Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Комлов, С. П. Суетин, Асимптотическая формула для полиномов, ортонормированных относительно переменного веса. II, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 9, 121–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8360>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 17:20:32

УДК 517.53

А. В. Комлов, С. П. Суетин

Асимптотическая формула для полиномов, ортонормированных относительно переменного веса. II

Доказана теорема, анонсированная авторами в предыдущей работе с аналогичным названием. В теореме утверждается, что асимптотическое поведение полиномов, ортонормированных относительно переменного веса $e^{-2nQ(x)}p_g(x)/\sqrt{\prod_{j=1}^{2p}(x-e_j)}$, где $e_1 < e_2 < \dots < e_{2p}$, $Q(x) = x^{2m} + \dots$ – полином четной степени $2m$ с единичным старшим коэффициентом, p_g – некоторый вспомогательный полином степени $p-1$, совпадает с асимптотическим поведением пси-функции Наттолла, которая является решением специальной краевой задачи на соответствующей гиперэллиптической римановой поверхности рода $g = p-1$.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: переменный вес, ортонормированные полиномы, сильная асимптотика, равновесные распределения.

DOI: 10.4213/sm8360

§ 1. Введение

1.1. Настоящая работа является продолжением работы [1] (см. также [2]). В этой связи здесь мы придерживаемся обозначений и терминологии, введенных в работе [1].

Пусть $Q(x) = x^{2m} + \dots$ – полином четной степени $2m$ с вещественными коэффициентами и единичным старшим коэффициентом; в дальнейшем полином Q будет играть роль внешнего поля (точнее, потенциала внешнего поля) в стандартной теоретико-потенциальной задаче равновесия.

В классе $M_1(\mathbb{R})$ единичных (положительных борелевских) мер μ с носителями $\text{Supp } \mu$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$ рассмотрим следующую теоретико-потенциальную задачу равновесия для логарифмического потенциала

$$V^\mu(x) = - \int \log |x - t| d\mu(t)$$

с внешним полем $Q(x)$ (см. прежде всего [3; формулы (27), (28)], [4]–[7], а также [8]–[10]): найти меру $\lambda \in M_1(\mathbb{R})$ такую, что

$$\begin{aligned} V^\lambda(x) + Q(x) &\equiv w_Q, & x \in S, & \quad S = \text{Supp } \lambda, \\ &\geq w_Q, & x \in \mathbb{R} \setminus S. \end{aligned} \tag{1}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-01-12430-офи-м2, № 13-01-00622-а, № 14-01-31281-мол-а) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2900.2014.1).

Существует единственная мера $\lambda = \lambda_Q \in M_1(\mathbb{R})$, удовлетворяющая соотношению (1); λ называется *равновесной мерой*, w_Q – *постоянной равновесия*.

Известно (см. [10], [9]), что для полиномиального потенциала $Q(x)$ носитель S равновесной меры состоит из нескольких (непересекающихся) отрезков, $S = \bigsqcup_{j=1}^p S_j$, $S_j = [s_{2j-1}, s_{2j}]$, а сама мера λ имеет следующий вид:

$$d\lambda(x) = h_1(x)h_+^{1/2}(x) dx, \quad x \in S, \quad (2)$$

где функция h_1 голоморфна и в регулярном случае отлична от нуля на S , $h(z) = h_{2p}(z) := \prod_{j=1}^{2p} (z - s_j)$ и выбрана такая ветвь корня, что $h^{1/2}(z) \sim z^p$ при $z \rightarrow \infty$; под $h_+^{1/2}(x)$ в (2) и всюду в дальнейшем понимаются предельные значения функции $h^{1/2}(z)$ при $z \rightarrow x \in S$ из верхней полуплоскости, а под $h_-^{1/2}(x)$ – из нижней полуплоскости; аналогичное обозначение относится и к другим функциям.

Пусть $E = \bigsqcup_{j=1}^p E_j$, где $E_j = [e_{2j-1}, e_{2j}] \subset (s_{2j-1}, s_{2j}) = \text{int } S_j$, $j = 1, \dots, p$ ($\text{int } S_j = (s_{2j-1}, s_{2j})$ – внутренность отрезка S_j), $\lambda = \lambda_{Q,E} \in M_1(E)$ – (единственная) равновесная во внешнем поле Q мера с носителем на $E \subset \text{int } S$:

$$V^\lambda(x) + Q(x) = w_{Q,E} =: \gamma, \quad x \in E. \quad (3)$$

Подчеркнем, что в (3) в отличие от (1) рассматриваются единичные меры с носителями на E . Задача равновесия (3) соответствует предельному случаю внешнего поля $Q \cdot (1/\chi_E)$, где χ_E – характеристическая функция множества E . Известно, что в этом случае равновесная мера имеет следующий вид (ср. (2)):

$$d\lambda(x) = \frac{h_2(x)}{H_+^{1/2}(x)} dx, \quad x \in E, \quad (4)$$

где функция h_2 голоморфна и отлична от нуля на E ,

$$H(z) = H_{2p}(z) := \prod_{j=1}^{2p} (z - e_j),$$

$H^{1/2}(z) \sim z^p$ при $z \rightarrow \infty$. Введем обозначение $W(z) := H^{1/2}(z)$.

Пусть на E задан вес

$$\sigma_n(x) := \frac{i\rho_n(x)}{2\pi W^+(x)} > 0, \quad x \in E, \quad \rho_n(x) := p_g(x)e^{-2nQ(x)}, \quad (5)$$

где $p_g(x) = x^g + \dots$ – фиксированный полином степени $g = p - 1$, у которого в каждой лакуне (т.е. на интервале (e_{2j}, e_{2j+1}) , $j = 1, \dots, g$) лежит ровно по одному нулю (тем самым, в каждой лакуне этот полином меняет знак в точности один раз; наличие этого полинома носит вспомогательный характер и компенсирует перемену знака у функции $W^+(x)/i$ при переходе с отрезка E_j на отрезок E_{j-1}).

Пусть $q_n(x; N) = \alpha_n(N)x^n + \dots$, $\alpha_n(N) > 0$, – полиномы, ортонормированные на E относительно веса $\sigma_N(x)$:

$$\int_E q_n(x; N)q_m(x; N)\sigma_N(x) dx = \delta_{n,m}. \quad (6)$$

Обозначим через $\mathfrak{R}$ гиперэллиптическую риманову поверхность рода $g = p - 1$, заданную уравнением $W^2 = \prod_{j=1}^{2p} (z - e_j)$ (подробнее см. ниже, в п. 1.2).

Пусть $g(z, \infty)$ – функция Грина области $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ с полюсом в ∞ . Обозначим через $g(\mathbf{z}, \infty)$ гармоническое продолжение функции $g(z, \infty)$ с первого листа на всю риманову поверхность $\mathfrak{R}$ за исключением точек $\infty^{(1)}$ и $\infty^{(2)}$, а именно $g(z^{(2)}, \infty) = -g(z^{(1)}, \infty)$ (подробнее см. п. 2.2).

В работе [1] был получен следующий результат об асимптотическом поведении при $n \rightarrow \infty$ старшего коэффициента $\alpha_n(n) > 0$ полинома $q_n(z; n)$ (ср. [11]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $E = \bigsqcup_{j=1}^p [e_{2j-1}, e_{2j}] \subset \text{int } S$, $\lambda = \lambda_{Q,E} \in M_1(E)$ – равновесная мера с носителем на E для задачи (3) с внешним полем $Q(x) = x^{2m} + \dots$, γ – соответствующая постоянная равновесия. Тогда для старшего коэффициента $\alpha_n(n)$ ортонормированного относительно веса $\sigma_n(x)$ полинома $q_n(x; n)$ имеет место следующая формула сильной асимптотики:

$$\alpha_n(n) = \text{const} \cdot (\text{cap } E)^{g/2} \cdot e^{n\gamma} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^g g(\mathbf{z}_j(n), \infty) \right\} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (7)$$

где $o(1) = O(\delta^n)$, $\delta \in (0, 1)$, $\text{const} = \text{const}(p_g)$ зависит только от вспомогательного полинома p_g . Точки $\mathbf{z}_j(n) = (z_j(n), \pm)$ на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ таковы, что $z_j(n) \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$, $j = 1, \dots, g$, и однозначно определяются из решения задачи обращения Якоби

$$\sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) \equiv - \sum_{j=1}^g \{n\lambda(E_j)\} B_{kj} + c_k, \quad k = 1, \dots, g; \quad (8)$$

здесь $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть соответствующего числа, c_k – некоторые постоянные (не зависящие от n), $\equiv$ обозначает сравнение по модулю периодов базисных абелевых дифференциалов $d\Omega_k$ для $\mathfrak{R}$, Ω_k – соответствующие абелевы интегралы, $\|B_{kj}\|$ – матрица Римана для $\mathfrak{R}$.

В работе [1] формула (7) была доказана в предположении, что асимптотическое поведение полиномов $q_n(z; n)$ совпадает с асимптотическим поведением пси-функции Наттолла (теорема 2 в [1]). Настоящая работа посвящена доказательству этой теоремы 2. Для определения пси-функции Наттолла нам понадобятся следующие понятия.

1.2. Обозначим через D область $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$. Пусть $\mathfrak{R}$ – гиперэллиптическая риманова поверхность (р.п.) рода $g = p - 1 \geq 1$, заданная уравнением $W^2 = \prod_{j=1}^{2p} (z - e_j)$. Она является двулистным разветвленным в точках e_j накрытием римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$. Отрезкам E_j на $\overline{\mathbb{C}}$ соответствуют замкнутые циклы $\mathcal{L}_j$ на $\mathfrak{R}$ такие, что $\text{proj } \mathcal{L}_j = E_j$ ($\text{proj}(\cdot)$ – каноническая проекция $\mathfrak{R}$ на $\overline{\mathbb{C}}$). Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{L}_p$, тогда риманова поверхность $\mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$ распадается на два открытых листа $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ (таких, что $\text{proj}(D^{(1,2)}) = D$), т.е. $\mathfrak{R} = D^{(1)} \sqcup \mathcal{L} \sqcup D^{(2)}$. В дальнейшем мы, как правило, отождествляем первый лист $D^{(1)}$ с областью D .

Функция $W(z)$, определенная в D равенством $W(z) = \sqrt{H(z)} \sim z^p$, $z \rightarrow \infty$, где $H(z) = H_{2p}(z) := \prod_{j=1}^{2p} (z - e_j)$, продолжается на второй лист равенством $W(z^{(2)}) = -\sqrt{H(z)} \sim -z^p$ и является на р.п. $\mathfrak{R}$ голоморфной (однозначной аналитической) функцией. Точка $\mathbf{z}$ на $\mathfrak{R}$ задается парой

$$\mathbf{z} = (z, W) = (z, \pm \sqrt{H(z)}) = (z, \pm);$$

имеем $z^{(1)} = (z, +)$, $z^{(2)} = (z, -)$.

Если на $\mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$ задана функция $F(\mathbf{z})$, то для $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ под $F^{(1)}(\mathbf{x})$ понимаются ее некасательные предельные значения при $D^{(1)} \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{L}$, если они существуют; аналогичный смысл придается и $F^{(2)}(\mathbf{x})$ при $D^{(2)} \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{L}$.

