Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Плахов, Задача Ньютона о теле наименьшего усредненного сопротивления,
Матем. сб., 2004, том 195, номер 7, 105–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm836>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 10:22:26

УДК 517.95

А. Ю. Плахов

Задача Ньютона о теле наименьшего усредненного сопротивления

Рассмотрим покоящееся тело Ω в d -мерном евклидовом пространстве и падающий на него с единичной скоростью v однородный поток частиц. Частицы не взаимодействуют между собой и абсолютно упруго соударяются с телом. Обозначим $\mathcal{R}_\Omega(v)$ сопротивление тела потоку. Задача о теле наименьшего сопротивления, восходящая к Ньютону, состоит в минимизации величины $(\mathcal{R}_\Omega(v) \mid v)$ в некотором заданном классе тел.

Предположим, что нам заранее неизвестно направление потока v или же что измерение сопротивления производится многократно, для разных значений v . В этих случаях представляет интерес задача минимизации усредненного значения сопротивления $\tilde{\mathcal{R}}(\Omega) = \int_{S^{d-1}} (\mathcal{R}_\Omega(v) \mid v) dv$. Мы рассматриваем эту задачу ($\tilde{P}_d$) в классе тел единичного объема и ($\tilde{P}_d^c$) в классе выпуклых тел единичного объема. Для выпуклой задачи $\tilde{P}_d^c$ решением является d -мерный шар. Для невыпуклой двумерной задачи $\tilde{P}_2$ наименьшее значение $\tilde{\mathcal{R}}(\Omega)$ определено с точностью до 0.61%. При получении этой оценки использовался результат, относящийся к задаче Монжа о переносе массы, также решенной в работе. Задача состоит в следующем: найти $\inf_{T \in \mathcal{T}} \int_{\Pi} f(\varphi, \tau; T(\varphi, \tau)) d\mu(\varphi, \tau)$, где $\Pi = [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 1]$, $d\mu(\varphi, \tau) = \cos \varphi d\varphi d\tau$, $f(\varphi, \tau; \varphi', \tau') = 1 + \cos(\varphi + \varphi')$, $\mathcal{T}$ — множество взаимно однозначных сохраняющих меру μ отображений Π на себя.

Также рассматривается задача о минимизации $\overline{\mathcal{R}}(\Omega) = \int_{S^{d-1}} |\mathcal{R}_\Omega(v)| dv$. Полученные решение выпуклой задачи $\tilde{P}_d^c$ и оценка для невыпуклой двумерной задачи $\tilde{P}_2$ такие же, как для задач $\tilde{P}_d^c$ и $\tilde{P}_2$.

Библиография: 17 названий.

§ 1. Введение

Тело движется с постоянной скоростью в d -мерном евклидовом пространстве ($d \geq 2$) в однородной среде, состоящей из бесконечно малых невзаимодействующих покоящихся частиц. Каждая частица испытывает конечное число (может быть, ни одного) упругих соударений с телом и затем движется свободно.

Удобно перейти в систему отсчета, связанную с телом. В такой системе рассматривается однородный поток частиц, падающих на неподвижное тело $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Скорость частиц до соударения с телом одинакова; обозначим ее $v \in \mathbb{R}^d$ ($v \neq 0$). Частица потока первоначально движется свободно согласно $x(t) = x + vt$, $x \in \mathbb{R}^d$, затем испытывает несколько соударений с телом и, наконец, снова движется свободно со скоростью, которую мы обозначим $v_\Omega^+(x, v)$. Очевидно, для любого дейст-

вительного τ справедливо $v_{\Omega}^{+}(x + v\tau, v) = v_{\Omega}^{+}(x, v)$ (две частицы, первоначально двигавшиеся вдоль одной и той же прямой, в конечном итоге будут иметь одну и ту же скорость). Импульс, который частица передает телу, пропорционален $v - v_{\Omega}^{+}(x, v)$. Сопротивление $\mathcal{R}_{\Omega}(v)$ тела потоку частиц равно сумме переданных за единицу времени импульсов. Таким образом, имеем (с точностью до постоянного множителя)

$$\mathcal{R}_{\Omega}(v) = \int_{v^{\perp}} (v - v_{\Omega}^{+}(x, v)) dx, \quad (1)$$

где $v^{\perp}$ — ортогональное дополнение к v в $\mathbb{R}^d$.

Аэродинамическая задача Ньютона состоит в минимизации сопротивления (1) в некотором заданном классе тел (см. [1]–[8]). При этом предполагается, что v — фиксированная детерминистическая величина. Предположим, однако, что v является случайной величиной, принимающей значения в некотором подмножестве $\mathbb{R}^d$. В этом случае сопротивление $\mathcal{R}_{\Omega}(v)$ также является случайной величиной, и представляют интерес задачи минимизации математических ожиданий $\mathbb{E}|\mathcal{R}_{\Omega}(v)|$ и $\mathbb{E}(\mathcal{R}_{\Omega}(v) | v)$. Здесь $(\cdot | \cdot)$ обозначает скалярное произведение. Задачи подобного рода возникают, если (в системе отсчета, связанной с частицами среды) тело совершает как поступательное, так и вращательное движение, причем скорость вращательного движения мала по сравнению со скоростью поступательного; или же если перед началом поступательного движения тело совершает поворот, который мы не в состоянии контролировать.

В дальнейшем мы предполагаем, что v равномерно распределено на единичной сфере S^{d-1} ; тогда математические ожидания $\mathbb{E}|\mathcal{R}_{\Omega}(v)| =: \overline{\mathcal{R}}(\Omega)$ и $\mathbb{E}(\mathcal{R}_{\Omega}(v) | v) =: \tilde{\mathcal{R}}(\Omega)$ равны (с точностью до множителя, зависящего только от d)

$$\overline{\mathcal{R}}(\Omega) = \int_{S^{d-1}} |\mathcal{R}_{\Omega}(v)| dv, \quad (2)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}(\Omega) = \int_{S^{d-1}} (\mathcal{R}_{\Omega}(v) | v) dv. \quad (3)$$

Рассмотрим следующие задачи:

$(\bar{\mathcal{P}}_d \text{ и } \tilde{\mathcal{P}}_d)$: минимизировать значения $\overline{\mathcal{R}}(\Omega)$ и $\tilde{\mathcal{R}}(\Omega)$ в классе $\mathcal{B}_d$ тел единичного объема;

$(\bar{\mathcal{P}}_d^c \text{ и } \tilde{\mathcal{P}}_d^c)$: минимизировать значения $\overline{\mathcal{R}}(\Omega)$ и $\tilde{\mathcal{R}}(\Omega)$ в классе $\mathcal{B}_d^c$ *выпуклых* тел единичного объема.

Решение выпуклых задач $\bar{\mathcal{P}}_d^c$ и $\tilde{\mathcal{P}}_d^c$ приведено во втором параграфе; в обоих случаях тело наименьшего усредненного сопротивления есть d -мерный шар (теорема 1).

Невыпуклые задачи $\bar{\mathcal{P}}_d$ и $\tilde{\mathcal{P}}_d$ в общем виде остаются нерешенными. В третьем параграфе мы получаем оценки соответствующих минимальных значений для случая $d = 2$. Доказано, что отношения минимальных значений для невыпуклых и выпуклых задач $\inf_{\Omega \in \mathcal{B}_2} \overline{\mathcal{R}}(\Omega) / \inf_{\Omega \in \mathcal{B}_2^c} \overline{\mathcal{R}}(\Omega)$ и $\inf_{\Omega \in \mathcal{B}_2} \tilde{\mathcal{R}}(\Omega) / \inf_{\Omega \in \mathcal{B}_2^c} \tilde{\mathcal{R}}(\Omega)$ принадлежат интервалу $[0.9878, 1]$ (теорема 2). В доказательстве используется вспомогательное утверждение, связанное с задачей Монжа о переносе массы (утверждение 2). Его доказательство дано в четвертом параграфе.

§ 2. Выпуклые задачи

Рассмотрим выпуклое ограниченное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Как показано в [4], внешняя нормаль n к $\partial\Omega$ определена для почти всех точек границы $\partial\Omega$, интеграл $\mathcal{R}_\Omega(v)$ определен для всех v и удовлетворяет соотношению

$$(\mathcal{R}_\Omega(v) \mid v) = 2 \int_{\partial\Omega} (v \mid n)_-^3 d\mathcal{H}^{d-1}. \quad (4)$$

Здесь $a_- = \max\{-a, 0\}$, а $\mathcal{H}^{d-1} - (d-1)$ -мерная мера Хаусдорфа. Согласно (3) имеем

$$\tilde{\mathcal{R}}(\Omega) = 2 \int_{S^{d-1}} dv \int_{\partial\Omega} (v \mid n)_-^3 d\mathcal{H}^{d-1}$$

и, переставляя пределы интегрирования, получаем

$$\tilde{\mathcal{R}}(\Omega) = 2 \int_{\partial\Omega} d\mathcal{H}^{d-1} \int_{S^{d-1}} (v \mid n)_-^3 dv$$

или

$$\tilde{\mathcal{R}}(\Omega) = c_d \cdot |\partial\Omega|, \quad (5)$$

где $|\partial\Omega| = \int_{\partial\Omega} d\mathcal{H}^{d-1} - (d-1)$ -мерный объем $\partial\Omega$, $c_d = 2 \int_{S^{d-1}} (v \mid n)_-^3 dv = 2 \int_{S^{d-1}} (v_1)_-^3 dv$, а v_1 — первая координата вектора v .

