Ω'_1 кроме горизонтального отрезка оси Ox , заключенного между параболой с параметром p и фокусом семейства (3.1) – началом координат. В точку пересечения параболы P_q проектируются две точки, лежащие на критической траектории интеграла P , а именно точки, оснащенные векторами скорости вдоль оси Ox . Далее, оснастим дугу параболы P_q парами векторов так, чтобы полученные оснащенные точки лежали на уровне интеграла $P = 0$. В результате прообразом каждой параболы P_q будут две восьмерки – одна оснащена направленными вправо векторами, а другая оснащена направленными влево векторами. Таким образом, все точки области Ω'_1 , кроме вырезанного отрезка, оказались оснащены векторами, лежащими на уровне интеграла $P = 0$. В результате получилось прямое произведение восьмерки на два луча $(0, +\infty)$. Если оснастить вырезанный отрезок векторами скорости, то получим интервал, по которому концевые восьмерки склеиваются с перекруткой. Аналогичный результат был получен в доказательстве леммы 3 теоремы 2. Схематично слоение Лиувилля изображено на рис. 8, а.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для бильярдного движения в некомпактной области Ω'_2 , ограниченной двумя параболой, имеющими одинаковые знаки параметров, изоэнергетическая поверхность Q^3 расслоена на цилиндры и особые слои, два из которых гомеоморфны прямой $\mathbb{R}$, а третий гомеоморфен трехмерному “атому” B' (см. рис. 8, б), базой которого является “атом” B' , изображенный на рис. 9.

Рис. 9. Двумерный “атом” B' . Жирным выделена бесконечная точка. Трехмерный атом B' является результатом прямого произведения двумерного “атома” B' на окружность S^1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для билиардного движения в области Ω'_2 критическая траектория, лежащая на уровне $P = 0$, является окружностью. Возьмем точку (x, v) этой окружности. Она проектируется в точку x , лежащую на горизонтальном отрезке оси Ox , расположенном между параболой, ограничивающей область Ω'_2 . Через точку x проходит единственная парабола из софокусного семейства (3.1). Каждую точку этой параболы можно оснастить парой векторов скорости, сонаправленными с вектором скорости v , которым оснащена точка x . В результате прообраз любой параболы семейства (3.1), лежащей внутри области Ω'_2 , это пара восьмерок, в каждой из которых удалены две точки. Эти точки лежат на бесконечности.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Биллиарды в некомпактных областях могут быть получены предельным переходом из биллиардов в компактных областях. Таким образом, биллиардное движение в некомпактной области Ω'_1 получается из биллиардного движения в компактной области Ω_1 устремлением параметра одной из парабол, ограничивающих область Ω_1 , к бесконечности. При этом в атоме A^* необходимо сделать разрез, соответствующий точкам, проектирующимся на параболу, параметр которой мы устремили к бесконечности. Рассмотрим точки, лежащие на малой окрестности уровня интеграла $P = 0$ и проектирующиеся на эту параболу. В лемме 3 теоремы 2 показано, что эти точки образуют двумерный атом B . При вырезании из трехмерного атома A^* вдоль двумерного атома B ортогонально критической окружности мы получаем некомпактный атом B . Это происходит, так как трехмерный компактный атом A^* отличается от компактного атома B наличием перекрутки. Если же удалить одно сечение трансверсально критической окружности, то атомы становятся гомеоморфными. Аналогичное рассуждение можно провести в случае области Ω'_2 . При этом из атома B необходимо удалить две окружности, гомологичных критической траектории.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Также биллиарды в рассмотренных некомпактных областях могут быть получены как предел другой динамической системы, а именно биллиардной системы в области, ограниченной софокусными эллипсами и гиперболами. Как известно, семейство софокусных парабол получается из семейства софокусных гипербол и эллипсов устремлением одного из фокусов к бесконечности. Области, соответствующие при этом областям Ω'_1 и Ω'_2 , – это области, ограниченные одним и двумя эллипсами соответственно. Меченые молекулы, описывающие движение в этих областях, были вычислены в работах [4]–[7]. При этом седловые атомы получились B и C_2 . Таким образом, при переходе к пределу и устремлении одного из фокусов на бесконечность, атом B в молекуле, описывающей биллиардное движение в области, ограниченной эллипсом, не изменяется. Из атома C_2 при этом необходимо вырезать окрестность одной из двух критических окружностей.