Приведем стандартное определение пси-функции Наттолла (см. [12]–[14]). Пусть $\rho(x)$ – голоморфная и не обращающаяся в нуль на E функция. Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$, $n \geq g$. Пси-функция Наттолла $\Psi(\mathbf{z}) = \Psi_n(\mathbf{z}; \rho)$ – это решение следующей краевой задачи на $\mathfrak{R}$.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$, $n \geq g$, найти функцию $\Psi(\mathbf{z}) = \Psi_n(\mathbf{z}; \rho)$ такую, что:

- 1) Ψ (кусочно) мероморфна на $\mathfrak{R} \setminus \mathcal{L} = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$;
- 2) дивизор (Ψ) равен $(n - g)\infty^{(2)} + \mathbf{z}_1(n) + \dots + \mathbf{z}_g(n) - n\infty^{(1)}$;
- 3) на $\mathcal{L}$ выполнено краевое условие $\rho(x)\Psi^{(1)}(\mathbf{x}) = \Psi^{(2)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$.

В п. 2) точки $\mathbf{z}_j$ (“свободные” нули пси-функции) зависят от n и от ρ . Дивизор $\mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ задается как (единственное) решение специальной задачи обращения Якоби (см. [14; формула (B.20)]). При заданных в (5) условиях на вес σ_n и функцию $\rho = \rho_n$ из результатов [14; приложение В] вытекает, что проекции z_j свободных нулей пси-функции $\Psi_n(z; \rho_n)$ лежат в лакунах $[e_{2j}, e_{2j+1}]$, $j = 1, \dots, p - 1$, между отрезками, причем в каждой лакуне ровно по одному нулю. Если какая-то точка z_j совпала с краем соответствующей лакуны, то при определении пси-функции (см. п. 3)) мы считаем эту точку нулем как функции $\Psi^{(1)}$, так и функции $\Psi^{(2)}$ (см. [14; формулы (B16)–(B17)]).

Непосредственно из определения пси-функции следует, что

$$\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) = \text{const} \cdot \prod_{j=1}^g (z - z_j(n)).$$

Мы выберем нормировку $\text{const} = 1$ и величину $\lim_{z \rightarrow \infty} (\Psi(z^{(1)})/z^n) > 0$, и в таком случае решение задачи будем называть *нормированным*.

Теперь приведем теорему 2 из [1], доказательство которой и есть цель настоящей работы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Psi_n(\mathbf{z}) = \Psi_n(\mathbf{z}; \rho_n)$ – нормированное решение краевой задачи Римана для $n \geq g$, $q_n(z; n)$ – полином степени n с положительным старшим коэффициентом, ортонормированный относительно переменного веса (5):

$$\sigma_n(x) := \frac{i\rho_n(x)}{2\pi W^+(x)} > 0, \quad x \in E, \quad \rho_n(x) := p_g(x)e^{-2nQ(x)}.$$

Тогда равномерно на любом компакте K в $\overline{\mathbb{C}}$, лежащем вне выпуклой оболочки $\text{conv}(E)$ компакта E , справедлива следующая формула сильной асимптотики:

$$q_n(z; n) = \Psi_n(z^{(1)})(1 + o(\delta^n)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где $\delta = \delta(K) \in (0, 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что изначально Дж. Наттолл применил разработанный им метод получения сильных асимптотик ортогональных полиномов с помощью пси-функции для изучения полиномов, ортогональных на одном отрезке относительно неизменного (не зависящего от номера полинома) веса [12]. В 2000 г. С. П. Суетин в [13] (см. также [15], [14]) применил метод Наттолла для получения сильной асимптотики полиномов, ортогональных на системе отрезков $E = \bigsqcup_{j=1}^p [e_{2j-1}, e_{2j}]$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ относительно неизменного положительного веса вида $\sigma(x) = i\rho(x)/(W^+(x))$, где функция $\rho(x)$ голоморфна в окрестности отрезков $[e_{2j-1}, e_{2j}]$ (в [13] показано, что в случае, когда гармонические меры $\omega_1(\infty), \dots, \omega_{g+1}(\infty)$ рационально независимы, блуждающие нули ортогональных полиномов всюду плотны в лакунах; ср. [16]–[18]). В 2004 г., используя метод Наттолла, А. И. Аптекарев и В. Ван Аше в [19] получили формулу сильной асимптотики для полиномов, ортогональных на одном отрезке $[-1, 1]$ относительно переменного веса вида $e^{-nQ(x)}/b\sqrt{1-x^2}$, где $Q(x) = x^{2m} + \dots$ – полином четной степени. В нашей работе мы будем сочетать эти два подхода.

§ 2. Формулировка основных результатов

2.1. Приведем схему изложенного в [14; теорема 1] доказательства теоремы, аналогичной теореме 2, для случая, когда вес не зависит от n :

$$\sigma(x) = \frac{i\rho(x)}{W^+(x)} > 0, \quad x \in E.$$

Используется тот хорошо известный факт, что ортогональные полиномы по весу $\sigma(x)$ на E суть знаменатели аппроксимаций Паде марковской функции

$$\widehat{\sigma}(z) = \int_E \frac{\sigma(x) dx}{z - x}, \quad (10)$$

построенных в точке $z = \infty$. А именно, пусть $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ – соответственно числитель и знаменатель n -й аппроксимации Паде функции $\widehat{\sigma}(z)$ в ∞ , $R_n(z)$ – соответствующая функция остатка: $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ – многочлены степени не больше n такие, что

$$R_n(z) := Q_n(z)\widehat{\sigma}(z) - P_n(z) = O(z^{-n-1}), \quad z \rightarrow \infty,$$

и $Q_n(z)$ монический. Тогда $Q_n(z)$ – n -й монический ортогональный полином относительно веса σ . Оказывается, асимптотическое поведение полинома

$Q_n(z)$ описывается поведением пси-функции $\Psi_n(\mathbf{z}) = \Psi_n(\mathbf{z}, \rho)$ на первом листе, а асимптотическое поведение функции остатка $R_n(z)$ – поведением Ψ_n на втором листе (см. [14; теорема 1]). Точнее, рассмотрим на $\mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$ функцию

$$F_n(\mathbf{z}) = \Psi_n(\mathbf{z}) \cdot \begin{cases} R_n(z)W(\mathbf{z}), & \mathbf{z} \in D^{(1)}, \\ Q_n(z), & \mathbf{z} \in D^{(2)}. \end{cases} \quad (11)$$

Оказывается (см. [14; формула (41)]), что для значений F_n на обоих листах римановой поверхности $\mathfrak{R}$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$F_n(z^{(1,2)}) = \alpha_n^{-1} \prod_{j=1}^g (z - z_j(n)) + O(\delta^n), \quad (12)$$

где $\alpha_n > 0$ – старший коэффициент ортонормированного полинома по весу σ ($q_n(z) = \alpha_n Q_n(z)$). Эта формула выполняется равномерно на компактах K в $\mathbb{C} \setminus \text{conv}(E)$, $\delta = \delta(K) \in (0, 1)$. Отсюда, используя соотношение $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) = \prod_{j=1}^g (z - z_j(n))$, получаем утверждение теоремы, аналогичной теореме 2, в случае не зависящего от n веса (см. [14; теорема 1]).

Мы покажем, что формула, аналогичная формуле (12), верна и в случае переменного веса (5). В [14; § 3] было получено следующее интегральное представление для функции $F_n(\mathbf{z})$. Пусть $\Gamma = \bigsqcup_{j=1}^g \Gamma_j$ – объединение непересекающихся простых контуров таких, что Γ_j охватывает отрезок E_j и функция ρ голоморфна на замыкании их внутренностей. Тогда для любой точки $z^{(1)}$ с первого листа поверхности $\mathfrak{R}$ (см. [14; формула (37)])

$$F_n(z^{(1)}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{(1)}} F_n(\zeta^{(1)}) \frac{\prod_{j=1}^g (\zeta - z_j(n))}{\Psi_n(\zeta^{(1)})^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)}) + p_n(z) \quad (13)$$

и для любой точки $z^{(2)}$ со второго листа, проекция которой лежит во внешности контуров Γ_j (см. [14; формула (38)]),

$$F_n(z^{(2)}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{(1)}} F_n(\zeta^{(1)}) \frac{\prod_{j=1}^g (\zeta - z_j(n))}{\Psi_n(\zeta^{(1)})^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)}) + p_n(z), \quad (14)$$

где

$$d\Omega(\zeta; \mathbf{z}) = \frac{W(\zeta) + W(\mathbf{z})}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2W(\zeta)}, \quad (15)$$

а $p_n(z)$ – некоторый полином степени не больше g .

Ключевую роль в выводе формулы (12) из формул (13) и (14) в [14; § 3] играет следующее свойство функции $\prod_{j=1}^g (\zeta - z_j(n)) / (\Psi_n(\zeta^{(1)})^2 \rho(\zeta))$. Пусть в области голоморфности функции ρ заданы две системы простых непересекающихся контуров $\Gamma = \bigsqcup_{j=1}^{g+1} \Gamma_j$ и $\tilde{\Gamma} = \bigsqcup_{j=1}^{g+1} \tilde{\Gamma}_j$ таких, что контуры $\Gamma_j, \tilde{\Gamma}_j$ охватывают отрезок E_j и $\tilde{\Gamma}_j$ лежит во внутренности Γ_j . Тогда существует последовательность систем контуров $\Gamma^n = \bigsqcup_{j=1}^{g+1} \Gamma_j^n$ такая, что контур Γ_j^n лежит между контурами Γ_j и $\tilde{\Gamma}_j$ и на Γ^n выполнены следующие условия:

- 1) $|\prod_{j=1}^g (\zeta - z_j(n)) / \Psi_n(\zeta^{(1)})^2 \rho(\zeta)| < C\delta^n$ при $\zeta \in \Gamma^n$, $n \rightarrow \infty$, где константа $\delta \in (0, 1)$ зависит только от Γ и $\tilde{\Gamma}$, а C – некоторая константа;
- 2) $\max_{\zeta \in \Gamma^n} |p_n(\zeta)| = O(\min_{\zeta \in \Gamma^n} |p_n(\zeta)|)$, $n \rightarrow \infty$.

Из этих свойств в [14; формула (48)] выводится, что асимптотическое поведение функции $F_n(\mathbf{z})$ на обоих листах совпадает с поведением многочлена $p_n(z)$, и доказывается, что $p_n(z)$ ведет себя асимптотически как $\alpha_n^{-1} \prod_{j=1}^g (z - z_j(n))$. Тем самым, получается асимптотическая формула (12).