Обозначим через $\mathcal{B}_d^c$ множество выпуклых множеств единичного объема из $\mathbb{R}^d$ и рассмотрим задачи минимизации

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{B}_d^c} \overline{\mathcal{R}}(\Omega) \quad \text{и} \quad \inf_{\Omega \in \mathcal{B}_d^c} \tilde{\mathcal{R}}(\Omega).$$

Минимум $|\partial\Omega|$ при единичном объеме Ω достигается на d -мерном шаре единичного объема Ω_d^* (ответ в d -мерной классической изопараметрической задаче); таким образом, согласно (5) минимум $\tilde{\mathcal{R}}(\Omega)$ также достигается на Ω_d^* . Из (2) и (3) вытекает, что $\tilde{\mathcal{R}}(\Omega) \leq \overline{\mathcal{R}}(\Omega)$. Кроме того, в силу симметрии шара Ω_d^* вектор $\mathcal{R}_{\Omega_d^*}(v)$ всегда пропорционален v , а следовательно, $(\mathcal{R}_{\Omega_d^*}(v) \mid v) = |\mathcal{R}_{\Omega_d^*}(v)|$ и $\tilde{\mathcal{R}}(\Omega_d^*) = \overline{\mathcal{R}}(\Omega_d^*)$. Отсюда следует, что $\overline{\mathcal{R}}(\Omega)$ также достигает минимума на Ω_d^* .

Заметим, наконец, что шар Ω_d^* имеет радиус $|B^d|^{-1/d}$, где $|B^d| - d$ -мерный объем единичного шара B^d , а следовательно, $(d-1)$ -мерный объем поверхности $\partial\Omega_d^*$ равен $|\partial\Omega_d^*| = |B^d|^{-(d-1)/d} |S^{d-1}|$, где $|S^{d-1}| - (d-1)$ -мерный объем единичной сферы S^{d-1} . Таким образом, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Наименьшее значение $\overline{\mathcal{R}}(\Omega)$ и $\tilde{\mathcal{R}}(\Omega)$ в классе $\Omega \in \mathcal{B}_d^c$ достигается на шаре Ω_d^* и равно $c_d \cdot |B^d|^{-(d-1)/d} |S^{d-1}|$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В частности, при $d = 2$ имеем $c_2 = 8/3$, $|B^2| = \pi$, $|S^1| = 2\pi$, следовательно,

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{B}_2^c} \overline{\mathcal{R}}(\Omega) = \inf_{\Omega \in \mathcal{B}_2^c} \tilde{\mathcal{R}}(\Omega) = \frac{16}{3} \sqrt{\pi}.$$

§ 3. Невыпуклые задачи при $d = 2$

3.1. Предварительные замечания. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченное множество с кусочно гладкой границей класса C^2 . Будем говорить, что бильярдное движение $(x(t), v(t))$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ – рассеивающееся, если оно определено для всех $t \in \mathbb{R}$ и имеет конечное число (может быть, ни одного) отражений в регулярных точках $\partial\Omega$.

Очевидно, любая пара $(x, v) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$ определяет некоторое бильярдное движение $(x(t), v(t))$ условием $x(t) = x + vt$ при достаточно малых значениях t . Обозначим $C = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 : \text{соответствующее бильярдное движение не является рассеивающимся}\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. C – множество нулевой меры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если движение не является рассеивающимся, то выполняется одно из следующих четырех условий:

- (i) после конечного числа отражений бильярдная частица попадает в нерегулярную точку границы;
- (ii) за конечное время происходит бесконечное число отражений в регулярных точках границы;
- (iii) после конечного числа отражений частица попадает в регулярную точку границы, причем ее скорость параллельна касательной к границе в этой точке;
- (iv) происходит бесконечное число отражений в регулярных точках, причем моменты отражений изолированы.

Множество C является объединением соответствующих множеств $C^{(i)}$, $C^{(ii)}$, $C^{(iii)}$ и $C^{(iv)}$.

Доказательство того, что случаи (i) и (ii) реализуются на множествах $C^{(i)}$ и $C^{(ii)}$ меры нуль, можно найти в книге [9; раздел 1.7]. Для случая (iii) доказательство практически аналогично случаю (i) и использует тот факт, что точки $(r(s) + \tau r'(s), r'(s))$, $s \in \Xi \subset \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, образуют множество нулевой меры в $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Здесь функция $r(s)$, $s \in \Xi$, является натуральной параметризацией $\partial\Omega$. Она кусочно гладкая класса C^2 , следовательно, отображение $(s, \tau) \mapsto (r(s) + \tau r'(s), r'(s))$ кусочно гладкое класса C^1 и по теореме Сарда образ $\Xi \times \mathbb{R}$ при этом отображении имеет нулевую меру. Тем самым, искомый факт установлен.

Остается рассмотреть случай (iv). Рассмотрим множество $\partial\Omega \times (-\pi/2, \pi/2)$, снабженное борелевской мерой $dr \cos \varphi d\varphi$, где dr – элемент длины $\partial\Omega$. Предположим, что бильярдное движение имеет два последовательных отражения в регулярных точках $\partial\Omega$ x и x' , причем вектор скорости после соответствующих отражений образует углы φ и φ' с векторами внешней нормали к $\partial\Omega$ в точках x и x' (углы отсчитываются по часовой стрелке от нормали). В таком случае будем обозначать $(x', \varphi') = W(x, \varphi)$. Данное соотношение задает взаимно однозначное сохраняющее меру отображение W борелевских подмножеств множества $\partial\Omega \times (-\pi/2, \pi/2)$.

Для каждого бильярдного движения, удовлетворяющего условию (iv), и для каждого $k \in \mathbb{N}$ зафиксируем точку x_k k -го отражения от $\partial\Omega$ и угол φ_k , образуемый вектором скорости с вектором нормали к $\partial\Omega$ после k -го отражения. Множество всех таких точек (x_k, φ_k) обозначим C_k . Лебеговская мера множества

$C^{(iv)} \subset \mathbb{R}^2 \times S^1$ совпадает с мерой $C_1 \subset \partial\Omega \times (-\pi/2, \pi/2)$; кроме того, множества C_k взаимно не пересекаются, их объединение $\bigcup_1^\infty C_k \subset \partial\Omega \times (-\pi/2, \pi/2)$ имеет конечную меру и отображение W взаимно однозначно переводит C_k в C_{k+1} . Отсюда следует, что меры всех C_k одинаковы и равны нулю, а значит, и мера $C^{(iv)}$ также равна нулю.

Пусть $(x(t), v(t))$ – рассеивающееся бильярдное движение, причем

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} v(t) = v, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t) - vt) = x;$$

обозначим $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) =: v_\Omega^+(x, v)$. Это соотношение корректно задает функцию v_Ω^+ на множестве $(\mathbb{R}^2 \times S^1) \setminus C$. Нетрудно видеть, что множество $(\mathbb{R}^2 \times S^1) \setminus C$ открыто, а функция v_Ω^+ непрерывна, ограничена и совпадает с v при достаточно больших значениях $|x|^2 - (x, v)^2$. Следовательно, для почти всех значений v существует интеграл

$$\mathcal{R}_\Omega(v) = \iint_{0 < (x, v) < 1} (v - v_\Omega^+(x, v)) dx,$$

который является измеримой функцией v , а значит, существуют и интегралы $\overline{\mathcal{R}}(\Omega)$ (2) и $\widetilde{\mathcal{R}}(\Omega)$ (3).