Автор приносит глубокую благодарность научному руководителю А. Т. Фоменко за постановку задачи, существенную помощь и постоянное внимание к работе, а также Е. А. Кудрявцевой за ряд ценных и полезных замечаний.

Список литературы

- [1] Дж. Д. Биркгоф, *Динамические системы*, Издательский дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999, 408 с.; пер. с англ.: G. D. Birkhoff, *Dynamical systems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **9**, Amer. Math. Soc., New York, 1927, viii+295 pp.
- [2] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, 3-е изд., Наука, М., 1989, 472 с.; англ. пер. 2-го изд.: V. I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., **60**, Springer-Verlag, New York, 1989, xvi+508 pp.
- [3] В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, *Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами*, Изд-во МГУ, М., 1991, 168 с.; англ. пер.: V. V. Kozlov, D. V. Treshchev, *Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*, Transl. Math. Monogr., **89**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, viii+171 pp.
- [4] V. Dragović, M. Radnović, “Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **14**:4-5 (2009), 479–494.
- [5] В. Драгович, М. Раднович, *Интегрируемые билиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.–Ижевск, 2010, 338 с.
- [6] В. В. Фокичева, “Описание особенностей системы “билиард в эллипсе””, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 2012, № 5, 31–34; англ. пер.: V. V. Fokicheva, “Description of singularities for system ‘billiard in an ellipse’”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **67**:5-6 (2012), 217–220.
- [7] В. В. Фокичева, “Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 2014 (в печати).
- [8] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевск, 1999, 444 pp., 447 с.; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004, xvi+730 pp.
- [9] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52**:2 (1988), 378–407; англ. пер.: A. T. Fomenko, H. Zieschang, “On typical topological properties of integrable Hamiltonian systems”, *Math. USSR-Izv.*, **32**:2 (1989), 385–412.
- [10] А. Т. Фоменко, “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *УМН*, **44**:1(265) (1989), 145–173; англ. пер.: A. T. Fomenko, “The symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems”, *Russian Math. Surveys*, **44**:1 (1989), 181–219.
- [11] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:3 (1990), 546–575; англ. пер.: A. T. Fomenko, H. Zieschang, “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:3 (1991), 567–596.
- [12] А. Т. Фоменко, А. Ю. Кonyaев, “New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems”, *Topology Appl.*, **159**:7 (2012), 1964–1975.
- [13] А. Т. Фоменко, А. Ю. Кonyaев, “Algebra and geometry through Hamiltonian systems”, *Continuous and distributed systems. Theory and applications*, Solid Mech. Appl., **211**, Springer, Dordrecht, 2014, 3–21.
- [14] Е. А. Кудрявцева, И. М. Никонов, А. Т. Фоменко, “Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия”, *Матем. сб.*, **199**:9 (2008), 3–96; англ. пер.: E. A. Kudryavtseva, I. M. Nikonov, A. T. Fomenko, “Maximally

- symmetric cell decompositions of surfaces and their coverings”, *Sb. Math.*, **199**:9 (2008), 1263–1353.
- [15] Е. А. Кудрявцева, А. Т. Фоменко, “Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях”, *Докл. РАН*, **446**:6 (2012), 615–617; англ. пер.: Е. А. Kudryavtseva, A. T. Fomenko, “Symmetry groups of nice Morse functions on surfaces”, *Dokl. Math.*, **86**:2 (2012), 691–693.
- [16] Е. Gutkin, “Billiard dynamics: a survey with the emphasis on open problems”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **8**:1 (2003), 1–13.

Виктория Викторовна Фокичева
(**Victoriya V. Fokicheva**)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: arinir@yandex.ru

Поступила в редакцию
17.03.2014