Перейдем теперь к рассмотрению случая переменного веса (5)

$$\sigma_n(x) = \frac{i\rho_n(x)}{2\pi W^+(x)} > 0, \quad \rho_n(x) = p_g(x)e^{-2nQ(x)}.$$

Будем придерживаться вышеизложенной схемы. Теперь $P_n(z) = P_n(z, \rho_n)$ – числитель, $Q_n(z) = Q_n(z, \rho_n)$ – знаменатель, а $R_n(z) = R_n(z, \rho_n)$ – функция остатка n -й аппроксимации Паде марковской функции $\hat{\sigma}_n$ (см. (10)); пси-функция Наттолла $\Psi_n(\mathbf{z})$ строится по функции ρ_n : $\Psi_n(\mathbf{z}) = \Psi_n(\mathbf{z}, \rho_n)$. Функция $F_n(\mathbf{z})$ опять определяется формулой (11). Формулы (13) и (14) верны для функции $F_n(\mathbf{z})$, определенной по любому весу σ вида $\sigma(x) = i\rho(x)/(2\pi W^+(x))$, и, в частности, для веса σ_n (с заменой ρ на ρ_n). Мы покажем, что и в случае переменного веса (5) вышеуказанные свойства 1), 2) по-прежнему будут выполняться (с заменой ρ на ρ_n). После этого доказательство теоремы 2 может быть получено на основе рассуждений из работы [14], проведенных там для случая веса, не зависящего от n .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поясним, в чем кардинальное отличие случая переменного веса. Когда вес неизменен, последовательность систем контуров Γ^n выбирается так, чтобы контуры Γ_j^n были равномерно отделены от нулей полинома p_n (для выполнения свойства 2)) и от точек $z_j(n)$ – проекций нулей пси-функции $\Psi_n(\mathbf{z})$. Выполнение свойства 1) на Γ^n будет следовать из аналогичного свойства для функции $1/|\Psi_n(\zeta^{(1)})|^2$ на этих контурах:

$$\frac{1}{|\Psi_n(\zeta^{(1)})|^2} < \tilde{C}\delta^n, \quad \zeta \in \Gamma_n.$$

Выполнение этого свойства следует из того, что вне точек $z_j(n)$

$$|\Psi_n(\zeta^{(1)})| \sim e^{ng(\zeta, \infty)},$$

где $g(\zeta, \infty)$ – функция Грина области $\mathbb{C} \setminus E$ с особенностью в точке $\zeta = \infty$. (Это можно увидеть из явного представления пси-функции, которое приведено ниже; см. формулы (18)–(22).) В случае, когда вес переменный, контуры будут выбираться из тех же соображений, однако (так как вес ρ_n зависит от n) свойство 1) уже не будет следовать из выполнения аналогичного свойства для функции $1/|\Psi_n(\zeta^{(1)})|^2$. В этом случае свойство 1) будет установлено другим способом, предложенным А. И. Аптекаревым и В. Ван Аше в работе [19]. Отметим, что А. И. Аптекарев и В. Ван Аше изучали случай, когда E состоит из одного отрезка. В этом случае пси-функция не имеет нулей, полином p_n – константа, поэтому никакой последовательности контуров Γ^n не возникает и можно обойтись одним контуром Γ .

Итак, для доказательства теоремы 2 по схеме, предложенной в [13], [14], нам нужно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть $Q(x) = x^{2m} + \dots$ – полином четной степени и на введенной ранее системе отрезков $E = \bigsqcup_{j=1}^{g+1} E_j$ задана последовательность функций $\rho_n(x) = p_g(x)e^{-2nQ(x)}$, где $p_g(x) = x^g + \dots$ – фиксированный полином степени g , у которого в каждой лакуне (т.е. на отрезке $[e_{2j}, e_{2j+1}]$, $j = 1, \dots, g$) лежит ровно по одному нулю. Пусть $\Psi_n(\mathbf{z}) = \Psi_n(\mathbf{z}, \rho_n)$ – соответствующая пси-функция Наттолла. Тогда существует система непересекающихся окрестностей U_j , $j = 1, \dots, g+1$, отрезков E_j со следующим свойством.

Пусть заданы две системы простых непересекающихся контуров $\Gamma = \bigsqcup_{j=1}^{g+1} \Gamma_j$ и $\tilde{\Gamma} = \bigsqcup_{j=1}^{g+1} \tilde{\Gamma}_j$ таких, что контуры Γ_j , $\tilde{\Gamma}_j$ лежат в U_j , охватывают отрезок E_j и контур $\tilde{\Gamma}_j$ лежит во внутренней области контура Γ_j . Тогда существует последовательность систем контуров $\Gamma^n = \bigsqcup_{j=1}^{g+1} \Gamma_j^n$ такая, что контур Γ_j^n лежит между контурами Γ_j и $\tilde{\Gamma}_j$ и на Γ^n выполнены следующие условия:

- 1) $|\prod_{j=1}^g (\zeta - z_j(n)) / \Psi_n(\zeta^{(1)})^2 \rho_n(\zeta)| < C\delta^n$ при $\zeta \in \Gamma^n$, $n \rightarrow \infty$, где константа $\delta \in (0; 1)$ зависит только от Γ и $\tilde{\Gamma}$, а C – некоторая константа;
- 2) $\max_{\zeta \in \Gamma^n} |\rho_n(\zeta)| = O(\min_{\zeta \in \Gamma^n} |\rho_n(\zeta)|)$, $n \rightarrow \infty$.

2.2. Для доказательства леммы 1 нам понадобится явный вид пси-функции. Для произвольной функции ρ явное выражение для $\Psi_n(\mathbf{z}; \rho)$ получено в [14; формула (30)]. Чтобы его привести, нам понадобятся дополнительные сведения из теории римановых поверхностей.

Ориентируем кривые $\mathcal{L}_j$ так, чтобы при обходе по $\mathcal{L}_j$ область $D^{(1)}$ оставалась слева, а $D^{(2)}$ – справа. Примем ориентированные кривые $\mathcal{L}_j^+$, $j = 1, \dots, g$, за a -циклы $\mathbf{a}_j$ на $\mathfrak{R}$ и стандартным образом (см. [20]–[23]) дополним их b -циклами $\mathbf{b}_j$ до базиса гомологий $\{\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j\}_{j=1, \dots, g}$ на $\mathfrak{R}$. Пусть $d\Omega_k$, $k = 1, \dots, g$, – соответствующий a -нормированный базис голоморфных абелевых дифференциалов (1-форм):

$$\oint_{\mathbf{a}_j} d\Omega_k = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, g.$$

Матрица $\mathbf{B} = \|B_{kj}\|_{k,j=1, \dots, g}$, где $B_{kj} = \oint_{\mathbf{b}_j} d\Omega_k$ – b -периоды базисных дифференциалов, является матрицей Римана: она симметрична, $B_{kj} = B_{jk}$, а ее мнимая часть положительно определена, $\|\operatorname{Im} B_{jk}\| > 0$. В рассматриваемом здесь случае, когда $e_j \in \mathbb{R}$, все величины B_{kj} чисто мнимые. Абелевы интегралы $\Omega_k(\mathbf{z}) = \int_{e_{2g+2}}^{\mathbf{z}} d\Omega_k$ определены на $\mathfrak{R}$ однозначно по модулю их a - и b -периодов. Так как $\Omega'_k(\mathbf{z}) = s_k(z)/W(\mathbf{z})$, где $s_k(z)$ – полином степени $g-1$ с чисто мнимыми коэффициентами, то имеет смысл обозначение $d\Omega_k^\pm(x) = s_k(x) dx / W^\pm(x)$ при $x \in E$.

Фиксируем стандартный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_g$ в $\mathbb{R}^g$: $(\mathbf{e}_k)_j = \delta_{kj}$. Тогда векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_g, \mathbf{B}\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{B}\mathbf{e}_g$ линейно независимы над $\mathbb{R}$ и образуют базис в $\mathbb{C}^g$. Факторпространство $\mathbb{C}^g / \{N + \mathbf{B}\mathbf{M}\}$ по целочисленной решетке, $N, \mathbf{M} \in \mathbb{Z}^g$, является $2g$ -мерным вещественным тором $\mathcal{T}^{2g}$ и называется многообразием Якоби. Любое риманово многообразие $\mathfrak{R}$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^g$ однозначно представим в виде $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + N + \mathbf{B}\mathbf{M} = \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} \pmod{\text{периодов}}$, $0 \leq (\mathbf{x})_j, (\mathbf{y})_j < 1$, $N, \mathbf{M} \in \mathbb{Z}^g$;

иногда для краткости знак сравнения по модулю периодов базисных дифференциалов $\{d\Omega_k\}$ мы будем опускать и писать $\mathbf{v} \equiv \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y}$.

Неупорядоченные наборы точек $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g)$, $\mathbf{z}_j \in \mathfrak{R}$, образуют g -ю симметрическую степень $S^g\mathfrak{R}$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Пусть $\mathbf{z}_0$ – некоторая фиксированная точка¹ римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Вектор-функция $A(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) = (A_1, \dots, A_g)$ с координатами

$$A_k = A_k(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) \equiv \sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) \equiv \sum_{j=1}^g \int_{\mathbf{z}_0}^{\mathbf{z}_j} d\Omega_k, \quad k = 1, \dots, g, \quad (16)$$

определяет отображение Абеля $A: S^g\mathfrak{R} \rightarrow \text{Яс } \mathfrak{R}$ (пути интегрирования в (16) одни и те же для всех $k = 1, \dots, g$). Если задан вектор $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_g) \in \text{Яс } \mathfrak{R}$ (точнее, класс $[\mathbf{v}]$ эквивалентных $\mathbf{v}$ векторов), то задача нахождения неупорядоченного набора точек $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) \in S^g\mathfrak{R}$, для которого

$$A_k(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) = v_k \pmod{\text{периодов}}, \quad k = 1, \dots, g, \quad (17)$$

называется *задачей обращения Якоби*. Задача обращения Якоби всегда разрешима, но, вообще говоря, не единственным образом.

Для любых двух различных точек $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$ существует абелев дифференциал третьего рода, голоморфный всюду на $\mathfrak{R}$, за исключением этих двух точек, в которых он имеет простые полюсы с вычетами соответственно $+1$ и -1 ; такой дифференциал называется *нормальным*. Нормальный дифференциал будет определен однозначно, если потребовать, чтобы все его a -периоды были равны нулю; будем называть такой дифференциал *a -нормированным абелевым дифференциалом третьего рода* и обозначать $d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$, где $\mathbf{z}$ – переменная на римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Другой способ однозначно задать (нормировать) дифференциал третьего рода – потребовать, чтобы все его периоды были чисто мнимыми. Для таких дифференциалов будем использовать обозначение $dG(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$, предполагая при этом, что вычеты в точках $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ равны соответственно -1 и $+1$. К подобным дифференциалам относится дифференциал комплексной функции Грина с особенностью в бесконечно удаленной точке $G(z, \infty) = g(z, \infty) + ig^*(z, \infty)$ многосвязной области $D = \mathbb{C} \setminus E$ (здесь $g(z, \infty) = g_D(z, \infty)$ – функция Грина области D с особенностью в бесконечно удаленной точке $z = \infty$, а $g^*(z, \infty)$ – функция, гармонически сопряженная к $g(z, \infty)$). Функция $G(z, \infty)$ многозначна в D и

$$G(z, \infty) = \int_{e_{2g+2}}^z \frac{P_g(\zeta)}{\sqrt{H(\zeta)}} d\zeta, \quad z \in D,$$

где $P_g(z) = P_g(z; H) = z^g + \dots$ – вещественный полином, все нули которого лежат в лакунах (e_{2j}, e_{2j+1}) , $j = 1, \dots, g$. Дифференциал

$$dG = dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = \frac{P_g(z)}{W(\mathbf{z})} dz$$

¹В дальнейшем мы всегда выбираем $\mathbf{z}_0 = e_{2g+2}$.