3.2. Оценка минимальных значений. Обозначим через $\mathcal{B}_2$ класс ограниченных связных множеств из $\mathbb{R}^2$ единичной площади с кусочно гладкой границей класса C^2 и рассмотрим задачи минимизации

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{B}_2} \overline{\mathcal{R}}(\Omega) \quad \text{и} \quad \inf_{\Omega \in \mathcal{B}_2} \widetilde{\mathcal{R}}(\Omega).$$

Рассмотрим выпуклую оболочку $\widehat{\Omega}$ множества $\Omega \in \mathcal{B}_2$. Имеем

$$\partial\widehat{\Omega} = B \cup \left(\bigcup_i A_i \right),$$

где $B = \partial\widehat{\Omega} \cap \partial\Omega$ и A_i – связные компоненты множества $\partial\widehat{\Omega} \setminus \partial\Omega$. Множества A_i есть открытые прямолинейные интервалы. Соответственно, имеем

$$\mathcal{R}_\Omega(v) = \mathcal{R}_\Omega^B(v) + \sum_i \mathcal{R}_\Omega^{A_i}(v),$$

где $\mathcal{R}_\Omega^B(v)$ есть интеграл функции $v - v_\Omega^+(x, v)$ по тем $x \in v^\perp$, для которых соответствующее бильярдное движение имеет единственное отражение в регулярной точке из B (а значит, является рассеивающим), а $\mathcal{R}_\Omega^{A_i}(v)$ есть интеграл по тем x , для которых соответствующее движение $(x(t), v(t))$ рассеивающее и $x(t)$ впервые пересекает $\partial\widehat{\Omega}$ в точке из A_i . Далее, запишем

$$\widetilde{\mathcal{R}}(\Omega) = \widetilde{\mathcal{R}}^B(\Omega) + \sum_i \widetilde{\mathcal{R}}^{A_i}(\Omega), \quad (6)$$

где

$$\tilde{\mathcal{R}}^B(\Omega) = \int_{S^1} (\mathcal{R}_\Omega^B(v) \mid v) dv \quad \text{и} \quad \tilde{\mathcal{R}}^{A_i}(\Omega) = \int_{S^1} (\mathcal{R}_\Omega^{A_i}(v) \mid v) dv.$$

Повторяя рассуждения из второго параграфа, получаем, что

$$\tilde{\mathcal{R}}^B(\Omega) = c_2 |B|, \quad (7)$$

где $c_2 = 8/3$ и $|B|$ — полная длина B .

Зафиксируем i . Пусть $x(\xi)$, $0 < \xi < l_i$, — натуральная параметризация A_i , где $l_i = |A_i|$, и пусть n_+ и $n_- = -n_+$ — векторы внешней и внутренней нормали к $\partial\hat{\Omega}$ в некоторой точке из A_i . Предположим, что частица, соответствующая рассеивающемуся движению, впервые пересекла $\partial\hat{\Omega}$ в точке $x(\xi) \in A_i$ и в момент пересечения вектор скорости частицы v образовывал с n_- угол φ . Угол $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ отсчитывается от n_- к v по часовой стрелке. После конечного числа отражений частица вновь пересекает A_i и после этого движется свободно. Обозначим через $x(\xi')$ точку второго пересечения и через φ' — угол, образуемый вектором скорости частицы v^+ с n_+ в момент второго пересечения. Угол $\varphi' \in (-\pi/2, \pi/2)$ отсчитывается от n_+ к v^+ против часовой стрелки.

Обозначим через $\tilde{T}$ отображение, ставящее в соответствие точке (φ, ξ) точку (φ', ξ') . Оно определено для почти всех точек $(\varphi, \xi) \in (-\pi/2, \pi/2) \times (0, l_i)$, принимает значения в множестве $(-\pi/2, \pi/2) \times (0, l_i)$, инъективно и сохраняет борелевскую меру $d\mu(\varphi, \xi) = \cos \varphi d\varphi d\xi$.

Учитывая, что $(v - v^+ \mid v) = 1 + \cos(\varphi + \varphi')$, подсчитываем, что

$$(\mathcal{R}_\Omega^{A_i}(v) \mid v) = \int_0^{l_i} (1 + \cos(\varphi + \varphi')) d\xi \cdot \cos \varphi;$$

отсюда

$$\tilde{\mathcal{R}}^{A_i}(\Omega) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{l_i} (1 + \cos(\varphi + \varphi')) d\mu(\varphi, \xi); \quad (8)$$

здесь φ' есть функция φ и $\xi : \varphi' = \tilde{T}_1(\varphi, \xi)$, где $\tilde{T}(\varphi, \xi) =: (\tilde{T}_1(\varphi, \xi), \tilde{T}_2(\varphi, \xi))$.

Сделаем замену переменных $\tau = \xi/l_i$, $\tau' = \xi'/l_i$ и обозначим через T отображение, переводящее (φ, τ) в (φ', τ') . Очевидно, T является (с точностью до множества меры нуль) взаимно однозначным, сохраняющим меру μ отображением прямоугольника $\Pi = [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 1]$ на себя. Учитывая, что $l_i = |A_i|$, из формулы (8) получаем

$$\tilde{\mathcal{R}}^{A_i}(\Omega) = F(T) \cdot |A_i|, \quad (9)$$

где

$$F(T) = \int_{\Pi} f(z; Tz) d\mu(z). \quad (10)$$

Здесь $z = (\varphi, \tau)$ и $f(\varphi, \tau; \varphi', \tau') = 1 + \cos(\varphi + \varphi')$.

Справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.

$$\inf_{T \in \mathcal{T}} F(T) = F_*, \quad (11)$$

где $F_* = 2.6342$, а $\mathcal{T}$ – множество преобразований $T: \Pi \mapsto \Pi$, сохраняющих меру μ .

Соответствующая задача минимизации будет решена в четвертом параграфе, и как следствие будет получен численный результат, составляющий утверждение 2.

Используя (6), (7), (9) и (11) и учитывая, что $c_2 > F_*$ и $|B| + \sum_i |A_i| = |\partial\hat{\Omega}|$, находим

$$\tilde{\mathcal{R}}(\Omega) \geq F_* \cdot |\partial\hat{\Omega}|. \quad (12)$$

Следующее неравенство

$$|\partial\hat{\Omega}| \geq 2\sqrt{\pi} S(\hat{\Omega}), \quad (13)$$

где $S(\hat{\Omega})$ – площадь $\hat{\Omega}$, является следствием решения классической изопериметрической задачи. Учитывая (12), (13), замечание 1, неравенство $S(\hat{\Omega}) \geq 1$ и тот факт, что $F_*/c_2 > 0.9878$, получаем, что для любого $\Omega \in \mathcal{B}_2$ справедливо

$$\tilde{\mathcal{R}}(\Omega) \geq 0.9878 \cdot \inf_{\Omega \in \mathcal{B}_2^c} \tilde{\mathcal{R}}(\Omega). \quad (14)$$

Наконец, имеем

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{B}_2} \tilde{\mathcal{R}}(\Omega) \leq \inf_{\Omega \in \mathcal{B}_2} \overline{\mathcal{R}}(\Omega) \leq \overline{\mathcal{R}}(\Omega_2^*) = \inf_{\Omega \in \mathcal{B}_2^c} \overline{\mathcal{R}}(\Omega) = \inf_{\Omega \in \mathcal{B}_2^c} \tilde{\mathcal{R}}(\Omega). \quad (15)$$

Из (14) и (15) следует

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы неравенства*

$$0.9878 \leq \frac{\inf_{\Omega \in \mathcal{B}_2} \overline{\mathcal{R}}(\Omega)}{\inf_{\Omega \in \mathcal{B}_2^c} \overline{\mathcal{R}}(\Omega)} \leq 1, \quad 0.9878 \leq \frac{\inf_{\Omega \in \mathcal{B}_2} \tilde{\mathcal{R}}(\Omega)}{\inf_{\Omega \in \mathcal{B}_2^c} \tilde{\mathcal{R}}(\Omega)} \leq 1.$$

§ 4. Задача о переносе массы

4.1. Постановка задачи. В этом параграфе будет решена задача минимизации

$$\inf_{T \in \mathcal{T}} F(T), \quad (16)$$

где $F(T)$ задается согласно (10), и как следствие будет получен численный результат, сформулированный в утверждении 2 предыдущего параграфа.

Заметим, что (16), (10) есть не что иное, как задача Монжа о переносе массы [10], причем здесь начальная и конечная массы распределены в соответствии с мерой μ внутри прямоугольника Π .

Следуя идее Канторовича [11], заменим (16), (10) следующей задачей (17), (18) о минимизации функционала, заданного на множестве борелевских мер. Обозначим $I_0 = [-\pi/2, \pi/2]$, $Q = I_0 \times I_0$, и пусть λ – борелевская мера на I_0 с плотностью $\cos \varphi$. Обозначим также

$$f(\varphi, \varphi') = 1 + \cos(\varphi + \varphi')$$

и рассмотрим задачу

$$\inf_{\nu \in \mathcal{M}} \mathcal{F}(\nu), \quad (17)$$

где

$$\mathcal{F}(\nu) = \int_Q f(\varphi, \varphi') d\nu(\varphi, \varphi'), \quad (18)$$

а $\mathcal{M}$ обозначает множество борелевских мер ν на Q , удовлетворяющих условию

$$\nu(J \times I_0) = \nu(I_0 \times J) = \lambda(J) \quad (19)$$

для любого борелевского множества $J \subset I_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\nu \in \mathcal{M}$, то для любого $\varphi \in I_0$ множества $\text{spt } \nu \cap (\{\varphi\} \times I_0)$ и $\text{spt } \nu \cap (I_0 \times \{\varphi\})$ непусты. Здесь $\text{spt } \nu$ обозначает носитель меры ν .