определен на всей римановой поверхности $\mathfrak{R}$, имеет чисто мнимые периоды и простые полюсы в точках $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ и $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$ с вычетами соответственно -1 и $+1$. Тем самым, функция $u(\mathbf{z}) = \operatorname{Re} G(\mathbf{z}, \infty)$, где $G(\mathbf{z}, \infty) = \int_{e_{2g+2}}^{\mathbf{z}} dG$, — однозначная функция на $\mathfrak{R}$, и для $\mathbf{z} = z^{(1)}$ имеем $u(z^{(1)}) = g(z, \infty)$. Функция $u(\mathbf{z})$ задает естественное продолжение функции Грина $g(z, \infty)$ на всю риманову поверхность $\mathfrak{R}$: $g(\mathbf{z}, \infty) = u(\mathbf{z})$.

Через $\omega_k(z)$, $k = 1, \dots, p$, будем обозначать гармоническую меру (в точке $z \in D$) отрезка E_k относительно области D .

В терминах, связанных с римановой поверхностью $\mathfrak{R}$, для пси-функции Наттолла имеется следующее явное представление (см. [14; формула (30)]):

$$\Psi_n(\mathbf{z}) := \Psi_n(\mathbf{z}; \rho) = c_n \Phi(\mathbf{z})^{n-g} e^{A(\mathbf{z}, \rho)} \mathcal{F}_n(\mathbf{z}, \rho), \quad \mathbf{z} \in \mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}. \quad (18)$$

В формуле (18)

$$c_n = \sqrt{\prod_{j=1}^g (e_{2g+2} - z_j(n))} > 0,$$

где точки $z_j(n)$ — проекции точек $\mathbf{z}_j(n)$, которые являются решением задачи обращения Якоби (22). Функция

$$\Phi(\mathbf{z}) = e^{G(\mathbf{z}, \infty)} \quad (19)$$

— так называемая (многозначная) отображающая функция с однозначным модулем, $|\Phi(z^{(1)})| > 1$, $|\Phi(z^{(2)})| < 1$. Функция² $A(\mathbf{z}; \rho)$ задается представлением (см. [14; формула (31)])

$$A(\mathbf{z}; \rho) = W(\mathbf{z}) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{\log \rho(x)}{z - x} \frac{dx}{W^+(x)} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g v_k \int_{E_k} \frac{1}{x - z} \frac{dx}{W^+(x)} \right\}, \quad (20)$$

где $z \notin E$, $v_k := v_k(\rho) = 2 \int_E \log \rho(x) d\Omega_k^+(x)$, точки $z_j = z_j(n)$ — решения задачи обращения Якоби (22). Функция $\mathcal{F}_n(\mathbf{z}; \rho)$ также многозначна в D и имеет следующее представление:

$$\mathcal{F}_n(\mathbf{z}; \rho) = \exp \left[\sum_{j=1}^g \Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; \mathbf{z}) + 2\pi i \sum_{k=1}^g \theta_k \Omega_k(\mathbf{z}) \right], \quad (21)$$

где $\Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; \mathbf{z})$ — интеграл от a -нормированного абелева дифференциала третьего рода, $\theta_k = \theta_k(n) = \ell_k(n) + \{(n - g)\omega_k(\infty)\}$, $\ell_k(n)$ — целые числа, а дивизор $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$, $\mathbf{z}_j = \mathbf{z}_j(n)$, является (единственным) решением задачи обращения Якоби

$$\sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) \equiv -\frac{i}{\pi} \int_E \log \rho(x) d\Omega_k^+(x) - \sum_{j=1}^g \left\{ \left(n - g + \frac{1}{2} \right) \omega_j(\infty) \right\} B_{kj}, \quad (22)$$

$$k = 1, \dots, g$$

²Здесь на каждом отрезке E_k выбирается ветвь логарифма, соответствующая значению аргумента на $(-\pi, \pi]$.

(здесь знак $\equiv$ обозначает сравнение по модулю a - и b -периодов; $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть соответствующего числа). Отметим, что целые числа $\ell_k(n)$, $k = 1, \dots, g$, возникают в (21) в связи с неоднозначностью абелевых интегралов $\Omega_k(\mathbf{z})$ для $\mathbf{z} \in \partial\tilde{\mathfrak{R}}$ при интегрировании по путям, лежащим в $\tilde{\mathfrak{R}}$; $\tilde{\mathfrak{R}}$ – рассеченная риманова поверхность $\mathfrak{R}$ (подробнее см. [14; приложения А и В]). Подчеркнем, что при заданном условии положительности веса $\sigma(x) := i\rho(x)/(W^+(x))$ при любом $n \geq g$ точки $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g$, удовлетворяющие системе (22), таковы, что соответствующие точки $z_j(n) = \text{proj } \mathbf{z}_j(n)$ лежат в лакунах между отрезками E_j : $z_j(n) \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$, $j = 1, 2, \dots, g$ (см. [14; приложение В, п. 5]). Тем самым, при любом $n \geq g$ дивизор $d(n) = \mathbf{z}_1(n) + \dots + \mathbf{z}_g(n)$ является неспециальным и, следовательно, решение соответствующей задачи обращения Якоби (22) всегда единственно. Этот факт не зависит от того, является вес σ переменным или нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Ключевую роль в доказательстве будет играть следующее утверждение о представлении пси-функции на первом листе $\Psi_n(z^{(1)}) = \Psi_n(z^{(1)}; \rho_n)$ через логарифмический потенциал V^λ равновесной меры $\lambda = \lambda_{Q,E}$ (см. (3)). Для фиксированной точки $\zeta \in D$ будем обозначать через $g(z, \zeta) = g_D(z, \zeta)$ функцию Грина области D с особенностью в точке $z = \zeta$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для пси-функции на первом листе $D^{(1)}$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$ вне ее нулей в точках z_j , $j \in \{1, \dots, g\}$, и особенности в точке $z = \infty$ справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned} \text{Re } \log \Psi_n(z^{(1)}) &= n(\gamma - V^\lambda(z)) + \text{Re } A(z; \text{sign } p_g) \\ &+ \sum_{j=1}^g \pm \frac{1}{2} g(z, z_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g g(z, \xi_j) - \frac{1}{2} \log |p_g(z)| + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g \log |z - z_j| + \frac{c}{2}, \end{aligned} \quad (23)$$

где функция $A(z; \text{sign } p_g)$ задана представлением (20); $z_j = z_j(n)$ – проекции нулей функции $\Psi_n(\mathbf{z})$; знак плюс перед $\frac{1}{2}g(z, z_j)$ выбирается, если $\mathbf{z}_j \in D^{(2)}$, а знак минус, если $\mathbf{z}_j \in D^{(1)}$; ξ_j – нули многочлена $p_g(z)$; $c = c(n) = -\sum_{j=1}^g \log(e_{2g+2} - z_j)$; наконец, знак ' у суммы означает, что при суммировании не учитываются те индексы $j \in \{1, \dots, g\}$, для которых соответствующая точка z_j совпала с краем лакуны.

Доказательство утверждения 1 приведено в п. 3.1. Рассмотрим функцию $1/(\Psi_n(z^{(1)})^2 \rho_n(z))$. Применяя полученное в утверждении 1 выражение (23) для $\text{Re } \log \Psi_n(z^{(1)})$ и учитывая, что $\rho_n(z) = e^{-2nQ(z)} p_g(z)$, мы получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Psi_n(z^{(1)})^2 \rho_n(z)} \right| &= \exp\{2n(V^\lambda(z) + \text{Re } Q(z) - \gamma)\} \\ &\times \exp\left\{-2 \text{Re } A(z; \text{sign } p_g) + \sum_{j=1}^g \mp g(z, z_j) + \sum_{j=1}^g g(z, \xi_j) - \sum_{j=1}^g \log |z - z_j| - c\right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Поведение первого множителя в этом выражении описывается следующим утверждением.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Существует такая система непересекающихся окрестностей U_j отрезков E_j , $j = 1, \dots, g + 1$, что для любой системы простых непересекающихся контуров $\Delta = \bigsqcup_{j=1}^{g+1} \Delta_j$ такой, что Δ_j лежит в U_j и охватывает отрезок E_j , выполнено*

$$Y(z) := V^\lambda(z) + \operatorname{Re} Q(z) - \gamma < c(\Delta) < 0 \quad \text{при } z \in \Delta,$$

где $c(\Delta)$ – константа, зависящая только от системы контуров Δ .

Доказательство утверждения 2 приведено в п. 3.2.

Окрестности U_j из утверждения 2 выберем в качестве окрестностей, существование которых утверждается в лемме 1. Последовательность систем контуров Γ^n нужно выбирать так, чтобы контуры Γ_j^n были равномерно отделены от точек $z_j = z_j(n)$ и всех точек ξ_k , $k = 1, \dots, g$. При таком выборе систем контуров Γ^n второй сомножитель в формуле (24) будет равномерно ограничен на Γ^n , а первый, как отмечалось выше, будет экспоненциально убывать. Более того, так как функция $Y(z)$ гармонична в $U_j \setminus E$, то по принципу максимума $c(\Gamma^n) < \max(c(\Gamma), c(\tilde{\Gamma}))$, поэтому можно выбрать $\delta = \max(c(\Gamma), c(\tilde{\Gamma}))$. Тем самым, для завершения доказательства леммы 1 остается доказать утверждения 1 и 2.

§ 3. Доказательство утверждений 1 и 2

3.1. Доказательство утверждения 1. Рассмотрим функцию

$$\Xi_n(\mathbf{z}) = \operatorname{Re} \log \Psi_n(\mathbf{z}) - \operatorname{Re} A(\mathbf{z}; \operatorname{sign} p_g).$$

(Вычитание функции $\operatorname{Re} A(\mathbf{z}; \operatorname{sign} p_g)$ связано с тем, что функция $\rho_n(x)$ меняет знак на отрезках E_j : $\rho_n = |\rho_n| \operatorname{sign} p_g$.)

Заметим, что $\operatorname{Re} \log \Psi_n(\mathbf{z}) = \log |\Psi_n(\mathbf{z})|$ – однозначная гармоническая функция на $\mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$ вне дивизора пси-функции. Так как пси-функция $\Psi_n(\mathbf{z})$ решает краевую задачу Римана из § 1, то функция $\operatorname{Re} \log \Psi_n(\mathbf{z})$ решает аддитивную краевую задачу на гармоническую вне дивизора Ψ_n функцию на $\mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \log \Psi_n^{(1)}(\mathbf{x}) - \operatorname{Re} \log \Psi_n^{(2)}(\mathbf{x}) &= -\operatorname{Re} \log \rho_n(x) \\ &= 2nQ(x) - \operatorname{Re} \log p_g(x), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (25)$$

с логарифмическими особенностями в точках дивизора Ψ_n . Следовательно, функция $\Xi(\mathbf{z})$ решает задачу

$$\begin{aligned} \Xi_n^{(1)}(\mathbf{x}) - \Xi_n^{(2)}(\mathbf{x}) &= \operatorname{Re} A^{(1)}(x; \operatorname{sign} p_g) - \operatorname{Re} A^{(2)}(x; \operatorname{sign} p_g) + 2nQ(x) \\ &\quad - \operatorname{Re} \log p_g(x), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (26)$$

с теми же особенностями. Мы покажем, что предельные значения функции $\Xi_n(z^{(1)})$ на первом листе на разрезах E_j сверху и снизу совпадают, и выразим их через правую часть соотношения (26). После этого, используя соотношение равновесия (3) $V^\lambda(x) + Q(x) = \gamma$, $x \in E$, мы в терминах равновесной меры

построим гармоническую функцию на плоскости с такими же предельными значениями на E и теми же особенностями.

Из формулы (18) получаем, что для $\mathbf{z} \in \mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$ вне дивизора $\Psi_n(\mathbf{z})$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \log \Psi_n(\mathbf{z}) &= \log c_n + (n - g) \operatorname{Re} G(\mathbf{z}, \infty) + \operatorname{Re} A(\mathbf{z}; \rho_n) \\ &+ \sum_{j=1}^g \operatorname{Re} \Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; \mathbf{z}) - 2\pi \sum_{k=1}^g \theta_k \operatorname{Im} \Omega_k(\mathbf{z}). \end{aligned} \quad (27)$$

Учитывая, что $A(\mathbf{z}; \rho_n) = A(\mathbf{z}; |\rho_n|) + A(\mathbf{z}; \operatorname{sign} p_g)$, получаем

$$\begin{aligned} \Xi_n(\mathbf{z}) &= \log c_n + (n - g) \operatorname{Re} G(\mathbf{z}, \infty) + \operatorname{Re} A(\mathbf{z}; |\rho_n|) \\ &+ \sum_{j=1}^g \operatorname{Re} \Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; \mathbf{z}) - 2\pi \sum_{k=1}^g \theta_k \operatorname{Im} \Omega_k(\mathbf{z}). \end{aligned} \quad (28)$$

Заметим, что по определению функции $G(\mathbf{z}, \infty)$, $\Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; \mathbf{z})$ и $\Omega_k(\mathbf{z})$ многозначны на $\mathfrak{R}$: имеют нетривиальные a - и b -периоды и, более того, функции $G(\mathbf{z}, \infty)$ и $\Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; \mathbf{z})$ имеют нетривиальные полярные периоды (см. [20; п. 10.3]). Но так как вычеты дифференциалов $dG(\mathbf{z}, \infty)$ и $d\Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; \mathbf{z})$ вещественные, то эти полярные периоды чисто мнимые, поэтому в вещественные части соответствующих функций вкладов не дают.

Вещественная часть комплексной функции Грина $G(\mathbf{z}, \infty)$ есть вещественная функция Грина $g(\mathbf{z}, \infty)$, однозначная на римановой поверхности. В выражении (18) для пси-функции интегралы $\Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; \mathbf{z})$ и $\Omega_k(\mathbf{z})$ берутся по путям, лежащим в рассеченной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ (разрезы берутся по a - и b -циклам; подробнее см. [14; приложения А и В]). Тем самым, ограничения указанных функций на первый лист $D^{(1)}$ (или второй лист $D^{(2)}$) представляют собой функции, имеющие только полярные периоды и скачки на b -разрезах, равные a -периодам соответствующих дифференциалов. Так как дифференциал $d\Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; \mathbf{z})$ a -нормирован, то он не имеет a -периодов. Поскольку a -периоды дифференциалов $\Omega_k(\mathbf{z})$ вещественны:

$$\oint_{\mathbf{a}_j} d\Omega_k = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, g,$$

то мнимые части $\operatorname{Im} \Omega_k(\mathbf{z})$ — однозначные функции в $D^{(1)}$. Функция $A(\mathbf{z}; \rho)$ по определению однозначна на $\mathfrak{R}$ для любой плотности ρ . Итак, все функции, входящие в представление (28) для $\Xi_n(\mathbf{z})$, — однозначные функции в $\mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$.

Покажем, используя представление (28), что предельные значения функции $\Xi_n(z)$ на первом листе на разрезах E_j сверху $\Xi_n^+(x)$ и снизу $\Xi_n^-(x)$ совпадают (считаем $z = z^{(1)} \in D^{(1)}$).

1) Предельные значения функции $g(z, \infty) = \operatorname{Re} G(z, \infty)$ на E равны нулю по определению функции Грина.

2) Применим к функции $A(z; \rho)/W(z)$ (для произвольного ρ) формулу Сохоцкого–Племеля. Получим

$$\left(\frac{A(x; \rho)}{W(x)} \right)^+ - \left(\frac{A(x; \rho)}{W(x)} \right)^- = -\frac{\log \rho(x)}{W^+(x)} + \frac{v_k(\rho)}{W^+(x)},$$

$$\begin{aligned}
x \in E_k, \quad v_k(\rho) &= 2 \int_E \log \rho(x) d\Omega_k^+(x), \quad k = 1, \dots, g+1, \quad v_{g+1} = 0, \\
\left(\frac{A(x; \rho)}{W(x)} \right)^+ + \left(\frac{A(x; \rho)}{W(x)} \right)^- &= \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_E \frac{-\log \rho(t)}{(t-x)W^+(t)} dt \\
&+ \sum_{k=1}^g \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{E_k} \frac{v_k(\rho)}{(t-x)W^+(t)} dt, \quad x \in E.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$A^+(x; \rho) + A^-(x; \rho) = -\log \rho(x) + v_k(\rho), \quad x \in E_k, \quad k = 1, \dots, g+1; \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
A^+(x; \rho) - A^-(x; \rho) &= W^+(x) \left(\frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_E \frac{-\log \rho(t)}{(t-x)W^+(t)} dt \right. \\
&\left. + \sum_{k=1}^g \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{E_k} \frac{v_k(\rho)}{(t-x)W^+(t)} dt \right), \quad x \in E.
\end{aligned}$$

Так как $\log |\rho_n|$ – вещественная функция и $v_k(\rho_n)$ вещественны, то

$$A^+(x; |\rho_n|) + A^-(x; |\rho_n|) \in \mathbb{R}, \quad A^+(x; |\rho_n|) - A^-(x; |\rho_n|) \in i\mathbb{R},$$

а значит,

$$\operatorname{Re} A^+(|\rho_n|; x) = \operatorname{Re} A^-(|\rho_n|; x).$$

3) Для дифференциала $d\Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, \mathbf{z})$ имеется явное представление (см. [14; формула (B.3)])

$$\begin{aligned}
d\Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; \mathbf{z}) &= \frac{W(\mathbf{z}) + W(\mathbf{z}_j)}{z - z_j} \frac{dz}{2W(\mathbf{z})} + p(z) \frac{dz}{2W(\mathbf{z})} \\
&= \frac{dz}{2(z - z_j)} + \left(\frac{W(\mathbf{z}_j)}{z - z_j} + p(z) \right) \frac{dz}{2W(\mathbf{z})}, \quad (30)
\end{aligned}$$

где $p(z)$ – фиксированный (не зависящий от $\mathbf{z}_j$) полином степени g с вещественными коэффициентами. Как было показано ранее, вещественные части $\operatorname{Re} \Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; \mathbf{z})$ не зависят от пути интегрирования, поэтому при вычислении $\operatorname{Re} \Omega^\pm(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; x)$ мы будем выбирать комплексно сопряженные пути.

Поскольку $W(z^{(1)}) = \sqrt{\prod_{k=1}^{2g+2} (z - e_j)}$, где числа e_j вещественны, то $W(\bar{z}) = \overline{W(z)}$. Заметим также, что $W(\mathbf{z}_j) \in \mathbb{R}$ (так как $z_j \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$). Поэтому $\operatorname{Re} \Omega^+(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; x) = \operatorname{Re} \Omega^-(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; x)$, $x \in E$.

4) Так как $d\Omega_k(\mathbf{z}) = s_k(z)/W(\mathbf{z}) dz$, где $s_k(z)$ – полином степени $g-1$ с мнимыми коэффициентами, то, опять выбирая комплексно сопряженные пути интегрирования, мы получаем, что $\operatorname{Im} \Omega_k^+(x) = \operatorname{Im} \Omega_k^-(x)$, $x \in E$.

Итак, $\Xi_n^+(x) = \Xi_n^-(x)$. Теперь найдем выражение для суммы $\Xi_n^+(x) + \Xi_n^-(x)$.

Напомним, что $\Xi_n(\mathbf{z}) = \operatorname{Re} \log \Psi_n(\mathbf{z}) - \operatorname{Re} A(\mathbf{z}; \operatorname{sign} p_g)$. Поскольку $\log \operatorname{sign} p_g$ есть или равная нулю, или чисто мнимая величина, а $v_k(\operatorname{sign} p_g) \in i\mathbb{R}$, то из формулы (29) следует, что $\operatorname{Re} A^+(x; \operatorname{sign} p_g) + \operatorname{Re} A^-(x; \operatorname{sign} p_g) = 0$, $x \in E$. Поэтому

$$\Xi_n^+(x) + \Xi_n^-(x) = \operatorname{Re} \log \Psi_n^+(x) + \operatorname{Re} \log \Psi_n^-(x), \quad x \in E. \quad (31)$$

Теперь выразим сумму $\operatorname{Re} \log \Psi_n^+(x) + \operatorname{Re} \log \Psi_n^-(x)$ предельных значений функции $\operatorname{Re} \log \Psi_n(z^{(1)})$ на первом листе на E через ее скачок

$$\operatorname{Re} \log \Psi_n^{(1)}(\mathbf{x}) - \operatorname{Re} \log \Psi_n^{(2)}(\mathbf{x})$$

на $\mathcal{L}$ на римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Изучим каждое из слагаемых, входящих в формулу (27), в отдельности.