Хорошо известно, что задача Монжа–Канторовича (17), (18) имеет по крайней мере одно решение (см., например, обзор [12]). В дальнейшем любое такое решение будем называть *оптимальной мерой* и обозначать ν_* . Заметим также, что каждое преобразование $T \in \mathcal{T}$ индуцирует некоторую меру $\nu_T \in \mathcal{M}$ следующим образом. Определим отображения $\Gamma_T: \Pi \mapsto \Pi^2$ и $\eta: \Pi^2 \rightarrow Q$ согласно $\Gamma_T(z) = (z, Tz)$, $\eta(\varphi, \tau, \varphi', \tau') = (\varphi, \varphi')$, тогда по определению $\nu_T(A) = \mu((\eta\Gamma_T)^{-1}A)$ для любого борелевского множества $A \subset Q$. Нетрудно видеть, что $F(T) = \mathcal{F}(\nu_T)$; отсюда следует, что минимум в задаче (17), (18) не превосходит инфимума в задаче (16), (10). Кроме того, если существует по крайней мере одно преобразование T^* , индуцирующее оптимальную меру, то соответствующие минимум и инфимум совпадают, а все такие преобразования T^* составляют множество решений задачи (16), (10).

Отметим, что одномерная задача Монжа–Канторовича

$$\inf_{\nu \in \mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2)} \int_{\mathbb{R}^2} c(x, y) d\nu(x, y), \quad (20)$$

где $\mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2) = \{\text{множество борелевских мер } \nu \text{ на } \mathbb{R}^2 : \nu(A \times \mathbb{R}) = \lambda_1(A), \nu(\mathbb{R} \times A) = \lambda_2(A) \text{ для любого борелевского множества } A \subset \mathbb{R}\}$, λ_1 и λ_2 – борелевские меры на $\mathbb{R}$, решена в явном виде в тех случаях, когда функция ценности c имеет вид $c(x, y) = h(|x - y|)$, h – монотонно возрастающая выпуклая или строго вогнутая функция (обзор соответствующих результатов для выпуклого случая можно найти в [13] или [14]; решение для строго вогнутого случая дано в [14]). Отметим также статьи [15] и [16], в которых рассматриваются примеры некоторых точно решаемых двумерных задач Монжа–Канторовича, и статью [17], где дано точное решение одномерной задачи для случая, когда $c(x, y) = h(x - y)$ или $h(x + y)$, функция h имеет три интервала выпуклости, а λ_1 и λ_2 являются лебеговскими мерами на $[0, 1]$. В рассматриваемой нами задаче (17), (18) функция

ценности имеет вид $f(x, y) = l(x + y)$, где $l(x) = 1 + \cos x$, $x \in [-\pi, \pi]$. Функция l имеет три интервала выпуклости (вогнута на интервале $[-\pi/2, \pi/2]$ и выпукла на интервалах $[-\pi, -\pi/2]$ и $[\pi/2, \pi]$), а меры λ_1 и λ_2 сосредоточены на $[-\pi/2, \pi/2]$ и имеют плотность $\cos x$.

Мы будем действовать следующим образом. Сначала решим задачу Монжа–Канторовича (17), (18). Ее решение ν_* единственно и будет получено нами в явном виде. Затем построим семейство преобразований, индуцирующих ν_* , которое и является множеством решений исходной задачи (16), (10).

4.2. Решение задачи. Конечное множество точек (φ_i, φ'_i) , $i = 1, \dots, n$, называется *с-циклически монотонным*, если справедливо неравенство

$$\sum_1^n c(\varphi_i, \varphi'_i) \leq \sum_1^n c(\varphi_i, \varphi'_{i+1}),$$

где принято $\varphi'_{n+1} = \varphi'_1$. Хорошо известно (см., например, [12] или любой другой обзор по задаче Монжа–Канторовича), что если мера ν_* является решением задачи (20), то ее носитель $\text{spt } \nu_*$ обладает следующим свойством:

(C) *любое конечное множество, содержащееся в $\text{spt } \nu_*$, с-циклически монотонно.*

Пусть $\bar{\varphi} = (\varphi, \varphi') \in Q$; обозначим через $R(\bar{\varphi})$ множество точек, образующих с $\bar{\varphi}$ двухточечное f -циклически монотонное множество. Подставляя в (C) функцию f вместо c , немедленно получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Если $\bar{\varphi} \in \text{spt } \nu_*$, то $\text{spt } \nu_* \subset R(\bar{\varphi})$.*

Следующая лемма дает простой критерий f -циклической монотонности для двухточечных множеств.

ЛЕММА 2. *Пара точек (φ, φ') , (ψ, ψ') f -циклически монотонна, если и только если*

$$(\varphi - \psi)(\varphi' - \psi')(|\varphi + \psi + \varphi' + \psi'| - \pi) \leq 0. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие циклической монотонности

$$\cos(\varphi + \varphi') + \cos(\psi + \psi') \leq \cos(\varphi + \psi') + \cos(\psi + \varphi')$$

может быть переписано в виде

$$\text{Re}[(e^{i\varphi} - e^{i\psi})(e^{i\varphi'} - e^{i\psi'})] \leq 0.$$

Последнее неравенство после ряда несложных выкладок приводится к виду

$$\cos \frac{\varphi + \psi + \varphi' + \psi'}{2} \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \sin \frac{\varphi' - \psi'}{2} \geq 0. \quad (22)$$

Учитывая, что $|(\varphi - \psi)/2| \leq \pi/2$, $|(\varphi' - \psi')/2| \leq \pi/2$, заключаем, что знак $\sin((\varphi - \psi)/2) \sin((\varphi' - \psi')/2)$ совпадает со знаком $(\varphi - \psi)(\varphi' - \psi')$. Далее, учитывая, что $|(\varphi + \psi + \varphi' + \psi')/2| \leq \pi$, получаем, что $\cos((\varphi + \psi + \varphi' + \psi')/2)$ положителен, если $|(\varphi + \psi + \varphi' + \psi')/2| < \pi/2$, и отрицателен, если $|(\varphi + \psi + \varphi' + \psi')/2| > \pi/2$. Таким образом, (22) эквивалентно неравенству

$$(\varphi - \psi)(\varphi' - \psi')(|\varphi + \psi + \varphi' + \psi'| - \pi) \leq 0,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2 позволяет для каждой точки $\bar{\varphi}$ построить множество $R(\bar{\varphi})$. В частности, если $\varphi + \varphi' \geq 0$, то $R(\bar{\varphi})$ ограничено прямыми $l_1 = \{(\psi, \psi') : \psi = \varphi\}$, $l_2 = \{(\psi, \psi') : \psi' = \varphi'\}$ и $l_3 = \{(\psi, \psi') : \psi + \psi' = \pi - \varphi - \varphi'\}$. На рис. 1 приведен пример множества $R(\bar{\varphi})$ (оно заштриховано).

Рис. 1

В дальнейшем мы последовательно уточняем вид множества $\text{spt } \nu_*$, используя, во-первых, лемму 1, а во-вторых, формулу (19) и следующее из нее замечание 2.

Дадим следующее вспомогательное

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть J и J' — интервалы, принадлежащие I_0 . Будем называть множество $G \subset Q$ *Н-образным* (*И-образным*) *формата* $J \times J'$, если

$$G \subset \overline{Q \setminus (J \times (I_0 \setminus J'))} \quad (G \subset \overline{Q \setminus ((I_0 \setminus J) \times J')}) \quad \text{соответственно},$$

и будем называть множество G *крестообразным форматом* $J \times J'$, если оно одновременно Н-образное и И-образное формата $J \times J'$.

На рис. 2, (а), (b) и (с) любое множество, содержащееся в заштрихованной области, является соответственно Н-образным, И-образным и крестообразным форматом $J \times J'$.

Введем обозначения (см. рис. 3)

$$Q^+ = \left\{ (\varphi, \varphi') \in Q : |\varphi + \varphi'| \geq \frac{\pi}{2} \right\}, \quad Q^- = \left\{ (\varphi, \varphi') \in Q : |\varphi + \varphi'| < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Рис. 2

Рис. 3

Пусть J и J' – борелевские подмножества I_0 , $\nu \in \mathcal{M}$.