1) Так как $\operatorname{Re} G(\mathbf{x}, \infty) = g(\mathbf{x}, \infty) = 0$ на $\mathcal{L}$, то

$$\operatorname{Re} G^+(x, \infty) + \operatorname{Re} G^-(x, \infty) = 0 = \operatorname{Re} G^{(1)}(\mathbf{x}, \infty) - \operatorname{Re} G^{(2)}(\mathbf{x}, \infty), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}.$$

2) Поскольку $W(z^{(1)}) = -W(z^{(2)})$, то (см. (20)) для любой ρ (а в частности, для ρ_n) $A(z^{(1)}; \rho) = -A(z^{(2)}; \rho)$. Значит,

$$A^+(x; \rho) + A^-(x; \rho) = A^{(1)}(\mathbf{x}; \rho) - A^{(2)}(\mathbf{x}; \rho).$$

3) Изучим предельные значения интегралов $\Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, \mathbf{z})$. Так как все a -периоды $d\Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, \mathbf{z})$ равны нулю, то $\Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, \mathbf{z})$ имеет только чисто мнимые полярные периоды в точках $\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}$ на $\mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$. Положим

$$\tilde{\Omega}(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, \mathbf{z}) = \Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, \mathbf{z}) - \frac{1}{2} \int_{e_{2g+2}}^z \frac{d\xi}{\xi - z_j}.$$

Используя явное выражение (30) для $d\Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, \mathbf{z})$ и снова учитывая, что $W(z^{(1)}) = -W(z^{(2)})$, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}^+(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, x) + \tilde{\Omega}^-(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, x) &= \tilde{\Omega}^{(1)}(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, \mathbf{x}) - \tilde{\Omega}^{(2)}(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, \mathbf{x}) + ic_1 \\ &= \Omega^{(1)}(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, \mathbf{x}) - \Omega^{(2)}(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, \mathbf{x}) + ic_2, \end{aligned} \quad (32)$$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Значит,

$$\begin{aligned} \Omega^+(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, x) + \Omega^-(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, x) &+ ic_3 \\ &= \Omega^{(1)}(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, \mathbf{x}) - \Omega^{(2)}(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, \mathbf{x}) + \int_{e_{2g+2}}^x \frac{d\xi}{\xi - z_j} + ic_4. \end{aligned} \quad (33)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Omega^+(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, x) + \operatorname{Re} \Omega^-(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, x) \\ = \operatorname{Re} \Omega^{(1)}(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, \mathbf{x}) - \operatorname{Re} \Omega^{(2)}(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}, \mathbf{x}) + \log |x - z_j| - \log(e_{2g+2} - z_j). \end{aligned} \quad (34)$$

4) Как уже отмечалось, $\operatorname{Im} \Omega_k(\mathbf{z})$ — однозначная функция на $\mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$. Опять используя явное выражение для дифференциала $d\Omega_k$: $d\Omega_k(\mathbf{z}) = s_k(z)/W(\mathbf{z}) dz$, где $s_k(z)$ — полином степени $g-1$, и учитывая, что $W(z^{(1)}) = -W(z^{(2)})$, получаем

$$\operatorname{Im} \Omega_k^+(x) + \operatorname{Im} \Omega_k^-(x) = \operatorname{Im} \Omega_k^{(1)}(\mathbf{x}) - \operatorname{Im} \Omega_k^{(2)}(\mathbf{x}).$$

Итак, суммируя все вышеизложенное, получаем

$$\operatorname{Re} \log \Psi_n^+(x) + \operatorname{Re} \log \Psi_n^-(x) = \operatorname{Re} \log \Psi_n^{(1)}(\mathbf{x}) - \operatorname{Re} \log \Psi_n^{(2)}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^g \log |x - z_j| + c,$$

где $c = -\sum_{j=1}^g \log(e_{2g+2} - z_j)$. Учитывая соотношения (25) и (31), находим

$$\Xi_n^+(x) + \Xi_n^-(x) = -\operatorname{Re} \log \rho_n(x) + \sum_{j=1}^g \log |x - z_j| + c. \quad (35)$$

Поскольку предельные значения $\Xi_n^+(x)$ и $\Xi_n^-(x)$ на E равны, получаем для них окончательное выражение

$$\Xi_n^\pm(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \log \rho_n(x) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g \log |x - z_j| + \frac{c}{2}. \quad (36)$$

Так как на первом листе $\Xi_n(z) = \operatorname{Re} \log \Psi_n(z^{(1)}) - \operatorname{Re} A(z; \operatorname{sign} p_g)$, где функция $A(z; \operatorname{sign} p_g)$ голоморфна в D по построению (20) (подробнее см. [14]), а функция $\log \Psi_n(z^{(1)})$ голоморфна в D вне дивизора $\Psi_n(z^{(1)})$, то $\Xi_n(z)$ — гармоническая функция в D вне дивизора $\Psi_n(z^{(1)})$, имеющая логарифмические особенности в точках дивизора $\Psi_n(z^{(1)})$ того же вида, что и $\operatorname{Re} \log \Psi_n(z^{(1)})$, а именно $\Xi_n(z) \approx n \log |z|$ при $z \rightarrow \infty$ и $\Xi_n(z) \approx \log |z - z_j|$ в точках z_j , являющихся проекциями только тех нулей $\mathbf{z}_j = \mathbf{z}_j(n)$ функции $\Psi_n(\mathbf{z})$, которые лежат на первом листе римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Тем самым, мы имеем следующую краевую задачу на гармоническую функцию $\Xi_n(z)$:

- 1) Ξ_n гармонична в $D \setminus (\{z_j : \mathbf{z}_j \in D^{(1)}\} \cup \{\infty\})$;
 - 2) $\Xi_n(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \log \rho_n(x) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g \log |x - z_j| + \frac{c}{2}$, $x \in E \setminus \{z_j : z_j \in E\}$;
- функция $\Xi_n(z) - \frac{1}{2} \sum_{j: z_j \in E} \log |z - z_j|$ равномерно непрерывна по $z \in U \setminus E$, где U — некоторая окрестность E ;
- 3) $\Xi_n(z) \approx n \log |z|$, $z \rightarrow \infty$, и $\Xi_n(z) \approx \log |z - z_j|$, $z \rightarrow z_j$, в точках z_j , для которых $\mathbf{z}_j \in D^{(1)}$.

Поскольку $\operatorname{Re} \log \rho_n(x) = \log |p_g(x)| - 2nQ(x)$, то функция

$$\tilde{\Xi}_n(z) := \Xi_n(z) + \frac{1}{2} \log |p_g(z)| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g \log |z - z_j| - \frac{c}{2} \quad (37)$$

является решением следующей краевой задачи. Обозначим нули многочлена $p_g(z)$, имеющего по одному нулю в каждой лакуне, через ξ_j , $j = 1, \dots, g$, где $\xi_j \in (e_{2j}, e_{2j+1})$. Тогда:

- 1) $\tilde{\Xi}_n$ гармонична в $D \setminus (\{z_j, j = 1, \dots, g\} \cup \{\xi_j, j = 1, \dots, g\} \cup \{\infty\})$;
- 2) $\tilde{\Xi}_n(x) = nQ(x)$, $x \in E$;
- 3) $\tilde{\Xi}_n(z) \approx n \log |z|$, $z \rightarrow \infty$; $\tilde{\Xi}_n(z) \approx \pm \frac{1}{2} \log |z - z_j|$, $z \rightarrow z_j$, $j \in \{1, \dots, g\}$, причем знак плюс выбирается, если $\mathbf{z}_j \in D^{(1)}$, а знак минус, если $\mathbf{z}_j \in D^{(2)}$; $\tilde{\Xi}_n(z) \approx \frac{1}{2} \log |z - \xi_j|$, $z \rightarrow \xi_j$, $j = 1, \dots, g$.

Чтобы решить краевую задачу на функцию $\tilde{\Xi}_n(z)$, воспользуемся соотношением равновесия (3): $V^\lambda(x) + Q(x) = \gamma$, $x \in E$. Поэтому функция $V^\lambda(z) = -\int \log |z - t| d\lambda(t)$ гармонична в $D \setminus \{\infty\}$, $V^\lambda(z) \approx -\log |z|$, $z \rightarrow \infty$, и на E имеет предельные значения $V^\lambda(x) = \gamma - Q(x)$. Функция $n(\gamma - V^\lambda(z))$ также гармонична в $D \setminus \{\infty\}$ и имеет те же предельные значения на E и особенность в точке $z = \infty$, что и функция $\tilde{\Xi}_n(z)$. Следовательно, чтобы получить

выражение для функции $\tilde{\Xi}_n(z)$, достаточно добавить к функции $n(\gamma - V^\lambda(z))$ недостающие логарифмические особенности функции $\tilde{\Xi}_n(z)$, не изменив при этом ее предельных значений на E . Мы сделаем это с помощью добавления соответствующих функций Грина $g(z, \zeta)$ области D с особенностями в точках ζ , выбирая $\zeta = z_j, \xi_j$.

Итак,

$$\tilde{\Xi}_n(z) = n(\gamma - V^\lambda(z)) + \sum_{j=1}^g{}' \pm \frac{1}{2} g(z, z_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g g(z, \xi_j),$$

где знак плюс выбирается, если $\mathbf{z}_j \in D^{(2)}$, а знак минус, если $\mathbf{z}_j \in D^{(1)}$; знак $'$ у суммы означает, что при суммировании не учитываются те индексы $j \in \{1, \dots, g\}$, для которых соответствующая точка z_j совпала с краем лакуны. Поэтому из определения функции $\tilde{\Xi}_n$ (37) получаем

$$\begin{aligned} \Xi_n(z) &= n(\gamma - V^\lambda(z)) + \sum_{j=1}^g{}' \pm \frac{1}{2} g(z, z_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g g(z, \xi_j) \\ &\quad - \frac{1}{2} \log |p_g(z)| + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g \log |z - z_j| + \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\Xi_n(\mathbf{z}) = \operatorname{Re} \log \Psi_n(\mathbf{z}) - \operatorname{Re} A(z; \operatorname{sign} p_g)$, получаем требуемую формулу (23).

Утверждение 1 доказано.

3.2. Доказательство утверждения 2. Сначала приведем схему доказательства.

Пусть $\mathcal{V}^\lambda(z) = - \int \log(z - t) d\lambda(t)$ – комплексный логарифмический потенциал равновесной меры λ . Функция $\mathcal{V}^\lambda(z)$ – многозначная функция в D с однозначной вещественной частью: $\operatorname{Re} \mathcal{V}^\lambda(z) = V^\lambda(z)$. Пусть

$$\mathcal{Y}(z) := \mathcal{V}^\lambda(z) + Q(z) - \gamma \quad (38)$$

– многозначная аналитическая функция в D с однозначной вещественной частью: $\operatorname{Re} \mathcal{Y}(z) = Y(z)$.

Напомним, что равновесная мера λ имеет вид

$$\lambda = \frac{h_2(x)}{W^+(x)} dx,$$

где $h_2(x)$ – голоморфная функция в окрестности E . Пусть $\bigsqcup_{j=1}^{g+1} \mathcal{V}_j$ – система непересекающихся окрестностей отрезков E_j такая, что h_2 голоморфна в $\mathcal{V}_j$.

1) Сначала мы покажем, что для функции $\mathcal{Y}(z)$ в окрестности $\mathcal{V}_j$ отрезка $E_j = [e_{2j-1}, e_{2j}]$ имеется интегральное представление

$$\mathcal{Y}(z) = i\pi \int_{e_{2j}}^z \frac{h_2(\xi)}{W(\xi)} d\xi + C_j, \quad (39)$$

где $C_j = -i\pi \sum_{k=j+1}^{g+1} \lambda(E_k)$. Равенство (39) понимается как равенство многозначных аналитических функций. Так как и функция $\mathcal{Y}(z)$, и интеграл $\int_{e_{2j}}^z \frac{h_2(\xi)}{W(\xi)} d\xi$ допускают аналитическое продолжение через отрезок E_j (конечно же, при этом продолжение, например, из верхней полуплоскости не совпадает со значениями функций в нижней полуплоскости), то равенство (39) понимается не только в $\mathcal{V}_j \setminus E_j$, но и для предельных значений на границе E_j .