ЛЕММА 3. (а) Если множество $\text{spt } \nu$ Н-образное (I-образное) формата $J \times J'$, то $\lambda(J) \leq \lambda(J')$ ($\lambda(J) \geq \lambda(J')$ соответственно). Если $\text{spt } \nu$ крестообразное формата $J \times J'$, то $\lambda(J) = \lambda(J')$.

(б) Пусть $\text{spt } \nu$ – крестообразное множество формата $J \times J'$, $J = [\alpha, \beta]$, $J' = [\alpha', \beta']$. Если множество $\text{spt } \nu \cap (J \times I_0)$ принадлежит Q^+ , то оно задается соотношением $\sin \varphi + \sin \varphi' = \sin \beta + \sin \alpha'$, $\varphi \in J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Согласно (19) имеем $\lambda(J) = \nu(J \times I_0)$, $\lambda(J') = \nu(I_0 \times J')$. Если $\text{spt } \nu$ Н-образное формата $J \times J'$, то $\nu(J \times I_0) = \nu(J \times J') \leq \nu(I_0 \times J')$, следовательно, $\lambda(J) \leq \lambda(J')$. Для I-образного множества доказательство аналогично. Таким образом, если $\text{spt } \nu$ крестообразно, то справедливо одновременно $\lambda(J) \leq \lambda(J')$ и $\lambda(J) \geq \lambda(J')$, откуда $\lambda(J) = \lambda(J')$.

(б) Согласно замечанию 2 для любого $\varphi \in J$ существует φ' такое, что $(\varphi, \varphi') \in \text{spt } \nu$. Из условия (б) леммы следует, что $(\varphi, \varphi') \in (J \times J') \cap Q^+$. Снова используя это условие и учитывая вид $R((\varphi, \varphi'))$, находим, что множество $R((\varphi, \varphi')) \cap \text{spt } \nu$ крестообразное форматов $J_1 \times J'_1$ и $J_2 \times J'_2$, где $J_1 = [\alpha, \varphi]$, $J_2 = [\varphi, \beta]$, $J'_1 = [\alpha', \varphi']$, $J'_2 = [\varphi', \beta']$. Согласно лемме 1 это множество совпадает с $\text{spt } \nu$. Используя уже доказанное утверждение (а) леммы, получаем $\lambda(J_2) = \lambda(J'_1)$, откуда следует утверждение (б).

Обозначим $\text{spt}^\pm \nu_* := \text{spt } \nu_* \cap Q^\pm$.

ЛЕММА 4. Множество $\text{spt}^- \nu_*$ лежит на диагонали $\{(\varphi, \varphi') : \varphi = \varphi'\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точку $\bar{\varphi} = (\varphi, \varphi') \in \text{spt}^- \nu_*$. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi' \geq |\varphi|$. Возможны три различных случая:

- (а) две точки пересечения прямой $l_3 = \{(\psi, \psi') : \psi + \psi' = \pi - \varphi - \varphi'\}$ с прямыми $l_1 = \{(\psi, \psi') : \psi = \varphi\}$ и $l_2 = \{(\psi, \psi') : \psi' = \varphi'\}$ не принадлежат Q ;
- (б) одна из этих точек принадлежит Q , а другая нет;
- (в) обе точки принадлежат Q .

Рис. 4

На рис. 4, (а), (б), (в), соответствующих случаям (а), (б) и (в), множество $R(\bar{\varphi})$ заштриховано.

В силу леммы 1 множество $\text{spt } \nu_*$ принадлежит $R(\bar{\varphi})$, следовательно, оно крестообразно формата $J \times J'$, где

$$J = \left[\varphi, \min \left\{ \pi - \varphi - 2\varphi', \frac{\pi}{2} \right\} \right], \quad J' = \left[\varphi', \min \left\{ \pi - 2\varphi - \varphi', \frac{\pi}{2} \right\} \right].$$

Согласно лемме 3 заключаем, что $\lambda(J) = \lambda(J')$.

В случае (а) имеем $J = [\varphi, \pi/2]$, $J' = [\varphi', \pi/2]$, отсюда $\lambda(J) = 1 - \sin \varphi$, $\lambda(J') = 1 - \sin \varphi'$. Из равенства $\lambda(J) = \lambda(J')$ немедленно следует, что $\varphi = \varphi'$.

В случае (б) имеем $J = [\varphi, \pi - \varphi - 2\varphi']$, $J' = [\varphi', \pi/2]$; кроме того,

$$\pi - 2\varphi - \varphi' > \frac{\pi}{2}, \quad \pi - \varphi - 2\varphi' \leq \frac{\pi}{2}, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, \quad |\varphi'| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Из этих неравенств получаем $-\pi/2 \leq \pi/2 + \varphi - \varphi' < \pi - \varphi - 2\varphi' \leq \pi/2$, следовательно, $\sin(\pi/2 + \varphi - \varphi') < \sin(\pi - \varphi - 2\varphi')$. Далее, нетрудно проверить, что $\sin(\pi/2 + \varphi - \varphi') - \sin \varphi > 1 - \sin \varphi'$. Тем самым, получаем цепочку неравенств

$$\lambda(J) = \sin(\pi - \varphi - 2\varphi') - \sin \varphi > \sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi - \varphi' \right) - \sin \varphi > 1 - \sin \varphi' = \lambda(J').$$

Полученное противоречие с равенством $\lambda(J) = \lambda(J')$ доказывает, что случай (б) невозможен.

В случае (в) имеем интервалы одинаковой длины $J = [\varphi, \pi - \varphi - 2\varphi']$, $J' = [\varphi', \pi - 2\varphi - \varphi']$ и нетрудно проверить, что равенство $\lambda(J) = \lambda(J')$ достигается только в случае $\varphi = \varphi'$.

Таким образом, случай (b) невозможен, а в оставшихся случаях (a) и (c) имеем $\varphi = \varphi'$.

Обозначим $a = \sup\{\varphi : (\varphi, \varphi) \in \text{spt}^- \nu_*\}$ (в случае, если соответствующее множество пусто, положим $a = -\infty$).

ЛЕММА 5. (a) *Справедливо неравенство*

$$a \geq \arcsin(\sqrt{2} - 1).$$

(b) *Если $\arcsin(\sqrt{2} - 1) \leq a \leq \pi/6$, то множество $\text{spt}^+ \nu_* \cap \{(\varphi, \varphi') : \varphi + \varphi' \geq 0\}$ задается соотношением*

$$\sin \varphi + \sin \varphi' = \sin a + 1, \quad a \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (23)$$

(c) *Если $a > \pi/6$, то множества $\text{spt}^+ \nu_* \cap ([a, \pi - 3a] \times I_0)$ и $\text{spt}^+ \nu_* \cap (I_0 \times [a, \pi - 3a])$ совпадают и задаются соотношением*

$$\sin \varphi + \sin \varphi' = \sin a + \sin 3a, \quad a \leq \varphi \leq \pi - 3a. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если множество $\{\varphi : (\varphi, \varphi) \in \text{spt}^- \nu_*\}$ непусто, то $(a, a) \in \text{spt} \nu_*$ и в силу леммы 1 $\text{spt} \nu_* \subset R((a, a))$. Обозначим $b = \min\{\pi/2, \pi - 3a\}$. В случае $a > 0$ множество $R((a, a))$, а значит, и $\text{spt} \nu_*$ — крестообразное формата $[a, b] \times [a, b]$. На рис. 5 изображено заштрихованным множеством $R((a, a))$ в случаях (a) $0 < \varphi \leq \pi/6$ и (b) $\varphi > \pi/6$.

Рис. 5

В случае, если $a \leq 0$ или $a = -\infty$, находим, что $\text{spt} \nu_*$ является крестообразным формата $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$. Суммируя, получаем, что $\text{spt} \nu_*$ — крестообразное множество формата $J \times J$, где $J = [a_+, b]$ и $a_+ = \max\{a, 0\}$. Используя лемму 4 и определение величины a , заключаем, что $\text{spt} \nu_* \cap (J \times I_0) \subset Q^+$, следовательно, согласно лемме 3 множество $\text{spt} \nu_* \cap (J \times I_0) = \text{spt}^+ \nu_* \cap (J \times I_0)$ задается соотношением

$$\sin \varphi + \sin \varphi' = \sin a_+ + \sin b, \quad a_+ \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, при $a \leq \pi/6$ имеем

$$\sin \varphi + \sin \varphi' = \sin a_+ + 1, \quad a_+ \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (25)$$

а при $a > \pi/6$

$$\sin \varphi + \sin \varphi' = \sin a + \sin 3a, \quad a \leq \varphi \leq \pi - 3a.$$

Утверждение (с) доказано в отношении множества $\text{spt}^+ \nu_* \cap ([a, \pi - 3a] \times I_0)$. В отношении множества $\text{spt}^+ \nu_* \cap (I_0 \times [a, \pi - 3a])$ доказательство аналогично.