Используя представление (39), мы покажем, что:

2) в любой внутренней точке $x \in \bigsqcup_{j=1}^{g+1} (e_{2j-1}, e_{2j})$ производные функции $Y(z)$ по нормальям к E отрицательны: $\partial Y / \partial n_{\pm} < 0$ (n_+ – нормаль в верхнюю полуплоскость, а n_- – в нижнюю);

3) для любого конца отрезка E_j , e_{2j-1} или e_{2j} , существует его окрестность O_{2j-1} или соответственно O_{2j} такая, что $Y(z) < 0$ при $z \in O_{2j-1} \setminus E_j$ и соответственно при $z \in O_{2j} \setminus E_j$.

Так как $Q(x)$ – полином с вещественными коэффициентами, то условие равновесия (3) означает, что $Y(x) = V^\lambda(x) + Q(x) - \gamma = 0$ при $x \in E$. Поэтому из свойств 2), 3) легко следует требуемое утверждение 2. Действительно, как отмечалось ранее, функция $\mathcal{Y}(z)$ аналитически продолжается из верхней полуплоскости Π_+ через интервалы (e_{2j-1}, e_{2j}) (обозначим это продолжение $\mathcal{Y}_+$), а также аналитически продолжается из нижней полуплоскости Π_- через эти интервалы (обозначим $\mathcal{Y}_-$). Следовательно, частные производные функции $Y(z)$ непрерывно продолжаются на интервалы (e_{2j-1}, e_{2j}) . Поэтому, так как

$$\frac{\partial Y}{\partial n_{\pm}}(x) = \pm \frac{\partial Y_{\pm}}{\partial y}(x)$$

(полагаем $Y_{\pm} = \operatorname{Re} \mathcal{Y}_{\pm}$ и считаем $z = x + iy$), в силу 2) для любой системы отрезков $\tilde{E} = \bigsqcup_{j=1}^{g+1} \tilde{E}_j$ такой, что $\tilde{E}_j \subset (e_{2j-1}, e_{2j})$, существует система окрестностей $u = \bigsqcup_{j=1}^{g+1} u_j$, $\tilde{E}_j \subset u_j$, такая, что $\frac{\partial Y}{\partial y}(z) < 0$ при $z \in u \cap \Pi_+$ и $\frac{\partial Y}{\partial y}(z) > 0$ при $z \in u \cap \Pi_-$. Учитывая, что $Y(x) = 0$ при $x \in E$, получаем, что $Y(z) < 0$ в $u \setminus E$. Дополняя систему окрестностей u для системы отрезков $\tilde{E} = \bigsqcup_{j=1}^{g+1} \tilde{E}_j$, достаточно близкой к $E = \bigsqcup_{j=1}^{g+1} E_j$, окрестностями O_{2j-1}, O_{2j} , получаем систему непересекающихся окрестностей $U = \bigsqcup_{j=1}^{g+1} U_j \supset E$ такую, что $Y(z) < 0$ при $z \in U \setminus E$. В силу непрерывности функции $Y(z)$ получаем требуемое утверждение 2.

Докажем п. 1). Как уже говорилось ранее, обе части равенства (39) являются многозначными аналитическими функциями в $\mathcal{V}_j \setminus E_j$, и их ветви голоморфно продолжаются через отрезки E_j , в частности непрерывно выходят на E_j . Поэтому для доказательства равенства (39) нам достаточно доказать равенство предельных значений надлежащим образом выбранных ветвей на некотором интервале границы. Мы сделаем это для предельных значений сверху $\mathcal{Y}_+(x)$, $x \in E_j$.

Так как $\operatorname{Re} \mathcal{Y}_+(x) = \operatorname{Re} \mathcal{Y}(x) = Y(x) = 0$ на E_j , то $\mathcal{Y}_+(x) = i \operatorname{Im} \mathcal{Y}_+(x)$. Поэтому (см. (38))

$$\mathcal{Y}_+(x) = -i \lim_{z \rightarrow x^+} \int_E \arg(z - t) d\lambda(t).$$

Выбирая ветвь аргумента со значениями в $[0, 2\pi)$, для $x \in (e_{2j-1}, e_{2j})$ получаем

$$\mathcal{Y}_+(x) = -i\pi \int_x^{e_{2j}} d\lambda(\xi) - i\pi \sum_{k=j+1}^{g+1} \lambda(E_k).$$

Обозначая $C_j = -i\pi \sum_{k=j+1}^{g+1} \lambda(E_k)$, получаем

$$\mathcal{Y}_+(x) = i\pi \int_{e_{2j}}^x \frac{h_2(\xi)}{W^+(\xi)} d\xi + C_j = \lim_{z \rightarrow x^+} i\pi \int_{e_{2j}}^z \frac{h_2(\xi)}{W(\xi)} d\xi + C_j$$

(в последнем интеграле выбирается путь интегрирования, лежащий в верхней полуплоскости). Тем самым, п. 1) доказан.

Докажем п. 2). Поскольку, как уже говорилось ранее, функция $\mathcal{Y}(z)$ аналитически продолжается как из верхней, так и из нижней полуплоскости через интервалы (e_{2j-1}, e_{2j}) (до функций $\mathcal{Y}_\pm$), то для вычисления нормальных производных $\frac{\partial Y}{\partial n_\pm}(x) = \pm \frac{\partial Y_\pm}{\partial y}(x)$ воспользуемся соотношениями Коши–Римана:

$$\frac{\partial Y_\pm}{\partial y} = \frac{\partial \operatorname{Re} \mathcal{Y}_\pm}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im} \mathcal{Y}_\pm}{\partial x}.$$

Используя представление (39), для $x \in \sqcup_{j=1}^{g+1} (e_{2j-1}, e_{2j})$ имеем

$$\frac{\partial \operatorname{Im} \mathcal{Y}_\pm}{\partial x}(x) = \pi \frac{h_2(x)}{W^\pm(x)} = \pm \pi \lambda'(x).$$

Так как $\lambda'(x) > 0$ (см. (4)), получаем свойство 2).

Докажем п. 3). Сначала покажем, что существует окрестность O_{2j} правого конца e_{2j} отрезка E_j такая, что $Y(z) < 0$ при $z \in O_{2j} \setminus E_j$. Используя представление (39), получаем

$$Y(z) = \operatorname{Re} \mathcal{Y}(z) = \operatorname{Re} i\pi \int_{e_{2j}}^z \frac{h_2(\xi)}{W(\xi)} d\xi. \quad (40)$$

Рассмотрим это представление для $z \rightarrow e_{2j}$. Представим функцию $W(z) = \sqrt{\prod_{k=1}^{2g+2} (z - e_k)}$ в виде

$$W(z) = \sqrt{(z - e_{2j-1})(z - e_{2j})} \times W_j(z), \quad (41)$$

где берется ветвь корня $\sqrt{(z - e_{2j-1})(z - e_{2j})} \sim z$ при $z \rightarrow \infty$, голоморфная в $\mathbb{C} \setminus E_j$, а

$$W_j(z) = \sqrt{\prod_{k=1}^{2j-2} (z - e_k) \prod_{k=2j+1}^{2g+2} (z - e_k)} \sim z^g$$

голоморфна в $\mathbb{C} \setminus (E \setminus E_j)$.

Так как равновесная (положительная) мера $d\lambda(x)$ равна $(h_2(x)/W^+(x)) dx$, где функция h_2 голоморфна и отлична от нуля на E , то функция $h_2(z)/W_j(z)$ голоморфна в окрестности E_j и

$$\frac{h_2(x)}{iW_j(x)} > 0 \quad \text{для любого } x \in E_j \quad (42)$$

(в частности, и при $x = e_{2j}$). Поэтому все коэффициенты ряда Тейлора функции $h_2(z)/(iW_j(z))$ в точке $z = e_{2j}$ вещественны. Представим в формуле (41) для $W(z)$ первый сомножитель в виде

$$\sqrt{(z - e_{2j-1})(z - e_{2j})} = \sqrt{z - e_{2j-1}} \sqrt{z - e_{2j}},$$

где корни $\sqrt{z - e_{2j-1}}$ и $\sqrt{z - e_{2j}}$ отображают $\mathbb{C} \setminus (-\infty, e_{2j-1}]$ и $\mathbb{C} \setminus (-\infty, e_{2j}]$ соответственно на правую полуплоскость. Тогда

$$\frac{h_2(z)}{W(z)} = \frac{h_3(z)}{\sqrt{z - e_{2j}}},$$

где функция

$$h_3(z) = \frac{h_2(z)}{\sqrt{z - e_{2j-1}} W_j(z)}$$

голоморфна в окрестности e_{2j} и (см. формулу (42)) $-ih_3(x) > 0$ для любого $x \in (e_{2j-1}, e_{2j}]$. Поэтому все коэффициенты ряда Тейлора функции $-ih_3(z)$ в точке $z = e_{2j}$ вещественны. Следовательно, из представления (40) в окрестности e_{2j} имеем

$$Y(z) = \operatorname{Re} i\pi \int_{e_{2j}}^z \frac{h_2(\xi)}{W(\xi)} d\xi = \operatorname{Re} i\pi \int_{e_{2j}}^z \frac{h_3(\xi)}{\sqrt{z - e_{2j}}} d\xi = \operatorname{Re} i\pi \sqrt{z - e_{2j}} h_4(z),$$

где $h_4(z)$ – голоморфная в окрестности e_{2j} функция, причем все коэффициенты ряда Тейлора функции

$$h_5(z) := -ih_4(z)$$

в точке $z = e_{2j}$ вещественны и, более того,

$$h_5(e_{2j}) = -ih_4(e_{2j}) = -ih_3(e_{2j}) > 0.$$

Итак, в окрестности e_{2j}

$$Y(z) = -\pi \operatorname{Re} \sqrt{z - e_{2j}} h_5(z). \quad (43)$$

Так как в формуле (43) все коэффициенты ряда Тейлора функции $h_5(z)$ вещественны, $h_5(e_{2j}) > 0$ и выбрана ветвь корня $\sqrt{z - e_{2j}}$, отображающая $\mathbb{C} \setminus (-\infty, e_{2j}]$ на правую полуплоскость, то отсюда следует существование требуемой окрестности O_{2j} точки e_{2j} ($Y(z) < 0$ при $z \in O_{2j} \setminus E_j$) (см. предложение, приведенное ниже).