Если $a \leq \pi/6$, то подставляя в (25) значение $\varphi = \pi/4$, получаем $1/\sqrt{2} + \sin \varphi' = \sin a_+ + 1$. Поскольку точка $(\pi/4, \varphi')$ принадлежит Q^+ , имеем $\varphi' \geq \pi/4$, а значит, $\sin a_+ \geq \sqrt{2} - 1$, т.е. $a \geq \arcsin(\sqrt{2} - 1)$. Утверждение (а) доказано.

Кроме того, в случае $a \leq \pi/6$ имеем

$$R((a, a)) \cap Q^+ \cap \{(\varphi, \varphi') : \varphi + \varphi' \geq 0\} \subset J \times I_0.$$

Теоретико-множественное умножение обеих частей этого включения на $\text{spt} \nu_*$ с учетом того, что $\text{spt} \nu_* \subset R((a, a))$, дает

$$\text{spt}^+ \nu_* \cap \{(\varphi, \varphi') : \varphi + \varphi' \geq 0\} \subset \text{spt} \nu_* \cap (J \times I_0).$$

Используя еще раз, что $\text{spt} \nu_* \cap (J \times I_0) \subset Q^+$, в итоге получаем равенство:

$$\text{spt} \nu_* \cap (J \times I_0) = \text{spt}^+ \nu_* \cap \{(\varphi, \varphi') : \varphi + \varphi' \geq 0\}.$$

Тем самым, мы заключаем, что множество $\text{spt}^+ \nu_* \cap \{(\varphi, \varphi') : \varphi + \varphi' \geq 0\}$ задается соотношением (23). Утверждение (b) также доказано.

Обозначим через $I^{(\alpha, \beta)}$, $\alpha < \beta$, открытый прямолинейный интервал с концами (α, α) и (β, β) . Обозначим также $I^\beta := I^{(0, \beta)}$, $\beta > 0$, и $\varphi_0 := \arcsin \sqrt{1/3}$. Отметим, что φ_0 есть единственное решение в $[0, \pi/4]$ уравнения $\cos \varphi = 3 \cos(\pi - 3\varphi)$.

ЛЕММА 6. (а) Если $(\beta, \beta) \in \text{spt} \nu_*$, $0 < \beta \leq \pi/6$, то

$$\text{spt} \nu_* \cap ((0, \beta) \times I_0) = I^\beta = \text{spt} \nu_* \cap (I_0 \times (0, \beta)). \quad (26)$$

(b) Если $I^{(\alpha, \beta)} \subset \text{spt} \nu_*$, $\pi/6 \leq \alpha < \beta \leq \pi/4$, то $\beta \leq \varphi_0$ и для любого $\omega \in (\alpha, \beta)$ справедливо

$$\text{spt} \nu_* \cap (\{\omega\} \times I_0) = \{(\omega, \omega), (\omega, \pi - 3\omega)\}, \quad (27)$$

$$\text{spt} \nu_* \cap (I_0 \times \{\omega\}) = \{(\omega, \omega), (\pi - 3\omega, \omega)\}. \quad (28)$$

(с) Если $I^{(\alpha, \beta)} \cap \text{spt} \nu_* = \emptyset$ и $\{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)\} \subset \text{spt} \nu_*$, $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi/4$, то $\alpha < \varphi_0 < \beta$.

Рис. 6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть $0 < \beta \leq \pi/6$ и $(\beta, \beta) \in \text{spt } \nu_*$. Множество $G = \text{spt } \nu_* \cap ((0, \beta) \times I_0)$ есть объединение множеств $G^- = \text{spt}^- \nu_* \cap ((0, \beta) \times I_0)$ и $G^+ = \text{spt}^+ \nu_* \cap ((0, \beta) \times I_0)$. Согласно лемме 4 G^- содержится в I^β . Учитывая, что $\beta \leq \pi/6$, имеем $G^+ \cap R((\beta, \beta)) = \emptyset$, а поскольку в силу леммы 1 $\text{spt } \nu_* \subset R((\beta, \beta))$, получаем $G^+ = \emptyset$. Принимая во внимание замечание 2, заключаем, что $G = G^- = I^\beta$. Второе равенство в (26) доказывается точно так же.

(б) Пусть $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$. Точки (α', α') и (β', β') принадлежат $\text{spt } \nu_*$, следовательно, $\text{spt } \nu_* \subset R((\alpha', \alpha')) \cap R((\beta', \beta'))$. На рис. 6 показано пересечение Q с первым квадрантом плоскости; множество $R((\alpha', \alpha')) \cap R((\beta', \beta'))$ заштриховано.

Множество $R((\alpha', \alpha')) \cap R((\beta', \beta'))$ I-образное формата $[\alpha', \beta'] \times [\pi - 3\beta', \pi - 3\alpha']$, а значит, и $\text{spt } \nu_*$ также I-образное того же формата. Согласно лемме 3 $\lambda([\alpha', \beta']) \geq \lambda([\pi - 3\beta', \pi - 3\alpha'])$; переходя к пределу $\alpha' \rightarrow \beta$, $\beta' \rightarrow \beta$, $\alpha' < \beta'$, получаем $\cos \beta \geq 3 \cos(\pi - 3\beta)$. Отсюда следует, что $\beta \leq \varphi_0$.

Далее, имеем

$$\text{spt } \nu_* \cap ([\alpha', \beta'] \times I_0) = G' \cap G'',$$

где

$$\begin{aligned} G' &= \text{spt } \nu_* \cap ([\alpha', \beta'] \times [\alpha', \beta']) \subset Q^-, \\ G'' &= \text{spt } \nu_* \cap ([\alpha', \beta'] \times [\pi - 3\beta', \pi - 3\alpha']). \end{aligned}$$

Оба эти множества замкнуты. Учитывая условие (b) и лемму 4, имеем $G' = \overline{I(\alpha', \beta')} \neq \emptyset$. Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} 0 < \lambda([\pi - 3\beta', \pi - 3\alpha']) &= \nu_*(I_0 \times [\pi - 3\beta', \pi - 3\alpha']) \\ &= \nu_*([\alpha', \beta'] \times [\pi - 3\beta', \pi - 3\alpha']) = \nu_*(G''), \end{aligned}$$

следовательно, $G'' \neq \emptyset$. Переходя к пределу при $\alpha' \rightarrow \omega - 0$, $\beta' \rightarrow \omega + 0$, получаем

$$\text{spt } \nu_* \cap (\{\omega\} \times I_0) = (\text{spt } \nu_* \cap \{(\omega, \omega)\}) \cup (\text{spt } \nu_* \cap \{(\omega, \pi - 3\omega)\}),$$

причем оба множества в скобках в правой части этого равенства непусты. Тем самым, равенство (27) доказано. Равенство (28) устанавливается точно так же.

(с) Пусть $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi/4$, точки (α, α) и (β, β) принадлежат $\text{spt } \nu_*$, а $I^{(\alpha, \beta)}$ не пересекается с $\text{spt } \nu_*$. Из (а) немедленно следует, что $\beta > \pi/6$.

Аналогично п. (b) имеем $\text{spt } \nu_* \subset R((\alpha, \alpha)) \cap R((\beta, \beta))$. С другой стороны, в силу условия п. (с), включения $(\alpha, \beta) \times [\alpha, \beta] \subset Q^-$ и леммы 4 получаем $\text{spt } \nu_* \cap ((\alpha, \beta) \times [\alpha, \beta]) = \emptyset$. Таким образом,

$$\text{spt } \nu_* \subset (R((\alpha, \alpha)) \cap R((\beta, \beta))) \setminus ((\alpha, \beta) \times [\alpha, \beta]),$$

тем самым, $\text{spt } \nu_*$ является крестообразным формата $[\alpha, \beta] \times [\pi - 3\beta, \pi - 3\alpha']$, где $\alpha' = \max\{\alpha, \pi/6\}$. (На рис. 7 множество $(R((\alpha, \alpha)) \cap R((\beta, \beta))) \setminus ((\alpha, \beta) \times [\alpha, \beta])$ заштриховано.) Поэтому

$$\lambda([\alpha, \beta]) = \lambda([\pi - 3\beta, \pi - 3\alpha']). \quad (29)$$

Рис. 7

Рассмотрим два случая: (i) $\alpha \geq \pi/6$ и (ii) $\alpha < \pi/6$.

В случае (i) имеем $\alpha = \alpha'$ и из (29) получаем $\cos \varphi = 3 \cos(\pi - 3\varphi)$ для некоторого $\varphi \in (\alpha, \beta)$. Очевидно, это значение φ совпадает с φ_0 , тем самым, п. (с) доказан.

В случае (ii) из (29) следует

$$\lambda\left(\left[\frac{\pi}{6}, \beta\right]\right) < \lambda\left(\left[\pi - 3\beta, \frac{\pi}{2}\right]\right),$$

а значит, для некоторого $\varphi_1 \in (\pi/6, \beta)$ справедливо $\cos \varphi_1 < 3 \cos(\pi - 3\varphi_1)$. Следовательно, $\varphi_1 > \varphi_0$ и следующая цепочка неравенств доказывает п. (с):

$$\alpha < \frac{\pi}{6} < \varphi_0 < \varphi_1 < \beta.$$

ЛЕММА 7. *Справедливо следующее:*

$$\text{spt}^- \nu_* \cap \{(\varphi, \varphi') : \varphi + \varphi' \geq 0\} = \overline{I^a},$$

причем $\arcsin(\sqrt{2} - 1) \leq a \leq \arcsin \sqrt{1/3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 4 замкнутое множество $G := \overline{\text{spt}^- \nu_*} \cap \{(\varphi, \varphi') : \varphi + \varphi' \geq 0\}$ принадлежит интервалу $\overline{I^a}$. Следовательно, $G = \overline{I^a} \setminus J$, где J — объединение конечного или счетного (может быть, пустого) множества открытых непересекающихся интервалов. Согласно лемме 6, (с) каждый из этих интервалов содержит значение $\varphi_0 = \arcsin \sqrt{1/3}$, следовательно, число этих интервалов не больше одного.

Таким образом, возможны два случая: либо J — интервал, содержащий φ_0 , либо $J = \emptyset$. Пусть $J = I^{(\alpha, \beta)}$, $0 \leq \alpha < \varphi_0 < \beta < a$, тогда $I^{(\beta, a)} \subset \text{spt} \nu_*$ и $a > \varphi_0$, что противоречит утверждению (b) леммы 6. Таким образом, $J = \emptyset$, следовательно, $G = \overline{I^a}$. Согласно лемме 5, (a) и лемме 6, (b) $\arcsin(\sqrt{2} - 1) \leq a \leq \arcsin \sqrt{1/3}$.

Пусть $\arcsin(\sqrt{2} - 1) \leq b \leq \arcsin \sqrt{1/3}$. Обозначим через $G[b]$ множество, заданное соотношением

$$\sin \varphi + \sin \varphi' = \sin b + 1, \quad \varphi \in \left[b, \frac{\pi}{2}\right],$$

если $b \leq \pi/6$, и соотношениями

$$\begin{cases} 3\varphi + \varphi' = \pi & \text{при } \varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, b\right], \\ \sin \varphi + \sin \varphi' = \sin b + \sin 3b & \text{при } \varphi \in [b, \pi - 3b], \\ \varphi + 3\varphi' = \pi & \text{при } \varphi \in \left[\pi - 3b, \frac{\pi}{2}\right], \end{cases}$$

если $b > \pi/6$.

Обозначим через $G[-b]$ и I^{-b} множества, центрально симметричные (относительно начала координат) множествам $G[b]$ и I^b соответственно. Существует единственная мера $\nu^{(b, c)} \in \mathcal{M}$ с носителем $G[-b] \cup \overline{I^{-b}} \cup \overline{I^c} \cup G[c]$. Она определяется следующим образом. Пусть λ_1 — борелевская мера на $[-b, c]$ с плотностью $\cos \varphi + 3 \cos 3\varphi \theta(|\varphi| - \pi/6)$ и λ_2 — борелевская мера на $[-\pi/2, -b'] \cup [c', \pi/2]$ с плотностью $\cos \varphi - (\cos \varphi + 3 \cos 3\varphi) \theta(c - \varphi) \theta(\varphi + b)$, где $b' = \min\{b, \pi/6\}$, $c' = \min\{c, \pi/6\}$, θ — функция Хевисайда. Обозначим через π_1 ортогональную проекцию на ось абсцисс, $\pi_1(\varphi, \varphi') = \varphi$, тогда по определению $\nu^{(b, c)}(A_1) = \lambda_1(\pi_1 A_1)$ для любого борелевского множества $A_1 \subset \overline{I^{-b}} \cup \overline{I^c}$ и $\nu^{(b, c)}(A_2) = \lambda_2(\pi_1 A_2)$ для

любого борелевского множества $A_2 \subset G[-b] \cup G[c]$. Значение функционала $\mathcal{F}$ на этой мере равно

$$\mathcal{F}(\nu^{(b,c)}) = \Phi(\sin b) + \Phi(\sin c),$$

где

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 + x - \frac{2}{3}x^3 + \int_x^1 [\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-(x+1-t)^2} - t(x+1-t)] dt, & \text{если } x \in \left[\sqrt{2}-1, \frac{1}{2}\right], \\ 1 + x - \frac{2}{3}x^3 - 9 \int_{1/2}^x (1-2t^2)(4t^2-1) dt \\ + \int_x^{3x-4x^3} [\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-(4x-4x^3-t)^2} - t(4x-4x^3-t)] dt, & \text{если } x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \end{cases}$$

$$\sqrt{2}-1 \leq x \leq 1/\sqrt{3}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Существуют $b, c \in [\arcsin(\sqrt{2}-1), \arcsin \sqrt{1/3}]$ такие, что $\nu_* = \nu^{(b,c)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $b = \sup\{-\varphi : (\varphi, \varphi) \in \text{spt}^- \nu_*\}$, $c = \sup\{\varphi : (\varphi, \varphi) \in \text{spt}^- \nu_*\}$. Достаточно показать, что

$$\text{spt}^- \nu_* \cap \{(\varphi, \varphi') : \varphi + \varphi' \leq 0\} = \overline{I^{-b}}, \quad \arcsin(\sqrt{2}-1) \leq b \leq \arcsin \sqrt{1/3}, \quad (30)$$

$$\text{spt}^+ \nu_* \cap \{(\varphi, \varphi') : \varphi + \varphi' \leq 0\} = G[-b], \quad (31)$$

$$\text{spt}^- \nu_* \cap \{(\varphi, \varphi') : \varphi + \varphi' \geq 0\} = \overline{I^c}, \quad \arcsin(\sqrt{2}-1) \leq c \leq \arcsin \sqrt{1/3}, \quad (32)$$

$$\text{spt}^+ \nu_* \cap \{(\varphi, \varphi') : \varphi + \varphi' \geq 0\} = G[c]; \quad (33)$$

тогда, складывая левые и правые части (30)–(33) и учитывая, что $\text{spt} \nu_* = \text{spt}^- \nu_* \cup \text{spt}^+ \nu_*$, получаем

$$\text{spt} \nu_* = G[-b] \cup \overline{I^{-b}} \cup \overline{I^c} \cup G[c],$$

откуда $\nu_* = \nu^{(b,c)}$.

Докажем соотношения (32) и (33); справедливость соотношений (30) и (31) следует из соображений симметрии.

Соотношение (32) следует непосредственно из леммы 7. Остается доказать (33). Рассмотрим два случая.

(i) $c \leq \pi/6$. Согласно лемме 5, (b) множество $\text{spt}^+ \nu_* \cap \{(\varphi, \varphi') : \varphi + \varphi' \geq 0\}$ задается соотношением

$$\sin \varphi + \sin \varphi' = \sin c + 1, \quad c \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

тем самым справедливо (33).

(ii) $c > \pi/6$. Заметим, что

$$Q^+ \cap \{(\varphi, \varphi') : \varphi + \varphi' \geq 0\} = \bigcup_{i=1}^{10} (Q^+ \cap G_i),$$

а следовательно,

$$\text{spt}^+ \nu_* \cap \{(\varphi, \varphi') : \varphi + \varphi' \geq 0\} = \bigcup_{i=1}^{10} (\text{spt}^+ \nu_* \cap G_i), \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} G_1 &= [a, \pi - 3a] \times I_0, & G_2 &= I_0 \times [a, \pi - 3a], \\ G_3 &= \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \times I_0, & G_4 &= I_0 \times \left(0, \frac{\pi}{6}\right), \\ G_5 &= \left(\frac{\pi}{6}, a\right) \times I_0, & G_6 &= I_0 \times \left(\frac{\pi}{6}, a\right), \\ G_7 &= \left(\pi - 3a, \frac{\pi}{2}\right] \times \left(\pi - 3a, \frac{\pi}{2}\right], & G_8 &= \left\{\frac{\pi}{6}\right\} \times \left(\pi - 3a, \frac{\pi}{2}\right), \\ G_9 &= \left(\pi - 3a, \frac{\pi}{2}\right) \times \left\{\frac{\pi}{6}\right\}, & G_{10} &= \left\{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Согласно лемме 5, (c)

$$\begin{aligned} \text{spt}^+ \nu_* \cap G_1 &= \text{spt}^+ \nu_* \cap G_2 \\ &= \{(\varphi, \varphi') : \sin \varphi + \sin \varphi' = \sin c + \sin 3c, c \leq \varphi \leq \pi - 3c\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Согласно лемме 6, (a)

$$\text{spt}^+ \nu_* \cap G_3 = \text{spt}^+ \nu_* \cap G_4 = \emptyset. \quad (36)$$