Рассмотрим случай левого конца e_{2j-1} отрезка E_j . Опять представим функцию $W(z)$ в виде (41), но теперь представим корень $\sqrt{(z - e_{2j-1})(z - e_{2j})}$ в виде

$$\sqrt{(z - e_{2j-1})(z - e_{2j})} = \sqrt{z - e_{2j-1}} \sqrt{z - e_{2j}},$$

где корни $\sqrt{z - e_{2j-1}}$ и $\sqrt{z - e_{2j}}$ отображают $\mathbb{C} \setminus [e_{2j-1}, \infty)$ и $\mathbb{C} \setminus [e_{2j}, \infty)$ соответственно на верхнюю полуплоскость. Теперь

$$\frac{h_2(z)}{W(z)} = \frac{\tilde{h}_3(z)}{\sqrt{z - e_{2j-1}}},$$

где функция

$$\tilde{h}_3(z) = \frac{h_2(z)}{\sqrt{z - e_{2j}} W_j(z)}$$

голоморфна в окрестности e_{2j-1} (см. формулу (42)) и $\tilde{h}_3(x) > 0$ для любого $x \in [e_{2j-1}, e_{2j}]$. Поэтому все коэффициенты ее ряда Тейлора в точке $z = e_{2j-1}$ вещественны. Поскольку $h_2(x)/W^+(x) > 0$ на E_j , то

$$\operatorname{Re} i\pi \int_{e_{2j}}^{e_{2j-1}} \frac{h_2(\xi)}{W(\xi)} d\xi = 0.$$

Поэтому из (40) получаем, что

$$\begin{aligned} Y(z) &= \operatorname{Re} i\pi \int_{e_{2j-1}}^z \frac{h_2(\xi)}{W(\xi)} d\xi = \operatorname{Re} i\pi \int_{e_{2j-1}}^z \frac{\tilde{h}_3(\xi)}{\sqrt{z - e_{2j-1}}} d\xi \\ &= \operatorname{Re} i\pi \sqrt{z - e_{2j-1}} \tilde{h}_4(z), \end{aligned} \quad (44)$$

где функция $\tilde{h}_4(z)$ голоморфна в окрестности e_{2j-1} , причем все коэффициенты ряда Тейлора функции $\tilde{h}_4(z)$ в точке e_{2j-1} вещественны и $\tilde{h}_4(e_{2j-1}) > 0$. Заметим, что

$$\sqrt{z - e_{2j-1}} = i\sqrt{-(z - e_{2j-1})},$$

где корень слева отображает $\mathbb{C} \setminus [e_{2j-1}, \infty)$ на верхнюю полуплоскость, а корень справа отображает $\mathbb{C} \setminus (-\infty, e_{2j-1}]$ на правую полуплоскость. Поэтому из формулы (44), делая замену $\tilde{z} = -(z - e_{2j-1})$, получаем

$$Y(z) = -\pi \operatorname{Re} \sqrt{\tilde{z}} \tilde{h}_5(\tilde{z}),$$

где $\sqrt{\tilde{z}}$ отображает $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ на правую полуплоскость, а функция $\tilde{h}_5(\tilde{z}) = \tilde{h}_4(e_{2j-1} - \tilde{z})$ голоморфна в окрестности нуля, причем все коэффициенты ряда Тейлора функции $\tilde{h}_5(\tilde{z})$ в точке $\tilde{z} = 0$ вещественны и $\tilde{h}_5(0) > 0$. Далее снова используем наше предложение (см. ниже).

Тем самым, п. 3) утверждения 2 полностью доказан, а вместе с ним доказана лемма 1, а следовательно, и основная теорема 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в окрестности нуля и все коэффициенты ее разложения в ряд Тейлора в нуле $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ вещественны и $f(0) > 0$. Пусть $\sqrt{z}$ – ветвь корня, отображающая $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ на правую полуплоскость. Тогда существует окрестность нуля $O_0 : |z| < r_0$ такая, что для любого $z \in O_0 \setminus (-\infty, 0]$ выполнено

$$\operatorname{Re} \sqrt{z} f(z) > 0. \quad (45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = re^{i\varphi}$. Тогда, поскольку c_n вещественны, имеем

$$\operatorname{Re}(\sqrt{z}f(z)) = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \cos n\varphi - \sin \frac{\varphi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \sin n\varphi \right).$$

Так как $c_0 > 0$, то существует число $r_1 > 0$ (не зависящее от φ) такое, что при $r < r_1$ выполнено $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \cos n\varphi > c_0/2$. Поэтому при $|z| < r_1$

$$\operatorname{Re}(\sqrt{z}f(z)) > \sqrt{r} \left(\frac{c_0}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \sin n\varphi \right).$$

Положим $\varphi = \pi - \varepsilon$ при $\varphi \in [0, \pi)$ и $\varphi = -\pi + \varepsilon$ при $\varphi \in (-\pi, 0]$ ($\varepsilon \in (0, \pi]$). Тогда при $|z| < r_1$

$$\operatorname{Re}(\sqrt{z}f(z)) > \sqrt{r} \left(\frac{c_0}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2} - \cos \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n (-1)^{n-1} \sin n\varepsilon \right).$$

Поэтому

$$\operatorname{Re}(\sqrt{z}f(z)) > \sqrt{r} \left(\frac{c_0}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |\sin n\varepsilon| r^n \right). \quad (46)$$

Так как при $x \in [0, \pi/2]$ верно $\sin x \geq 2x/\pi$ и для любого $x > 0$ верно $|\sin x| < x$, то из (46) (с учетом того, что $\varepsilon/2 \in (0, \pi/2)$) следует

$$\operatorname{Re}(\sqrt{z}f(z)) > \sqrt{r} \left(\frac{c_0}{2} \frac{\varepsilon}{2} \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^n n\varepsilon \right) = \varepsilon \sqrt{r} \left(\frac{c_0}{2\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n| r^n \right).$$

Выбирая r_0 такое, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n| r_0^n < \frac{c_0}{4\pi}$$

и $r_0 \leq r_1$, получаем, что для любого $r < r_0$ выполняется $\operatorname{Re}(\sqrt{z}f(z)) > 0$. Таким образом, окрестность $|z| < r_0$ искомая.

Список литературы

- [1] А. В. Комлов, С. П. Суетин, “Асимптотическая формула для полиномов, ортонормированных относительно переменного веса”, Тр. ММО, **73**, МЦНМО, М., 2012, 175–200; англ. пер.: A. V. Komlov, S. P. Suetin, “An asymptotic formula for polynomials orthonormal with respect to a varying weight”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **2012**:2 (2012), 139–159.
- [2] А. В. Комлов, С. П. Суетин, “Формула Видома для старшего коэффициента полинома, ортонормированного относительно переменного веса”, *УМН*, **67**:1(403) (2012), 183–184; англ. пер.: A. V. Komlov, S. P. Suetin, “Widom’s formula for the leading coefficient of a polynomial which is orthonormal with respect to a varying weight”, *Russian Math. Surveys*, **67**:1 (2012), 183–185.
- [3] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **157**, 1981, 31–48; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “On the convergence of simultaneous Padé approximants for systems of functions of Markov type”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **157** (1983), 31–50.

- [4] P. D. Lax, C. D. Levermore, “The small dispersion limit of the Korteweg–de Vries equation. I”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **36**:3 (1983), 253–290.
- [5] P. D. Lax, C. D. Levermore, “The small dispersion limit of the Korteweg–de Vries equation. II”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **36**:5 (1983), 571–593.
- [6] P. D. Lax, C. D. Levermore, “The small dispersion limit of the Korteweg–de Vries equation. III”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **36**:6 (1983), 809–829.
- [7] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов”, *Матем. сб.*, **125(167)**:1(9) (1984), 117–127; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **53**:1 (1986), 119–130.
- [8] Е. А. Рахманов, “Об асимптотических свойствах многочленов, ортогональных на вещественной оси”, *Докл. АН СССР*, **261**:2 (1981), 282–284; англ. пер.: E. A. Rakhmanov, “On the asymptotic properties of polynomials that are orthogonal on the real axis”, *Soviet Math. Dokl.*, **24** (1981), 505–507.
- [9] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou, “Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **52**:11 (1999), 1335–1425.
- [10] P. Deift, *Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann–Hilbert approach*, Courant Lect. Notes Math., **3**, New York Univ., Courant Inst. Math. Sci., New York, NY; Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, viii+273 pp.
- [11] H. Widom, “Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane”, *Advances in Math.*, **3**:2 (1969), 127–232.
- [12] J. Nuttall, “Padé polynomial asymptotics from a singular integral equation”, *Constr. Approx.*, **6**:2 (1990), 157–166.
- [13] С. П. Суетин, “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций”, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 81–114; англ. пер.: S. P. Suetin, “Uniform convergence of Padé diagonal approximants for hyperelliptic functions”, *Sb. Math.*, **191**:9 (2000), 1339–1373.
- [14] С. П. Суетин, “Сравнительная асимптотика решений и формулы следов для некоторого класса разностных уравнений”, *Совр. пробл. матем.*, **6**, МИАН, М., 2006, 3–74; англ. пер.: S. P. Suetin, “Comparative asymptotic behavior of solutions and trace formulas for a class of difference equations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **272**:, suppl. 2 (2011), S96–S137.
- [15] А. И. Аптекарев, В. Ван Ассше, С. П. Суетин, “Скалярная задача Римана и сильная асимптотика аппроксимаций Паде и ортогональных многочленов”, *Препринты ИПМ*, 2001, 026.
- [16] Н. И. Ахиезер, “Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах”, *Докл. АН СССР*, **134**:1 (1960), 9–12; англ. пер.: N. I. Ahiezer, “Orthogonal polynomials on several intervals”, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 989–992.
- [17] Н. И. Ахиезер, “Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов”, *Докл. АН СССР*, **141**:2 (1961), 263–266; англ. пер.: N. I. Ahiezer, “Continuous analogues of orthogonal polynomials on a system of intervals”, *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 1409–1412.
- [18] F. Peherstorfer, “Zeros of polynomials orthogonal on several intervals”, *Int. Math. Res. Not.*, 2003, № 7, 361–385.
- [19] А. И. Аптекарев, W. Van Assche, “Scalar and matrix Riemann–Hilbert approach to the strong asymptotics of Padé approximants and complex orthogonal polynomials with varying weight”, *J. Approx. Theory*, **129**:2 (2004), 129–166.
- [20] Дж. Спрингер, *Введение в теорию римановых поверхностей*, ИЛ, М., 1960, 343 с.; пер. с англ.: G. Springer, *Introduction to Riemann surfaces*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1957, viii+307 pp.

- [21] Э. И. Зверович, “Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях”, *УМН*, **26**:1(157) (1971), 113–179; англ. пер.: E. I. Zverovich, “Boundary value problems in the theory of analytic functions in Hölder classes on Riemann surfaces”, *Russian Math. Surveys*, **26**:1 (1971), 117–192.
- [22] Б. А. Дубровин, “Тэта-функции и нелинейные уравнения”, *УМН*, **36**:2(218) (1981), 11–80; англ. пер.: B. A. Dubrovin, “Theta functions and non-linear equations”, *Russian Math. Surveys*, **36**:2 (1981), 11–92.
- [23] Е. М. Чирка, “Римановы поверхности”, Лекц. курсы НОЦ, **1**, МИАН, М., 2006, 3–105.

Александр Владимирович Комлов
(Aleksandr V. Komlov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: komlov@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
17.03.2014 и 23.06.2014

Сергей Павлович Суетин
(Sergey P. Suetin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: suetin@mi.ras.ru