Согласно лемме 6, (b)

$$\text{spt}^+ \nu_* \cap G_5 = \left\{(\varphi, \varphi') : 3\varphi + \varphi' = \pi, \frac{\pi}{6} < \varphi < c\right\}, \quad (37)$$

$$\text{spt}^+ \nu_* \cap G_6 = \left\{(\varphi, \varphi') : \varphi + 3\varphi' = \pi, \frac{\pi}{6} < \varphi' < c\right\}. \quad (38)$$

Множества G_7 , G_8 и G_9 не пересекаются с $R((c, c))$, поэтому

$$\text{spt}^+ \nu_* \cap G_i = \emptyset, \quad i = 7, 8, 9. \quad (39)$$

Наконец, точки $(\pi/6, \pi/2)$ и $(\pi/2, \pi/6)$ являются предельными для множеств $\text{spt}^+ \nu_* \cap G_5$ (37) и $\text{spt}^+ \nu_* \cap G_6$ (38), следовательно,

$$G_{10} \subset \text{spt}^+ \nu_*. \quad (40)$$

Объединяя соотношения (35)–(40), получаем

$$\bigcup_{i=1}^{10} (\text{spt}^+ \nu_* \cap G_i) = G[c];$$

отсюда и из (34) следует (33), что и требовалось доказать.

Таким образом, задача (17), (18) сводится к нахождению минимума функции $\Phi(x)$, $x \in [\arcsin(\sqrt{2} - 1), \arcsin \sqrt{1/3}]$. Поиск этого минимума проводится численно с использованием Maple. Установлено, что наименьшее значение Φ достигается в точке $x_0 = 0.526$ и равно $\Phi(x_0) = 1.3171$. (В действительности значение $\Phi(x_0)$ получено с точностью до восьмого знака после десятичной точки. Правильность вычислений проверена с помощью Matlab.) Тем самым, оптимальная мера равна $\nu_* = \nu^{(a_0, a_0)}$, где $a_0 = \arcsin x_0 = 0.554$, и наименьшее значение $\mathcal{F}$ равно $\mathcal{F}(\nu_*) = 2\Phi(x_0)$.

Множество $\text{spt } \nu_* \cap \{(\varphi, \varphi') : \varphi + \varphi' \geq 0\}$ изображено на рис. 8 сплошными линиями; оно принадлежит квадрату $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$. Множество $\text{spt } \nu_* \cap \{(\varphi, \varphi') : \varphi + \varphi' \leq 0\}$ центрально симметрично ему относительно начала координат.

Рис. 8

Опишем семейство преобразований, индуцирующих ν_* и, тем самым, решающих задачу минимизации (16), (10). Преобразование общего вида T из этого семейства задается (с точностью до значений на множестве меры нуль) следующим образом.

Выберем борелевские множества $A, A' \subset \check{Q} := ([-a_0, -\pi/6] \cup [\pi/6, a_0]) \times [0, 1] \subset \Pi$ таким образом, чтобы множества $A(\varphi) := A \cap (\{\varphi\} \times [0, 1])$ и $A'(\varphi) := A' \cap (\{\varphi\} \times [0, 1])$, $\pi/6 \leq |\varphi| \leq a_0$, имели лебеговскую меру $|A(\varphi)| = |A'(\varphi)| = \rho(\varphi)$. Здесь $\rho(\varphi) = 4(1 - 3\sin^2 \varphi)$. Пусть множества A, A' заданы; построим по ним преобразование $T(\varphi, \tau) =: (T_1(\varphi, \tau), T_2(\varphi, \tau))$.

Множество $G[a_0] \cup G[-a_0]$ есть график некоторой функции g , заданной на $[-\pi/2, -\pi/6] \cup [\pi/6, \pi/2]$. Определим

$$T_1(\varphi, \tau) = \begin{cases} \varphi, & \text{если } |\varphi| \leq \frac{\pi}{6} \text{ или } \frac{\pi}{6} \leq |\varphi| \leq a_0, \tau \in A(\varphi), \\ g(\varphi), & \text{если } a_0 \leq |\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \text{ или } \frac{\pi}{6} \leq |\varphi| \leq a_0, \tau \in [0, 1] \setminus A(\varphi). \end{cases}$$

Определим теперь преобразование $T_2(\varphi, \cdot)$ при фиксированном φ . Если $|\varphi| \leq \pi/6$ или $a_0 \leq |\varphi| \leq \pi - 3a_0$, то $T_2(\varphi, \cdot)$ — взаимно однозначное преобразование, сохраняющее лебеговскую меру. Если $\pi/6 \leq |\varphi| \leq a_0$, то $T_2(\varphi, \cdot)|_{A(\varphi)}$ и $(1 - \rho(\varphi))T_2(\varphi, \cdot)|_{[0, 1] \setminus A(\varphi)}$ — взаимно однозначные сохраняющие лебеговскую меру отображения $A(\varphi)$ на $A'(\varphi)$ и $[0, 1] \setminus A(\varphi)$ на $[0, 1 - \rho(\varphi)]$ соответственно. Наконец, если $\pi - 3a_0 \leq |\varphi| \leq \pi/2$, то $T_2(\varphi, \cdot)$ — взаимно однозначное отображение из $[0, 1]$ в $[0, 1] \setminus A'(\varphi)$, причем отображение $\frac{1}{1 - \rho(g(\varphi))}T_2(\varphi, \cdot)$ сохраняет лебеговскую меру.

Все преобразования T из построенного семейства (и только они) являются решениями задачи (16), (10), причем минимальное значение функционала F равно $F(T) = \mathcal{F}(\nu_*) = 2.6342$.

В заключение автор выражает свою благодарность В. Л. Левину, А. М. Степину и G. Buttazzo за полезные обсуждения и советы и Delfim Magado Torres за проведение компьютерных вычислений.

Список литературы

1. *Newton I.* Philosophiae naturalis principia mathematica, 1686.
2. *Belloni M., Wagner A.* Newton's Problem of Minimal Resistance in the Class of Bodies with Prescribed Volume // J. Convex Anal. 2003 (to appear).
3. *Buttazzo G., Ferone V., Kawohl B.* Minimum problems over sets of concave functions and related questions // Math. Nachr. 1995. V. 173. P. 71–89.
4. *Buttazzo G., Guasoni P.* Shape optimization problems over classes of convex domains // J. Convex Anal. 1997. V. 4. №2. P. 343–351.
5. *Buttazzo G., Kawohl B.* On Newton's problem of minimal resistance // Math. Intelligencer. 1993. V. 15. №4. P. 7–12.
6. *Comte M., Lachand-Robert T.* Newton's problem of the body of minimal resistance under a single-impact assumption // Calc. Var. Partial Differential Equations. 2001. V. 12. P. 173–211.
7. *Lachand-Robert T., Peletier M. A.* Newton's problem of the body of minimal resistance in the class of convex developable functions // Math. Nachr. 2001. V. 226. P. 153–176.
8. *Плахов А. Ю.* К задаче Ньютона о теле наименьшего аэродинамического сопротивления // Докл. РАН. 2003. Т. 390. №3. С. 1–4.
9. *Tabachnikov S.* Billiards. Paris: Société Mathématique de France, 1995.
10. *Monge G.* Memoire sur la theorie des déblais et des remblais // Histoire de l'Acad. des Sciences de Paris. 1781.
11. *Канторович Л. В.* О перемещении масс // Докл. АН СССР. 1942. Т. 37. №7–8. С. 227–229.

12. *Evans L. C.* Partial differential equations and Monge–Kantorovich mass transfer // Current developments in mathematics / ed. R. Bott et al. Boston, MA: International Press, 1999. P. 65–126.
13. *Рачев С. Т.* Задача Монжа–Канторовича о перемещении масс и ее применения в стохастике // Теория вероятностей и ее прим. 1984. Т. 29. № 4. С. 625–653.
14. *McCann R. J.* Exact solutions to the transportation problem on the line // Proc. Roy. Soc. Lond. Sect. A. 1999. V. 455. P. 1341–1380.
15. *Levin V. L.* Optimal solutions of the Monge problem // Adv. Math. Econ. 2004 (to appear).
16. *Левин В. Л.* Решение задач Монжа и Монжа–Канторовича. Теория и примеры // Докл. РАН. 2003. Т. 388. № 1. С. 7–10.
17. *Uckelmann L.* Optimal couplings between one-dimensional distributions // Distributions with given marginals and moment problems / ed. V. Beneš and J. Štěpán. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. P. 275–281.

Aveiro University, Португалия
E-mail: `plakhov@mat.ua.pt`

Поступила в редакцию
11.11.2003